ALGEBRA LINEARE I (A) PER SCIENZE STATISTICHE, A.A. 2004/05, GEMMA PARMEGGIANI

Università degli Studi di Padova
Dipartimento di Matematica Pura e Applicata
via Belzoni, 7
35131 Padova

1. Programma

2. Esercizi tipo svolti

3. Esercitazioni a gruppi svolte

Typeset by $\mathcal{AMS}$-TEX

Programma del corso di Algebra Lineare I (A)

Il testo di riferimento è: Appunti di Algebra Lineare, Gregorio, Parmeggiani, Salce

06/12/04 Matrici. Esempi. Tipi particolari di matrici. Prodotto di una matrice per uno scalare. Somma di due matrici. Proprietà della somma e del prodotto per uno scalare. Prodotto di un vettore riga per un vettore colonna.

Dal libro: Da pag. 1 a pag. 6.

Esercizi per casa: Esercizio 1 delle Esercitazioni *1.

07/12/04 Prodotto righe per colonne di matrici. Esempi. Proprietà del prodotto righe per colonne. Premoltiplicazione e postmoltiplicazione per matrici diagonali. Il prodotto righe per colonne non è commutativo. Potenze di matrici. Trasposta e H-trasposta di una matrice. Esercizi.

Dal libro: Da pag. 6 a pag. 12 (saltando pag. 7).

Esercizi per casa: Esercizi 2, 3, 4, 5 delle Esercitazioni *1.

13/12/04 Matrici simmetriche, anti-simmetriche, hermitiane, anti-hermitiane e loro proprietà. Parte hermitiana ed anti-hermitiana di una matrice. Sottomatrici.

Dal libro: Da pag. 12 a pag. 15.

Esercizi per casa: Esercizi 6, 7 delle Esercitazioni *1.

14/12/04 Decomposizione a blocchi e operazioni a blocchi. Casi particolari di decomposizioni a blocchi. Scrittura matriciale di un sistema lineare. Operazioni elementari sulle equazioni di un sistema.

Dal libro: Da pag. 15 a pag. 19. Pag. 7.

Esercizi per casa: Esercizio 8 delle Esercitazioni *1.

15/12/04 Operazioni elementari sulle righe di una matrice. Eliminazione di Gauss (EG). Forma ridotta di Gauss di una matrice, colonne dominanti, colonne libere. Esempi. Risoluzione di sistemi lineari. Esempi di sistemi lineari senza soluzioni, con un'unica soluzione, con infinite soluzioni.

Dal libro: Da pag. 19 a pag. 26. Nota 1 sulle operazioni elementari (file sulla pag. web),

Esercizi per casa: Esercizi 1 e 3 delle Esercitazioni *2.

20/12/04 Esercizio Tipo 2. Rango di una matrice. Inverse destre, sinistre bilatere. Esempi.

Dal libro: Da pag. 26 a pag. 29 tutto (comprese le dimostrazioni delle proposizioni 4.1 e 4.4) fino all'enunciato di 4.5. escluso. Enunciati di: 4.6, 4.7, 4.8, 4.9 a pag 28 e 29. Nota 2: osservazioni sul rango di una matrice (file sulla pag. web).

Esercizi per casa: Esercizio Tipo 1. Esercizi 2 e 4 delle Esercitazioni *2.

21/12/04 Criterio per l'esistenza di una inversa destra e sua costruzione. Esercizio Tipo 3. Come costruire l'inversa sinistra di una matrice la cui trasposta abbia un'inversa destra (esempio numerico: esercizio Tipo 3 bis). Criterio per l'esistenza di una inversa sinistra. Inverse di matrici 2×2. Algoritmo di Gauss-Jordan.

Dal libro: Teorema 4.10 (con dimostrazione), enunciati di 4.11 e 4.12.

Esercizi per casa: Esercizi 1, 2, 4 e 5 delle Esercitazioni *3.

22/12/04 Algoritmo di Gauss-Jordan per il calcolo dell'inversa. Esercizio Tipo 4. Spazi vettoriali. Esempi. Sottospazi vettoriali. Esempi.

Dal libro: Enunciato di 4.15 e proprietà delle matrici invertibili a pag. 31.

Da pag 35 a pag. 39. Da pag. 45 a pag. 50.

Esercizi per casa: Esercizi 3, 6, 7 e 8 delle Esercitazioni *3.

10/01/05 Insiemi di vettori. Combinazioni lineari. Sottospazi generati da insiemi di vettori. Insiemi di generatori. Prima domanda dell'esercizio Tipo 5.

Dal libro: Pag. 50 e pag. 51. Proposizione 1.6. con dimostrazione ed esempio 1.7. a pag. 52. La seconda parte di pag. 53.

Esercizi per casa: Esercizi 1 e 2 delle Esercitazioni *4.

11/01/05 Seconda domanda dell'esercizio Tipo 5. Lo spazio nullo di una matrice. Sottoinsiemi e unioni di insiemi di vettori Esempi di insiemi di generatori. Insiemi di vettori linearmente dipendenti e insiemi di vettori linearmente indipendenti.

Dal libro: Enunciato della Proposizione 1.4. a pag. 50. Da pag. 53 a pag. 56. Enunciato della Proposizione 1.8., Proposizione 2.4. (con dimostrazione), definizione di insieme di vettori linearmente indipendente a pag. 57 e Proposizione 2.10.

Esercizi per casa: Esercizi 3 e 4 delle Esercitazioni *4.

12/01/05 Esercizio Tipo 6. L'insieme delle colonne dominanti di una matrice in forma ridotta di Gauss è L.I. Basi. Esempi. Ogni spazio vettoriale finitamente generato ha una base. Come estrarre una base da un insieme di generatori. Impostazione dell' esercizio Tipo 7.

Dal libro: Proposizione 2.8 e Proposizione 2.12. Esempio 2.16. Definizione di base a pag. 60. Da pag 56 a pag. 59 saltando il Teorema 2.15.

Esercizi per casa: Esercizi 5 e 6 delle Esercitazioni *4.

17/01/05 Caratterizzazioni delle basi come insiemi come insiemi di generatori minimali. Esercizio Tipo 7. Teorema di Steinitz (Teorema 3.7 con dimostrazione) e Teorema 3.8.

Dal libro: Da pag. 60 a pag. 63.

Esercizi per casa: Esercizi 1 e 2 delle Esercitazioni *5.

18/01/05 Teorema 3.10 (equipotenza delle basi di uno spazio vettoriale finitamente generato, con dimostrazione). Dimensione di uno spazio vettoriale. Lemma 3.12 e Proposizione 3.17. Caratterizzazioni delle basi come insiemi linearmente indipendenti massimali. Applicazioni lineari. Esempi. Applicazione lineare indotta da una matrice. Spazio nullo e immagine di un'applicazione lineare. Il caso di un' applicazione lineare indotta da una matrice. Spazio delle colonne di una matrice. Teorema nullità+rango.

Dal libro: Da pag. 63 a pag. 73 (saltando le Proposizioni 3.18, 4.7, 4.10, 4.11 e 4.13).

Esercizi per casa: Esercizi 3, 4 e 5 delle Esercitazioni *5.

19/01/05 Dimensione e basi dello spazio nullo di una matrice. Esercizio Tipo 8. Spazio delle righe di una matrice. Basi dello spazio delle colonne e dello spazio delle righe di una matrice. Primo caso dell'Esercizio Tipo 9.

Dal libro: Da pag. 73 a pag. 77.

Esercizi per casa: Esercizio 6 delle Esercitazioni *5.

24/01/05 Nota 3. Proprietà del rango. Basi ordinate. Mappa delle coordinate. Matrice di passaggio da una base ordinata ad un'altra. Matrice associata ad un'applicazione lineare rispetto a fissate basi su dominio e codominio. Secondo caso dell'Esercizio Tipo 9. Esercizi Tipo 10, 11 e 12.

Dal libro: Da pag. 77 a pag. 82.

Esercizi per casa: Esercizio 7 delle Esercitazioni *5 ed Esercizio 1 delle Esercitazioni *6.

25/01/05 Come cambia la matrice cambiando le basi sul dominio e sul codominio. Interpretazione geometrica di $\mathbb{R}^2$ ed $\mathbb{R}^3$. Regola del parallelogramma. Norme di vettori. Le norme $\|\cdot\|_2$, $\|\cdot\|_1$ e $\|\cdot\|_\infty$. Esercizio Tipo 13.

Dal libro: Appendice C: da pag. 131 a pag. 135. Da pag. 83 a pag. 93.

Esercizi per casa: Esercizio 2 delle Esercitazioni *6.

26/01/05 Esercizio Tipo 14. Come cambiano le coordinate di un punto nel piano ruotando il sistema di riferimento. Matrici di rotazione. Il coseno dell'angolo tra due vettori di $\mathbb{R}^2$. Prodotti interni. Il prodotto interno standard. Prima verifica nell' Esercizio Tipo 15.

Dal libro: Da pag. 93 a pag. 97.

Esercizi per casa: Esercizi 3 e 4 delle Esercitazioni *6.

31/01/05 Fine dell' Esercizio Tipo 15. La norma indotta da un prodotto interno. La diseguaglianza di Cauchy-Schwarz. Non tutte le norme sono indotte da prodotti interni. Vettori ortogonali in uno spazio euclideo. Insiemi ortogonali e basi ortogonali. Basi ortonormali. L'algoritmo di Gram-Schmidt. Primo punto dell'Esercizio Tipo 16.

Dal libro: Da pag. 97 a pag. 100, da pag. 106 a pag. 115.

Esercizi per casa: Esercizio 5 delle Esercitazioni *6 ed Esercizio 1 delle Esercitazioni *7.

01/02/05 Fine dell'Esercizio Tipo 16. Il complemento ortogonale di un sottospazio di uno spazio euclideo, e le sue proprietà. La proiezione ortogonale di uno spazio euclideo su di un suo sottospazio, ed il suo calcolo. Esercizio Tipo 17.

Dal libro: Da pag. 100 a pag. 106.

Esercizi per casa: Esercizio 6 delle Esercitazioni *6 ed Esercizi 2 e 3 delle Esercitazioni *7.

02/02/05 Calcolo di determinanti. Proprietà dei determinanti. Esercizio Tipo 18.

Dal libro: Appendice D: da pag. 137 a pag. 146.

Esercizi per casa: Esercizio 4 delle Esercitazioni *7.

ESERCIZIO TIPO 1

Risolvere il sistema lineare $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ nei tre seguenti casi:

(a) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 7 \end{pmatrix}$ e $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$;

(b) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 1 & 2 \\ 2 & 6 & -4 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & -1 & 3 & 6 \end{pmatrix}$ e $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 10 \\ 12 \end{pmatrix}$;

(c) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & -8 & 4 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ e $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$.

(a) Troviamo una forma ridotta di Gauss della matrice aumentata del sistema:

$$(\mathbf{A} \mid \mathbf{b}) = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & -1 \\ 3 & 3 & 7 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{E_{31}(-3)E_{21}(-1)E_1(\frac{1}{2})} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \rightarrow$$

$$\xrightarrow{E_{32}(-1)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) = (\mathbf{U} \mid \mathbf{d})$$

Poichè $\mathbf{d}$ è dominante, allora $\mathbf{Ux} = \mathbf{d}$, e quindi anche $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, non ha soluzioni.

(Infatti: il sistema $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ è equivalente al sistema $\mathbf{Ux} = \mathbf{d}$, che è una scrittura compatta per

$$(*) \qquad \begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 & = 0 \\ x_3 & = -1 \\ 0 & = 1 \end{cases},$$

e poichè l'ultima equazione di $(*)$ non ha soluzioni, $(*)$ non ha soluzioni).

(b) Troviamo una forma ridotta di Gauss della matrice aumentata del sistema:

$$(\mathbf{A} \mid \mathbf{b}) = \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 3 & -2 & 1 & 2 & 4 \\ 2 & 6 & -4 & 2 & 5 & 10 \\ 1 & 3 & -1 & 3 & 6 & 12 \end{array}\right) \xrightarrow{E_{31}(-1)E_{21}(-2)} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 3 & -2 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 4 & 8 \end{array}\right) \rightarrow$$

$$\xrightarrow{E_{23}} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 3 & -2 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 4 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) = (\mathbf{U} \mid \mathbf{d}).$$

Il sistema $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ è equivalente al sistema $\mathbf{Ux} = \mathbf{d}$, che è una scrittura compatta per

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 2x_3 + x_4 + 2x_5 & = 4 \\ x_3 + 2x_4 + 4x_5 & = 8 \\ x_5 & = 2 \end{cases}.$$

Poichè $\mathbf{d}$ è libera, $\mathbf{Ux} = \mathbf{d}$ ammette soluzioni.

Poichè $\mathbf{U}$ ha esattamente due colonne libere (la 2^a e la 4^a), $\mathbf{Ux} = \mathbf{d}$ ha ∞^2 soluzioni.

Scegliamo come parametri le variabili corrispondenti alle colonne libere di $\mathbf{U}$ e con la sostituzione all'indietro otteniamo:

$$\begin{cases} x_2 = h \\ x_4 = k \\ x_5 = 2 \\ x_3 = -2x_4 - 4x_5 + 8 = -2k - 4 \times 2 + 8 = -2k \\ x_1 = -3x_2 + 2x_3 - x_4 - 2x_5 + 4 = -3h + 2 \times (-2k) - k - 2 \times 2 + 4 = -3h - 5k \end{cases}$$

Dunque l'insieme delle soluzioni di $\mathbf{Ux} = \mathbf{d}$, e quindi anche di $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, è

$$\left\{ \begin{pmatrix} -3h - 5k \\ h \\ -2k \\ k \\ 2 \end{pmatrix} | h, k \in \mathbb{C} \right\}.$$

(c) Troviamo una forma ridotta di Gauss della matrice aumentata del sistema:

$$(\mathbf{A} \quad | \quad \mathbf{b}) = \begin{pmatrix} 4 & -8 & 4 & | & 0 \\ 1 & -1 & 0 & | & 3 \\ 1 & -1 & 1 & | & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{31}(-1)E_{21}(-1)E_1(\frac{1}{4})} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & | & 0 \\ 0 & 1 & -1 & | & 3 \\ 0 & 1 & 0 & | & 5 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\xrightarrow{E_{32}(-1)} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & | & 0 \\ 0 & 1 & -1 & | & 3 \\ 0 & 0 & 1 & | & 2 \end{pmatrix} = (\mathbf{U} \quad | \quad \mathbf{d})$$

Il sistema $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ è equivalente al sistema $\mathbf{Ux} = \mathbf{d}$, che è una scrittura compatta per

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 & = 0 \\ \qquad x_2 - x_3 & = 3 \\ \qquad\qquad x_3 & = 2 \end{cases}.$$

Poichè $\mathbf{d}$ è libera, $\mathbf{Ux} = \mathbf{d}$ ammette soluzioni.

Poichè $\mathbf{U}$ non ha colonne libere, $\mathbf{Ux} = \mathbf{d}$ ha esattamente una soluzione.

Con la sostituzione all'indietro otteniamo:

$$\begin{cases} x_3 = 2 \\ x_2 = x_3 + 3 = 2 + 3 = 5 \\ x_1 = 2x_2 - x_3 = 2 \times 5 - 2 = 8 \end{cases}$$

Dunque l'unica soluzione di $\mathbf{Ux} = \mathbf{d}$, e quindi anche di $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, è il vettore $\begin{pmatrix} 8 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$.

ESERCIZIO TIPO 2

Si risolva il sistema lineare $\mathbf{A}(\alpha)\mathbf{x} = \mathbf{b}(\alpha)$ dipendente dal parametro complesso α dove

$$\mathbf{A}(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & \alpha - i & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & \alpha - i & \alpha + i \\ -\alpha - i & -\alpha^2 - 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{b}(\alpha) = \begin{pmatrix} \alpha - i \\ \alpha^2 + 1 \\ 2\alpha \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^4.$$

Troviamo una forma ridotta di Gauss della matrice aumentata del sistema.

$$(\mathbf{A}(\alpha) \mid \mathbf{b}(\alpha)) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \alpha - i & 0 & \alpha - i \\ 0 & 1 & 0 & \alpha^2 + 1 \\ 1 & \alpha - i & \alpha + i & 2\alpha \\ -\alpha - i & -\alpha^2 - 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{E_{41}(\alpha+i)E_{31}(-1)}$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \alpha - i & 0 & \alpha - i \\ 0 & 1 & 0 & \alpha^2 + 1 \\ 0 & 0 & \alpha + i & \alpha + i \\ 0 & 0 & 0 & \alpha^2 + 1 \end{array}\right) = (\mathbf{B}(\alpha) \mid \mathbf{c}(\alpha)).$$

$\boxed{1^0 \text{ CASO}}$ $\quad \alpha = -i \qquad (\mathbf{B}(-\mathbf{i}) \mid \mathbf{c}(-\mathbf{i})) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2i & 0 & -2i \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$ è una forma ridotta di Gauss per $(\mathbf{A}(-\mathbf{i}) \mid \mathbf{b}(-\mathbf{i}))$, quindi $\mathbf{A}(-\mathbf{i})\mathbf{x} = \mathbf{b}(-\mathbf{i})$ è equivalente a $\mathbf{B}(-\mathbf{i})\mathbf{x} = \mathbf{c}(-\mathbf{i})$ che è una forma compatta per

$$(*) \qquad \begin{cases} x_1 - 2ix_2 & = -2i \\ \qquad\quad x_2 & = 0 \end{cases}$$

Poichè $\mathbf{c}(-\mathbf{i})$ è libera, $\mathbf{B}(-\mathbf{i})\mathbf{x} = \mathbf{c}(-\mathbf{i})$ ammette soluzioni.

Poichè $\mathbf{B}(-\mathbf{i})$ ha esattamente una colonna libera, $\mathbf{B}(-\mathbf{i})\mathbf{x} = \mathbf{c}(-\mathbf{i})$ ha ∞^1 soluzioni.

Scegliamo come parametro la variabile corrispondente alla colonna libera di $\mathbf{B}(-\mathbf{i})$ (la 3^a) e con la sostituzione all'indietro da $(*)$ otteniamo

$$\begin{cases} x_3 = h \\ x_2 = 0 \\ x_1 = 2ix_2 - 2i = -2i \end{cases}$$

L'insieme delle soluzioni del sistema $\mathbf{B}(-\mathbf{i})\mathbf{x} = \mathbf{c}(-\mathbf{i})$ (e quindi l'insieme delle soluzioni del sistema $\mathbf{A}(-\mathbf{i})\mathbf{x} = \mathbf{b}(-\mathbf{i})$) è

$$\left\{ \begin{pmatrix} -2i \\ 0 \\ h \end{pmatrix} | h \in \mathbb{C} \right\}.$$

$\boxed{2^0 \text{ CASO}}$ $\quad \alpha \neq -i$

$$(\mathbf{B}(\alpha) \mid \mathbf{c}(\alpha)) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \alpha - i & 0 & \alpha - i \\ 0 & 1 & 0 & \alpha^2 + 1 \\ 0 & 0 & \alpha + i & \alpha + i \\ 0 & 0 & 0 & \alpha^2 + 1 \end{array}\right) \xrightarrow{E_3(\frac{1}{\alpha+i})}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & \alpha-i & 0 & | & \alpha-i \\ 0 & 1 & 0 & | & \alpha^2+1 \\ 0 & 0 & 1 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & | & \alpha^2+1 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_4(\frac{1}{\alpha+i})} \begin{pmatrix} 1 & \alpha-i & 0 & | & \alpha-i \\ 0 & 1 & 0 & | & \alpha^2+1 \\ 0 & 0 & 1 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & | & \alpha-i \end{pmatrix} = (\,\mathbf{C}(\alpha)| \quad \mathbf{d}(\alpha)\,).$$

$\boxed{1^0 \text{ Sottocaso}}$ $\quad \alpha = i \quad (\,\mathbf{C}(\mathbf{i}) \;|\; \mathbf{d}(\mathbf{i})\,) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$ è una forma ridotta di Gauss per $(\,\mathbf{A}(\mathbf{i}) \;|\; \mathbf{b}(\mathbf{i})\,)$, quindi $\mathbf{A}(\mathbf{i})\mathbf{x} = \mathbf{b}(\mathbf{i})$ è equivalente a $\mathbf{C}(\mathbf{i})\mathbf{x} = \mathbf{d}(\mathbf{i})$ che è una forma compatta per

$$(*) \qquad \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 1 \end{cases}$$

Poichè $\mathbf{d}(\mathbf{i})$ è libera, $\mathbf{C}(\mathbf{i})\mathbf{x} = \mathbf{d}(\mathbf{i})$ ammette soluzioni.

Poichè tutte le colonne di $\mathbf{C}(\mathbf{i})$ sono dominanti, $\mathbf{C}(\mathbf{i})\mathbf{x} = \mathbf{d}(\mathbf{i})$ ammette un'unica soluzione. L'unica soluzione di $\mathbf{C}(\mathbf{i})\mathbf{x} = \mathbf{d}(\mathbf{i})$ (e quindi di $\mathbf{A}(\mathbf{i})\mathbf{x} = \mathbf{b}(\mathbf{i})$) è

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$\boxed{2^0 \text{ Sottocaso}}$ $\quad \alpha \notin \{i, -i\} \quad (\,\mathbf{C}(\alpha)| \quad \mathbf{d}(\alpha)\,) = \begin{pmatrix} 1 & \alpha-i & 0 & | & \alpha-i \\ 0 & 1 & 0 & | & \alpha^2+1 \\ 0 & 0 & 1 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & | & \alpha-i \end{pmatrix} \xrightarrow{E_4(\frac{1}{\alpha-i})}$

$$\begin{pmatrix} 1 & \alpha-i & 0 & | & \alpha-i \\ 0 & 1 & 0 & | & \alpha^2+1 \\ 0 & 0 & 1 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & | & 1 \end{pmatrix} = (\,\mathbf{D}(\alpha)| \quad \mathbf{e}(\alpha)\,)$$ è una forma ridotta di Gauss per $(\,\mathbf{A}(\alpha) \;|\; \mathbf{b}(\alpha)\,)$.

Poichè $\mathbf{e}(\alpha)$ è dominante, $\mathbf{D}(\alpha)\mathbf{x} = \mathbf{e}(\alpha)$ (e quindi di $\mathbf{A}(\alpha)\mathbf{x} = \mathbf{b}(\alpha)$) non ammette soluzioni.

ESERCIZIO TIPO 3

Si trovino tutte le inverse destre della matrice

Poniamo $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 6 & 12i & -18 \\ 2 & -8i & 18 \end{pmatrix}$.

Un'inversa destra di $\mathbf{A}$ è una matrice 3×2 $\mathbf{R}$ tale che se $\mathbf{R} = (\mathbf{c}_1 \quad | \quad \mathbf{c}_2)$, allora

$\mathbf{c}_1$ è soluzione di (1) $\mathbf{Bx} = \mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e

$\mathbf{c}_2$ è soluzione di (2) $\mathbf{Ax} = \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Cerchiamo tutte le soluzioni di (1) e (2).

$$(\mathbf{A} \quad | \quad \mathbf{I}_2) = \begin{pmatrix} 6 & 12i & -18 & | & 1 & 0 \\ 2 & -8i & 18 & | & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{21}(-2)E_1(\frac{1}{6})} \begin{pmatrix} 1 & 2i & -3 & | & \frac{1}{6} & 0 \\ 0 & -12i & 24 & | & -\frac{1}{3} & 1 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\xrightarrow{E_2(\frac{1}{12}i)} \begin{pmatrix} 1 & 2i & -3 & | & \frac{1}{6} & 0 \\ 0 & 1 & 2i & | & -\frac{1}{36}i & \frac{1}{12}i \end{pmatrix} = (\mathbf{U} \quad | \quad \mathbf{b}_1 \quad \mathbf{b}_2).$$

(1) è equivalente a (1′) $\mathbf{Ux} = \mathbf{b}_1$ che è una forma compatta per

$$\begin{cases} x_1 + 2ix_2 - 3x_3 = \frac{1}{6} \\ \qquad x_2 + 2ix_3 = -\frac{1}{36}i \end{cases}$$

Scegliamo come parametro la variabile corrispondente all'unica colonna libera di $\mathbf{U}$ (la 3^a) e con la sostituzione all'indietro otteniamo

$$\begin{cases} x_3 = h \\ x_2 = -2ix_3 - \dfrac{1}{36}i = -2ih - \dfrac{1}{36}i \\ x_1 = -2ix_2 + 3x_3 + \dfrac{1}{6} = -2i(-2ih - \dfrac{1}{36}i) + 3h + \dfrac{1}{6} = -h + \dfrac{1}{9} \end{cases}$$

L'insieme delle soluzioni di (1) è

$$\left\{ \begin{pmatrix} -h + \frac{1}{9} \\ -2ih - \frac{1}{36}i \\ h \end{pmatrix} | h \in \mathbb{C} \right\}.$$

(2) è equivalente a (2′) $\mathbf{Ux} = \mathbf{b}_2$ che è una forma compatta per

$$\begin{cases} x_1 + 2ix_2 - 3x_3 = 0 \\ \qquad x_2 + 2ix_3 = \frac{1}{12}i \end{cases}$$

Scegliamo come parametro la variabile corrispondente all'unica colonna libera di $\mathbf{U}$ (la 3^a) e con la sostituzione all'indietro otteniamo

$$\begin{cases} x_3 = k \\ x_2 = -2ix_3 + \dfrac{1}{12}i = -2ik + \dfrac{1}{12}i \\ x_1 = -2ix_2 + 3x_3 = -2i(-2ik + \dfrac{1}{12}i) + 3k = -k + \dfrac{1}{6} \end{cases}$$

L'insieme delle soluzioni di (2) è

$$\left\{ \begin{pmatrix} -k+\frac{1}{6} \\ -2ik+\frac{1}{12}i \\ k \end{pmatrix} | k \in \mathbb{C} \right\}.$$

Le inverse destre di $\mathbf{A}$ sono esattamente tutte le matrici del tipo $\mathbf{R(h,k)} = \begin{pmatrix} -h+\frac{1}{9} & -k+\frac{1}{6} \\ -2ih-\frac{1}{36}i & -2ik+\frac{1}{12}i \\ h & k \end{pmatrix}$, al variare di $h,k \in \mathbb{C}$.

