29

mercoledì 29 maggio 2019 08:30

S. PARMEGGIANI 29/5/2019

ALGEBRA E MATEMATICA DISCRETA (parte di Algebra)

Corso di laurea: Informatica

PROPRIETA' DEL POLINOMIO CARATTERISTICO

Siano $A = [a_{ij}]$ $n \times n$, $n \geq 2$

e $p_A(x) = \det(A - xI_n)$ il polinomio caratteristico di A

$\boxed{1}$ $\deg p_A(x) = n$

$\boxed{2}$ il coefficiente di x^n di $p_A(x)$ è $(-1)^n$

$\boxed{3}$ il coefficiente di x^{n-1} di $p_A(x)$ è

$$(-1)^{n-1}(\underbrace{a_{11}+a_{22}+a_{33}+\dots+a_{nn}})$$

la somma degli elementi diagonali di A,
si chiama LA TRACCIA di A
e si indica con $\mathrm{Tr}\,A$

Dunque il coefficiente di x^{n-1} di $p_A(x)$ è $(-1)^{n-1}\cdot \mathrm{Tr}(A)$

$\boxed{4}$ il termine noto di $p_A(x)$ è $\det A$

$\boxed{\text{N.B}}$ Per il teorema fondamentale dell'Algebra, ogni polinomio a coefficienti complessi si fattorizza in fattori di grado 1 a coefficienti complessi

Quindi se $\operatorname{Spec} A = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k\}$

($\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ sono gli AUTOVALORI DISTINTI di A)

$$p_A(x) = c\,(x-\lambda_1)^{m_1}(x-\lambda_2)^{m_2}\cdots(x-\lambda_k)^{m_k}$$

opportuna costante $c \in \mathbb{K}$

e $\boxed{\text{I}}$ $m_1+m_2+\dots+m_k =$ il grado di $p_A(x) = n$

proprietà $\boxed{1}$ del polinomio caratteristico

$$n = \sum_{i=1}^{k} m_i$$

$\boxed{\text{II}}$ m_i = MOLTEPLICITÀ ALGEBRICA DELL'AUTOVALORE λ_i

$\boxed{\text{III}}$ c = il coefficiente di x^n di $p_A(x) = (-1)^n$

proprietà $\boxed{2}$ del polinomio caratteristico

per cui $$p_A(x) = (-1)^n (x-\lambda_1)^{m_1}(x-\lambda_2)^{m_2}\cdots(x-\lambda_k)^{m_k}$$

TEOREMA Siano A $n\times n$ e λ un autovalore di A.

Se $d(\lambda)$ = molteplicità geometrica di λ

e $m(\lambda)$ = " algebrica di λ

si ha: $$\boxed{1 \le d(\lambda) \le m(\lambda)}$$

Gli autovalori di una matrice triangolare superiore (o triangolare inferiore) sono i suoi coefficienti diagonali

Lo provo per una matrice triangolare superiore (la dimostrazione per una triangolare inferiore è simile)

$$T = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} & \cdots & t_{1n-1} & t_{1n} \\ 0 & t_{22} & t_{23} & \cdots & t_{2n-1} & t_{2n} \\ 0 & 0 & t_{33} & \cdots & t_{3n-1} & t_{3n} \\ & & & \ddots & & \\ & 0 & & & t_{n-1\,n-1} & t_{n-1\,n} \\ & & & & & t_{nn} \end{bmatrix} \Rightarrow$$

gli autovalori di T sono: $t_{11}, t_{22}, t_{33}, \dots, t_{nn}$

<u>Dim</u> Gli autovalori di T sono gli zeri del polinomio caratteristico $P_T(x)$

$$P_T(x) = \det(T - xI_n) = \det \begin{bmatrix} t_{11}-x & t_{12} & \cdots & t_{1n} \\ & t_{22}-x & \cdots & t_{2n} \\ & 0 & \ddots & \\ & & & t_{nn}-x \end{bmatrix} =$$

$$= (t_{11}-x)(t_{22}-x)\cdots(t_{nn}-x)$$

$T - xI_n$ è una matrice triangolare ed il determinante di una triangolare è il prodotto degli elementi sulla diagonale (LEZIONE 28)

Gli autovalori di T sono le soluzioni dell'equazione:

$$(t_{11}-x)(t_{22}-x)\cdots(t_{nn}-x) = 0$$

e quindi sono: $t_{11}, t_{22}, \dots, t_{nn}$

In particolare, se $D = \begin{bmatrix} d_1 & & 0 \\ & d_2 & \\ 0 & & \ddots & d_n \end{bmatrix}$ è diagonale (e quindi è triangolare) gli autovalori di D sono: $d_1, d_2, \dots, d_n$

ESERCIZIO TIPO 17 (file: I19tipo17.pdf)

ESERCIZIO TIPO 18 (file: I19tipo18.pdf)

PER CASA: ESERCIZI 3, 4, 5, 6 (file: I19casaT12.pdf)