

Algebra e Geometria per Informatica
Seconda Prova Parziale
10 dicembre 2010
Tema C

NOME E COGNOME:

MATRICOLA:

Si raccomanda di non scrivere nella tabella sottostante.

Es 1	Es 2	Es 3	Es 4	Es 5	Es 6	Es 7	Es 8	Tot

RISOLVERE CIASCUN ESERCIZIO SU UNA PAGINA NUOVA

1. Consideriamo la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & -2 & -4 \\ -1 & -2 & -3 & -1 \end{pmatrix}.$$

Determinare:

- (i) una base per il sottospazio $\text{row}(A)$ di \mathbb{R}^4 generato dalle righe di A ,
- (ii) una base per lo spazio nullo $\text{null}(A)$ di A ,
- (iii) una base per il sottospazio $\text{col}(A)$ di \mathbb{R}^4 generato dalle colonne di A .

2. Consideriamo l'insieme

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \text{ tale che } x_1 - x_2 - x_3 = 0 \right\}.$$

Dimostrare che W è un sottospazio di \mathbb{R}^3 . Inoltre, calcolare una base per W e una base per il suo complemento ortogonale W^\perp .

3. Dimostrare che la funzione

$$T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -x_1 + x_2 \\ x_1 + 2x_2 \end{pmatrix}$$

è un'applicazione lineare.

4. Consideriamo la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & -1 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Dire se 1 e -1 sono autovalori di A . Calcolare il polinomio caratteristico e gli autovalori di A . Per ogni autovalore, determinare una base del suo autospazio. Inoltre, mostrare che A è diagonalizzabile, e trovare una matrice invertibile P e una matrice diagonale D tali che $P^{-1}AP = D$.

5. Si completi la seguente definizione: "I vettori X_1, \dots, X_k di \mathbb{R}^n sono linearmente dipendenti se...".

Dire inoltre se i vettori $X_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $X_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$, $X_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix}$ di \mathbb{R}^3 sono linearmente dipendenti motivando la risposta.

6. Sia data la retta r di equazioni cartesiane

$$\begin{cases} 2x - y - 4z = 0 \\ 4x - y + 2z = 0 \end{cases}$$

Determinare equazioni parametriche di r . Dire se il punto P di coordinate $(3, 0, 1)$ appartiene alla retta r . Scrivere un'equazione cartesiana del piano π per P ortogonale ad r .

7. Sia dato il sottospazio U di \mathbb{R}^4

$$U = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \\ -6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle.$$

Determinare una base ortogonale di U e la dimensione di U . Dire se il

vettore $X = \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \\ 6 \\ 6 \end{bmatrix}$ appartiene ad U .

8. Siano $Y, Z \in \mathbb{R}^n$ due vettori non nulli. È vero che se $\langle Y \rangle^\perp = \langle Z \rangle^\perp$ allora $Y = Z$? (dimostrazione o controesempio!)