ESERCIZIO TIPO 3 bis

Si trovino tutte le inverse sinistre della matrice $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 12i & -8i \\ -18 & 18 \end{pmatrix}$.

1. Poniamo $\mathbf{B} = \mathbf{A}^T$.

2. Cerchiamo tutte le inverse destre di $\mathbf{B}$. Dall'ESERCIZIO TIPO 3 sappiamo che sono tutte e sole le matrici del tipo $\begin{pmatrix} -h+\frac{1}{9} & -k+\frac{1}{6} \\ -2ih-\frac{1}{36}i & -2ik+\frac{1}{12}i \\ h & k \end{pmatrix}$, al variare di $h,k \in \mathbb{C}$.

3. Una matrice è inversa sinistra di $\mathbf{A}$ se e solo se è la trasposta di una inversa destra di $\mathbf{B}$. Quindi le inverse sinistre di $\mathbf{A}$ sono esattamente tutte le matrici del tipo $\begin{pmatrix} -h+\frac{1}{9} & -2ih-\frac{1}{36}i & h \\ -k+\frac{1}{6} & -2ik+\frac{1}{12}i & k \end{pmatrix}$ al variare di $h,k \in \mathbb{C}$.

ESERCIZIO TIPO 4

Sia $\quad \mathbf{A}(\alpha) = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & \alpha \\ \alpha & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad$ dove $\alpha \in \mathbb{C}$.

Per quegli $\alpha \in \mathbb{C}$ per cui $\mathbf{A}(\alpha)$ è non singolare, si calcoli $\mathbf{A}(\alpha)^{-1}$.

$$(\mathbf{A}(\alpha) \quad | \quad \mathbf{I}_3) = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & \alpha & | & 1 & 0 & 0 \\ \alpha & 1 & 1 & | & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[]{E_{21}(-\alpha)E_1(\frac{1}{\alpha}) \quad \boxed{\alpha \neq 0 : \mathbf{A}(0) \text{ non ha inversa}}}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{\alpha} & 1 & | & \frac{1}{\alpha} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\alpha & | & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{23}} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{\alpha} & 1 & | & \frac{1}{\alpha} & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & | & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1-\alpha & | & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \to$$

$$\xrightarrow{E_2(\frac{1}{2})} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{\alpha} & 1 & | & \frac{1}{\alpha} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & | & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1-\alpha & | & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[]{E_3(\frac{1}{1-\alpha}) \quad \boxed{\alpha \neq 1 : \mathbf{A}(1) \text{ non ha inversa}}}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{\alpha} & 1 & | & \frac{1}{\alpha} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & | & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & | & -\frac{1}{1-\alpha} & \frac{1}{1-\alpha} & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{23}(-\frac{1}{2})}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{\alpha} & 1 & | & \frac{1}{\alpha} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & \frac{1}{2(1-\alpha)} & -\frac{1}{2(1-\alpha)} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & | & -\frac{1}{1-\alpha} & \frac{1}{1-\alpha} & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{13}(-1)}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{\alpha} & 0 & | & \frac{1}{\alpha(1-\alpha)} & -\frac{1}{1-\alpha} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & \frac{1}{2(1-\alpha)} & -\frac{1}{2(1-\alpha)} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & | & -\frac{1}{1-\alpha} & \frac{1}{1-\alpha} & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{12}(-\frac{1}{\alpha})}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & \frac{1}{2\alpha(1-\alpha)} & \frac{-2\alpha+1}{2\alpha(1-\alpha)} & -\frac{1}{2\alpha} \\ 0 & 1 & 0 & | & \frac{1}{2(1-\alpha)} & -\frac{1}{2(1-\alpha)} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & | & -\frac{1}{1-\alpha} & \frac{1}{1-\alpha} & 0 \end{pmatrix} = (I_3 \quad | \quad \mathbf{A}(\alpha)^{-1}) .$$

Se $\boxed{\alpha \notin \{0, 1\}}$ $\qquad \mathbf{A}(\alpha)^{-1} = \frac{1}{2\alpha(1-\alpha)} \begin{pmatrix} 1 & -2\alpha+1 & -1+\alpha \\ \alpha & -\alpha & \alpha(1-\alpha) \\ -2\alpha & 2\alpha & 0 \end{pmatrix}.$

ESERCIZIO TIPO 5

(1) Si provi che $\mathcal{S}_1 = \{\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}; \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix}2\\2\\0\end{pmatrix}; \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}; \mathbf{v}_4 = \begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}; \mathbf{v}_5 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\}$ è un insieme di generatori di $\mathbb{R}^3$.

(2) Sia $\mathcal{S}_2 = \{\mathbf{w}_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}; \mathbf{w}_2 = \begin{pmatrix}3\\3\\0\end{pmatrix}; \mathbf{w}_3 = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}; \mathbf{w}_4 = \begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}; \mathbf{w}_5 = \begin{pmatrix}4\\3\\1\end{pmatrix}\}$. Si dica se $\mathcal{S}_2$ è un insieme di generatori di $\mathbb{R}^3$.

(1) Per provare che $\mathcal{S}$ è un insieme di generatori di $\mathbb{R}^3$ occorre provare che per ogni $\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ esistono $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5 \in \mathbb{R}$ tali che

$$\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix} = \alpha_1\mathbf{v}_1 + \alpha_2\mathbf{v}_2 + \alpha_3\mathbf{v}_3 + \alpha_4\mathbf{v}_4 + \alpha_5\mathbf{v}_5 =$$

$$= \alpha_1\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + \alpha_2\begin{pmatrix}2\\2\\0\end{pmatrix} + \alpha_3\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} + \alpha_4\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix} + \alpha_5\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3\\ \alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_4\\ \alpha_3 - \alpha_4 + \alpha_5\end{pmatrix}$$

ossia che il sistema lineare

$$(*) \qquad \begin{cases}\alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3 = a\\ \alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_4 = b\\ \alpha_3 - \alpha_4 + \alpha_5 = c\end{cases}$$

nelle incognite $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5$ ha soluzione **qualunque** siano $a, b, c \in \mathbb{R}$.

Facendo una eliminazione di Gauss sulla matrice aumentata del sistema si ottiene

$$\left(\begin{array}{ccccc|c}1&2&1&0&0&a\\1&2&0&1&0&b\\0&0&1&-1&1&c\end{array}\right) \xrightarrow[E_{21}(-1)]{} \left(\begin{array}{ccccc|c}1&2&1&0&0&a\\0&0&-1&1&0&b-a\\0&0&1&-1&1&c\end{array}\right) \rightarrow$$

$$\xrightarrow[E_{32}(-1)E_2(-1)]{} \left(\begin{array}{ccccc|c}1&2&1&0&0&a\\0&0&1&-1&0&a-b\\0&0&0&0&1&c+b-a\end{array}\right) = (\,\mathbf{U}_1 \mid \mathbf{d}_1\,).$$

Poichè $\mathbf{d}_1$ è libera qualunque siano $a, b, c \in \mathbb{R}$, allora $(*)$ ha soluzione qualunque siano $a, b, c \in \mathbb{R}$, per cui $\mathcal{S}$ è un insieme di generatori di $\mathbb{R}^3$.

(2) Per sapere se $\mathcal{S}_2$ è o meno un insieme di generatori di $\mathbb{R}^3$ dobbiamo verificare se per ogni $\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ esistano o meno $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5 \in \mathbb{R}$ tali che

$$\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix} = \alpha_1\mathbf{w}_1 + \alpha_2\mathbf{w}_2 + \alpha_3\mathbf{w}_3 + \alpha_4\mathbf{w}_4 + \alpha_5\mathbf{w}_5 =$$

$$= \alpha_1\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + \alpha_2\begin{pmatrix}3\\3\\0\end{pmatrix} + \alpha_3\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} + \alpha_4\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix} + \alpha_5\begin{pmatrix}4\\3\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\alpha_1 + 3\alpha_2 + \alpha_3 + 2\alpha_4 + 4\alpha_5\\ \alpha_1 + 3\alpha_2 + \alpha_4 + 3\alpha_5\\ \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5\end{pmatrix}$$

ossia se il sistema lineare

$$(*) \quad \begin{cases} \alpha_1 + 3\alpha_2 + \alpha_3 + 2\alpha_4 + 4\alpha_5 = a \\ \alpha_1 + 3\alpha_2 + \alpha_4 + 3\alpha_5 = b \\ \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5 = c \end{cases}$$

nelle incognite $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5$ abbia o meno soluzione **per ogni** $a, b, c \in \mathbb{R}$.

Se $(*)$ avesse soluzione **per ogni** $a, b, c \in \mathbb{R}$ allora $\mathcal{S}_2$ sarebbe un insieme di generatori di $\mathbb{R}^3$, in caso contrario (ossia se esistono $a, b, c \in \mathbb{R}$ per cui $(*)$ non ha soluzione) no.

Facendo una eliminazione di Gauss sulla matrice aumentata del sistema si ottiene

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 2 & 4 & | & a \\ 1 & 3 & 0 & 1 & 3 & | & b \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & | & c \end{pmatrix} \xrightarrow[E_{21}(-1)]{} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 2 & 4 & | & a \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & | & b-a \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & | & c \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\xrightarrow[E_{32}(-1)E_2(-1)]{} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 2 & 4 & | & a \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & | & a-b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & | & c+b-a \end{pmatrix} = (\,\mathbf{U}_2 \quad | \quad \mathbf{d}_2\,).$$

Poichè esistono $a, b, c \in \mathbb{R}$ per cui $\mathbf{d}_2$ è dominante (ad esempio si prendano $a = b = 0$ e $c = 1$), allora $\mathcal{S}_2$ non è un insieme di generatori di $\mathbb{R}^3$

(in altre parole: poichè esistono dei vettori di $\mathbb{R}^3$ che **NON** si possono esprimere come combinazione lineare degli elementi di $\mathcal{S}_2$, ad esempio il vettore $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, allora $\mathcal{S}_2$ **NON** è un insieme di generatori di $\mathbb{R}^3$).

ESERCIZIO TIPO 6

Siano $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Si dica se $\mathcal{S} = \{\mathbf{v}_1; \mathbf{v}_2; \mathbf{v}_3; \mathbf{v}_4\} \subset \mathbb{C}^4$ è linearmente dipendente o linearmente indipendente.

Siano $\alpha, \beta, \delta, \gamma \in \mathbb{C}$ tali che

$$(*) \qquad \mathbf{0} = \alpha\mathbf{v}_1 + \beta\mathbf{v}_2 + \delta\mathbf{v}_3 + \gamma\mathbf{v}_4 = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + \delta \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha + 2\beta + \delta \\ \beta + \delta - \gamma \\ 3\alpha + 4\beta + \delta + 2\gamma \\ -\alpha + \delta - 2\gamma \end{pmatrix}.$$

Allora $(*)$ equivale a (1) $\begin{cases} \alpha + 2\beta + \delta & = 0 \\ \beta + \delta - \gamma & = 0 \\ 3\alpha + 4\beta + \delta + 2\gamma & = 0 \\ -\alpha + \delta - 2\gamma & = 0 \end{cases}$.

(1) è un sistema lineare nelle incognite $\alpha, \beta, \delta, \gamma$.

(1) ha sempre la soluzione nulla $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ (ossia $\alpha = \beta = \delta = \gamma = 0$).

Se essa dovesse essere l'unica soluzione di (1) (quindi se (1) avesse un'unica soluzione) allora $\mathcal{S}$ sarebbe L.I., altrimenti, se (1) ha anche una soluzione non nulla (quindi se (1) ha piú di una soluzione) allora $\mathcal{S}$ è L.D.

Cerchiamo allora le soluzioni di (1). Facendo una eliminazione di Gauss sulla sua matrice aumentata si ottiene

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & 4 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[E_{41}(1)E_{31}(-3)]{} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & -2 & 0 \end{array}\right) \rightarrow$$

$$\xrightarrow[E_{42}(-2)E_{32}(2)]{} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) = (\mathbf{U} \mid \mathbf{0})$$

Dunque (1) è equivalente ad (1') $\begin{cases} \alpha + 2\beta + \delta & = 0 \\ \beta + \delta - \gamma & = 0 \end{cases}$

Scegliendo come parametri le variabili corrispondenti alle colonne non dominanti di U (la 3^a e la 4^a), con la sostituzione all'indietro si ottiene $\begin{cases} \gamma = h \\ \delta = k \\ \beta = -\delta + \gamma = -k + h \\ \alpha = -2\beta - \delta = -2(-k+h) - k = k - 2h \end{cases}$

Il sistema (1') ha ∞^2 soluzioni: tutti gli elementi dell'insieme $\left\{ \begin{pmatrix} k - 2h \\ -k + h \\ k \\ h \end{pmatrix} | h, k \in \mathbb{C} \right\}$.

Prendendo ad esempio $h = 1$ e $k = 0$ si ottiene $\alpha = -2$, $\beta = \gamma = 1$, $\delta = -1$ e $-2\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_4 = \mathbf{0}$.
Quindi $\{\mathbf{v}_1; \mathbf{v}_2; \mathbf{v}_3; \mathbf{v}_4\}$ è linearmente dipendente.

ESERCIZIO TIPO 7

Sia W l'insieme delle matrici 2×2 reali simmetriche. L'insieme

$$\mathcal{S} = \left\{ \mathbf{C}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}; \mathbf{C}_2 = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}; \mathbf{C}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \mathbf{C}_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \mathbf{C}_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \mathbf{C}_6 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

è un insieme di generatori di W.

Si trovi una base di W contenuta in $\mathcal{S}$.

$\boxed{1^0 \text{ MODO}}$ "Restringiamo" un insieme di generatori di W.

1^0 **passaggio**. Esistono in $\mathcal{S}$ vettori che siano combinazioni lineari degli altri vettori di $\mathcal{S}$?

$\mathbf{C}_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ è senz'altro combinazione degli altri:

$$\mathbf{C}_5 = \mathbf{O} = 0\mathbf{C}_1 + 0\mathbf{C}_2 + 0\mathbf{C}_3 + 0\mathbf{C}_4 + 0\mathbf{C}_6,$$

per cui togliamo subito $\mathbf{C}_5$ (**togliamo** comunque subito **tutti gli eventuali vettori di** $\mathcal{S}$ **che siano nulli**), **e poniamo**

$$\mathcal{S}_1 = \left\{ \mathbf{C}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}; \mathbf{C}_2 = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}; \mathbf{C}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \mathbf{C}_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \mathbf{C}_6 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

2^0 **passaggio**. $\mathcal{S}_1$ è ancora un insieme di generatori di $\mathbb{R}^3$. Esistono in $\mathcal{S}_1$ vettori che siano combinazioni lineari degli altri vettori di $\mathcal{S}_1$? Poichè

$$\mathbf{C}_1 = 2\mathbf{C}_6 = 0\mathbf{C}_2 + 0\mathbf{C}_3 + 0\mathbf{C}_4 + 2\mathbf{C}_6$$

ma anche

$$\mathbf{C}_6 = \frac{1}{2}\mathbf{C}_1 = \frac{1}{2}\mathbf{C}_1 + 0\mathbf{C}_2 + 0\mathbf{C}_3 + 0\mathbf{C}_4$$

possiamo togliere da $\mathcal{S}_1$ il vettore $\mathbf{C}_1$, oppure possiamo togliere da $\mathcal{S}_1$ il vettore $\mathbf{C}_6$, ottenendo ancora un insieme di generatori di $\mathbb{R}^3$. Dunque, **guardiamo se tra i vettori di** $\mathcal{S}_1$ **ci siano coppie di vettori di cui l'uno è multiplo dell'altro, e per ciascuna di queste eventuali coppie togliamo uno di due vettori**. In questo caso abbiamo individuato la coppia $\mathbf{C}_1, \mathbf{C}_6$ e scegliamo di togliere $\mathbf{C}_1$.

Poniamo

$$\mathcal{S}_2 = \left\{ \mathbf{C}_2 = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}; \mathbf{C}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \mathbf{C}_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \mathbf{C}_6 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

3^0 **passaggio**. $\mathcal{S}_2$ è ancora un insieme di generatori di $\mathbb{R}^3$. Esistono in $\mathcal{S}_2$ vettori che siano combinazioni lineari degli altri vettori di $\mathcal{S}_2$?

Sia $\alpha_1\mathbf{C}_2 + \alpha_2\mathbf{C}_3 + \alpha_3\mathbf{C}_4 + \alpha_4\mathbf{C}_6 = \mathbf{O}$ una combinazione lineare nulla dei vettori di $\mathcal{S}_1$. Allora da

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \alpha_1 \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \alpha_4 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 & 3\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_4 \\ 3\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_4 & \alpha_3 + \alpha_4 \end{pmatrix}$$

si ottiene il sistema lineare, nelle incognite $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$

$$\begin{cases} 2\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \\ 3\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_4 = 0 \\ \alpha_3 + \alpha_4 = 0 \end{cases}$$

Facendo una E.G. sulla sua matrice aumentata si ha:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{E_{21}(-3)E_1(\frac{1}{2})} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{E_2(-2)} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right),$$

per cui il sistema è equivalente al sistema

$$(*) \qquad \begin{cases} \alpha_1 + \frac{1}{2}\alpha_2 + \frac{1}{2}\alpha_3 = 0 \\ \alpha_2 + 3\alpha_3 - 2\alpha_4 = 0 \\ \alpha_3 + \alpha_4 = 0 \end{cases}$$

il cui insieme delle soluzioni è

$$\left\{ \begin{pmatrix} -2h \\ 5h \\ -h \\ h \end{pmatrix} | h \in \mathbb{R} \right\}$$

Prendendo una sua soluzione non nulla, ad esempio $\begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ (si ponga $h = 1$), si ottiene

$$-2\mathbf{C}_2 + 5\mathbf{C}_3 - \mathbf{C}_4 + \mathbf{C}_5 = \mathbf{O},$$

per cui $\mathbf{C}_2$,$\mathbf{C}_3$, $\mathbf{C}_4$ e $\mathbf{C}_5$ sono combinazioni lineari degli altri elementi di $\mathcal{S}_2$ e ciascuno di loro puó essere scelto come elemento da eliminare da $\mathcal{S}_2$.

Scegliamo di togliere da $\mathcal{S}_2$ la matrice $\mathbf{C}_2$ (combinazione lineare degli altri elementi di $\mathcal{S}_2$) e poniamo

$$\mathcal{S}_3 = \left\{ \mathbf{C}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \mathbf{C}_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \mathbf{C}_5 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

4^0 **passaggio**. $\mathcal{S}_3$ è ancora un insieme di generatori di $\mathbb{R}^3$. Esistono in $\mathcal{S}_3$ vettori che siano combinazioni lineari degli altri vettori di $\mathcal{S}_3$?

Sia $\alpha_1\mathbf{C}_3 + \alpha_2\mathbf{C}_4 + \alpha_3\mathbf{C}_5 = \mathbf{O}$ una combinazione lineare nulla dei vettori di $\mathcal{S}_2$. Allora da

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \alpha_1 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 + \alpha_2 & \alpha_1 + \alpha_3 \\ \alpha_1 + \alpha_3 & \alpha_2 + \alpha_3 \end{pmatrix}$$

si ottiene il sistema lineare, nelle incognite $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 = 0 \\ \alpha_1 + \alpha_3 = 0 \\ \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \end{cases}$$

Facendo una E.G. sulla sua matrice aumentata si ottiene:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & | & 0 \\ 1 & 0 & 1 & | & 0 \\ 0 & 1 & 1 & | & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{21}(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & | & 0 \\ 0 & -1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 1 & 1 & | & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{32}(-1)E_2(-1)}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 1 & -1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 2 & | & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_3(\frac{1}{2})} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 1 & -1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 \end{pmatrix}$$

L'unica soluzione del sistema è quella nulla, per cui $\mathcal{S}_3$ è linearmente indipendente, ed è una base di W contenuta in $\mathcal{S}$.

$\boxed{2^0 \text{ MODO}}$ Invece di togliere successivamente vettori che siano combinazioni lineari di quelli rimasti, ossia invece di "restringere" insiemi di generatori, si puó "allargare" insiemi L.I.

Ad esempio:

1. $\mathbf{C}_1 \neq \mathbf{0}$ per cui $\{\mathbf{C}_1\}$ è L.I. Teniamo $\mathbf{C}_1$. Chiamiamo $\mathcal{S}_1 = \mathcal{S}$.

2. $\{\mathbf{C}_1; \mathbf{C}_2\}$ è L.I. Teniamo $\mathbf{C}_2$. Chiamiamo $\mathcal{S}_2 = \mathcal{S}_1$.

3. $\{\mathbf{C}_1; \mathbf{C}_2; \mathbf{C}_3\}$ è L.I. Teniamo $\mathbf{C}_3$. Chiamiamo $\mathcal{S}_3 = \mathcal{S}_2\}$.

4. $\{\mathbf{C}_1; \mathbf{C}_2; \mathbf{C}_3; \mathbf{C}_4\}$ è L.D. Togliamo $\mathbf{C}_4$. Chiamiamo $\mathcal{S}_4 = \mathcal{S}_3 \setminus \{\mathbf{C}_4\} = \{\mathbf{C}_1; \mathbf{C}_2; \mathbf{C}_3; \mathbf{C}_5; \mathbf{C}_6\}$.

5. $\{\mathbf{C}_1; \mathbf{C}_2; \mathbf{C}_3; \mathbf{C}_5\}$ è L.D. Togliamo $\mathbf{C}_5$. Chiamiamo $\mathcal{S}_5 = \mathcal{S}_4 \setminus \{\mathbf{C}_5\} = \{\mathbf{C}_1; \mathbf{C}_2; \mathbf{C}_3; \mathbf{C}_6\}$.

6. $\{\mathbf{C}_1; \mathbf{C}_2; \mathbf{C}_3; \mathbf{C}_6\}$ è L.D. Togliamo $\mathbf{C}_6$. Chiamiamo $\mathcal{S}_6 = \mathcal{S}_5 \setminus \{\mathbf{C}_6\} = \{\mathbf{C}_1; \mathbf{C}_2; \mathbf{C}_3\}$.

Dunque $\mathcal{S}_6 = \{\mathbf{C}_1; \mathbf{C}_2; \mathbf{C}_3\}$ è una base di W contenuta in $\mathcal{S}$.

ESERCIZIO TIPO 8

Si trovi una base dello spazio nullo $N(\mathbf{A})$ della matrice $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Poichè $N(\mathbf{A}) = N(\mathbf{U})$ per ogni forma ridotta di Gauss $\mathbf{U}$ di $\mathbf{A}$ (perchè $N(\mathbf{A})$ è l'insieme delle soluzioni del sistema omogeneo $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$, e se $\mathbf{U}$ è una forma ridotta di Gauss di $\mathbf{A}$ allora $(\mathbf{U} \mid \mathbf{0})$ è una forma ridotta di Gauss per $(\mathbf{A} \mid \mathbf{0})$, per cui $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ è equivalente al sistema $\mathbf{Ux} = \mathbf{0}$, il cui insieme delle soluzioni è $N(\mathbf{U})$), troviamo una base dello spazio nullo di una forma ridotta di Gauss per $\mathbf{A}$.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{21}(-2)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -4 \end{pmatrix} = \mathbf{U}$$

$\mathbf{U}$ è una forma ridotta di Gauss per $\mathbf{A}$. Per il teorema "nullità + rango"si ha

$$\dim \mathrm{N}(\mathbf{U}) = (\text{numero delle colonne di } \mathbf{U} \text{ - rk}(\mathbf{U})) = 5 - 2 = 3.$$

Poichè

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} \in N(\mathbf{A}) \Longleftrightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_5 = 0 \\ x_3 + x_4 - 4x_5 = 0 \end{cases}$$

scegliendo come parametri le variabili corrispondenti alle colonne libere di $\mathbf{U}$ (la 2^a, la 4^a e la 5^a) con la sostituzione all'indietro si ottiene

$$\begin{cases} x_2 = h \\ x_4 = k \\ x_5 = w \\ x_3 = -x_4 + 4x_5 = -k + 4w \\ x_1 = -2x_2 - x_3 - 3x_5 = -2h - (-k + 4w) - 3w = -2h + k - 7w \end{cases}$$

Quindi

$$N(\mathbf{A}) = N(\mathbf{U}) = \{ \begin{pmatrix} -2h + k - 7w \\ h \\ -k + 4w \\ k \\ w \end{pmatrix} | h, k \in \mathbb{C} \}$$

e chiamando $\mathbf{v}_1$ l'elemento di $N(\mathbf{A})$ che si ottiene ponendo $h = 1$ e $k = 0 = w$, $\mathbf{v}_2$ l'elemento di $N(\mathbf{A})$ che si ottiene ponendo $h = 0 = w$ e $k = 1$, e $\mathbf{v}_3$ l'elemento di $N(\mathbf{A})$ che si ottiene ponendo $h = 0 = k$ e $w = 1$, si ha che una base di $N(\mathbf{A})$ è

$$\left\{ \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} -7 \\ 0 \\ 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

ESERCIZIO TIPO 9

Sia $\mathbf{A}_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & -\alpha^2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & \alpha+1 \\ 3 & -3\alpha^2 & 3 & \alpha+3 \end{pmatrix}$, dove $\alpha \in \mathbb{C}$.

