ESERCIZI SVOLTI A LEZIONE - TERZA SETTIMANA [*][†]

ANDREA PAVAN

Martedì 2 novembre

Esercizio 1. Mostrare che per ogni numero naturale n,

$$\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}.$$

(Usando il principio di induzione.)

Esercizio 2. Mostrare che per ogni numero reale $a \geq -1$ e per ogni numero naturale n,

$$(1+a)^n \geq 1 + na.$$

(Questa è detta "disuguaglianza di Bernoulli".)

Esercizio (supplementare). Nella Wikipedia italiana, andare alla pagina "Principio d'induzione" e capire il paragrafo 6, "Errori e fraintendimenti".

Mercoledì 3 novembre

Esercizio 1. Mostrare che per ogni numero naturale n,

$$\sum_{k=0}^{n} k^3 = \left(\sum_{k=0}^{n} k\right)^2.$$

(Suggerimento: usare il primo esercizio di martedì 2 novembre.)

Esercizio 2. Mostrare che per ogni numero naturale $n \geq 1$ e ogni due numeri reali a e b,

$$a^n - b^n = (a-b)\sum_{k=0}^{n-1} a^{n-k-1} b^k.$$

Giovedì 4 novembre

Esercizio 1. Calcolare il massimo comun divisore d di 94 e 20 e due interi s e t tali che

$$d = s \cdot 94 + t \cdot 20.$$

(Usando l'algoritmo di Euclide esteso.)

Soluzione. Il massimo comun divisore è 2, e si può prendere $s = 3$ e $t = -14$.

Esercizio 2. Mostrare che la relazione $\sim$ su $\mathbb{R}^2$ definita da

$$(a,b) \sim (c,d) \text{ se e solo se esiste } 0 \neq s \in \mathbb{R} \text{ tale che } (a,b) = s(c,d),$$

è riflessiva, simmetrica e transitiva. *(Cioè $\sim$ è un'equivalenza.)*

[*] Corso di Algebra e geometria, Laurea in Informatica, Università degli Studi di Padova, a.a. 2010-2011.
[†] Versione di venerdì 12 novembre 2010. Disponibile (nella versione più aggiornata) per tutta la durata del corso (e un po' oltre) all'indirizzo `http://www.math.unipd.it/~pan`.