

PRIMO COMPITINO - TRACCIA DI SOLUZIONE (PER IL TEMA A) ^{*†}

ANDREA PAVAN

Esercizio 1. (i) La matrice *completa* associata al sistema lineare (*) è

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 3 & -4 \\ -1 & -1 & 1 & -4 & 5 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ -2 & -2 & 2 & -7 & 9 \end{pmatrix}.$$

Applicando l'algoritmo di riduzione di Gauss, otteniamo che la matrice a scala *in forma ridotta* associata alla precedente è

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dunque, la matrice a scala ridotta associata alla matrice *dei coefficienti* del sistema lineare *omogeneo* che a sua volta è associato a (*) è

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Il sistema lineare omogeneo che ha S per matrice dei coefficienti è

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \\ x_4 = 0 \end{cases}.$$

L'unica incognita non-dominante è x_2 . Dunque un insieme di soluzioni-base per questo ultimo sistema ha un solo elemento; lo si può prendere uguale all'unica soluzione per la quale $x_2 = 1$, cioè il vettore-colonna

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Quindi tale vettore forma anche un insieme di soluzioni-base per il sistema lineare omogeneo associato a (*).

(ii) Di conseguenza, le soluzioni del sistema lineare omogeneo associato a (*) sono tutte e sole del tipo

$$s \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

per qualche valore del parametro s .

(iii) Il sistema lineare che ha R per matrice completa è

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_3 = 1 \\ x_4 = -1 \end{cases}.$$

^{*} Corso di Algebra e geometria, Laurea in Informatica, Università degli Studi di Padova, a.a. 2010-2011.

[†] Versione di domenica 12 dicembre 2010. Disponibile (nella versione più aggiornata) per tutta la durata del corso (e un po' oltre) all'indirizzo <http://www.math.unipd.it/~pan>.

Come soluzione particolare, si può prendere l'unica soluzione per cui $x_2 = 0$, cioè il vettore-colonna

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Quindi quest'ultimo è anche soluzione particolare per (*).

(iv) Ne segue che le soluzioni di (*) sono tutte e sole del tipo

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

per qualche scelta del parametro s .

Esercizio 2. Dimostriamo l'enunciato per induzione su n . In particolare, il caso base consiste nel verificare che, posto $n = 0$, abbiamo che $6^n - 1$ è divisibile per 5; il passo induttivo nel mostrare che, fissato un numero naturale n , se $6^n - 1$ è divisibile per 5, allora anche $6^{n+1} - 1$ lo è.

Il caso base è semplice, poichè $6^0 - 1 = 5$.

Per il passo induttivo, notiamo che

$$6^{n+1} - 1 = 6^{n+1} - 6 + 6 - 1 = 6(6^n - 1) + 5.$$

Il membro di destra della catena di uguaglianze è somma di due termini, entrambi i quali sono divisibili per 5; il primo lo è per ipotesi induttiva, il secondo perché ogni numero naturale è divisibile per sè stesso. Dunque l'intera somma è divisibile per 5, e anche $6^{n+1} - 1$ lo è.

Esercizio 3. Indichiamo con x_1 e x_2 due numeri interi, e supponiamo che $f(x_1) = f(x_2)$. Per definizione di f , ciò significa che

$$5x_1 + 1 = 5x_2 + 1.$$

Sottraendo 1 da entrambi i membri dell'uguaglianza, abbiamo che

$$5x_1 = 5x_2,$$

e di conseguenza che $x_1 = x_2$ per cancellabilità. Dunque f è iniettiva.

Inoltre, non esiste alcun numero intero n tale che $5n = -1$. Dunque $f(x) \neq 0$ per ogni intero x , e pertanto f non è suriettiva.

Poichè

$$g(5) = |5 - 4| = |1| = 1 = |-1| = |3 - 4| = g(3),$$

abbiamo che g non è iniettiva.

Fissato un numero naturale y , poniamo $x = y + 4$, il quale è un numero intero. Allora

$$g(x) = |y + 4 - 4| = |y| = y.$$

L'ultima uguaglianza della catena vale perchè y è un numero naturale, dunque è positivo. Ne segue che g è suriettiva.

Esercizio 4. Sommando alla seconda e alla terza riga di A la prima riga moltiplicata per 1 e per λ , rispettivamente, si ottiene la matrice a scala

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & \lambda - 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

La matrice A è invertibile se e solo se quest'ultima ha rango 3, cioè se e solo se $\lambda \neq 2$.

Poniamo ora

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Utilizzando l'algoritmo di riduzione di Gauss abbiamo che la matrice a scala in forma ridotta associata a B è

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

dunque per $\lambda = 0$ l'inversa di A è

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 5. Vale

$$\frac{1}{1+2i} = \frac{1}{|1+2i|} \overline{1+2i} = \frac{1}{5}(1-2i),$$

e

$$(3-2i)^2 + 2i = 9 - 4 - 12i + 2i = 5 - 10i = 5(1-2i),$$

dunque

$$\frac{(3-2i)^2 + 2i}{1+2i} = 5(1-2i) \frac{1}{5}(1-2i) = (1-2i)^2 = -3-4i.$$

Esercizio 6. Vale

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & x & y \\ 0 & 1 & z \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x & y \\ 1 & x+1 & y+z \\ 0 & 1 & z+1 \end{pmatrix}.$$

Dunque la matrice

$$X = \begin{pmatrix} 1 & x & y \\ 0 & 1 & z \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

soddisfa l'uguaglianza considerata se e solo se x , y e z sono soluzioni del sistema lineare

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \\ x+1 = 3 \\ y+z = 5 \\ z+1 = 3 \end{cases},$$

il quale ha per unica soluzione $x = 2$, $y = 3$ e $z = 2$. Pertanto abbiamo che

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 7. (a) Applicando l'algoritmo di Euclide esteso, abbiamo che il massimo comun divisore tra 168 e 87 è 3 e che

$$3 = 14 \cdot 168 + (-27) \cdot 87.$$

Notiamo che $12 = 4 \cdot 3$, dunque 3 divide 12 e pertanto la congruenza ammette (infinite) soluzioni. Inoltre

$$12 = 56 \cdot 168 + (-108) \cdot 87,$$

dunque una soluzione della congruenza è -108 . Infine, poichè

$$\frac{168}{3} = 56,$$

abbiamo che le soluzioni sono tutte e sole del tipo $-108 + 56k$ per qualche intero k .

(b) In particolare, le soluzioni comprese tra -100 e 100 sono -52 , 4 e 60 .

(c) Poichè la congruenza ammette soluzioni, il numero di soluzioni dell'equazione è uguale al massimo comun divisore tra 168 e 87, cioè 3.

Esercizio 8. L'intero 5 è soluzione di entrambe le congruenze

$$x \equiv 3 \pmod{2} \quad \text{e} \quad x \equiv 1 \pmod{4}.$$

Inoltre $3 \neq 1$, e 2 e 4 non sono primi tra loro.