ESERCIZI SVOLTI A LEZIONE - SETTIMA SETTIMANA *†

ANDREA PAVAN

Lunedì 29 novembre

Esercizio 1. Mostrare che
$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$
ammette una forma diagonale, e calcolarne una. *(Usando il metodo visto a lezione: (i) calcolare il polinomio caratteristico della matrice, (ii) usarlo per dedurre gli autovalori della matrice e (iii) per ogni autovalore, calcolare la sua molteplicità algebrica e geometrica, e verificare che coincidono.)*

Soluzione. Una forma diagonale è
$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 2. Mostrare che
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$
non ammette una forma diagonale.

Esercizio 3. Mostrare che
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$
ammette una forma diagonale *a coefficienti complessi*, e calcolarne una.

Soluzione. Una forma diagonale è
$$\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}.$$

Giovedì 2 dicembre

Esercizio 1. Poniamo
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ -3 & -2 & 3 \\ -3 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$
Mostrare che A è diagonale, e calcolare una matrice invertibile P e una matrice diagonale D tali che $P^{-1}AP = D$.

Soluzione. Possiamo scegliere
$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$
e (di conseguenza)
$$D = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

---

* Corso di Algebra e geometria, Laurea in Informatica, Università degli Studi di Padova, a.a. 2010-2011.

† Versione di lunedì 6 dicembre 2010. Disponibile (nella versione più aggiornata) per tutta la durata del corso (e un po' oltre) all'indirizzo `http://www.math.unipd.it/~pan`.

Esercizio 2. Calcolare una base dell'ortogonale del sottospazio

$$\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\rangle$$

di $\mathbb{R}^3$. *(Equivale a trovare un insieme di soluzione-base per il sistema lineare omogeneo la cui matrice dei coefficienti ha per righe i generatori del sottospazio.)*

Soluzione. Una base consiste del vettore

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$