(a) Per ogni $\alpha \in \mathbb{C}$ si dica qual è $rk(\mathbf{A}_\alpha)$ e si trovino una base $\mathcal{B}_\alpha$ di $C(\mathbf{A}_\alpha)$ ed una base $\mathcal{D}_\alpha$ di $R(\mathbf{A}_\alpha)$.

(b) Sia $\mathbf{A} = \mathbf{A}_0$ la matrice che si ottiene ponendo $\alpha = 0$. Si trovi una base dello spazio nullo $N(\mathbf{A})$ di $\mathbf{A}$.

$$(a) \qquad \mathbf{A}_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & -\alpha^2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & \alpha+1 \\ 3 & -3\alpha^2 & 3 & \alpha+3 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{31}(-3)E_{21}(-1)} \begin{pmatrix} 1 & -\alpha^2 & 1 & 1 \\ 0 & \alpha^2+3 & 1 & \alpha \\ 0 & 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix} = \mathbf{B}_\alpha$$

$\boxed{1^0 \text{ CASO}}$ $\qquad \alpha^2 + 3 = 0$ cioè $\alpha \in \{\sqrt{3}i, -\sqrt{3}i\}$

$$\mathbf{B}_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \alpha \\ 0 & 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix} \xrightarrow{E_3(\frac{1}{\alpha}) \quad (\alpha \neq 0!)} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \alpha \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{U}_\alpha$$

$\mathrm{rk}(A_\alpha) = 3$

Una base $\mathcal{B}_\alpha$ di $C(\mathbf{A}_\alpha)$ è $\mathcal{B}_\alpha = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha+1 \\ \alpha+3 \end{pmatrix} \right\}$.

Una base $\mathcal{D}_\alpha$ di $R(\mathbf{A}_\alpha)$ è $\mathcal{D}_\alpha = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ \overline{\alpha} \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

(Quindi:

$$\mathcal{B}_{\sqrt{3}i} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ 1+\sqrt{3}i \\ 3+\sqrt{3}i \end{pmatrix} \right\} \quad \text{e} \quad \mathcal{D}_{\sqrt{3}i} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -\sqrt{3}i \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\},$$

e

$$\mathcal{B}_{-\sqrt{3}i} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ 1-\sqrt{3}i \\ 3-\sqrt{3}i \end{pmatrix} \right\} \quad \text{e} \quad \mathcal{D}_{-\sqrt{3}i} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ \sqrt{3}i \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.)$$

$\boxed{2^0 \text{ CASO}}$ $\qquad \alpha^2 + 3 \neq 0$ cioè $\alpha \notin \{\sqrt{3}i, -\sqrt{3}i\}$

$$\mathbf{B}_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & -\alpha^2 & 1 & 1 \\ 0 & \alpha^2+3 & 1 & \alpha \\ 0 & 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix} \xrightarrow{E_2(\frac{1}{\alpha^2+3})} \begin{pmatrix} 1 & -\alpha^2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{\alpha^2+3} & \frac{\alpha}{\alpha^2+3} \\ 0 & 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix} = \mathbf{C}_\alpha$$

$\boxed{1^0 \text{ Sottocaso}}$ $\alpha = 0$ $\mathbf{C}_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{U}_0$

$\mathrm{rk}(\mathbf{A}_0) = 2$

Una base $\mathcal{B}_0$ di $C(\mathbf{A}_0)$ è $\mathcal{B}_0 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$.

Una base $\mathcal{D}_0$ di $R(\mathbf{A}_0)$ è $\mathcal{D}_0 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{1}{3} \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$.

$\boxed{2^0 \text{ Sottocaso}}$ $\alpha \notin \{\sqrt{3}i, -\sqrt{3}i, 0\}$

$$\mathbf{C}_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & -\alpha^2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{\alpha^2+3} & \frac{\alpha}{\alpha^2+3} \\ 0 & 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix} \xrightarrow{E_3(\frac{1}{\alpha})} \begin{pmatrix} 1 & -\alpha^2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{\alpha^2+3} & \frac{\alpha}{\alpha^2+3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{U}_\alpha$$

$\mathrm{rk}(A_\alpha) = 3$

Una base $\mathcal{B}_\alpha$ di $C(\mathbf{A}_\alpha)$ è $\mathcal{B}_\alpha = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} -\alpha^2 \\ 3 \\ -3\alpha^2 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha+1 \\ \alpha+3 \end{pmatrix} \right\}$.

Una base $\mathcal{D}_\alpha$ di $R(\mathbf{A}_\alpha)$ è $\mathcal{D}_\alpha = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -\overline{\alpha}^2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{1}{\overline{\alpha}^2+3} \\ \frac{\overline{\alpha}}{\overline{\alpha}^2+3} \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

(b) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}$

Una forma ridotta di Gauss per $\mathbf{A}$ è $\mathbf{U}_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ trovata nel 1^0 sottocaso.

Per il Teorema nullità+rango,

$$\dim N(\mathbf{A}) = \text{ (numero delle colonne di } \mathbf{A}) - \text{ rk } (\mathbf{A}) = 4 - 2 = 2.$$

Poichè $N(\mathbf{A}) = N(\mathbf{U}_0) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{C}^4 | \mathbf{U}_0\mathbf{x} = \mathbf{0}\}$, allora

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in N(\mathbf{A}) \iff \begin{cases} x_1 + x_3 + x_4 & = 0 \\ \quad x_2 + \frac{1}{3}x_3 & = 0 \end{cases}$$

Prendendo come parametri le variabili corrispondenti alle colonne libere di $\mathbf{U}_0$, ossia la 3^a e la 4^a, con la sostituzione all'indietro si ottiene

$$\begin{cases} x_3 &= & h \\ x_4 &= & k \\ x_2 &= & -\frac{1}{3}x_3 &= & -\frac{1}{3}h \\ x_1 &= & -x_3 - x_4 &= & -h-k \end{cases}$$

Quindi $N(\mathbf{A}) = N(\mathbf{U}_0) = \left\{ \begin{pmatrix} -h-k \\ -\frac{1}{3}h \\ h \\ k \end{pmatrix} | h,k \in \mathbb{C} \right\}$. Ponendo:

$$\mathbf{v}_1 \underset{\substack{\uparrow \\ \boxed{\begin{array}{c} h=1 \\ k=0 \end{array}}}}{=} \begin{pmatrix} -1 \\ -\frac{1}{3} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{v}_2 \underset{\substack{\uparrow \\ \boxed{\begin{array}{c} h=0 \\ k=1 \end{array}}}}{=} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

si ottiene che una base di $N(\mathbf{A})$ è

$$\left\{ \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -\frac{1}{3} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

ESERCIZIO TIPO 10

Sia $\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_1; \mathbf{v}_2; \dots; \mathbf{v}_n\} \subset K^n$, dove $K \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$.

Per vedere se $\mathcal{B}$ è una base o meno di K^n si puó procedere nel seguente modo:

– si costruisce la matrice $n \times n$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \dots & \mathbf{v}_n \end{pmatrix}$$

le cui colonne sono gli elementi di $\mathcal{B}$;

– si trova una forma ridotta di Gauss $\mathbf{U}$ per $\mathbf{A}$.

– Se rk($\mathbf{U}$)=n (ossia il numero delle colonne dominanti di $\mathbf{U}$, o, equivalentemente, il numero delle righe non nulle di $\mathbf{U}$ è n), allora $\mathcal{B}$ è una base di K^n, altrimenti (ossia se rk$(\mathbf{U}) < n$) $\mathcal{B}$ non è una base di K^n.

ESERCIZIO Si dica per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ l'insieme $\mathcal{B}_\alpha = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \\ 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha+1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$ è una base di $\mathbb{R}^3$.

Costruiamo una matrice le cui colonne siano gli elementi di $\mathcal{B}_\alpha$: $\mathbf{A}_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ \alpha & 0 & \alpha+1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

Il problema diventa stabilire per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ si ha che rk$\mathbf{A}_\alpha = 3$.

Facciamo un'eliminazione di Gauss su $\mathbf{A}_\alpha$.

$$\mathbf{A}_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ \alpha & 0 & \alpha+1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{31}(-1)E_{21}(-\alpha)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2\alpha & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{B}_\alpha$$

1^0 CASO: $\alpha = 0$ $\quad \mathbf{B}_0 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{32}(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{U}_0$

$$rk(\mathbf{A}_0) = rk(\mathbf{U}_0) = 2 \neq 3 \quad \Longrightarrow \quad \mathcal{B}_0 \quad \text{NON è una base di} \quad \mathbb{R}^3.$$

2^0 CASO: $\alpha \neq 0$ $\quad \mathbf{B}_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2\alpha & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_2(-1/2\alpha)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1/2\alpha \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{U}_\alpha$

$$rk(\mathbf{A}_\alpha) = rk(\mathbf{U}_\alpha) = 3 \quad \Longrightarrow \quad \mathcal{B}_\alpha \quad \text{E' una base di} \quad \mathbb{R}^3.$$

ESERCIZIO TIPO 11

Si calcoli la matrice di passaggio $M_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{B}'}$ da $\mathcal{B}'$ a $\mathcal{B}$, dove $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$ sono le seguenti basi ordinate di $\mathbb{R}^3$:

$$\mathcal{B} = \{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \}, \qquad \mathcal{B}' = \{ \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \}.$$

La matrice di passaggio $M_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{B}'}$ da $\mathcal{B}'$ a $\mathcal{B}$ è

$$M_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} C_{\mathcal{B}}(\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}) & C_{\mathcal{B}}(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}) & C_{\mathcal{B}}(\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}) \end{pmatrix}.$$

Per calcolarla, piuttosto che calcolare separatamente $C_{\mathcal{B}}(\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix})$, $C_{\mathcal{B}}(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix})$ e $C_{\mathcal{B}}(\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix})$, calcoliamo $C_{\mathcal{B}}(\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix})$ per un generico vettore $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$, e specializziamo la formula ottenuta ai tre diversi vettori $\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Poichè

$$C_{\mathcal{B}}(\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \delta \end{pmatrix} \quad | \quad \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \delta \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

allora

$$C_{\mathcal{B}}(\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \delta \end{pmatrix} \quad | \quad \begin{pmatrix} \alpha + 2\beta + \delta \\ \beta \\ \alpha - \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

ossia α, β e δ sono tali che

$$\begin{cases} \alpha + 2\beta + \delta = a \\ \beta = b \\ \alpha - \delta = c \end{cases} \implies \begin{cases} \alpha + \delta = a - 2b \\ \beta = b \\ \alpha - \delta = c \end{cases} \implies \begin{cases} \alpha = (a - 2b + c)/2 \\ \beta = b \\ \delta = (a - 2b - c)/2 \end{cases}$$

per cui

$$C_{\mathcal{B}}(\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} (a - 2b + c)/2 \\ b \\ (a - 2b - c)/2 \end{pmatrix}$$

Dunque

$$M_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

ESERCIZIO TIPO 12

Si consideri l'applicazione lineare $f : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^2$ definita da

$$f(\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} a_0 + a_2 \\ 2a_0 + a_1 \end{pmatrix}.$$

Si determini la matrice $\mathbf{A}$ associata ad f rispetto alle basi ordinate

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\} \quad \text{e} \quad \mathcal{D} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

su dominio e codominio rispettivamente.

La matrice che cerchiamo è

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} C_{\mathcal{D}}(f(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix})) & C_{\mathcal{D}}(f(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix})) & C_{\mathcal{D}}(f(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix})) \end{pmatrix}$$

Poichè

$$\underset{\uparrow \atop \boxed{\begin{matrix} a_0 = 1 \\ a_1 = 0 \\ a_2 = 1 \end{matrix}}}{f(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}}, \qquad \underset{\uparrow \atop \boxed{\begin{matrix} a_0 = 2 \\ a_1 = 1 \\ a_2 = 0 \end{matrix}}}{f(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}},$$

$$\underset{\uparrow \atop \boxed{\begin{matrix} a_0 = 1 \\ a_1 = 0 \\ a_2 = -1 \end{matrix}}}{f(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}},$$

allora

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} C_{\mathcal{D}}(\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}) & C_{\mathcal{D}}(\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}) & C_{\mathcal{D}}(\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}) \end{pmatrix}$$

Piuttosto che calcolare separatamente $C_{\mathcal{D}}(\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix})$, $C_{\mathcal{D}}(\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix})$ e $C_{\mathcal{D}}(\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix})$, calcoliamo $C_{\mathcal{D}}(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix})$ per un generico vettore $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2$, e specializziamo la formula ottenuta ai tre diversi vettori $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Poichè

$$C_{\mathcal{D}}(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \quad | \quad \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

allora

$$C_{\mathcal{D}}(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \quad | \quad \begin{pmatrix} \alpha+\beta \\ \alpha-\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

ossia α e β sono tali che $\begin{cases} \alpha+\beta = a \\ \alpha-\beta = b \end{cases}$, per cui $\begin{cases} \alpha = (a+b)/2 \\ \beta = (a-b)/2 \end{cases}$

Quindi

$$C_{\mathcal{D}}(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} (a+b)/2 \\ (a-b)/2 \end{pmatrix}$$

Dunque

$$\begin{array}{ccccccc} C_{\mathcal{D}}(\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}) & = & \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}, & \qquad & C_{\mathcal{D}}(\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}) & = & \begin{pmatrix} \frac{7}{2} \\ -\frac{3}{2} \end{pmatrix} \\ & \uparrow & & & & \uparrow & \\ & \boxed{\begin{array}{c} a=2 \\ b=2 \end{array}} & & & & \boxed{\begin{array}{c} a=2 \\ b=5 \end{array}} & \\ C_{\mathcal{D}}(\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}) & = & \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} & & & & \\ & \uparrow & & & & & \\ & \boxed{\begin{array}{c} a=0 \\ b=2 \end{array}} & & & & & \end{array}$$

e quindi

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & \frac{7}{2} & 1 \\ 0 & -\frac{3}{2} & -1 \end{pmatrix}.$$

ESERCIZIO TIPO 13

Sia $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & \frac{7}{2} & 1 \\ 0 & -\frac{3}{2} & -1 \end{pmatrix}$ la matrice associata ad un'applicazione lineare $f : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^2$ rispetto alle basi ordinate

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\} \quad \text{e} \quad \mathcal{D} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

su dominio e codominio rispettivamente. Si determini la matrice $\mathbf{A}'$ associata ad f rispetto alle basi ordinate

$$\mathcal{B}' = \{ \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \} \quad \text{e} \quad \mathcal{D}' = \{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix} \}$$

su dominio e codominio rispettivamente.

La matrice che cerchiamo è

$$\mathbf{A}' = \mathbf{M}^{-1}_{\mathcal{D} \leftarrow \mathcal{D}'} \mathbf{A} \mathbf{M}_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{B}'}$$

dove $\mathbf{M}_{\mathcal{D} \leftarrow \mathcal{D}'}$ è la matrice di passaggio da $\mathcal{D}'$ a $\mathcal{D}$, e $\mathbf{M}_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{B}'}$ è la matrice di passaggio da $\mathcal{B}'$ a $\mathcal{B}$.

Nell'ESERCIZIO TIPO 12 abbiamo visto che

$$C_{\mathcal{D}}(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} (a+b)/2 \\ (a-b)/2 \end{pmatrix}$$

quindi

$$\mathbf{M}_{\mathcal{D} \leftarrow \mathcal{D}'} = \begin{pmatrix} C_{\mathcal{D}}(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}) & C_{\mathcal{D}}(\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{3}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

per cui

$$\mathbf{M}^{-1}_{\mathcal{D} \leftarrow \mathcal{D}'} = \frac{1}{1(-\frac{1}{2}) - 0\frac{3}{2}} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

La matrice $\mathbf{M}_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{B}'}$ è già stata calcolata nell'ESERCIZIO TIPO 11:

$$\mathbf{M}_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

e quindi

$$\mathbf{A}' = \mathbf{M}^{-1}_{\mathcal{D} \leftarrow \mathcal{D}'} \mathbf{A} \mathbf{M}_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & \frac{7}{2} & 1 \\ 0 & -\frac{3}{2} & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 0 & -3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -2 & -1 & -4 \end{pmatrix}.$$

ESERCIZIO TIPO 14

Si verifichi che $\quad \phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_{\geq 0} \quad$ definita da $\quad \phi(\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix}) = |a_0 + a_1| + |a_0 - a_1| \quad$ è una norma.

$\boxed{1}$ $\qquad \phi(\mathbf{0}) = \phi(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}) = |0 + 0| + |0 - 0| = 0.$

Sia $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix}$. Poichè $\phi(\mathbf{v}) \geq 0$, per provare che

$$\mathbf{v} \neq \mathbf{0} \qquad \Longrightarrow \qquad \phi(\mathbf{v}) > 0$$

basta provare che

$$\mathbf{v} \neq \mathbf{0} \qquad \Longrightarrow \qquad \phi(\mathbf{v}) \neq 0,$$

ossia basta provare che

$$\phi(\mathbf{v}) = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \mathbf{v} = \mathbf{0}.$$

Ora:

$$\left.\begin{array}{c} \phi(\mathbf{v}) = 0 \\ \mathbf{v} = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} \end{array}\right\} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} |a_0 + a_1| = 0 \\ |a_0 - a_1| = 0 \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} a_0 + a_1 = 0 \\ a_0 - a_1 = 0 \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad a_0 = a_1 = 0 \quad \Longrightarrow \quad \mathbf{v} = \mathbf{0}.$$

$\boxed{2}$

$$\begin{aligned} \phi(\alpha \mathbf{v}) = \phi(\alpha \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix}) = \phi(\begin{pmatrix} \alpha a_0 \\ \alpha a_1 \end{pmatrix}) &= |\alpha a_0 + \alpha a_1| + |\alpha a_0 - \alpha a_1| = \\ &= |\alpha||a_0 + a_1| + |\alpha||a_0 - a_1| = |\alpha|(|a_0 + a_1| + |a_0 - a_1|) = |\alpha|\phi(\mathbf{v}). \end{aligned}$$

$\boxed{3}$ $\qquad$ Siano $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix}$ e $\mathbf{w} = \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned} \phi(\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \phi(\begin{pmatrix} a_0 + b_0 \\ a_1 + b_1 \end{pmatrix}) &= |(a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)| + |(a_0 + b_0) - (a_1 + b_1)| = \\ &= |(a_0 + a_1) + (b_0 + b_1)| + |(a_0 - a_1) + (b_0 - b_1)| \leq \\ &\leq |a_0 + a_1| + |b_0 + b_1| + |a_0 - a_1| + |b_0 - b_1| = \phi(\mathbf{v}) + \phi(\mathbf{w}). \end{aligned}$$

ESERCIZIO TIPO 15

Si verifichi che $(\cdot|\cdot) : \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$ definita da

$$\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \right) = \overline{x}_1 y_1 + 2\overline{x}_2 y_2$$

è un prodotto interno.

$\boxed{1}$ Siano $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ e $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$.

$$\overline{(\mathbf{y}|\mathbf{x})} \stackrel{?}{=} (\mathbf{x}|\mathbf{y})$$

$$\overline{(\mathbf{y}|\mathbf{x})} = \overline{\overline{y}_1 x_1 + 2\overline{y}_2 x_2} = y_1\overline{x}_1 + 2y_2\overline{x}_2 = (\mathbf{x}|\mathbf{y}).$$

$\boxed{2}$ Siano $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{z} = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$.

$$(\mathbf{x}|\alpha\mathbf{y} + \beta\mathbf{w}) \stackrel{?}{=} \alpha(\mathbf{x}|\mathbf{y}) + \beta(\mathbf{x}|\mathbf{w})$$

$$\begin{aligned}(\mathbf{x}|\alpha\mathbf{y} + \beta\mathbf{w}) &= \overline{x_1}(\alpha y_1 + \beta w_1) + 2\overline{x_2}(\alpha y_2 + \beta w_2) = \alpha\overline{x_1}y_1 + \beta\overline{x_1}w_1 + 2\alpha\overline{x_2}y_2 + 2\beta\overline{x_2}w_2 = \\ &= \alpha(\overline{x_1}y_1 + 2\overline{x_2}y_2) + \beta(\overline{x_1}w_1 + 2\overline{x_2}w_2) = \alpha(\mathbf{x}|\mathbf{y}) + \beta(\mathbf{x}|\mathbf{w}).\end{aligned}$$

$\boxed{3}$

- $(\mathbf{0}|\mathbf{0}) \stackrel{?}{=} 0$

•• $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \neq \mathbf{0} \quad \stackrel{?}{\Longrightarrow} \quad (\mathbf{x}|\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^+_{>0}$

- $(\mathbf{0}|\mathbf{0}) = 0 + 2 \times 0 = 0$

•• $(\mathbf{x}|\mathbf{x}) = \overline{x}_1 x_1 + 2\overline{x}_2 x_2 = |x_1|^2 + 2|x_2|^2$

Essendo $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$, si ha che $x_1 \neq 0$ oppure $x_2 \neq 0$, per cui $|x_1|^2 \in \mathbb{R}^+_{>0}$ oppure $|x_2|^2 \in \mathbb{R}^+_{>0}$.

Quindi $|x_1|^2 + 2|x_2|^2 \in \mathbb{R}^+_{>0}$.

ESERCIZIO TIPO 16

Si trovi una base ortonormale del sottospazio di $\mathbb{C}^4$

$$V = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ i \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ i \end{pmatrix} \rangle.$$

$\boxed{1^0\textbf{MODO}}$

$\boxed{1}$ Troviamo una base $\mathcal{B}_1$ di V.

Poniamo

$$\mathbf{w}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ i \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{w}_2 = \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{w}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{w}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ i \end{pmatrix}$$

e costruiamo la matrice $\mathbf{A} = (\, \mathbf{w}_1 \quad \mathbf{w}_2 \quad \mathbf{w}_3 \quad \mathbf{w}_4 \,)$, ossia una matrice tale che $C(\mathbf{A}) = V$.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & i & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ i & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & i \end{pmatrix} \xrightarrow[E_{31}(-i)]{} \begin{pmatrix} 1 & i & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & i \end{pmatrix} \xrightarrow[E_{42}(1)E_{32}(-1)]{} \begin{pmatrix} 1 & i & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\xrightarrow[E_{34}]{} \begin{pmatrix} 1 & i & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[E_3(-i)]{} \begin{pmatrix} 1 & i & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{U}$$

Dunque $\mathcal{B}_1 = \{\mathbf{w}_1; \mathbf{w}_2; \mathbf{w}_4\}$ è una base di $C(\mathbf{A}) = V$.

$\boxed{2}$ Troviamo una base ortogonale $\mathcal{B}_2$ di V: poniamo $\mathbf{v}_1 = \mathbf{w}_1, \mathbf{v}_2 = \mathbf{w}_2$ e $\mathbf{v}_3 = \mathbf{w}_4$, e applichiamo l'algoritmo di Gram-Schmidt a $\{\mathbf{v}_1; \mathbf{v}_2; \mathbf{v}_3\}$.

$$\mathbf{u}_1 = \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ i \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{u}_2 = \mathbf{v}_2 - \alpha_{12}\mathbf{u}_1, \qquad \mathbf{u}_1 \neq \mathbf{0} \quad \Longrightarrow \quad \alpha_{12} = \frac{(\mathbf{u}_1|\mathbf{v}_2)}{(\mathbf{u}_1|\mathbf{u}_1)}$$

$$(\mathbf{u}_1|\mathbf{v}_2) = \mathbf{u}_1^H\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = i$$

$$(\mathbf{u}_1|\mathbf{u}_1) = \mathbf{u}_1^H\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ i \\ 0 \end{pmatrix} = 2$$

$$\Longrightarrow \quad \alpha_{12} = i/2$$

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_2 &= \mathbf{v}_2 - \alpha_{12}\mathbf{u}_1 = \\ &= \mathbf{v}_2 - \frac{i}{2}\mathbf{u}_1 = \\ &= \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} - \frac{i}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ i \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{i}{2} \\ 1 \\ \frac{1}{2} \\ -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\mathbf{u}_3 = \mathbf{v}_3 - \alpha_{13}\mathbf{u}_1 - \alpha_{23}\mathbf{u}_2,$$

$$\mathbf{u}_1 \neq \mathbf{0} \quad \Longrightarrow \quad \alpha_{13} = \frac{(\mathbf{u}_1|\mathbf{v}_3)}{(\mathbf{u}_1|\mathbf{u}_1)}$$

$$(\mathbf{u}_1|\mathbf{v}_3) = \mathbf{u}_1^H\mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ i \end{pmatrix} = 0$$

$$\Longrightarrow \quad \alpha_{13} = 0$$

$$\mathbf{u}_2 \neq \mathbf{0} \quad \Longrightarrow \quad \alpha_{23} = \frac{(\mathbf{u}_2|\mathbf{v}_3)}{(\mathbf{u}_2|\mathbf{u}_2)}$$

$$(\mathbf{u}_2|\mathbf{v}_3) = \mathbf{u}_2^H\mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} -\frac{i}{2} & 1 & \frac{1}{2} & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ i \end{pmatrix} = -i$$

$$(\mathbf{u}_2|\mathbf{u}_2) = \mathbf{u}_2^H\mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} -\frac{i}{2} & 1 & \frac{1}{2} & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{i}{2} \\ 1 \\ \frac{1}{2} \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{5}{2}$$

$$\Longrightarrow \quad \alpha_{23} = -\frac{2}{5}i$$

$$\begin{aligned}\mathbf{u}_3 &= \mathbf{v}_3 - \alpha_{13}\mathbf{u}_1 - \alpha_{23}\mathbf{u}_2 = \\ &= \mathbf{v}_3 + \frac{2i}{5}\mathbf{u}_2 = \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ i \end{pmatrix} + \frac{2i}{5}\begin{pmatrix} \frac{i}{2} \\ 1 \\ \frac{1}{2} \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -1 \\ 2i \\ i \\ 3i \end{pmatrix}\end{aligned}$$

$\mathcal{B}_2 = \{\mathbf{u}_1; \mathbf{u}_2; \mathbf{u}_3\}$, dove

$$\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ i \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} i \\ 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}_3 = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -1 \\ 2i \\ i \\ 3i \end{pmatrix},$$

è una base ortogonale di V.

