

SECONDO COMPITINO - TRACCIA DI SOLUZIONE (PER IL TEMA A) ^{*†}

ANDREA PAVAN

Esercizio 1. La matrice a scala in forma ridotta associata ad A è

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(i) Una base per $\text{row}(A)$ è formata dalle righe non nulle di B , cioè i vettori-colonna

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

(ii) Una base per $\text{null}(A)$ è formata da un insieme di soluzioni-base per il sistema lineare omogeneo che ha B come matrice dei coefficienti, per esempio

$$\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(iii) Poichè i pivot di B sono nella prima e seconda colonna, una base per $\text{col}(A)$ è formata dalle prime due colonne di A , cioè i vettori-colonna

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 2. Abbiamo che W è formato dalle soluzioni del sistema lineare omogeneo

$$\{x_1 + x_2 - x_3 = 0,$$

la cui matrice dei coefficienti è

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Ne segue che W è sottospazio di $\mathbb{R}^3$. Inoltre, una base per W è formata da un insieme di soluzioni-base di tale sistema lineare, per esempio

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Infine, il complemento ortogonale di W è formata dal sottospazio $\text{row}(A)$ di $\mathbb{R}^3$ generato dalle righe di A . Dunque una sua base è

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

^{*} Corso di Algebra e geometria, Laurea in Informatica, Università degli Studi di Padova, a.a. 2010-2011.

[†] Versione di domenica 12 dicembre 2010. Disponibile (nella versione più aggiornata) per tutta la durata del corso (e un po' oltre) all'indirizzo <http://www.math.unipd.it/~pan>.

Esercizio 3. Consideriamo la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Allora per ogni $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ abbiamo che

$$T(\mathbf{x}) = A \cdot \mathbf{x}.$$

Dunque, dati $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^2$ abbiamo che

$$T(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = A \cdot (\mathbf{x} + \mathbf{y}) = A \cdot \mathbf{x} + A \cdot \mathbf{y} = T(\mathbf{x}) + T(\mathbf{y}).$$

Nella precedente catena di uguaglianze, quella centrale è vera per la distributività del prodotto matrici-vettori. Pertanto T conserva la somma di vettori. Analogamente, per ogni $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ e ogni scalare $k \in \mathbb{R}$,

$$T(k \cdot \mathbf{x}) = A \cdot (k \cdot \mathbf{x}) = k \cdot (A \cdot \mathbf{x}) = k \cdot T(\mathbf{x}),$$

dove l'uguaglianza centrale è vera per le note proprietà del prodotto matrici-vettori. Perciò T conserva anche il prodotto scalare-vettore, dunque è lineare.

Esercizio 4.

Esercizio 5. La definizione è:

“I vettori $X_1, \dots, X_k$ di $\mathbb{R}^n$ sono linearmente indipendenti se per ogni scelta degli scalari $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ tali che $\lambda_1 X_1 + \dots + \lambda_k X_k = \mathbf{0}$, si ha che $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ sono tutti uguali a zero.”

Nella definizione, $\mathbf{0}$ denota il vettore nullo di $\mathbb{R}^n$.

Indichiamo con A la matrice le cui colonne sono formate dai vettori X_1, X_2 e X_3 , cioè

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Sappiamo che i tre vettori sono linearmente indipendenti se e solo se A ha rango 3. Poichè la matrice a scala in forma ridotta associata ad A è

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

abbiamo che A ha rango 3, dunque X_1, X_2 e X_3 sono linearmente indipendenti.

Esercizio 6. Le equazioni cartesiane di r sono un sistema lineare Σ *omogeneo*, un cui insieme di soluzioni-base è formato dal vettore

$$\mathbf{d} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 10 \end{pmatrix}.$$

Dunque delle equazioni parametriche per la retta sono

$$\begin{cases} x = 3t \\ y = -t \\ z = 10t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Inoltre P non è soluzione di Σ , dunque P non appartiene alla retta. Infine, le equazioni cartesiane per π sono tutte e sole del tipo

$$ax + by + cz = d,$$

dove a, b, c e d sono numeri reali tali che

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \lambda \mathbf{d}$$

per qualche scalare $\lambda \in \mathbb{R}$ non nullo e il prodotto scalare

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \bullet P$$

è uguale a d . Si può prendere $a = 3$, $b = -1$, $c = 10$ e $d = 8$. Perciò un'equazione cartesiana per π è

$$3x + y + 10z = 8.$$

Esercizio 7.

Esercizio 8. Consideriamo i vettori

$$X = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad Y = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

di $\mathbb{R}^2$. In particolare, $X \neq Y$. Inoltre $\langle X \rangle = \langle Y \rangle$, dunque $\langle X \rangle^\perp = \langle Y \rangle^\perp$ – e si può verificare che questi ultimi complementi ortogonali sono entrambi uguali al sottospazio generato da

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$