ESERCIZI SVOLTI A LEZIONE - SESTA SETTIMANA [*†]

ANDREA PAVAN

Lunedì 22 novembre

Esercizio 1. Indichiamo con V uno spazio vettoriale, e con U e W due sottospazi di V. Mostrare che se l'unione $U \cup W$ di U e W è sottospazio di V, allora U è contenuto in W oppure W è contenuto in U. *(Anche l'altra implicazione è vera.)*

Esercizio 2. Mostrare che

$$\left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \text{ tale che } x_1 + \cdots + x_n = 0 \right\}$$

è sottospazio di $\mathbb{R}^n$. *(Qui n è un intero positivo.)*

Esercizio 3. Indichiamo con V uno spazio vettoriale, e con u e v due vettori di V. Mostrare che se u e v sono linearmente indipendenti, anche $u + v$ e $u - v$ lo sono.

Esercizio 4. Mostrare che

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ e } \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

sono vettori di $\mathbb{R}^2$ linearmente indipendenti. Mostrare che anche

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ e } \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

lo sono. *(La seconda parte dell'esercizio può essere risolta con una verifica diretta oppure usando la prima parte assieme all'esercizio precedente.)*

Martedì 23 novembre

Esercizio 1. Mostrare che il sottospazio

$$\left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \text{ tale che } x_1 + x_2 + x_3 = 0 \right\}$$

di $\mathbb{R}^3$ è generato da

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ e } \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Infine, mostrare che i due vettori formano una base del sottospazio. *(Abbiamo già verificato nella lezione del giorno precedente che l'insieme di vettori che stiamo considerando è effettivamente un sottospazio. Per dimostrare l'indipendenza lineare dei due vettori, procedere con una verifica diretta.)*

---

[*] Corso di Algebra e geometria, Laurea in Informatica, Università degli Studi di Padova, a.a. 2010-2011.

[†] Versione di domenica 28 novembre 2010. Disponibile (nella versione più aggiornata) per tutta la durata del corso (e un po' oltre) all'indirizzo `http://www.math.unipd.it/~pan`.

Esercizio 2. Calcolare una base del sottospazio di $\mathbb{R}^4$ generato da

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ e } \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

(Usando il metodo visto assieme: (i) scrivere la matrice che ha per righe i generatori del sottospazio, (ii) ridurla in forma a scala e (iii) prendere per base le righe non nulle della matrice a scala ottenuta.)

Soluzione. Una base è formata da

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ e } \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Mercoledì 24 novembre

Esercizio 1. Consideriamo la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 \\ -2 & -2 & 3 & -3 \\ 1 & 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Calcolare una base dello spazio nullo e una base dell'immagine di A. *(Usando il metodo visto assieme: (i) ridurre A in una matrice a scala B, (ii) prendere come base dell'immagine le colonne di A i cui indici sono gli indici delle colonne di B che contengono un 1-dominante e (iii) prendere come base dello spazio nullo un insieme di soluzioni-base del sistema lineare omogeneo che ha B per matrice dei coefficienti. Come controllo, verificare che la somma del numero di vettori che compongono le due basi sia uguale al numero di colonne di A.)*

Soluzione. Una base per lo spazio nullo è formata da

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ e } \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Una base dell'immagine è

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ e } \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Giovedì 25 novembre

Esercizio 1. Consideriamo i vettori

$$x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad x_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad x_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad x_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

di $\mathbb{R}^4$, e indichiamo con W il sottospazio generato da x_1, x_2, x_3 e x_4. Trovare un sottoinsieme di $\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ che sia una base di W. *(Scrivere la matrice che ha per colonne i vettori x_1, x_2, x_3 e x_4 e ridurla in una matrice A in forma a scala; una base è formata dai vettori del tipo x_i, dove i è l'indice di una colonna di A che contiene un 1-dominante.)*

Soluzione. Una base è formata da x_1, x_2 e x_4.

Esercizio 2. Consideriamo la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Calcolare una base dello spazio nullo e una base dell'immagine di A.

Soluzione. Una base per lo spazio nullo è

$$\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Una base dell'immagine è formata da

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ e } \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$