$\boxed{3}$ Troviamo una base ortonormale $\mathcal{B}$ di V, normalizzando gli elementi di $\mathcal{B}_2$.

$$\begin{aligned}\|\mathbf{u}_1\|_2 &= \sqrt{(\mathbf{u}_1|\mathbf{u}_1)} = \sqrt{2} \\ \|\mathbf{u}_2\|_2 &= \sqrt{(\mathbf{u}_2|\mathbf{u}_2)} = \sqrt{5/2} \\ \|\mathbf{u}_3\|_2 &= \sqrt{(\mathbf{u}_3|\mathbf{u}_3)} = \sqrt{\mathbf{u}_3^H\mathbf{u}_3} = \sqrt{\frac{1}{5}\begin{pmatrix} -1 & -2i & -i & -3i \end{pmatrix}\frac{1}{5}\begin{pmatrix} -1 \\ 2i \\ i \\ 3i \end{pmatrix}} = \frac{\sqrt{15}}{5}\end{aligned}$$

$\mathcal{B} = \{\frac{\mathbf{u}_1}{\|\mathbf{u}_1\|_2}; \frac{\mathbf{u}_2}{\|\mathbf{u}_2\|_2}; \frac{\mathbf{u}_3}{\|\mathbf{u}_3\|_2}\}$, dove

$$\frac{\mathbf{u}_1}{\|\mathbf{u}_1\|_2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ i \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \frac{\mathbf{u}_2}{\|\mathbf{u}_2\|_2} = \frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix} i \\ 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \frac{\mathbf{u}_3}{\|\mathbf{u}_3\|_2} = \frac{1}{\sqrt{15}}\begin{pmatrix} -1 \\ 2i \\ i \\ 3i \end{pmatrix},$$

è una base ortonormale di V.

$\boxed{2^0\textbf{MODO}}$

$\boxed{1}$ Costruiamo dapprima **un insieme di generatori ortogonale di V**: poniamo

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ i \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ i \end{pmatrix}$$

e applichiamo l'algoritmo di Gram-Schimdt a $\{\mathbf{v}_1; \mathbf{v}_2; \mathbf{v}_3; \mathbf{v}_4\}$. Otterremo 4 vettori, $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4$, e l'insieme $\{\mathbf{u}_1; \mathbf{u}_2; \mathbf{u}_3; \mathbf{u}_4\}$ sarà un insieme di generatori ortogonale di V.

Per sapere se alcuni degli $\mathbf{u}_i$ saranno nulli, e in tal caso quali, troviamo innanzitutto una forma ridotta di Gauss U della matrice A che ha come colnne $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4$: le eventuali colonne libere di U corrisponderanno agli $\mathbf{u}_i$ nulli.

$$\mathbf{A} = (\,\mathbf{v}_1 \quad \mathbf{v}_2 \quad \mathbf{v}_3 \quad \mathbf{v}_4\,) = \begin{pmatrix} 1 & i & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ i & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & i \end{pmatrix} \xrightarrow[E_{31}(-i)]{} \begin{pmatrix} 1 & i & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & i \end{pmatrix} \xrightarrow[E_{42}(1)E_{32}(-1)]{}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & i & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \end{pmatrix} \xrightarrow[E_{34}]{} \begin{pmatrix} 1 & i & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[E_3(-i)]{} \begin{pmatrix} 1 & i & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{U}$$

Poichè $\mathbf{U}$ ha come unica colonna libera la 3^a, allora applicando l'algoritmo di Gram-Schimdt a $\{\mathbf{v}_1; \mathbf{v}_2; \mathbf{v}_3; \mathbf{v}_4\}$ otterremo $\mathbf{u}_3 = \mathbf{0}$.

$$\mathbf{u}_1 = \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ i \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{u}_2 = \mathbf{v}_2 - \alpha_{12}\mathbf{u}_1, \qquad \mathbf{u}_1 \neq \mathbf{0} \quad \Longrightarrow \quad \alpha_{12} = \frac{(\mathbf{u}_1|\mathbf{v}_2)}{(\mathbf{u}_1|\mathbf{u}_1)}$$

$$(\mathbf{u}_1|\mathbf{v}_2) = \mathbf{u}_1^H\mathbf{v}_2 = (\,1 \quad 0 \quad -i \quad 0\,) \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = i$$

$$(\mathbf{u}_1|\mathbf{u}_1) = \mathbf{u}_1^H\mathbf{u}_1 = (\,1 \quad 0 \quad -i \quad 0\,) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ i \\ 0 \end{pmatrix} = 2$$

$$\Longrightarrow \quad \alpha_{12} = i/2$$

$$\mathbf{u}_2 = \mathbf{v}_2 - \alpha_{12}\mathbf{u}_1 = \mathbf{v}_2 - \frac{i}{2}\mathbf{u}_1 =$$

$$= \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} - \frac{i}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ i \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{i}{2} \\ 1 \\ \frac{1}{2} \\ -1 \end{pmatrix}$$

$\mathbf{u}_3 = \mathbf{v}_3 - \alpha_{13}\mathbf{u}_1 - \alpha_{23}\mathbf{u}_2,$

$$\mathbf{u}_1 \neq \mathbf{0} \quad \Longrightarrow \quad \alpha_{13} = \frac{(\mathbf{u}_1|\mathbf{v}_3)}{(\mathbf{u}_1|\mathbf{u}_1)}$$

$$(\mathbf{u}_1|\mathbf{v}_3) = \mathbf{u}_1^H\mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = i$$

$$(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_1) = 2$$

$$\Longrightarrow \quad \alpha_{13} = \frac{i}{2}$$

$$\mathbf{u}_2 \neq \mathbf{0} \quad \Longrightarrow \quad \alpha_{23} = \frac{(\mathbf{u}_2|\mathbf{v}_3)}{(\mathbf{u}_2|\mathbf{u}_2)}$$

$$(\mathbf{u}_2|\mathbf{v}_3) = \mathbf{u}_2^H\mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} -\frac{i}{2} & 1 & \frac{1}{2} & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$= -1 - \frac{1}{2} - 1 = -\frac{5}{2}$$

$$(\mathbf{u}_2|\mathbf{u}_2) = \mathbf{u}_2^H\mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} -\frac{i}{2} & 1 & \frac{1}{2} & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{i}{2} \\ 1 \\ \frac{1}{2} \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{5}{2}$$

$$\Longrightarrow \quad \alpha_{23} = -1$$

$$\mathbf{u}_3 = \mathbf{v}_3 - \alpha_{13}\mathbf{u}_1 - \alpha_{23}\mathbf{u}_2 =$$

$$= \mathbf{v}_3 - \frac{i}{2}\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{i}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ i \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{i}{2} \\ 1 \\ \frac{1}{2} \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\mathbf{u}_4 = \mathbf{v}_4 - \alpha_{14}\mathbf{u}_1 - \alpha_{24}\mathbf{u}_2 - \alpha_{34}\mathbf{u}_3$

$$\mathbf{u}_1 \neq \mathbf{0} \quad \Longrightarrow \quad \alpha_{14} = \frac{(\mathbf{u}_1|\mathbf{v}_4)}{(\mathbf{u}_1|\mathbf{u}_1)}$$

$$(\mathbf{u}_1|\mathbf{v}_4) = \mathbf{u}_1^H\mathbf{v}_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ i \end{pmatrix} = 0$$

$$\Longrightarrow \quad \alpha_{14} = 0$$

$$\mathbf{u}_2 \neq \mathbf{0} \quad \Longrightarrow \quad \alpha_{24} = \frac{(\mathbf{u}_2|\mathbf{v}_4)}{(\mathbf{u}_2|\mathbf{u}_2)}$$

$$(\mathbf{u}_2|\mathbf{v}_4) = \mathbf{u}_2^H \mathbf{v}_4 = \begin{pmatrix} -\frac{i}{2} & 1 & \frac{1}{2} & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ i \end{pmatrix} = -i$$

$$(\mathbf{u}_2|\mathbf{u}_2) = \mathbf{u}_2^H \mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} -\frac{i}{2} & 1 & \frac{1}{2} & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{i}{2} \\ 1 \\ \frac{1}{2} \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{5}{2}$$

$$\Longrightarrow \quad \alpha_{24} = -\frac{2}{5}i$$

$$\mathbf{u}_3 = \mathbf{0} \quad \Longrightarrow \quad \alpha_{34} = 0 \quad \text{per def.}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_4 &= \mathbf{v}_4 - \alpha_{24}\mathbf{u}_2 = \\ &= \mathbf{v}_4 + \frac{2i}{5}\mathbf{u}_2 = \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ i \end{pmatrix} + \frac{2i}{5}\begin{pmatrix} \frac{i}{2} \\ 1 \\ \frac{1}{2} \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -1 \\ 2i \\ i \\ 3i \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Dunque $\left\{ \mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ i \\ 0 \end{pmatrix}; \mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} \frac{i}{2} \\ 1 \\ \frac{1}{2} \\ -1 \end{pmatrix}; \mathbf{u}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \mathbf{u}_4 = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -1 \\ 2i \\ i \\ 3i \end{pmatrix} \right\}$ è un insieme di generatori ortogonale di V.

$\boxed{2}$ Costruiamo **una base ortogonale di V** togliendo dall'insieme di generatori ortogonale di V trovato al punto $\boxed{1}$ gli eventuali $\mathbf{u}_i$ nulli. In questo caso poniamo:

$$\mathbf{w}_1 = \mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ i \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{w}_2 = \mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} \frac{i}{2} \\ 1 \\ \frac{1}{2} \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{w}_3 = \mathbf{u}_4 = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -1 \\ 2i \\ i \\ 3i \end{pmatrix}.$$

L'insieme $\left\{ \mathbf{w}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ i \\ 0 \end{pmatrix}; \mathbf{w}_2 = \begin{pmatrix} \frac{i}{2} \\ 1 \\ \frac{1}{2} \\ -1 \end{pmatrix}; \mathbf{w}_3 = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -1 \\ 2i \\ i \\ 3i \end{pmatrix} \right\}$ è una base ortogonale di V.

$\boxed{3}$ Costruiamo **base ortonormale di V** normalizzando la base ortogonale trovata al punto $\boxed{2}$, ossia dividendo ciascun elemento della base ortogonale trovata in $\boxed{2}$ per la propria norma euclidea.

Cominciamo con il calcolare la norma euclidea di $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3$:

$$\|\mathbf{w}_1\|_2 = \sqrt{(\mathbf{u}_1|\mathbf{u}_1)} = \sqrt{2}$$
$$\|\mathbf{w}_2\|_2 = \sqrt{(\mathbf{u}_2|\mathbf{u}_2)} = \sqrt{5/2}$$
$$\|\mathbf{w}_3\|_2 = \sqrt{(\mathbf{u}_4|\mathbf{u}_4)} = \sqrt{\mathbf{u}_4^H\mathbf{u}_4} = \sqrt{\frac{1}{5}\begin{pmatrix} -1 & -2i & -i & -3i \end{pmatrix}\frac{1}{5}\begin{pmatrix} -1 \\ 2i \\ i \\ 3i \end{pmatrix}} = \frac{\sqrt{15}}{5}$$

Allora $\mathcal{B} = \{\frac{\mathbf{w}_1}{\|\mathbf{w}_1\|_2}; \frac{\mathbf{w}_2}{\|\mathbf{w}_2\|_2}; \frac{\mathbf{w}_3}{\|\mathbf{w}_3\|_2}\}$, dove

$$\frac{\mathbf{w}_1}{\|\mathbf{w}_1\|_2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ i \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \frac{\mathbf{w}_2}{\|\mathbf{w}_2\|_2} = \frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix} i \\ 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \frac{\mathbf{w}_3}{\|\mathbf{w}_3\|_2} = \frac{1}{\sqrt{15}}\begin{pmatrix} -1 \\ 2i \\ i \\ 3i \end{pmatrix},$$

è una base ortonormale di V.

ESERCIZIO TIPO 17

Si calcoli la proiezione ortogonale del vettore $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$ sul sottospazio $U = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ i \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ i \end{pmatrix} \rangle$ di $\mathbb{C}^4$.

$\boxed{1}$ Troviamo una base ortonormale di U. Dall'ESERCIZIO TIPO 16 otteniamo che

$$\left\{ \mathbf{u}_1^* = \frac{\mathbf{u}_1}{\|\mathbf{u}_1\|_2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ i \\ 0 \end{pmatrix}; \mathbf{u}_2^* = \frac{\mathbf{u}_2}{\|\mathbf{u}_2\|_2} = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} i \\ 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}; \mathbf{u}_3^* = \frac{\mathbf{u}_3}{\|\mathbf{u}_3\|_2} = \frac{1}{\sqrt{15}} \begin{pmatrix} -1 \\ 2i \\ i \\ 3i \end{pmatrix} \right\}$$

è una base ortonormale di U.

$\boxed{2}$ La proiezione ortogonale di $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$ su U è

$$P_U(\mathbf{v}) = (\mathbf{u}_1^*|\mathbf{v})\mathbf{u}_1^* + (\mathbf{u}_2^*|\mathbf{v})\mathbf{u}_2^* + (\mathbf{u}_3^*|\mathbf{v})\mathbf{u}_3^*$$

dove

$$(\mathbf{u}_1^*|\mathbf{v}) = (\mathbf{u}_1^*)^H\mathbf{v} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot 2 \cdot i = \sqrt{2} \cdot i$$

$$(\mathbf{u}_2^*|\mathbf{v}) = (\mathbf{u}_2^*)^H\mathbf{v} = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} -i & 2 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

$$(\mathbf{u}_3^*|\mathbf{v}) = (\mathbf{u}_3^*)^H\mathbf{v} = \frac{1}{\sqrt{15}} \begin{pmatrix} -1 & -2i & -i & -3i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

Quindi

$$P_U(\mathbf{v}) = \sqrt{2} \cdot i \cdot \mathbf{u}_1^* = \sqrt{2} \cdot i \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ i \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

ESERCIZIO TIPO 18

Sia $\mathbf{A}(z) = \begin{pmatrix} z & \overline{z} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & z-i \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, dove $z \in \mathbb{C}$.

Si dica per quali $z \in \mathbb{C}$ la matrice $\mathbf{A}(z)$ è singolare.

$\mathbf{A}(z)$ è singolare se e solo se $\mathrm{Det}(\mathbf{A}(z)) = 0$. Calcoliamo dunque $\mathrm{Det}(\mathbf{A}(z))$.

$$\mathrm{Det}(\mathbf{A}(z)) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{sviluppato rispetto} \\ \text{alla } 2^a \text{ riga}}}{=} (-1)^{2+3}\mathrm{Det}\begin{pmatrix} z & \overline{z} & 0 \\ 1 & 1 & z-i \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{sviluppato rispetto} \\ \text{alla } 3^a \text{ colonna}}}{=} -(z-i)(-1)^{2+3}\mathrm{Det}\begin{pmatrix} z & \overline{z} \\ 1 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= (z-i)(z-\overline{z})$$

Quindi $\mathbf{A}(z)$ è singolare se e solo se $(z-i)(z-\overline{z}) = 0$, ossia se e solo se o $z - i = 0$, e quindi $z = i$, oppure $z - \overline{z} = 0$, e quindi $z = \overline{z}$. Poichè

$$z = \overline{z} \quad \Longleftrightarrow \quad z \in \mathbb{R},$$

allora

$$\mathbf{A}(z) \text{ è singolare} \quad \Longleftrightarrow \quad z \in \mathbb{R} \cup \{i\}.$$

ESERCITAZIONI* 1

$\boxed{1}$ Di ciascuna delle seguenti matrici si dica se è scalare, diagonale, triangolare superiore, triangolare inferiore o nessuna delle precedenti:

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 4 & 0 \\ 4 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

$\boxed{2}$ Siano $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1+2i & 0 \\ 5 & -i \end{pmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 18i & 0 \\ -1-9i & -1 \\ i & 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1-i & 3 \\ 0 & -2 \\ 2 & -i \end{pmatrix}$ e $\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -i & -1 & 0 \end{pmatrix}$. Si calcoli $-2\mathbf{A} + \mathbf{D}(\mathbf{CA} + i\mathbf{B})$.

$\boxed{3}$ Si trovino tutte le matrici reali 2×2 $\mathbf{A}$ tali che $\mathbf{A}^2 = \mathbf{A}$.

$\boxed{4}$ Siano $\mathbf{A}$ una matrice reale $n \times 2$ non nulla in cui la prima colonna è il triplo della seconda. Si trovino tutte le matrici reali diagonali $\mathbf{D}$ tali che $\mathbf{AD}$ abbia tutte le colonne uguali.

$\boxed{5}$ Siano $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2-3i & 1+i \\ 0 & i \\ 1-i & 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{B} = (2 \quad 1+i)$, $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 3+5i \\ 6 \\ 2-2i \end{pmatrix}$, $\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 7+i & 2+3i \\ 3-2i & 0 \end{pmatrix}$.

(a) Di ciascuna delle precedenti matrici si calcolino la trasposta, la coniugata e la H-trasposta.

(b) Si calcoli $(\mathbf{A}^H\overline{\mathbf{C}} + i\mathbf{B}^T)\overline{\mathbf{B}} + (1+3i)\mathbf{D}^H$.

$\boxed{6}$ Di ciascuna delle seguenti matrici si dica se è simmetrica, anti-simmetrica, hermitiana, anti-hermitiana o nessuna delle precedenti:

$$\begin{pmatrix} 2 & 2+3i \\ 2-3i & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 2+3i \\ 2+3i & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2+3i \\ -2+3i & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2+3i \\ -2-3i & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$\boxed{7}$ Si calcolino la parte hermitiana e la parte anti-hermitiana della matrice complessa $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} i & 1 \\ 3 & 1+i \end{pmatrix}$.

$\boxed{8}$ Sia $\mathbf{A} = \left(\begin{array}{c|c} \mathbf{0}^T & -1 \\ \hline \mathbf{I}_{n-1} & \mathbf{v} \end{array}\right)$, dove $\mathbf{0}$ è il vettore colonna con $n-1$ componenti uguali a 0 e $\mathbf{v}$ è il vettore colonna con $n-1$ componenti uguali a -1 (quindi $\mathbf{A}$ ha tutte le componenti dell'ultima colonna uguali a -1). Sia $\mathbf{B}$ una matrice $n \times n$ in cui la prima colonna ha tutte le componenti uguali a -1. Si provi che la matrice $\mathbf{ABe}_1 = \mathbf{e}_1$. (Suggerimento: si suddivida $\mathbf{B}$ a blocchi mettendo in evidenza la sua ultima riga e la sua prima colonna e si calcoli il prodotto $\mathbf{AB}$ a blocchi).

SVOLGIMENTO ESERCITAZIONI* 1

$\boxed{1}$ Di ciascuna delle seguenti matrici si dica se è scalare, diagonale, triangolare superiore, triangolare inferiore o nessuna delle precedenti:

$$\begin{pmatrix}4&0\\0&3\\0&0\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}4&0\\0&4\\0&0\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}4&0&0\\0&0&0\\0&0&4\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}4&0&0\\4&4&0\\0&0&4\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}4&0&0\\0&4&0\\0&0&3\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}4&0&0\\0&4&0\\0&0&4\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}4&0&4\\0&4&0\\0&0&4\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}4&4&0\\4&4&0\\0&0&4\end{pmatrix}.$$

scalari: $\begin{pmatrix}4&0&0\\0&4&0\\0&0&4\end{pmatrix}$

diagonali: $\begin{pmatrix}4&0&0\\0&0&0\\0&0&4\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}4&0&0\\0&4&0\\0&0&3\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}4&0&0\\0&4&0\\0&0&4\end{pmatrix}$

triang. sup.: $\begin{pmatrix}4&0&0\\0&0&0\\0&0&4\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}4&0&4\\0&4&0\\0&0&4\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}4&0&0\\0&4&0\\0&0&3\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}4&0&0\\0&4&0\\0&0&4\end{pmatrix}$

triang. inf.: $\begin{pmatrix}4&0&0\\0&0&0\\0&0&4\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}4&0&0\\4&4&0\\0&0&4\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}4&0&0\\0&4&0\\0&0&3\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}4&0&0\\0&4&0\\0&0&4\end{pmatrix},$

nessuna delle precedenti: $\begin{pmatrix}4&0\\0&3\\0&0\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}4&0\\0&4\\0&0\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}4&4&0\\4&4&0\\0&0&4\end{pmatrix}$

$\boxed{2}$ Siano $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1+2i&0\\5&-i\end{pmatrix}$, $\mathbf{B}=\begin{pmatrix}18i&0\\-1-9i&-1\\i&1\end{pmatrix}$, $\mathbf{C}=\begin{pmatrix}1-i&3\\0&-2\\2&-i\end{pmatrix}$ e $\mathbf{D}=\begin{pmatrix}1&1&2\\-i&-1&0\end{pmatrix}$. Si calcoli $-2\mathbf{A}+\mathbf{D}(\mathbf{CA}+i\mathbf{B})$.

$$-2\mathbf{A}=-2\begin{pmatrix}1+2i&0\\5&-i\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2-4i&0\\-10&2i\end{pmatrix}$$

$$\mathbf{CA}=\begin{pmatrix}1-i&3\\0&-2\\2&-i\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1+2i&0\\5&-i\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(1-i)(1+2i)+3\times 5&(1-i)\times 0+3\times(-i)\\0\times(1+2i)-2\times 5&0\times 0-2\times(-i)\\2\times(1+2i)-i\times 5&2\times 0-i\times(-i)\end{pmatrix}=$$
$$=\begin{pmatrix}1-i+2i+2+15&-3i\\-10&2i\\2+4i-5i&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}18+i&-3i\\-10&2i\\2-i&-1\end{pmatrix}$$

$$i\mathbf{B} = i\begin{pmatrix} 18i & 0 \\ -1-9i & -1 \\ i & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -18 & 0 \\ 9-i & -i \\ -1 & i \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{CA} + i\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 18+i & -3i \\ -10 & 2i \\ 2-i & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -18 & 0 \\ 9-i & -i \\ -1 & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i & -3i \\ -1-i & i \\ 1-i & -1+i \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{D}(\mathbf{CA} + i\mathbf{B}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -i & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} i & -3i \\ -1-i & i \\ 1-i & -1+i \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} 1\times i + 1\times(-1-i) + 2\times(1-i) & 1\times(-3i) + 1\times i + 2\times(-1+i) \\ -i\times i - 1\times(-1-i) + 0\times(1-i) & -i\times(-3i) - 1\times i + 0\times(-1+i) \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} i-1-i+2-2i & -3i+i-2+2i \\ 1+1+i & -3-i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-2i & -2 \\ 2+i & -3-i \end{pmatrix}$$

$$-2\mathbf{A} + \mathbf{D}(\mathbf{CA} + i\mathbf{B}) = \begin{pmatrix} -2-4i & 0 \\ -10 & 2i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1-2i & -2 \\ 2+i & -3-i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1-6i & -2 \\ -8+i & -3+i \end{pmatrix}$$

$\boxed{3}$ Si trovino tutte le matrici reali 2×2 $\mathbf{A}$ tali che $\mathbf{A}^2 = \mathbf{A}$.

Sia $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ una matrice reale 2×2. Poichè

$$\mathbf{A}^2 = \mathbf{AA} = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2+yz & y(x+t) \\ z(x+t) & t^2+yz \end{pmatrix},$$

la condizione $\mathbf{A}^2 = \mathbf{A}$ equivale a

$$(*) \qquad \begin{cases} x^2+yz = x \\ y(x+t) = y \\ z(x+t) = z \\ t^2+yz = t \end{cases}.$$

Studiamo separatamente i casi $y = 0$ e $y \neq 0$.

Il caso $y = 0$.

Se $y = 0$, sostituendo in $(*)$ otteniamo $\begin{cases} x^2 = x \\ z(x+t) = z \\ t^2 = t \end{cases}$.

Dalla 1^a e dalla 3^a equazione ricaviamo rispettivamente $x \in \{0,1\}$ e $t \in \{0,1\}$.

Dalla 2^a equazione deduciamo che o $z = 0$ oppure $t = 1-x$.

Se $z = 0$, le matrici che si ottengono sono quindi:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Se invece $z \neq 0$, dovendo allora essere $t = 1 - x$ e $x, t \in \{0, 1\}$, (per cui x e t non sono entrambi uguali a 0 nè entrambi uguali a 1) le matrici che si ottengono sono:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ z & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ z & 0 \end{pmatrix} \quad \text{con} \quad z \neq 0.$$

Il caso $y \neq 0$.

Se $y \neq 0$, dalla 2^a equazione di $(*)$ si ricava che $t = 1 - x$, per cui la 3^a equazione di $(*)$ puó essere omessa. Inoltre la 4^a si ottiene dalla 1^a sostituendo $x = 1 - t$.

Dunque se $y \neq 0$, $(*)$ è equivalente a $\begin{cases} x^2 + yz = x \\ t = 1 - x \end{cases}$, e la 1^a equazione è equivalente a $z = \frac{x(1-x)}{y}$ (possiamo dividere per y essendo $y \neq 0$).

Le matrici che si ottengono in questo secondo caso sono tutte le matrici del tipo:

$$\begin{pmatrix} x & y \\ \frac{x(1-x)}{y} & 1 - x \end{pmatrix}, \quad \text{con} \quad x, y \in \mathbb{R}, \quad y \neq 0.$$

$\boxed{4}$ Siano $\mathbf{A}$ una matrice reale $n \times 2$ non nulla in cui la prima colonna è il triplo della seconda. Si trovino tutte le matrici reali diagonali $\mathbf{D}$ tali che $\mathbf{AD}$ abbia tutte le colonne uguali.

Poichè $\mathbf{A}$ ha due colonne ed esiste $\mathbf{AD}$, allora $\mathbf{D}$ ha due righe. Quindi, essendo $\mathbf{D}$ diagonale reale, è $\mathbf{D} = \begin{pmatrix} d_1 & 0 \\ 0 & d_2 \end{pmatrix}$ per opportuni numeri reali d_1 e d_2.

Dalla condizione che la prima colonna di $\mathbf{A}$ è il triplo della seconda segue che se $\mathbf{c}$ è la seconda colonna di $\mathbf{A}$ (quindi un vettore colonna con n coordinate), allora $\mathbf{A} = (\, 3\mathbf{c} \quad \mathbf{c}\,)$, per cui

$$\mathbf{AD} = (\, 3\mathbf{c} \quad \mathbf{c}\,) \begin{pmatrix} d_1 & 0 \\ 0 & d_2 \end{pmatrix} = (\, 3d_1\mathbf{c} \quad d_2\mathbf{c}\,).$$

A questo punto la condizione che $\mathbf{AD}$ abbia le colonne uguali comporta che $3d_1\mathbf{c} = d_2\mathbf{c}$.

Se fosse $\mathbf{c} = \mathbf{0}$ non potremmo trarre alcuna conclusione su d_1 e d_2. Ma $\mathbf{c} \neq \mathbf{0}$, altrimenti entrambe le colonne di $\mathbf{A}$ sarebbero nulle, mentre $\mathbf{A}$ è supposta non nulla. Ora

$$\left.\begin{array}{c} 3d_1\mathbf{c} = d_2\mathbf{c} \\ \\ \mathbf{c} \neq \mathbf{0} \end{array}\right\} \quad \Longrightarrow \quad 3d_1 = d_2,$$

per cui ogni matrice $\mathbf{D} = \begin{pmatrix} d & 0 \\ 0 & 3d \end{pmatrix}$ con d numero reale è soluzione del nostro problema.

$\boxed{5}$ Siano $\quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 - 3i & 1 + i \\ 0 & i \\ 1 - i & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = (\, 2 \quad 1 + i\,), \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 3 + 5i \\ 6 \\ 2 - 2i \end{pmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{pmatrix} 7 + i & 2 + 3i \\ 3 - 2i & 0 \end{pmatrix}.$

(a) Di ciascuna delle precedenti matrici si calcolino la trasposta, la coniugata e la H-trasposta.

(b) Si calcoli $(\mathbf{A}^H\overline{\mathbf{C}} + i\mathbf{B}^T)\overline{\mathbf{B}} + (1 + 3i)\mathbf{D}^H$.

$$\mathbf{A}^T = \begin{pmatrix} 2-3i & 0 & 1-i \\ 1+i & i & 1 \end{pmatrix} \qquad \overline{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} 2+3i & 1-i \\ 0 & -i \\ 1+i & 1 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{A}^H = \begin{pmatrix} 2+3i & 0 & 1+i \\ 1-i & -i & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{B}^T = \begin{pmatrix} 2 \\ 1+i \end{pmatrix} \qquad \overline{\mathbf{B}} = \begin{pmatrix} 2 & 1-i \end{pmatrix} \qquad \mathbf{B}^H = \begin{pmatrix} 2 \\ 1-i \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{C}^T = \begin{pmatrix} 3+5i & 6 & 2-2i \end{pmatrix} \qquad \overline{\mathbf{C}} = \begin{pmatrix} 3-5i \\ 6 \\ 2+2i \end{pmatrix} \qquad \mathbf{C}^H = \begin{pmatrix} 3-5i & 6 & 2+2i \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{D}^T = \begin{pmatrix} 7+i & 3-2i \\ 2+3i & 0 \end{pmatrix} \qquad \overline{\mathbf{D}} = \begin{pmatrix} 7-i & 2-3i \\ 3+2i & 0 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{D}^H = \begin{pmatrix} 7-i & 3+2i \\ 2-3i & 0 \end{pmatrix}$$

$(\mathbf{A}^H\overline{\mathbf{C}} + i\mathbf{B}^T)\overline{\mathbf{B}} + (1+3i)\mathbf{D}^H =$

$$= (\begin{pmatrix} 2+3i & 0 & 1+i \\ 1-i & -i & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3-5i \\ 6 \\ 2+2i \end{pmatrix} + i\begin{pmatrix} 2 \\ 1+i \end{pmatrix})\begin{pmatrix} 2 & 1-i \end{pmatrix} + (1+3i)\begin{pmatrix} 7-i & 3+2i \\ 2-3i & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= (\begin{pmatrix} (2+3i)(3-5i)+(1+i)(2+2i) \\ (1-i)(3-5i)-6i+2+2i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2i \\ i(1+i) \end{pmatrix})\begin{pmatrix} 2 & 1-i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} (1+3i)(7-i) & (1+3i)(3+2i) \\ (1+3i)(2-3i) & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 6+9i-10i+15+2+2i+2i-2 \\ 3-3i-5i-5-6i+2+2i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ -1+i \end{pmatrix})\begin{pmatrix} 2 & 1-i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7+21i-i+3 & 3+9i+2i-6 \\ 2+6i-3i+9 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= (\begin{pmatrix} 21+3i \\ -12i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2i \\ -1+i \end{pmatrix})\begin{pmatrix} 2 & 1-i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 10+20i & -3+11i \\ 11+3i & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 21+5i \\ -1-11i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1-i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 10+20i & -3+11i \\ 11+3i & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2(21+5i) & (21+5i)(1-i) \\ 2(-1-11i) & (-1-11i)(1-i) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 10+20i & -3+11i \\ 11+3i & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 42+10i & 21+5i-21i+5 \\ -2-22i & -1-11i+i-11 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 10+20i & -3+11i \\ 11+3i & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 42+10i & 26-16i \\ -2-22i & -12-10i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 10+20i & -3+11i \\ 11+3i & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 52+30i & 23-5i \\ 9-19i & -12-10i \end{pmatrix}$$

$\boxed{6}$ Di ciascuna delle seguenti matrici si dica se è simmetrica, anti-simmetrica, hermitiana, anti-hermitiana o nessuna delle precedenti:

$$\begin{pmatrix} 2 & 2+3i \\ 2-3i & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 2+3i \\ 2+3i & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2+3i \\ -2+3i & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2+3i \\ -2-3i & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

simmetriche:	$\begin{pmatrix} 2 & 2+3i \\ 2+3i & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$
anti-simmetriche:	$\begin{pmatrix} 0 & 2+3i \\ -2-3i & 0 \end{pmatrix}$
hermitiane:	$\begin{pmatrix} 2 & 2+3i \\ 2-3i & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$
anti-hermitiane:	$\begin{pmatrix} 0 & 2+3i \\ -2+3i & 0 \end{pmatrix}$
nessuna delle precedenti:	$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$\boxed{7}$ Si calcolino la parte hermitiana e la parte anti-hermitiana della matrice complessa $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1-i & 2 \\ -4 & 2+3i \end{pmatrix}$.

Poichè $\mathbf{A}^H = \begin{pmatrix} 1+i & -4 \\ 2 & 2-3i \end{pmatrix}$, la parte hermitiana di $\mathbf{A}$ è

$$\frac{\mathbf{A}+\mathbf{A}^H}{2} = \frac{1}{2}(\begin{pmatrix} 1-i & 2 \\ -4 & 2+3i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1+i & -4 \\ 2 & 2-3i \end{pmatrix}) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix},$$

e la parte anti-hermitiana di $\mathbf{A}$ è

$$\frac{\mathbf{A}-\mathbf{A}^H}{2} = \frac{1}{2}(\begin{pmatrix} 1-i & 2 \\ -4 & 2+3i \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1+i & -4 \\ 2 & 2-3i \end{pmatrix}) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -2i & 6 \\ -6 & 6i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -i & 3 \\ -3 & 3i \end{pmatrix}.$$

$\boxed{8}$ Sia $\mathbf{A} = \left(\begin{array}{c|c} \mathbf{0}^T & -1 \\ \hline \mathbf{I}_{n-1} & \mathbf{v} \end{array}\right)$, dove $\mathbf{0}$ è il vettore colonna con $n-1$ componenti uguali a 0 e $\mathbf{v}$ è il vettore colonna con $n-1$ componenti uguali a -1 (quindi $\mathbf{A}$ ha tutte le componenti dell'ultima colonna uguali a -1). Sia $\mathbf{B}$ una matrice $n \times n$ in cui la prima colonna ha tutte le componenti uguali a -1. Si provi che la matrice $\mathbf{ABe}_1 = \mathbf{e}_1$. (Suggerimento: si suddivida $\mathbf{B}$ a blocchi mettendo in evidenza la sua ultima riga e la sua prima colonna e si calcoli il prodotto $\mathbf{AB}$ a blocchi).

Seguendo il suggerimento, suddividiamo la matrice $\mathbf{B}$ a blocchi mettendo in evidenza la sua ultima riga e la sua prima colonna:

$$\mathbf{B} = \left(\begin{array}{c|c} \mathbf{v} & \mathbf{D} \\ \hline -1 & \mathbf{b}^T \end{array}\right).$$

Vogliamo innanzitutto vedere che con tale suddivisione **è possibile** calcolare il prodotto $\mathbf{AB}$ a blocchi. Poichè entrambe $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ sono matrici con 2 righe di blocchi e 2 colonne di blocchi, allora, se il prodotto a blocchi di $\mathbf{A}$ per $\mathbf{B}$ si puó fare, anche $\mathbf{AB}$ avrà 2 righe di blocchi e 2 colonne di blocchi:

$$\mathbf{AB} = \left(\begin{array}{c|c} \mathbf{X} & \mathbf{Y} \\ \hline \mathbf{Z} & \mathbf{T} \end{array}\right).$$

Il problema è dunque verificare:

1. se esiste $\mathbf{0}^T\mathbf{v} + (-1)(-1)$, e in tal caso porlo al posto di $\mathbf{X}$;
2. se esiste $\mathbf{0}^T\mathbf{D} + (-1)\mathbf{b}^T$, e in tal caso porlo al posto di $\mathbf{Y}$;
3. se esiste $\mathbf{I}_{n-1}\mathbf{v} + (-1)\mathbf{v}$, e in tal caso porlo al posto di $\mathbf{Z}$;
4. se esiste $\mathbf{I}_{n-1}\mathbf{D} + \mathbf{v}\mathbf{b}^T$, e in tal caso porlo al posto di $\mathbf{T}$;

inoltre, perchè $\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z}, \mathbf{T}$ siano effettivamente blocchi di una ripartizione di $\mathbf{AB}$, occorre verificare che:

5. il numero delle righe di $\mathbf{0}^T\mathbf{v} + (-1)(-1)$ sia uguale al numero delle righe di $\mathbf{0}^T\mathbf{D} + (-1)\mathbf{b}^T$,
6. il numero delle righe di $\mathbf{I}_{n-1}\mathbf{v} + (-1)\mathbf{v}$ sia uguale al numero delle righe di $\mathbf{I}_{n-1}\mathbf{D} + \mathbf{v}\mathbf{b}^T$,
7. il numero delle colonne di $\mathbf{0}^T\mathbf{v} + (-1)(-1)$ sia uguale al numero delle colonne di $\mathbf{I}_{n-1}\mathbf{v} + (-1)\mathbf{v}$,
8. il numero delle colonne di $\mathbf{0}^T\mathbf{D} + (-1)\mathbf{b}^T$ sia uguale al numero delle colonne di $\mathbf{I}_{n-1}\mathbf{D} + \mathbf{v}\mathbf{b}^T$.

Poichè $\mathbf{0}^T$ e $\mathbf{b}^T \in \mathbb{C}_{n-1}$, $\mathbf{v} \in \mathbb{C}^{n-1}$, $\mathbf{D}$ e $\mathbf{I}_{n-1} \in M_{n-1}(\mathbb{C})$, -1 è un numero, allora si ha:

a) $\mathbf{0}^T\mathbf{v} + (-1)(-1)$ esiste ed è un numero (ossia 1×1),

b) $\mathbf{0}^T\mathbf{D} + (-1)\mathbf{b}^T$ esiste ed è $1 \times (n-1)$,

c) $\mathbf{I}_{n-1}\mathbf{v} + (-1)\mathbf{v}$ esiste ed è $(n-1) \times 1$,

d) $\mathbf{I}_{n-1}\mathbf{D} + \mathbf{v}\mathbf{b}^T$ esiste ed è $(n-1) \times (n-1)$.

Dunque il prodotto a blocchi si puó fare e si ottiene:

$$\mathbf{AB} = \left(\begin{array}{c|c} \mathbf{0}^T & -1 \\ \hline \mathbf{I}_{n-1} & \mathbf{v} \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c} \mathbf{v} & \mathbf{D} \\ \hline -1 & \mathbf{b}^T \end{array}\right) =$$

$$= \left(\begin{array}{c|c} \mathbf{0}^T\mathbf{v} + (-1)(-1) & \mathbf{0}^T D + (-1)\mathbf{b}^T \\ \hline \mathbf{I}_{n-1}\mathbf{v} + (-1)\mathbf{v} & \mathbf{I}_{n-1}\mathbf{D} + \mathbf{v}\mathbf{b}^T \end{array}\right) =$$

$$= \left(\begin{array}{c|c} 1 & -\mathbf{b}^T \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{D} + \mathbf{v}\mathbf{b}^T \end{array}\right)$$

Poichè $\mathbf{ABe}_1 = 1^a$ colonna di $\mathbf{AB}$, allora $\mathbf{ABe}_1 = \mathbf{e}_1$.

ESERCITAZIONI* 2

$\boxed{1}$ Siano $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 4 & 0 \\ 3 & -3 & 10 & 8 \\ 2 & -2 & 2 & -4 \end{pmatrix}$ e $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$. Si trovino forme ridotte di Gauss per $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$.

$\boxed{2}$ Sia $\mathbf{A}(\alpha) = \begin{pmatrix} i & 0 & -i & i\alpha \\ 1 & \alpha^2+4 & 0 & \alpha \\ 1 & \alpha^2+4 & 0 & 2\alpha \end{pmatrix}$, dove $\alpha \in \mathbb{C}$. Per ogni $\alpha \in \mathbb{C}$ si trovi una forma ridotta di Gauss $\mathbf{U}(\alpha)$ per $\mathbf{A}(\alpha)$ e si dica quali sono le colonne dominanti e quali sono le colonne libere di $\mathbf{U}(\alpha)$.

$\boxed{3}$ Si risolva il sistema lineare $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ dove

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 9 & 6 \\ 1 & -1 & 7 & 4 \\ 1 & -1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

$\boxed{4}$ Si risolva il sistema lineare $\mathbf{A}(\alpha)\mathbf{x} = \mathbf{b}(\alpha)$ dipendente dal parametro reale α dove

$$\mathbf{A}(\alpha) = \begin{pmatrix} 2 & 2\alpha & 2 \\ 1 & \alpha+1 & \alpha+1 \\ 1 & \alpha & \alpha \\ 0 & 2 & 2\alpha \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{b}(\alpha) = \begin{pmatrix} 2\alpha \\ \alpha+1 \\ \alpha \\ \alpha^2+1 \end{pmatrix}.$$

SVOLGIMENTO ESERCITAZIONI* 2

$\boxed{1}$ Siano $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 4 & 0 \\ 3 & -3 & 10 & 8 \\ 2 & -2 & 2 & -4 \end{pmatrix}$ e $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$. Si trovino forme ridotte di Gauss per $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$.

Facendo un'eliminazione di Gauss su $\mathbf{A}$ si ottiene:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 4 & 0 \\ 3 & -3 & 10 & 8 \\ 2 & -2 & 2 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{31}(-2)E_{21}(-3)E_1(1/2)} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 8 \\ 0 & 0 & -2 & -4 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\xrightarrow{E_{32}(2)E_2(1/4)} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{U}_1$$

ed U_1 è una forma ridotta di Gauss per $\mathbf{A}$.

Facendo un'eliminazione di Gauss su $\mathbf{B}$ si ottiene:

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{31}(-1)E_{21}(-1)E_1(1/2)} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{23}} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{U}_2$$

ed $\mathbf{U_2}$ è una forma ridotta di Gauss per $\mathbf{B}$.

$\boxed{3}$ Si risolva il sistema lineare $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ dove

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 9 & 6 \\ 1 & -1 & 7 & 4 \\ 1 & -1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Troviamo una forma ridotta di Gauss della matrice aumentata del sistema.

$$(\mathbf{A} \mid \mathbf{b}) = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 9 & 6 & | & 6 \\ 1 & -1 & 7 & 4 & | & 4 \\ 1 & -1 & 3 & 2 & | & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{31}(-1)E_{21}(-1)E_1(\frac{1}{3})}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 2 & | & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 2 & | & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_2(\frac{1}{4})} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 2 & | & 2 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & | & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} = (\mathbf{U} \mid \mathbf{d}).$$

Il sistema $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ è equivalente al sistema $\mathbf{Ux} = \mathbf{d}$ che è una forma compatta per

$$(*) \qquad \begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 + 2x_4 & = 2 \\ \qquad\quad x_3 + \frac{1}{2}x_4 & = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Poichè $\mathbf{d}$ è libera, $\mathbf{Ux} = \mathbf{d}$ ammette soluzioni.

Poichè $\mathbf{U}$ ha esattamente due colonne libere, $\mathbf{Ux} = \mathbf{d}$ ha ∞^2 soluzioni.

Scegliamo come parametri le variabili corrispondenti alle colonne libere di $\mathbf{U}$ (la 2^a e la 4^a) e con la sostituzione all'indietro da $(*)$ otteniamo

$$\begin{cases} x_2 = h \\ x_4 = k \\ x_3 = -\frac{1}{2}x_4 + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}k + \frac{1}{2} \\ x_1 = x_2 - 3x_3 - 2x_4 + 2 = h - 3(-\frac{1}{2}k + \frac{1}{2}) - 2k + 2 = h - \frac{1}{2}k + \frac{1}{2} \end{cases}$$

L'insieme delle soluzioni del sistema $\mathbf{Ux} = \mathbf{d}$ (e quindi l'insieme delle soluzioni del sistema $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$) è

$$\left\{ \begin{pmatrix} h - \frac{1}{2}k + \frac{1}{2} \\ h \\ -\frac{1}{2}k + \frac{1}{2} \\ k \end{pmatrix} | h, k \in \mathbb{C} \right\}.$$

$\boxed{2}$ Sia $\quad \mathbf{A}(\alpha) = \begin{pmatrix} i & 0 & -i & i\alpha \\ 1 & \alpha^2+4 & 0 & \alpha \\ 1 & \alpha^2+4 & 0 & 2\alpha \end{pmatrix}$, $\quad$ dove $\alpha \in \mathbb{C}$. Per ogni $\alpha \in \mathbb{C}$ si trovi una forma ridotta di Gauss $\mathbf{U}(\alpha)$ per $\mathbf{A}(\alpha)$ e si dica quali sono le colonne dominanti e quali sono le colonne libere di $\mathbf{U}(\alpha)$.

Facciamo un'eliminazione di Gauss su $\mathbf{A}(\alpha)$:

$$\mathbf{A}(\alpha) = \begin{pmatrix} i & 0 & -i & i\alpha \\ 1 & \alpha^2+4 & 0 & \alpha \\ 1 & \alpha^2+4 & 0 & 2\alpha \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{31}(-1)E_{21}(-1)E_1(-i)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & \alpha \\ 0 & \alpha^2+4 & 1 & 0 \\ 0 & \alpha^2+4 & 1 & \alpha \end{pmatrix} = \mathbf{B}(\alpha)$$

$\boxed{1^o CASO}$ $\quad \alpha^2 + 4 \neq 0$ ossia $\alpha \neq 2i$ ed $\alpha \neq -2i$.

$$\mathbf{B}(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & \alpha \\ 0 & \alpha^2+4 & 1 & 0 \\ 0 & \alpha^2+4 & 1 & \alpha \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{32}(-\alpha^2-4)E_2(\frac{1}{\alpha^2+4})} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & \alpha \\ 0 & 1 & 1/(\alpha^2+4) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix} = \mathbf{C}(\alpha)$$

$\boxed{1^o \text{ sottocaso del } 1^0 \text{ caso}}$ $\quad \alpha \neq 2i, \quad \alpha \neq -2i, \quad \alpha \neq 0$

$$\mathbf{C}(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & \alpha \\ 0 & 1 & 1/(\alpha^2+4) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix} \xrightarrow{E_3(1/\alpha)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & \alpha \\ 0 & 1 & 1/(\alpha^2+4) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{U}(\alpha)$$

$\mathbf{U}(\alpha)$ è una forma ridotta di Gauss per $\mathbf{A}(\alpha)$, le colonne dominanti sono la 1^a, la 2^a e la 4^a, l'unica colonna libera è la 3^a.

$\boxed{2^o \quad \text{sottocaso del} \quad 1^0 \quad \text{caso}}$ $\alpha = 0$ $\mathbf{C}(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{U}(0)$ è una forma ridotta di Gauss per $\mathbf{A}(0)$, le colonne dominanti sono la 1^a e la 2^a, quelle libere la 3^a e la 4^a.

$\boxed{2^o CASO}$ $\alpha^2 + 4 = 0$ ossia $\alpha = 2i$ oppure $\alpha = -2i$.

$$\mathbf{B}(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & \alpha \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \alpha \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{32}(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & \alpha \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix} \xrightarrow{E_3(1/\alpha) \quad (\alpha \neq 0)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & \alpha \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{U}(\alpha)$$

$\mathbf{U}(\alpha)$ è una forma ridotta di Gauss per $\mathbf{A}(\alpha)$, le colonne dominanti sono la 1^a, la 3^a e la 4^a, l'unica colonna libera è la 2^a.

$\boxed{4}$ Si risolva il sistema lineare $\mathbf{A}(\alpha)\mathbf{x} = \mathbf{b}(\alpha)$ dipendente dal parametro reale α dove

$$\mathbf{A}(\alpha) = \begin{pmatrix} 2 & 2\alpha & 2 \\ 1 & \alpha+1 & \alpha+1 \\ 1 & \alpha & \alpha \\ 0 & 2 & 2\alpha \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{b}(\alpha) = \begin{pmatrix} 2\alpha \\ \alpha+1 \\ \alpha \\ \alpha^2+1 \end{pmatrix}.$$

Troviamo una forma ridotta di Gauss della matrice aumentata del sistema.

$$(\mathbf{A}(\alpha) \quad | \quad \mathbf{b}(\alpha)) = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2\alpha & 2 & 2\alpha \\ 1 & \alpha+1 & \alpha+1 & \alpha+1 \\ 1 & \alpha & \alpha & \alpha \\ 0 & 2 & 2\alpha & \alpha^2+1 \end{array}\right) \xrightarrow{E_{31}(-1)E_{21}(-1)E_1(\frac{1}{2})}$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \alpha & 1 & \alpha \\ 0 & 1 & \alpha & 1 \\ 0 & 0 & \alpha-1 & 0 \\ 0 & 2 & 2\alpha & \alpha^2+1 \end{array}\right) \xrightarrow{E_{42}(-2)}$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \alpha & 1 & \alpha \\ 0 & 1 & \alpha & 1 \\ 0 & 0 & \alpha-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha^2-1 \end{array}\right) = (\mathbf{B}(\alpha) \quad | \quad \mathbf{c}(\alpha)).$$

$\boxed{1^0 \text{ CASO}}$ $\alpha = 1$ $(\mathbf{B}(1) \quad | \quad \mathbf{c}(1)) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$ è una forma ridotta di Gauss per $(\mathbf{A}(1) \quad | \quad \mathbf{b}(1))$, quindi $\mathbf{A}(1)\mathbf{x} = \mathbf{b}(1)$ è equivalente a $\mathbf{B}(1)\mathbf{x} = \mathbf{c}(1)$ che è una forma compatta per

$$(*) \qquad \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 & = 1 \\ \qquad x_2 + x_3 & = 1 \end{cases}$$

Poichè $\mathbf{c}(1)$ è libera, $\mathbf{B}(1)\mathbf{x} = \mathbf{c}(1)$ ammette soluzioni.

Poichè $\mathbf{B}(1)$ ha esattamente una colonna libera, $\mathbf{B}(1)\mathbf{x} = \mathbf{c}(1)$ ha ∞^1 soluzioni.

Scegliamo come parametro la variabile corrispondente alla colonna libera di $\mathbf{B}(1)$ (la 3^a) e con la sostituzione all'indietro da $(*)$ otteniamo

$$\begin{cases} x_3 = h \\ x_2 = -x_3 + 1 = -h + 1 \\ x_1 = -x_2 - x_3 + 1 = -(-h+1) - h + 1 = 0 \end{cases}$$

L'insieme delle soluzioni del sistema $\mathbf{B}(1)\mathbf{x} = \mathbf{c}(1)$ (e quindi l'insieme delle soluzioni del sistema $\mathbf{A}(1)\mathbf{x} = \mathbf{b}(1)$) è

$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ -h+1 \\ h \end{pmatrix} | h \in \mathbb{C} \right\}.$$

$\boxed{2^0 \text{ CASO}}$ $\alpha \neq 1$

$$(\,\mathbf{B}(\alpha) \quad | \quad \mathbf{c}(\alpha)\,) = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & 1 & | & \alpha \\ 0 & 1 & \alpha & | & 1 \\ 0 & 0 & \alpha-1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & \alpha^2-1 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_3(\frac{1}{\alpha-1})}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & \alpha & 1 & | & \alpha \\ 0 & 1 & \alpha & | & 1 \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & \alpha^2-1 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_4(\frac{1}{\alpha-1})}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & \alpha & 1 & | & \alpha \\ 0 & 1 & \alpha & | & 1 \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & \alpha+1 \end{pmatrix} = (\,\mathbf{C}(\alpha)| \quad \mathbf{d}(\alpha)\,).$$

$\boxed{1^0 \text{ Sottocaso}}$ $\alpha = -1$ $\quad (\,\mathbf{C}(-1) \quad | \quad \mathbf{d}(-1)\,) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & | & -1 \\ 0 & 1 & -1 & | & 1 \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$ è una forma ridotta di Gauss per $(\,\mathbf{A}(-1) \quad | \quad \mathbf{b}(-1)\,)$, quindi $\mathbf{A}(-1)\mathbf{x} = \mathbf{b}(-1)$ è equivalente a $\mathbf{C}(-1)\mathbf{x} = \mathbf{d}(-1)$ che è una forma compatta per

$$(*) \qquad \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 &= -1 \\ \qquad x_2 - x_3 &= 1 \\ \qquad\qquad x_3 &= 0 \end{cases}$$

Poichè $\mathbf{d}(-1)$ è libera, $\mathbf{C}(-1)\mathbf{x} = \mathbf{d}(-1)$ ammette soluzioni.

Poichè tutte le colonne di $\mathbf{C}(-1)$ sono dominanti, $\mathbf{C}(-1)\mathbf{x} = \mathbf{d}(-1)$ ammette un'unica soluzione. Con la sostituzione all'indietro da $(*)$ otteniamo

$$\begin{cases} x_3 = 0 \\ x_2 = x_3 + 1 = 1 \\ x_1 = x_2 - x_3 - 1 = 1 - 1 = 0 \end{cases}$$

L'unica soluzione di $\mathbf{C}(-1)\mathbf{x} = \mathbf{d}(-1)$ (e quindi di $\mathbf{A}(-1)\mathbf{x} = \mathbf{b}(-1)$) è

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$\boxed{2^0 \text{ Sottocaso}}$ $\alpha \notin \{1, -1\}$

$$(\,\mathbf{C}(\alpha)| \quad \mathbf{d}(\alpha)\,) = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & 1 & | & \alpha \\ 0 & 1 & \alpha & | & 1 \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & \alpha+1 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_4(\frac{1}{\alpha+1})}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & \alpha & 1 & | & \alpha \\ 0 & 1 & \alpha & | & 1 \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 1 \end{pmatrix} = (\,\mathbf{D}(\alpha)| \quad \mathbf{e}(\alpha)\,)$$

è una forma ridotta di Gauss per $(\,\mathbf{A}(\alpha) \quad | \quad \mathbf{b}(\alpha)\,)$. Poichè $\mathbf{e}(\alpha)$ è dominante, $\mathbf{D}(\alpha)\mathbf{x} = \mathbf{e}(\alpha)$ (e quindi di $\mathbf{A}(\alpha)\mathbf{x} = \mathbf{b}(\alpha)$) non ammette soluzioni.

ESERCITAZIONI* 3

$\boxed{1}$ Sia $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2+i & i \\ 1 & i \end{pmatrix}$. Si calcoli $\mathbf{A}^{-1}$.

$\boxed{2}$ Si dica per quali $\alpha \in \mathbb{C}$ la matrice $\mathbf{A}(\alpha) = \begin{pmatrix} \alpha+3i & i \\ \alpha+3i & \alpha \end{pmatrix}$ è non singolare. Per tali α, si trovi l'inversa di $\mathbf{A}(\alpha)$.

$\boxed{3}$ Sia $\mathbf{A}(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & \alpha+3 \\ 0 & \alpha & -2\alpha \\ 1 & \alpha & 2\alpha+4 \end{pmatrix}$ dove $\alpha \in \mathbb{R}$. Per quegli $\alpha \in \mathbb{R}$ per cui $\mathbf{A}(\alpha)$ è non singolare, si calcoli $\mathbf{A}(\alpha)^{-1}$.

$\boxed{4}$ Si trovino tutte le inverse destre della matrice $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

$\boxed{5}$ Si trovino tutte le inverse sinistre della matrice $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.

$\boxed{6}$ Sia $W = \{\mathbf{A} \in M_n(\mathbb{C}) | \mathbf{A} = \mathbf{A}^T\}$ l'insieme delle matrici simmetriche (complesse) di ordine n. Si provi che W è un sottospazio dello spazio vettoriale delle matrici quadrate (complesse) di ordine n.

$\boxed{7}$ Sia $W = \{\mathbf{A} \in M_n(\mathbb{C}) | \mathbf{A} = -\mathbf{A}^H\}$ l'insieme delle matrici anti-hermitiane (complesse) di ordine n. Si provi che W non è un sottospazio dello spazio vettoriale delle matrici quadrate (complesse) di ordine n.

$\boxed{8}$ Sia $V = \mathbb{R}^3$ (spazio vettoriale reale). Si dica quale dei seguenti sottoinsiemi di V è un sottospazio vettoriale di V:

$$\mathrm{S}_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}; \mathrm{S}_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}; \mathrm{S}_3 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}; \mathrm{S}_4 = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ 0 \end{pmatrix} | a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\mathrm{S}_5 = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b+1 \\ 0 \end{pmatrix} | a, b \in \mathbb{R} \right\}; \mathrm{S}_6 = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ a+b \\ 0 \end{pmatrix} | a, b \in \mathbb{R} \right\}; \mathrm{S}_7 = \left\{ \begin{pmatrix} a+1 \\ a-1 \\ 0 \end{pmatrix} | a \in \mathbb{R} \right\}; \mathrm{S}_8 = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ a \\ 0 \end{pmatrix} | a \in \mathbb{R} \right\}.$$

SVOLGIMENTO ESERCITAZIONI* 3

$\boxed{1}$ Sia $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2+i & i \\ 1 & i \end{pmatrix}$. Si calcoli $\mathbf{A}^{-1}$.

Ricordando che

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \qquad \text{se} \quad ad-bc \neq 0,$$

si ha:

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{(2+i)i-i}\begin{pmatrix} i & -i \\ -1 & 2+i \end{pmatrix} = \frac{1}{-1+i}\begin{pmatrix} i & -i \\ -1 & 2+i \end{pmatrix}$$

Poichè

$$\frac{1}{-1+i} = \frac{1}{-1+i} \times \frac{\overline{-1+i}}{\overline{-1+i}} = \frac{-1-i}{(-1+i)(-1-i)} = \frac{-1-i}{1-i^2} = \frac{-1-i}{2} = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i,$$

allora

$$\mathbf{A}^{-1} = (-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i)\begin{pmatrix} i & -i \\ -1 & 2+i \end{pmatrix}.$$

$\boxed{2}$ Si dica per quali $\alpha \in \mathbb{C}$ la matrice $\mathbf{A}(\alpha) = \begin{pmatrix} \alpha+3i & i \\ \alpha+3i & \alpha \end{pmatrix}$ è non singolare. Per tali α, si trovi l'inversa di $\mathbf{A}(\alpha)$.

Ricordando che $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ è non singolare se e solo se $ad - bc \neq 0$ ed in tal caso si ha

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix},$$

allora $\mathbf{A}(\alpha)$ è non singolare se e solo se

$$(\alpha+3i)\alpha - i(\alpha+3i) = (\alpha+3i)(\alpha-i) \neq 0,$$

ossia se e solo se $\alpha \notin \{-3i, i\}$, ed in tal caso si ha:

$$\mathbf{A}(\alpha)^{-1} = \frac{1}{(\alpha+3i)(\alpha-i)}\begin{pmatrix} \alpha & -i \\ -\alpha-3i & \alpha+3i \end{pmatrix}.$$

$\boxed{4}$ Si trovino tutte le inverse destre della matrice $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

Un'inversa destra di $\mathbf{A}$ è una matrice 3×2 $\mathbf{R}$ tale che se $\mathbf{R} = (\, \mathbf{c}_1 \quad | \quad \mathbf{c}_2 \,)$, allora

$\mathbf{c}_1$ è soluzione di (1) $\mathbf{Ax} = \mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e

$\mathbf{c}_2$ è soluzione di (2) $\mathbf{Ax} = \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Cerchiamo tutte le soluzioni di (1) e (2).

$$(\mathbf{A} \quad | \quad \mathbf{I}_2) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & | & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & | & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{21}(-1)E_1(\frac{1}{2})} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 & | & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 3 & | & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \to$$

$$\xrightarrow{E_2(-2)} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 & | & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & -6 & | & 1 & -2 \end{pmatrix} = (\mathbf{U} \quad | \quad \mathbf{b}_1 \quad \mathbf{b}_2).$$

(1) è equivalente a (1′) $\mathbf{Ux} = \mathbf{b}_1$ che è una forma compatta per

$$\begin{cases} x_1 + \frac{1}{2}x_2 = \frac{1}{2} \\ x_2 - 6x_3 = 1 \end{cases}$$

Scegliamo come parametro la variabile corrispondente all'unica colonna libera di $\mathbf{U}$ (la 3^a) e con la sostituzione all'indietro otteniamo

$$\begin{cases} x_3 = h \\ x_2 = 6x_3 + 1 = 6h + 1 \\ x_1 = -\dfrac{1}{2}x_2 + \dfrac{1}{2} = -\dfrac{1}{2}(6h + 1) + \dfrac{1}{2} = -3h \end{cases}$$

L'insieme delle soluzioni di (1) è

$$\left\{ \begin{pmatrix} -3h \\ 6h + 1 \\ h \end{pmatrix} | h \in \mathbb{C} \right\}.$$

(2) è equivalente a (2′) $\mathbf{Ux} = \mathbf{b}_2$ che è una forma compatta per

$$\begin{cases} x_1 + \frac{1}{2}x_2 = 0 \\ x_2 - 6x_3 = -2 \end{cases}$$

Scegliamo come parametro la variabile corrispondente all'unica colonna libera di $\mathbf{U}$ (la 3^a) e con la sostituzione all'indietro otteniamo

$$\begin{cases} x_3 = k \\ x_2 = 6x_3 - 2 = 6k - 2 \\ x_1 = -\dfrac{1}{2}x_2 = -\dfrac{1}{2}(6k - 2) = -3k + 1 \end{cases}$$

L'insieme delle soluzioni di (2) è

$$\left\{ \begin{pmatrix} -3k + 1 \\ 6k - 2 \\ k \end{pmatrix} | k \in \mathbb{C} \right\}.$$

Le inverse destre di $\mathbf{A}$ sono esattamente tutte le matrici del tipo $\mathbf{R(h,k)} = \begin{pmatrix} -3h & -3k+1 \\ 6h+1 & 6k-2 \\ h & k \end{pmatrix}$, al variare di $h, k \in \mathbb{C}$.

$\boxed{5}$ Si trovino tutte le inverse sinistre della matrice $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.

1. Poniamo $\mathbf{B} = \mathbf{A}^T$.

2. Cerchiamo tutte le inverse destre di $\mathbf{B}$. Dall' esercizio precedente sappiamo che sono tutte e sole le matrici del tipo $\begin{pmatrix} -3h & -3k+1 \\ 6h+1 & 6k-2 \\ h & k \end{pmatrix}$ con $h, k \in \mathbb{C}$.

3. Una matrice è inversa sinistra di $\mathbf{A}$ se e solo se è la trasposta di una inversa destra di $\mathbf{B}$. Quindi le inverse sinistre di $\mathbf{A}$ sono esattamente tutte le matrici del tipo $\begin{pmatrix} -3h & 6h+1 & h \\ -3k+1 & 6k-2 & k \end{pmatrix}$ al variare di $h, k \in \mathbb{C}$.

$\boxed{3}$ Sia $\mathbf{A}(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & \alpha+3 \\ 0 & \alpha & -2\alpha \\ 1 & \alpha & 2\alpha+4 \end{pmatrix}$ dove $\alpha \in \mathbb{R}$. Per quegli $\alpha \in \mathbb{R}$ per cui $\mathbf{A}(\alpha)$ è non singolare, si calcoli $\mathbf{A}(\alpha)^{-1}$.

$$(a) \qquad (\,\mathbf{A}(\alpha) \mid \mathbf{I}_3\,) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \alpha & 3+\alpha & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & -2\alpha & 0 & 1 & 0 \\ 1 & \alpha & 4+\alpha & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{E_{31}(-1)}$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \alpha & 3+\alpha & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & -2\alpha & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{E_2(\frac{1}{\alpha}) \quad \boxed{\alpha \neq 0 : \mathbf{A}(0) \text{ non ha inversa}}}$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \alpha & 3+\alpha & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & \frac{1}{\alpha} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{E_{13}(-3-\alpha)E_{23}(2)}$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \alpha & 0 & 4+\alpha & 0 & -3-\alpha \\ 0 & 1 & 0 & -2 & \frac{1}{\alpha} & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{E_{12}(-\alpha)}$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 4+3\alpha & -1 & -3-3\alpha \\ 0 & 1 & 0 & -2 & \frac{1}{\alpha} & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) = (\, I_3 \mid \mathbf{A}(\alpha)^{-1}\,).$$

Se $\boxed{\alpha \neq 0}$ $\qquad \mathbf{A}(\alpha)^{-1} = \begin{pmatrix} 4+3\alpha & -1 & -3-3\alpha \\ -2 & \frac{1}{\alpha} & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$

$\boxed{6}$ Sia $W = \{\mathbf{A} \in M_n(\mathbb{C}) | \mathbf{A} = \mathbf{A}^T\}$ l'insieme delle matrici simmetriche (complesse) di ordine n. Si provi che W è un sottospazio dello spazio vettoriale delle matrici quadrate (complesse) di ordine n.

(i) $\quad \mathbf{O}_{n\times n} \in W$: $\mathbf{O}^T = \mathbf{O}$

(ii) $\quad \mathbf{A}, \mathbf{B} \in W \quad \overset{?}{\Longrightarrow} \quad \mathbf{A}+\mathbf{B} \in W$

$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{r} \mathbf{A} \in W \Longrightarrow \mathbf{A} \in M_n(\mathbb{C}) \\ \mathbf{B} \in W \Longrightarrow \mathbf{B} \in M_n(\mathbb{C}) \end{array}\right\} \Longrightarrow \quad \mathbf{A}+\mathbf{B} \in M_n(\mathbb{C}) \\ \left.\begin{array}{r} \mathbf{A} \in W \Longrightarrow \mathbf{A} = \mathbf{A}^T \\ \mathbf{B} \in W \Longrightarrow \mathbf{B} = \mathbf{B}^T \end{array}\right\} \Longrightarrow (\mathbf{A}+\mathbf{B})^T = \mathbf{A}^T + \mathbf{B}^T = \mathbf{A}+\mathbf{B} \end{array}\right\} \Longrightarrow \mathbf{A}+\mathbf{B} \in W$$

(iii) $\quad \alpha \in \mathbb{C}, \mathbf{A} \in W \quad \overset{?}{\Longrightarrow} \quad \alpha\mathbf{A} \in W$

$$\left.\begin{array}{r} \mathbf{A} \in W \Longrightarrow \mathbf{A} \in M_n(\mathbb{C}) \Longrightarrow \alpha\mathbf{A} \in M_n(\mathbb{C}) \\ \mathbf{A} \in W \Longrightarrow \mathbf{A} = \mathbf{A}^T \Longrightarrow (\alpha\mathbf{A})^T = \alpha\mathbf{A}^T = \alpha\mathbf{A} \end{array}\right\} \Longrightarrow \quad \alpha\mathbf{A} \in W$$

$\boxed{7}$ Sia $W = \{\mathbf{A} \in M_n(\mathbb{C}) | \mathbf{A}^H = -\mathbf{A}\}$ l'insieme delle matrici anti-hermitiane (complesse) di ordine n. Si provi che W non è un sottospazio dello spazio vettoriale delle matrici quadrate (complesse) di ordine n.

(i) $\quad \mathbf{O}_{n\times n} \in W$: $\mathbf{O}^H = \mathbf{O} = -\mathbf{O}$

(ii) $\quad \mathbf{A}, \mathbf{B} \in W \quad \overset{?}{\Longrightarrow} \quad \mathbf{A}+\mathbf{B} \in W$

$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{r} \mathbf{A} \in W \Longrightarrow \mathbf{A} \in M_n(\mathbb{C}) \\ \mathbf{B} \in W \Longrightarrow \mathbf{B} \in M_n(\mathbb{C}) \end{array}\right\} \Longrightarrow \quad \mathbf{A}+\mathbf{B} \in M_n(\mathbb{C}) \\ \left.\begin{array}{r} \mathbf{A} \in W \Longrightarrow \mathbf{A}^H = -\mathbf{A} \\ \mathbf{B} \in W \Longrightarrow \mathbf{B}^H = -\mathbf{B} \end{array}\right\} \Longrightarrow (\mathbf{A}+\mathbf{B})^H = \mathbf{A}^H + \mathbf{B}^H = -\mathbf{A} + (-\mathbf{B}) = -(\mathbf{A}+\mathbf{B}) \end{array}\right\} \Longrightarrow \mathbf{A}+\mathbf{B} \in W$$

(iii) $\quad \alpha \in \mathbb{C}, \mathbf{A} \in W \quad \overset{?}{\Longrightarrow} \quad \alpha\mathbf{A} \in W$

$$\mathbf{A} \in W \Longrightarrow \mathbf{A} \in M_n(\mathbb{C}) \Longrightarrow \alpha\mathbf{A} \in M_n(\mathbb{C})$$

$$\mathbf{A} \in W \Longrightarrow \mathbf{A}^H = -\mathbf{A} \Longrightarrow (\alpha\mathbf{A})^H = \overline{\alpha}\mathbf{A}^H = \overline{\alpha}(-\mathbf{A}) = -\overline{\alpha}\mathbf{A}$$

Non è vero che $\alpha\mathbf{A} \in W$ **per ogni scalare** α **ed ogni** $\mathbf{A} \in W$:

prendendo $\mathbf{A} \neq \mathbf{O}$ si ottiene che

$$\overline{\alpha}\mathbf{A} = \alpha\mathbf{A} \quad \underset{\uparrow}{\iff} \quad \overline{\alpha} = \alpha \iff \alpha \in \mathbb{R}$$

$$\boxed{\text{poichè } \mathbf{A} \neq \mathbf{O}}$$

Quindi se $\mathbf{O} \neq \mathbf{A} \in W$ e $\alpha \notin \mathbb{R}$ (ad esempio se $\mathbf{A}$ è la matrice $n \times n$ con 1 al posto $(1, n)$, -1 al posto $(n, 1)$ e 0 altrove, ed $\alpha = i$) allora $\alpha\mathbf{A} \notin W$.

Dunque W non è un sottospazio dello spazio vettoriale $M_n(\mathbb{C})$.

$\boxed{8}$ Sia $V = \mathbb{R}^3$ (spazio vettoriale reale). Si dica quale dei seguenti sottoinsiemi di V è un sottospazio vettoriale di V:

$$\mathrm{S}_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}; \mathrm{S}_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}; \mathrm{S}_3 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}; \mathrm{S}_4 = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ 0 \end{pmatrix} | a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\mathrm{S}_5 = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b+1 \\ 0 \end{pmatrix} | a, b \in \mathbb{R} \right\}; \mathrm{S}_6 = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ a+b \\ 0 \end{pmatrix} | a, b \in \mathbb{R} \right\}; \mathrm{S}_7 = \left\{ \begin{pmatrix} a+1 \\ a-1 \\ 0 \end{pmatrix} | a \in \mathbb{R} \right\}; \mathrm{S}_8 = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ a \\ 0 \end{pmatrix} | a \in \mathbb{R} \right\}.$$

• S_1 è un sottospazio vettoriale di V: l'unico elemento di S_1 è il vettore $\mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, e $\mathbf{0} + \mathbf{0} = \mathbf{0} \in \mathrm{S}_1$ e $\alpha\mathbf{0} = \mathbf{0} \in \mathrm{S}_1$ per ogni scalare α (S_1 è il sottospazio nullo di $\mathbb{R}^3$).

• S_2 ed S_3 non sono sottospazi di V: entrambi contengono $\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ma entrambi non contengono $\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_1 = 2\mathbf{e}_1$ (d'altra parte nessun sottoinsieme **finito** di uno spazio vettoriale W che contenga un elemento non nullo $\mathbf{w} \neq \mathbf{0}$ può essere un sottospazio di W, perchè se lo fosse dovrebbe contenere l'insieme **infinito** di vettori $\{\alpha\mathbf{w} | \alpha \text{ scalare }\}$).

• Per vedere se S_4 è o non è un sottospazio di V occorre stabilire se le seguenti condizioni sono soddisfatte:

(i) $\mathbf{0} \in \mathrm{S}_4$

(ii) $\mathbf{u} + \mathbf{v} \in \mathrm{S}_4$ per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathrm{S}_4$,

(iii) $\alpha\mathbf{u} \in \mathrm{S}_4$ per ogni $\mathbf{u} \in \mathrm{S}_4$ ed ogni scalare α.

Poichè gli elementi di S_4 sono esattamente i vettori di $\mathbb{R}^3$ che hanno la terza coordinata nulla, allora $\mathbf{0} \in \mathrm{S}_4$, inoltre dal fatto che la somma di due vettori di $\mathbb{R}^3$ con la terza coordinata nulla è un vettore di $\mathbb{R}^3$ con la terza coordinata nulla si ha *(ii)*, e dal fatto che il prodotto di un vettore di $\mathbb{R}^3$ con la terza coordinata nulla per uno scalare è un vettore di $\mathbb{R}^3$ con la terza coordinata nulla segue *(iii)*. In simboli:

(i) $\mathbf{0} \in \mathrm{S}_4$

(ii) Se $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathrm{S}_4$ esistono $a_1, b_1, a_2, b_2 \in \mathbb{R}$ tali che

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ 0 \end{pmatrix},$$

inoltre

$$\mathbf{u}+\mathbf{v} \in \mathrm{S}_4 \quad \Longleftrightarrow \quad \exists \quad a_3, b_3 \in \mathbb{R}^3 | \mathbf{u}+\mathbf{v} = \begin{pmatrix} a_3 \\ b_3 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Poichè $\mathbf{u}+\mathbf{v} = \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1+a_2 \\ b_1+b_2 \\ 0 \end{pmatrix}$, basta prendere $a_3 = a_1 + a_2$ e $b_3 = b_1 + b_2$.

(iii) Se $\mathbf{u} \in \mathrm{S}_4$ esistono $a, b \in \mathbb{R}$ tali che $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ 0 \end{pmatrix}$, inoltre per ogni scalare $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\alpha\mathbf{u} \in \mathrm{S}_4 \quad \Longleftrightarrow \quad \exists \quad c, d \in \mathbb{R}^3 | \alpha\mathbf{u} = \begin{pmatrix} c \\ d \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Poichè $\alpha\mathbf{u} = \alpha \begin{pmatrix} a \\ b \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha a \\ \alpha b \\ 0 \end{pmatrix}$, basta prendere $c = \alpha a$ e $d = \alpha b$.

Dunque S_4 è un sottospazio di V.

• Per vedere se S_5 è o non è un sottospazio di V occorre stabilire se le seguenti condizioni sono soddisfatte:

(i) $\mathbf{0} \in \mathrm{S}_5$

(ii) $\mathbf{u}+\mathbf{v} \in \mathrm{S}_5$ per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathrm{S}_5$,

(iii) $\alpha\mathbf{u} \in \mathrm{S}_5$ per ogni $\mathbf{u} \in \mathrm{S}_5$ ed ogni scalare α.

(i) esistono $a, b \in \mathbb{R}$ tali che $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b+1 \\ 0 \end{pmatrix}$: si prenda $a = 0$ e $b = -1$, quindi $\mathbf{0} \in \mathrm{S}_5$

(ii) Se $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathrm{S}_5$ esistono $a_1, b_1, a_2, b_2 \in \mathbb{R}$ tali che

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1+1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2+1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

inoltre

$$\mathbf{u}+\mathbf{v} \in \mathrm{S}_5 \quad \Longleftrightarrow \quad \exists \quad a_3, b_3 \in \mathbb{R}^3 | \mathbf{u}+\mathbf{v} = \begin{pmatrix} a_3 \\ b_3+1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Poichè $\mathbf{u}+\mathbf{v} = \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1+1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2+1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1+a_2 \\ b_1+b_2+2 \\ 0 \end{pmatrix}$, basta prendere $a_3 = a_1 + a_2$ e $b_3 = b_1 + b_2 + 1$.

(iii) Se $\mathbf{u} \in \mathrm{S}_5$ esistono $a, b \in \mathbb{R}$ tali che $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} a \\ b+1 \\ 0 \end{pmatrix}$, inoltre per ogni scalare $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\alpha\mathbf{u} \in \mathrm{S}_5 \quad \Longleftrightarrow \quad \exists \quad c, d \in \mathbb{R}^3 | \alpha\mathbf{u} = \begin{pmatrix} c \\ d+1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Poichè $\alpha\mathbf{u} = \alpha \begin{pmatrix} a \\ b+1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha a \\ \alpha b + \alpha \\ 0 \end{pmatrix}$, basta prendere $c = \alpha a$ e $d = \alpha b + \alpha - 1$.

Dunque S_5 è un sottospazio di V.

• Per vedere se S_6 è o non è un sottospazio di V occorre stabilire se le seguenti condizioni sono soddisfatte:

(i) $\mathbf{0} \in \mathrm{S}_6$

(ii) $\mathbf{u} + \mathbf{v} \in \mathrm{S}_6$ per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathrm{S}_6$,

(iii) $\alpha\mathbf{u} \in \mathrm{S}_6$ per ogni $\mathbf{u} \in \mathrm{S}_6$ ed ogni scalare α.

(i) esistono $a, b \in \mathbb{R}$ tali che $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ a+b \\ 0 \end{pmatrix}$: si prenda $a = b = 0$, quindi $\mathbf{0} \in \mathrm{S}_6$

(ii) Se $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathrm{S}_6$ esistono $a_1, b_1, a_2, b_2 \in \mathbb{R}$ tali che

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_1 + b_1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} a_2 \\ a_2 + b_2 \\ 0 \end{pmatrix},$$

inoltre

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} \in \mathrm{S}_6 \quad \Longleftrightarrow \quad \exists \quad a_3, b_3 \in \mathbb{R}^3 | \mathbf{u} + \mathbf{v} = \begin{pmatrix} a_3 \\ a_3 + b_3 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Poichè $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_1 + b_1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2 \\ a_2 + b_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + a_2 \\ (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2) \\ 0 \end{pmatrix}$, basta prendere $a_3 = a_1 + a_2$ e $b_3 = b_1 + b_2$.

(iii) Se $\mathbf{u} \in \mathrm{S}_6$ esistono $a, b \in \mathbb{R}$ tali che $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} a \\ a+b \\ 0 \end{pmatrix}$, inoltre per ogni scalare $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\alpha\mathbf{u} \in \mathrm{S}_6 \quad \Longleftrightarrow \quad \exists \quad c, d \in \mathbb{R}^3 | \alpha\mathbf{u} = \begin{pmatrix} c \\ c+d \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Poichè $\alpha\mathbf{u} = \alpha \begin{pmatrix} a \\ a+b \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha a \\ \alpha a + \alpha b \\ 0 \end{pmatrix}$, basta prendere $c = \alpha a$ e $d = \alpha b$.

Dunque S_6 è un sottospazio di V.

• Per vedere se S_7 è o non è un sottospazio di V occorre stabilire se le seguenti condizioni sono soddisfatte:

(i) $\mathbf{0} \in \mathrm{S}_7$

(ii) $\mathbf{u}+\mathbf{v} \in \mathrm{S}_7$ per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathrm{S}_7$,

(iii) $\alpha\mathbf{u} \in \mathrm{S}_7$ per ogni $\mathbf{u} \in \mathrm{S}_7$ ed ogni scalare α.

(i) Perchè $\mathbf{0}$ appartenga a S_7 occorre che esista $a \in \mathbb{R}$ tale che $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+1 \\ a-1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Poichè il sistema

$$\begin{cases} a+1=0 \\ \\ a-1=0 \end{cases}$$

nell'incognita a non ha soluzioni, allora S_7 non è un sottospazio di V.

• Per vedere se S_8 è o non è un sottospazio di V occorre stabilire se le seguenti condizioni sono soddisfatte:

(i) $\mathbf{0} \in \mathrm{S}_8$

(ii) $\mathbf{u}+\mathbf{v} \in \mathrm{S}_8$ per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathrm{S}_8$,

(iii) $\alpha\mathbf{u} \in \mathrm{S}_8$ per ogni $\mathbf{u} \in \mathrm{S}_8$ ed ogni scalare α.

(i) esiste $a \in \mathbb{R}$ tale che $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ a \\ 0 \end{pmatrix}$: si prenda $a=0$. Quindi $\mathbf{0} \in \mathrm{S}_8$.

(ii) Se $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathrm{S}_8$ esistono $a, b \in \mathbb{R}$ tali che

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} a \\ a \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} b \\ b \\ 0 \end{pmatrix},$$

inoltre

$$\mathbf{u}+\mathbf{v} \in \mathrm{S}_8 \quad \Longleftrightarrow \quad \exists \quad c \in \mathbb{R}^3 | \mathbf{u}+\mathbf{v} = \begin{pmatrix} c \\ c \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Poichè $\mathbf{u}+\mathbf{v} = \begin{pmatrix} a \\ a \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b \\ b \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b \\ a+b \\ 0 \end{pmatrix}$, basta prendere $c = a+b$.

(iii) Se $\mathbf{u} \in \mathrm{S}_8$ esiste $a \in \mathbb{R}$ tale che $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} a \\ a \\ 0 \end{pmatrix}$, inoltre per ogni scalare $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\alpha\mathbf{u} \in \mathrm{S}_8 \quad \Longleftrightarrow \quad \exists \quad b \in \mathbb{R}^3 | \alpha\mathbf{u} = \begin{pmatrix} b \\ b \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Poichè $\alpha\mathbf{u} = \alpha \begin{pmatrix} a \\ a \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha a \\ \alpha a \\ 0 \end{pmatrix}$, basta prendere $b = \alpha a$.

Dunque S_8 è un sottospazio di V.

ESERCITAZIONI* 4

$\boxed{1}$ Sia $W = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix} | a \in \mathbb{R} \right\}$ l'insieme delle matrici reali anti-simmetriche di ordine 2.

1. Si provi che W è un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale reale $M_2(\mathbb{R})$.

2. Si provi che W non è un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale $M_2(\mathbb{C})$.

3. Si dica quali dei seguenti sottoinsiemi di $M_2(\mathbb{R})$ è un insieme di generatori per W:

(a) $\left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$ **(b)** $\left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$ **(c)** $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$

$\boxed{2}$ Sia $W = \left\{ \begin{pmatrix} a & b+ci \\ b-ci & d \end{pmatrix} | a, b, c, d \in \mathbb{R} \right\}$ l'insieme delle matrici complesse hermitiane di ordine 2.

W non è un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale reale $M_2(\mathbb{R})$, nè è un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale $M_2(\mathbb{C})$. W è però uno spazio vettoriale reale. Si dica quali dei seguenti sottoinsiemi di $M_2(\mathbb{C})$ è un insieme di generatori di W come spazio vettoriale reale: **(a)** $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix} \right\}$

(b) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 1+i \\ 1-i & 0 \end{pmatrix} \right\}$ **(c)** $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix} \right\}$

$\boxed{3}$ Sia $\mathcal{S} = \left\{ \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} i \\ i \\ i \end{pmatrix}; \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1+i \\ i \\ 1-i \end{pmatrix}; \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} i \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$.

Si dica se $\mathcal{S}$ è un insieme di generatori di $\mathbb{C}^3$.

$\boxed{4}$ Siano V uno spazio vettoriale ed $\mathcal{S} = \{\mathbf{v}_1; \mathbf{v}_2\}$ un insieme di generatori di V. Si supponga che sia $\mathbf{v}_1 \neq -\mathbf{v}_2$. Si considerino i seguenti insiemi di vettori:

$$(1) \quad \mathcal{S}_1 = \{\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2; \mathbf{v}_2\}, \qquad (2) \quad \mathcal{S}_2 = \{\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2; 2\mathbf{v}_1 + 2\mathbf{v}_2\}.$$

Quando $\mathcal{S}_1$ è ancora un insieme di generatori di V ? Quando $\mathcal{S}_2$ è ancora un insieme di generatori di V ?

$\boxed{5}$ Si dica quale dei seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{R}^3$ è linearmente indipendente:

$$\left\{ \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}; \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}; \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, \quad \left\{ \mathbf{w}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}; \mathbf{w}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}; \mathbf{w}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

$\boxed{6}$ Siano V uno spazio vettoriale ed $\mathcal{S} = \{\mathbf{v}_1; \mathbf{v}_2; \mathbf{v}_3\}$ un insieme linearmente indipendente di vettori di V.

Si dica quale dei seguenti insiemi di vettori di V è linearmente indipendente:

$$(1) \quad \mathcal{S}_1 = \{\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3; \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_3; \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3\},$$
$$(2) \quad \mathcal{S}_2 = \{\mathbf{v}_1 - 2\mathbf{v}_3; \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2; \mathbf{v}_2 + 2\mathbf{v}_3\}.$$

Svolgimento delle Esercitazioni *4

$\boxed{1}$ Sia $W = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix} | a \in \mathbb{R} \right\}$ l'insieme delle matrici reali anti-simmetriche di ordine 2.

1. Si provi che W è un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale reale $M_2(\mathbb{R})$.

2. Si provi che W non è un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale $M_2(\mathbb{C})$.

3. Si dica quali dei seguenti sottoinsiemi di $M_2(\mathbb{R})$ è un insieme di generatori per W:

(a) $\left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$ **(b)** $\left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$ **(c)** $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$

1. $\boxed{1^0 \text{ MODO}}$ (i) $\mathbf{O}_{2\times 2} \in W$: $\mathbf{O}_{2\times 2} \in M_2(\mathbb{R})$ e $\mathbf{O}_{2\times 2}^T = \mathbf{O}_{2\times 2} = -\mathbf{O}_{2\times 2}$

(ii)

$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{r} \mathbf{A} \in W \Longrightarrow \mathbf{A} \in M_2(\mathbb{R}) \\ \\ \mathbf{B} \in W \Longrightarrow \mathbf{B} \in M_2(\mathbb{R}) \end{array}\right\} \Longrightarrow \mathbf{A}+\mathbf{B} \in M_2(\mathbb{R}) \\ \\ \left.\begin{array}{r} \mathbf{A} \in W \Longrightarrow \mathbf{A} = -\mathbf{A}^T \\ \\ \mathbf{B} \in W \Longrightarrow \mathbf{B} = -\mathbf{B}^T \end{array}\right\} \Longrightarrow (\mathbf{A}+\mathbf{B})^T = \mathbf{A}^T + \mathbf{B}^T = -\mathbf{A} - \mathbf{B} = -(\mathbf{A}+\mathbf{B}) \end{array}\right\} \Longrightarrow \mathbf{A}+\mathbf{B} \in W$$

(iii) $\quad \alpha \in \mathbb{C}, \mathbf{A} \in W \quad \overset{?}{\Longrightarrow} \quad \alpha\mathbf{A} \in W$

$$\left.\begin{array}{r} \mathbf{A} \in W \Longrightarrow \mathbf{A} \in M_2(\mathbb{R}) \Longrightarrow \alpha\mathbf{A} \in M_2(\mathbb{R}) \\ \\ \mathbf{A} \in W \Longrightarrow \mathbf{A} = -\mathbf{A}^T \Longrightarrow (\alpha\mathbf{A})^T = \alpha\mathbf{A}^T = \alpha(-\mathbf{A}) = -\alpha\mathbf{A} \end{array}\right\} \Longrightarrow \quad \alpha\mathbf{A} \in W$$

$\boxed{2^0 \text{ MODO}}$

(i) esiste $a \in \mathbb{R}$ tale che $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix}$: si prenda $a = 0$.

(ii) Se $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in W$ esistono $a, b \in \mathbb{R}$ tali che

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix},$$

inoltre

$$\mathbf{A}+\mathbf{B} \in W \quad \Longleftrightarrow \quad \exists \quad c \in \mathbb{R} | \mathbf{A}+\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & c \\ -c & 0 \end{pmatrix}.$$

Poichè $\mathbf{A}+\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & a+b \\ -(a+b) & 0 \end{pmatrix}$, basta prendere $c = a + b$.

(iii) Se $\mathbf{A} \in W$ esiste $a \in \mathbb{R}$ tale che $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix}$, inoltre per ogni scalare $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\alpha\mathbf{A} \in W \quad \Longleftrightarrow \quad \exists \quad b \in \mathbb{R}^3 | \alpha\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix}.$$

Poichè $\alpha\mathbf{A} = \alpha\begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \alpha a \\ -\alpha a & 0 \end{pmatrix}$, basta prendere $b = \alpha a$.

Dunque W è un sottospazio di $M_2(\mathbb{R})$.

2. W non è un sottospazio di $M_2(\mathbb{C})$: se ad esempio si prende $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \in W$ ed $\alpha = i$ si ha che $\alpha\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix} \notin W$ dal momento che $W \subseteq M_2(\mathbb{R})$ e $\begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix} \notin M_2(\mathbb{R})$.

3. Poichè tutti e tre gli insiemi di vettori considerati contengono elementi che non appartengono a W, tutti e tre gli insiemi di vettori considerati non sono sottoinsiemi di W, pertanto nessuno di essi è un insieme di generatori di W.

$\boxed{2}$ Sia $W = \left\{ \begin{pmatrix} a & b+ci \\ b-ci & d \end{pmatrix} | a, b, c, d \in \mathbb{R} \right\}$ l'insieme delle matrici complesse hermitiane di ordine 2.

W non è un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale reale $M_2(\mathbb{R})$, nè è un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale $M_2(\mathbb{C})$. W è però uno spazio vettoriale reale. Si dica quali dei seguenti sottoinsiemi di $M_2(\mathbb{C})$ è un insieme di generatori di W come spazio vettoriale reale: **(a)** $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix} \right\}$

(b) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 1+i \\ 1-i & 0 \end{pmatrix} \right\}$ **(c)** $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix} \right\}$

W non è un sottospazio dello spazio vettoriale reale $M_2(\mathbb{R})$, non essendo nemmeno W contenuto in $M_2(\mathbb{R})$ (ad esempio $\begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix} \in W$ ma $\begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix} \notin M_2(\mathbb{R})$).

W non è un sottospazio dello spazio vettoriale (complesso) $M_2(\mathbb{C})$: ad esempio $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in W$ ma $i\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \notin W$.

W è uno spazio vettoriale reale dal momento la somma di due elementi di W è ancora un elemento di W e che $r\begin{pmatrix} a & b+ci \\ b-ci & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ra & rb+(rc)i \\ rb-(rc)i & rd \end{pmatrix} \in W$ per ogni $\begin{pmatrix} a & b+ci \\ b-ci & d \end{pmatrix} \in W$ ed ogni $r \in \mathbb{R}$ (si verifichi che valgono tutti gli assiomi di spazio vettoriale).

(a) Dal momento che ogni elemento di $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix} \right\}$ è un elemento di W, per provare che $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix} \right\}$ è un insieme di generatori per W come spazio vettoriale reale occorre provare che **per ogni $\mathbf{A} \in W$ esistono** $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ numeri **reali** tali che

$$\mathbf{A} = \alpha_1\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \alpha_2\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \alpha_3\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \alpha_4\begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_3+\alpha_4 i \\ \alpha_3-\alpha_4 i & \alpha_2 \end{pmatrix}$$

Poichè per ogni $A \in W$ esistono $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ tali che $A = \begin{pmatrix} a & b+ci \\ b-ci & d \end{pmatrix}$, il problema diventa provare che per ogni $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ il sistema

$$\begin{cases} \alpha_1 = a \\ \alpha_3 + \alpha_4 i = b + ci \\ \alpha_3 - \alpha_4 i = b - ci \\ \alpha_2 = d \end{cases}$$

nelle incognite **reali** $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ ha soluzione. **Essendo** $a, b, c, d, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ **numeri reali**, il sistema è equivalente al sistema

$$\begin{cases} \alpha_1 = a \\ \alpha_3 = b \\ \alpha_4 = c \\ \alpha_2 = d \end{cases}$$

che nelle incognite $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ ha soluzione **per ogni** $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

Dunque l'insieme di vettori $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix} \right\}$ è un insieme di generatori per W come spazio vettoriale reale.

(b) Dal momento che ogni elemento di $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 1+i \\ 1-i & 0 \end{pmatrix} \right\}$ è un elemento di W, per provare che $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 1+i \\ 1-i & 0 \end{pmatrix} \right\}$ è un insieme di generatori per W come spazio vettoriale reale occorre provare che **per ogni $\mathbf{A} \in W$ esistono** $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ numeri **reali** tali che

$$\mathbf{A} = \alpha_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 0 & 1+i \\ 1-i & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_3 + \alpha_3 i \\ \alpha_3 - \alpha_3 i & \alpha_2 \end{pmatrix}$$

Poichè per ogni $A \in W$ esistono $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ tali che $A = \begin{pmatrix} a & b+ci \\ b-ci & d \end{pmatrix}$, il problema diventa provare che per ogni $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ il sistema

$$\begin{cases} \alpha_1 = a \\ \alpha_3 + \alpha_3 i = b + ci \\ \alpha_3 - \alpha_3 i = b - ci \\ \alpha_2 = d \end{cases}$$

nelle incognite **reali** $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ ha soluzione. **Essendo** $a, b, c, d, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ **numeri reali**, il sistema è equivalente al sistema

$$\begin{cases} \alpha_1 = a \\ \alpha_3 = b \\ \alpha_3 = c \\ \alpha_2 = d \end{cases}$$

Tale sistema, nelle incognite $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ non ha soluzione **per ogni** $a, b, c, d \in \mathbb{R}$: ad esempio non ha soluzione se si prendono $a = b = d = 0$ e $c = 1$ (in generale se si prendono $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ con $b \neq d$) . Dunque l'insieme di vettori $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 1+i \\ 1-i & 0 \end{pmatrix} \right\}$ non è un insieme di generatori per W come spazio vettoriale reale.

(c) Dal momento che ogni elemento di $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix} \right\}$ è un elemento di W, per provare che $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix} \right\}$ è un insieme di generatori per W come spazio vettoriale reale occorre provare che **per ogni $\mathbf{A} \in W$ esistono** $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ numeri **reali** tali che

$$\mathbf{A} = \alpha_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_3 i \\ -\alpha_3 i & \alpha_2 \end{pmatrix}$$

Poichè per ogni $A \in W$ esistono $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ tali che $A = \begin{pmatrix} a & b+ci \\ b-ci & d \end{pmatrix}$, il problema diventa provare che per ogni $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ il sistema

$$\begin{cases} \alpha_1 = a \\ \alpha_3 i = b + ci \\ -\alpha_3 i = b - ci \\ \alpha_2 = d \end{cases}$$

nelle incognite **reali** $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ ha soluzione. **Essendo** $a, b, c, d, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ **numeri reali**, per $b \neq 0$ il sistema non ha soluzione, dunque l'insieme di vettori $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix} \right\}$ non è un insieme di generatori per W come spazio vettoriale reale.

$\boxed{3}$ Sia $\mathcal{S} = \left\{ \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} i \\ i \\ i \end{pmatrix}; \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1+i \\ i \\ 1-i \end{pmatrix}; \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} i \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$. Si dica se $\mathcal{S}$ è un insieme di generatori di $\mathbb{C}^3$.

Per provare che $\mathcal{S}$ è un insieme di generatori di $\mathbb{C}^3$ occorre provare che per ogni $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^3$ esistono $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{C}$ tali che

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \alpha_1 \mathbf{v}_1 + \alpha_2 \mathbf{v}_2 + \alpha_3 \mathbf{v}_3 == \alpha_1 \begin{pmatrix} i \\ i \\ i \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 1+i \\ i \\ 1-i \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} i \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 i + \alpha_2(1+i) + \alpha_3 i \\ \alpha_1 i + \alpha_2 i \\ \alpha_1 i + \alpha_2(1-i) + 2\alpha_3 \end{pmatrix}$$

ossia che il sistema lineare

$$(*) \quad \begin{cases} \alpha_1 i + \alpha_2(1+i) + \alpha_3 i = a \\ \alpha_1 i + \alpha_2 i = b \\ \alpha_1 i + \alpha_2(1-i) + 2\alpha_3 = c \end{cases}$$

nelle incognite $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ ha soluzione **qualunque** siano $a, b, c \in \mathbb{C}$.

Facendo una eliminazione di Gauss sulla matrice aumentata del sistema si ottiene

$$\left(\begin{array}{ccc|c} i & 1+i & i & a \\ i & i & 0 & b \\ i & 1-i & 2 & c \end{array}\right) \xrightarrow[E_{31}(-i)E_{21}(-i)E_1(-i)]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1-i & 1 & -ia \\ 0 & -1 & -i & b-a \\ 0 & -2i & 2-i & c-a \end{array}\right) \xrightarrow[E_{32}(2i)E_2(-1)]{}$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1-i & 1 & -ia \\ 0 & 1 & i & a-b \\ 0 & 0 & -i & c-a+2i(a-b) \end{array}\right) \xrightarrow[E_3(i)]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1-i & 1 & -ia \\ 0 & 1 & i & a-b \\ 0 & 0 & 1 & ci-ai-2a+2b \end{array}\right) = (\mathbf{U} \mid \mathbf{d}).$$

Poichè $\mathbf{d}$ è libera qualunque siano $a, b, c \in \mathbb{C}$, allora $(*)$ ha soluzione qualunque siano $a, b, c \in \mathbb{C}$, per cui $\mathcal{S}$ è un insieme di generatori di $\mathbb{C}^3$.

$\boxed{4}$ Siano V uno spazio vettoriale ed $\mathcal{S} = \{\mathbf{v}_1; \mathbf{v}_2\}$ un insieme di generatori di V. Si supponga che sia $\mathbf{v}_1 \neq -\mathbf{v}_2$. Si considerino i seguenti insiemi di vettori:

$$(1) \quad \mathcal{S}_1 = \{\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2; \mathbf{v}_2\}, \qquad (2) \quad \mathcal{S}_2 = \{\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2; 2\mathbf{v}_1 + 2\mathbf{v}_2\}.$$

Quando $\mathcal{S}_1$ è ancora un insieme di generatori di V ? Quando $\mathcal{S}_2$ è ancora un insieme di generatori di V ?

(1) $\mathcal{S}_1$ è un insieme di generatori di V se e solo se $\langle \mathcal{S}_1 \rangle = V$, quindi, essendo $\mathcal{S}_1$ contenuto in V poichè $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in V$ e V è uno spazio vettoriale, $\mathcal{S}_1$ è un insieme di generatori di V se e solo se ogni vettore di V si puó esprimere come combinazione lineare degli elementi di $\mathcal{S}_1$, ossia se e solo se per ogni $\mathbf{v} \in V$ esistono scalari α_1, α_2 tali che

$$\mathbf{v} = \alpha_1(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) + \alpha_2\mathbf{v}_2.$$

Sia dunque $\mathbf{v} \in V$. Poichè per ipotesi $\mathcal{S} = \{\mathbf{v}_1; \mathbf{v}_2\}$ è un insieme di generatori di V, allora esistono scalari β_1, β_2 tali che

$$(*) \qquad \mathbf{v} = \beta_1\mathbf{v}_1 + \beta_2\mathbf{v}_2.$$

Cominciamo con il chiederci se $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$, gli elementi dell'insieme di generatori $\mathcal{S}$, si possano esprimere come combinazioni lineari dei vettori d $\mathcal{S}_1$. Essendo $\mathbf{v}_2 \in \mathcal{S}_1$, allora $\mathbf{v}_2$ è in particolare combinazione lineare degli elementi di $\mathcal{S}_1$: esistano scalari α_1, α_2 tali che

$$\mathbf{v}_2 = \alpha_1(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) + \alpha_2\mathbf{v}_2 = \alpha_1\mathbf{v}_1 + (\alpha_1 + \alpha_2)\mathbf{v}_2 :$$

si prenda $\alpha_1 = 0$ ed $\alpha_2 = 1$. Per vedere se $\mathbf{v}_1$ si possa esprimere come combinazione lineare dei vettori d $\mathcal{S}_1$ occorre stabilire se esistano scalari α_1, α_2 tali che

$$\mathbf{v}_1 = \alpha_1(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) + \alpha_2\mathbf{v}_2 = \alpha_1\mathbf{v}_1 + (\alpha_1 + \alpha_2)\mathbf{v}_2.$$

Basta prendere $\alpha_1 = 1$ ed $\alpha_2 = -1$. Dunque $\mathcal{S}_1$ è sempre un insieme di generatori di V: se $\mathbf{v} \in V$ e β_1, β_2 sono scalari per cui valga $(*)$, allora

$$\mathbf{v} = \beta_1\mathbf{v}_1 + \beta_2\mathbf{v}_2 = \beta_1((\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) - \mathbf{v}_2) + \beta_2\mathbf{v}_2 = \beta_1(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) + (-\beta_1 + \beta_2)\mathbf{v}_2$$

esprime $\mathbf{v}$ come combinazione lineare degli elementi di $\mathcal{S}_1$.

(2) $\mathcal{S}_2$ è un insieme di generatori di V se e solo se $V = \langle \mathcal{S}_2 \rangle$. Dal momento che $\mathcal{S}_2 = \{\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2; 2\mathbf{v}_1 + 2\mathbf{v}_2\}$ e che

$$\langle \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2; 2\mathbf{v}_1 + 2\mathbf{v}_2 \rangle = \langle \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2; 2(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) \rangle = \langle \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 \rangle,$$

allora $\mathcal{S}_2$ è un insieme di generatori di V se e solo $V = \langle \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 \rangle$. Essendo $\langle \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 \rangle$ contenuto in V poichè $\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 \in V$ e V è uno spazio vettoriale, $\mathcal{S}_2$ è un insieme di generatori di V se e solo se ogni vettore di V appartiene a $\langle \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 \rangle$, ossia se e solo se per ogni $\mathbf{v} \in V$ esiste uno scalare α tale che

$$\mathbf{v} = \alpha(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2).$$

Sia dunque $\mathbf{v} \in V$. Poichè per ipotesi $\mathcal{S} = \{\mathbf{v}_1; \mathbf{v}_2\}$ è un insieme di generatori di V, allora esistono scalari β_1, β_2 tali che

$$(*) \qquad \mathbf{v} = \beta_1\mathbf{v}_1 + \beta_2\mathbf{v}_2.$$

Cominciamo con il chiederci se $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$, gli elementi dell'insieme di generatori $\mathcal{S}$, siano multipli scalari di $\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$, ossia se esistano scalari δ e γ tali che

$$\mathbf{v}_1 = \delta(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) \quad \text{e} \quad \mathbf{v}_2 = \gamma(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2),$$

cioè tali che

$$(1 - \delta)\mathbf{v}_1 - \delta\mathbf{v}_2 = \mathbf{0} \quad \text{e} \quad \gamma\mathbf{v}_1 - (1 - \gamma)\mathbf{v}_2 = \mathbf{0}.$$

Se $\mathcal{S}$ è linearmente indipendente (L.I.) tali δ e γ non esistono (se esistesse δ tale che $(1-\delta)\mathbf{v}_1 - \delta\mathbf{v}_2 = \mathbf{0}$, da $\mathcal{S}$ L.I. seguirebbe $1-\delta = 0 = \delta$, che è assurdo, ed analogamente se esistesse γ tale che $\gamma\mathbf{v}_1 - (1-\gamma)\mathbf{v}_2 = \mathbf{0}$, da $\mathcal{S}$ L.I. seguirebbe $\gamma = 0 = 1-\gamma$, che è assurdo).

Dunque se $\mathcal{S}$ è L.I. allora $\mathcal{S}_2$ non è un insieme di generatori di V.

Altrimenti $\mathcal{S}$ non è L.I., per cui esistono scalari a e b **non entrambi nulli** tali che $a\mathbf{v}_1 + b\mathbf{v}_2 = \mathbf{0}$.

Se $a = 0$ allora $b \neq 0$ e $b\mathbf{v}_2 = \mathbf{0}$, per cui $\mathbf{v}_2 = \mathbf{0}$ e si puó prendere $\delta = 1$ e $\gamma = 0$.

Altrimenti $a \neq 0$ e $\mathbf{v}_1 = c\mathbf{v}_2$ con $c = b/a$.

Si ricordi che per ipotesi $\mathbf{v}_1 \neq -\mathbf{v}_2$ per cui $c \neq -1$ e quindi $c+1 \neq 0$, ma anche $\mathbf{v}_1 \neq \mathbf{0} \neq \mathbf{v}_2$.

Allora

$$(1-\delta)\mathbf{v}_1 - \delta\mathbf{v}_2 = \mathbf{0} \underset{\mathbf{v}_1 = c\mathbf{v}_2}{\Longrightarrow} (c - c\delta - \delta)\mathbf{v}_2 = \mathbf{0} \underset{\mathbf{v}_2 \neq \mathbf{0}}{\Longrightarrow} 0 = c - c\delta - \delta = -\delta(c+1) + c \underset{c+1\neq 0}{\Longrightarrow} \delta = \frac{c}{c+1}$$

$$\gamma\mathbf{v}_1 - (1-\gamma)\mathbf{v}_2 = \mathbf{0} \underset{\mathbf{v}_1 = c\mathbf{v}_2}{\Longrightarrow} (c\gamma + \gamma - 1)\mathbf{v}_2 = \mathbf{0} \underset{\mathbf{v}_2 \neq \mathbf{0}}{\Longrightarrow} 0 = c\gamma + \gamma - 1 = \gamma(c+1) - 1 \underset{c+1\neq 0}{\Longrightarrow} \gamma = \frac{1}{c+1}$$

per cui se $\mathcal{S}$ è Linearmente dipendente (L.D.) allora $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in \langle \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 \rangle$ e da $(*)$ si ottiene che $\mathbf{v} \in \langle \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 \rangle$ per ogni $\mathbf{v} \in V$, per cui $V = \langle \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 \rangle$ ed $\mathcal{S}_2$ è un insieme di generatori di V.

Concludendo: $\mathcal{S}_2$ è un insieme di generatori di V se e solo se $\mathcal{S}$ è linearmente dipendente.

$\boxed{5}$ Si dica quale dei seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{R}^3$ è linearmente indipendente:

$$\left\{ \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}; \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}; \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, \quad \left\{ \mathbf{w}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}; \mathbf{w}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}; \mathbf{w}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

(1) Il problema è stabilire se gli unici numeri reali α_1, α_2, α_3 per cui $\alpha_1\mathbf{v}_1 + \alpha_2\mathbf{v}_2 + \alpha_3\mathbf{v}_3 = \underline{0}$ siano $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$, oppure no. Poichè, dati α_1, α_2, $\alpha_3 \in \mathbb{R}$, si ha

$$\alpha_1\mathbf{v}_1 + \alpha_2\mathbf{v}_2 + \alpha_3\mathbf{v}_3 = \alpha_1 \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4\alpha_1 + 4\alpha_2 + 2\alpha_3 \\ -2\alpha_1 + 6\alpha_2 - \alpha_3 \\ -2\alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3 \end{pmatrix},$$

allora $\alpha_1\mathbf{v}_1 + \alpha_2\mathbf{v}_2 + \alpha_3\mathbf{v}_3 = \mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ se e solo se

$$(*) \qquad \begin{cases} -4\alpha_1 + 4\alpha_2 + 2\alpha_3 = 0 \\ -2\alpha_1 + 6\alpha_2 - \alpha_3 = 0 \\ -2\alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3 = 0 \end{cases}$$

Il problema diventa quindi stabilire se il sistema $(*)$ (nelle incognite $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$) abbia un'unica soluzione (e quindi la soluzione nulla $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$), oppure no. La matrice aumentata di $(*)$ è: $\left(\begin{array}{ccc|c} -4 & 4 & 2 & 0 \\ -2 & 6 & -1 & 0 \\ -2 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right)$.

Facendo un'eliminazione di Gauss si ottiene:

$$\begin{pmatrix} -4 & 4 & 2 & | & 0 \\ -2 & 6 & -1 & | & 0 \\ -2 & 2 & 1 & | & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{31}(2)E_{21}(2)E_1(-\frac{1}{4})} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1/2 & | & 0 \\ 0 & 4 & -2 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \to$$

$$\xrightarrow{E_2(\frac{1}{4})} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1/2 & | & 0 \\ 0 & 1 & -1/2 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} = (\,\mathbf{U} \quad | \quad \mathbf{0}\,).$$

Poichè **non tutte** le colonne di $\mathbf{U}$ sono **dominanti**, allora $(*)$ ha ∞ soluzioni. In particolare $(*)$ ha una soluzione non nulla, e quindi $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ è **linearmente dipendente** (ad esempio, poichè $(*)$ è equivalente a

$$\begin{cases} \alpha_1 - \alpha_2 - \frac{1}{2}\alpha_3 = 0 \\ \qquad \alpha_2 - \frac{1}{2}\alpha_3 = 0 \end{cases}$$

prendendo $\alpha_3 = 1$ con la sostituzione all'indietro si ottiene $\alpha_2 = \frac{1}{2}$ ed $\alpha_1 = \alpha_2 + \frac{1}{2}\alpha_3 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$, ossia $\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$ è una soluzione non nulla di $(*)$ e $\mathbf{v}_1 + \frac{1}{2}\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3 = \mathbf{0}$ è una combinazione lineare nulla di $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ con coefficienti non tutti nulli).

(2) $$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \alpha_1\mathbf{w}_1 + \alpha_2\mathbf{w}_2 + \alpha_3\mathbf{w}_3 = \alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 + \alpha_2 \\ -\alpha_1 + 4\alpha_3 \\ \alpha_1 + 2\alpha_2 \end{pmatrix}$$

$$\iff \qquad (*) \qquad \begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 = 0 \\ -\alpha_1 + 4\alpha_3 = 0 \\ \alpha_1 + 2\alpha_2 = 0 \end{cases}$$

Facendo un'eliminazione di Gauss sulla matrice aumentata di $(*)$ si ottiene:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & | & 0 \\ -1 & 0 & 4 & | & 0 \\ 1 & 2 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{31}(-1)E_{21}(1)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 1 & 4 & | & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \to$$

$$\xrightarrow{E_{32}(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 1 & 4 & | & 0 \\ 0 & 0 & -4 & | & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_3(-\frac{1}{4})} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 1 & 4 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 \end{pmatrix} = (\,\mathbf{U} \quad | \quad \mathbf{0}\,).$$

Poichè **tutte** le colonne di $\mathbf{U}$ sono **dominanti**, allora $(*)$ ha come unica soluzione la soluzione nulla $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, ossia

$$\alpha_1\mathbf{w}_1 + \alpha_2\mathbf{w}_2 + \alpha_3\mathbf{w}_3 = \mathbf{0} \quad \Longrightarrow \quad \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0.$$

Quindi $\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3\}$ è **linearmente indipendente**.

$\boxed{6}$ Siano V uno spazio vettoriale ed $\mathcal{S} = \{\mathbf{v}_1; \mathbf{v}_2; \mathbf{v}_3\}$ un insieme linearmente indipendente di vettori di V. Si dica quale dei seguenti insiemi di vettori di V è linearmente indipendente:

$$(1) \quad \mathcal{S}_1 = \{\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3; \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_3; \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3\},$$
$$(2) \quad \mathcal{S}_2 = \{\mathbf{v}_1 - 2\mathbf{v}_3; \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2; \mathbf{v}_2 + 2\mathbf{v}_3\}.$$

(1)

$$\underline{0} = \alpha(\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3) + \beta(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_3) + \delta(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3) = (\beta+\delta)\mathbf{v}_1 + (\alpha+\delta)\mathbf{v}_2 + (\alpha+\beta+\delta)\mathbf{v}_3$$

$$\underset{\boxed{\text{poichè } \mathcal{S} \text{ è L.I.}}}{\Longleftrightarrow} \qquad (*) \qquad \begin{cases} \beta+\delta = 0 \\ \alpha+\delta = 0 \\ \alpha+\beta+\delta = 0 \end{cases}$$

Facendo un'eliminazione di Gauss sulla matrice aumentata di $(*)$ si ottiene:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & | & 0 \\ 1 & 0 & 1 & | & 0 \\ 1 & 1 & 1 & | & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{12}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & | & 0 \\ 0 & 1 & 1 & | & 0 \\ 1 & 1 & 1 & | & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{31}(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & | & 0 \\ 0 & 1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\xrightarrow{E_{32}(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & | & 0 \\ 0 & 1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & -1 & | & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_3(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & | & 0 \\ 0 & 1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 \end{pmatrix} = (\, \mathbf{U} \quad | \quad \mathbf{0}\,).$$

Poichè **tutte** le colonne di $\mathbf{U}$ sono **dominanti**, l'unica soluzione di $(*)$ è $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, quindi $\mathcal{S}_1$ è **linearmente indipendente**.

(2) $\underline{0} = \alpha(\mathbf{v}_1 - 2\mathbf{v}_3) + \beta(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) + \delta(\mathbf{v}_2 + 2\mathbf{v}_3) = (\alpha+\beta)\mathbf{v}_1 + (\beta+\delta)\mathbf{v}_2 + (-2\alpha+2\delta)\mathbf{v}_3$

$$\underset{\boxed{\text{poichè } \mathcal{S} \text{ è L.I.}}}{\Longleftrightarrow} \qquad (*) \qquad \begin{cases} \alpha+\beta = 0 \\ \beta+\delta = 0 \\ -2\alpha+2\delta = 0 \end{cases}$$

Facendo un'eliminazione di Gauss sulla matrice aumentata di $(*)$ si ottiene:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 1 & 1 & | & 0 \\ -2 & 0 & 2 & | & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{31}(2)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 2 & 2 & | & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{32}(-2)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} = (\, \mathbf{U} \quad | \quad \mathbf{0}\,).$$

Poichè $\mathbf{U}$ ha una colonna non dominante, $(*)$ ha ∞ soluzioni, in particolare $(*)$ ha una soluzione non nulla, quindi $\mathcal{S}_2$ è **linearmente dipendente**.

ESERCITAZIONI* 5

$\boxed{1}$ Si trovi una base di $\mathbb{R}^3$ contenuta nel seguente insieme di generatori di $\mathbb{R}^3$:

$$\left\{ \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}; \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \mathbf{v}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \mathbf{v}_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}; \mathbf{v}_6 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

$\boxed{2}$ Sia $\mathcal{S} = \left\{ \mathbf{C_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \mathbf{C_2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \mathbf{C_3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \mathbf{C_4} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \right\}$. Si provi che $\mathcal{S}$ è un insieme di generatori dello spazio vettoriale reale $W = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} | a, b \in \mathbb{R} \right\}$ delle matrici diagonali reali di ordine 2, e si trovi una base di W contenuta in $\mathcal{S}$.

$\boxed{3}$ Sappiamo che l'insieme W delle matrici complesse hermitiane di ordine 2 è uno spazio vettoriale reale e che $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix} \right\}$ è un insieme di generatori di W. Qual è la dimensione di W come spazio vettoriale reale ?

$\boxed{4}$ $\mathcal{A} = \{\mathbf{e_1}; \mathbf{e_1} + \mathbf{e_3}; \mathbf{e_2}; 2\mathbf{e_1} + \mathbf{e_2}\}$ è un insieme di generatori di $\mathbb{C}^3$ e $\mathcal{B} = \{\mathbf{e_1} + \mathbf{e_2}; \mathbf{e_3}\}$ è un sottoinsieme linearmente indipendente (L.I.) di $\mathbb{C}^3$.

Si trovi $\mathbf{v} \in \mathcal{B}$ tale che $\mathcal{C} = \{\mathbf{e_1}; \mathbf{v}; \mathbf{e_2}; 2\mathbf{e_1} + \mathbf{e_2}\}$ sia ancora un insieme di generatori di $\mathbb{C}^3$.

$\boxed{5}$ Si dica quale delle seguenti posizioni, al variare di $\mathbf{A} \in M_2(\mathbb{C})$, definisce un'applicazione lineare da $M_2(\mathbb{C})$ in $M_2(\mathbb{C})$: $f_1(\mathbf{A}) = \mathbf{A}\mathbf{A}^T$, $f_2(\mathbf{A}) = \mathbf{A} - \mathbf{I_2}$, $f_3(\mathbf{A}) = 2\mathbf{A}$, $f_4(\mathbf{A}) = \mathbf{A}^2$, e quale delle seguenti posizioni, al variare di $\mathbf{A} \in M_2(\mathbb{C})$, definisce un'applicazione lineare da $M_2(\mathbb{C})$ in $\mathbb{C}^2$: $g_1(\mathbf{A}) = \mathbf{A}\mathbf{e_1}$, $g_2(\mathbf{A}) = \mathbf{A}\mathbf{e_1} + \mathbf{e_1}$.

$\boxed{6}$ Sia $$A_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \alpha & 4 \\ 1 & \alpha+2 & 2\alpha+2 & 4 \\ 2 & 0 & \alpha^2+2\alpha-4 & \alpha^2+4 \\ 0 & \alpha+2 & \alpha^2+\alpha-2 & \alpha^2+\alpha-4 \end{pmatrix}, \quad \text{dove } \alpha \in \mathbb{C}.$$

Per ogni $\alpha \in \mathbb{C}$ si dica qual è $rk(A_\alpha)$ e si trovino una base $\mathcal{B}_\alpha$ di $C(A_\alpha)$ ed una base $\mathcal{D}_\alpha$ di $R(A_\alpha)$.

$\boxed{7}$ Siano $\mathcal{B} = \left\{ \mathbf{w}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \mathbf{w}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \mathbf{w}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \mathbf{w}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ e $\mathcal{B}' = \left\{ \mathbf{z}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \mathbf{z}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}; \mathbf{z}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}; \mathbf{z}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$.

1) Si provi che $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$ sono due basi ordinate di $\mathbb{R}^4$.

(2) Si calcoli la matrice di passaggio $\mathbf{M}_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{B}'}$ da $\mathcal{B}'$ a $\mathcal{B}$.

SVOLGIMENTO ESERCITAZIONI* 5

$\boxed{1}$ Si trovi una base di $\mathbb{R}^3$ contenuta nel seguente insieme di generatori di $\mathbb{R}^3$:

$$\left\{ \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}; \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \mathbf{v}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \mathbf{v}_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}; \mathbf{v}_6 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

$\boxed{1^0 \text{ MODO}}$

1^0 **passaggio**. Esistono in $\mathcal{S}$ vettori che siano combinazioni lineari degli altri vettori di $\mathcal{S}$?

$\mathbf{v}_4 = \mathbf{0}$ è senz'altro combinazione degli altri:

$$\mathbf{v}_4 = \mathbf{0} = 0\mathbf{v}_1 + 0\mathbf{v}_2 + 0\mathbf{v}_3 + 0\mathbf{v}_5 + 0\mathbf{v}_6,$$

per cui togliamo subito $\mathbf{v}_4$ (**togliamo** comunque subito **tutti gli eventuali vettori di $\mathcal{S}$ che siano nulli**), **e poniamo**

$$\mathcal{S}_1 = \left\{ \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}; \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \mathbf{v}_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}; \mathbf{v}_6 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

2^0 **passaggio**. $\mathcal{S}_1$ è ancora un insieme di generatori di $\mathbb{R}^3$. Esistono in $\mathcal{S}_1$ vettori che siano combinazioni lineari degli altri vettori di $\mathcal{S}_1$? Poichè

$$\mathbf{v}_2 = 2\mathbf{v}_1 = 2\mathbf{v}_1 + 0\mathbf{v}_3 + 0\mathbf{v}_5 + 0\mathbf{v}_6$$

ma anche

$$\mathbf{v}_1 = \frac{1}{2}\mathbf{v}_2 = \frac{1}{2}\mathbf{v}_2 + 0\mathbf{v}_3 + 0\mathbf{v}_5 + 0\mathbf{v}_6$$

possiamo togliere da $\mathcal{S}_1$ il vettore $\mathbf{v}_1$, oppure possiamo togliere da $\mathcal{S}_1$ il vettore $\mathbf{v}_2$, ottenendo ancora un insieme di generatori di $\mathbb{R}^3$. Dunque, **guardiamo se tra i vettori di $\mathcal{S}_1$ ci siano coppie di vettori di cui l'uno è multiplo dell'altro, e per ciascuna di queste eventuali coppie togliamo uno di due vettori**. In questo caso abbiamo individuato la coppia $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ e scegliamo di togliere $\mathbf{v}_2$.

Poniamo

$$\mathcal{S}_2 = \left\{ \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \mathbf{v}_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}; \mathbf{v}_6 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

3^0 **passaggio**. $\mathcal{S}_2$ è ancora un insieme di generatori di $\mathbb{R}^3$. Esistono in $\mathcal{S}_2$ vettori che siano combinazioni lineari degli altri vettori di $\mathcal{S}_2$?

Prendiamo una combinazione lineare nulla degli elementi di $\mathcal{S}_2$:

$$\alpha\mathbf{v}_1 + \beta\mathbf{v}_3 + \delta\mathbf{v}_5 + \gamma\mathbf{v}_6 = \mathbf{0}.$$

Se dovesse risultare che allora $\alpha = \beta = \delta = \gamma = 0$, $\mathcal{S}_2$ sarebbe L.I. e quindi una base di $\mathbb{R}^3$ contenuta in $\mathcal{S}$. Da

$$\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \delta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

otteniamo il sistema lineare, nelle incognite $\alpha, \beta, \delta, \gamma$

$$\begin{cases} \alpha+\beta=0 \\ \alpha+\delta=0 \\ \beta-\delta+\gamma=0 \end{cases}$$

Troviamo una forma ridotta di Gauss della matrice aumentata del sistema.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{E_{21}(-1)}$$

$$\to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{E_{32}(-1)E_{2}(-1)} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right).$$

Il sistema è equivalente al sistema

$$(*) \qquad \begin{cases} \alpha+\beta=0 \\ \beta-\delta=0 \\ \gamma=0 \end{cases}$$

il cui insieme delle soluzioni è

$$\left\{ \begin{pmatrix} -h \\ h \\ h \\ 0 \end{pmatrix} | h \in \mathbb{R} \right\}.$$

Poichè esistono soluzioni non nulle, allora $\mathcal{S}_2$ non è L.I., e quindi non è una base.

Prendendo una soluzione non nulla del sistema, ad esempio quella che si ottiene ponendo $h=1$ si ricava:

$$(-1)\mathbf{v}_1 + 1\mathbf{v}_3 + 1\mathbf{v}_5 + 0\mathbf{v}_6 = \mathbf{0}.$$

Dunque $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_3$ e $\mathbf{v}_5$ sono combinazioni lineari degli altri vettori di $\mathcal{S}_2$, e ciascuno di loro puó essere scelto come elemento da togliere da $\mathcal{S}_2$.

Scegliamo di **togliere da $\mathcal{S}_2$ il vettore $\mathbf{v}_1$ (combinazione lineare degli altri vettori di $\mathcal{S}_2$) e poniamo**

$$\mathcal{S}_3 = \left\{ \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \mathbf{v}_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}; \mathbf{v}_6 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

4^0 **passaggio**. $\mathcal{S}_3$ è ancora un insieme di generatori di $\mathbb{R}^3$. Esistono in $\mathcal{S}_3$ vettori che siano combinazioni lineari degli altri vettori di $\mathcal{S}_3$?

Prendiamo una combinazione lineare nulla degli elementi di $\mathcal{S}_3$:

$$\alpha\mathbf{v}_3 + \beta\mathbf{v}_5 + \delta\mathbf{v}_6 = \mathbf{0}.$$

Se dovesse risultare che allora $\alpha=\beta=\delta=0$, $\mathcal{S}_3$ sarebbe L.I. e quindi una base di $\mathbb{R}^3$ contenuta in $\mathcal{S}$. Da

$$\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \delta \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

otteniamo il sistema lineare, nelle incognite α, β, δ

$$\begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 0 \\ \alpha - \beta - \delta = 0 \end{cases}$$

Ovviamente l'unica soluzione del sistema è quella nulla, per cui $\mathcal{S}_3$ è una base di $\mathbb{R}^3$ contenuta in $\mathcal{S}$.

$\boxed{2^0 \text{ MODO}}$ Invece di togliere successivamente vettori che siano combinazioni lineari di quelli rimasti, ossia invece di "restringere" insiemi di generatori, si puó "allargare" insiemi L.I.

Ad esempio:

1. $\mathbf{v}_1 \neq \mathbf{0}$ per cui $\{\mathbf{v}_1\}$ è L.I. Teniamo $\mathbf{v}_1$. Chiamiamo $\mathcal{S}_1 = \mathcal{S}$.

2. $\{\mathbf{v}_1; \mathbf{v}_2\}$ è L.D. Togliamo $\mathbf{v}_2$. Chiamiamo $\mathcal{S}_2 = \mathcal{S}_1 \setminus \{\mathbf{v}_2\} = \{\mathbf{v}_1; \mathbf{v}_3; \mathbf{v}_4; \mathbf{v}_5; \mathbf{v}_6\}$.

3. $\{\mathbf{v}_1; \mathbf{v}_3\}$ è L.I. Teniamo $\mathbf{v}_3$. Chiamiamo $\mathcal{S}_3 = \mathcal{S}_2$.

4. $\{\mathbf{v}_1; \mathbf{v}_3; \mathbf{v}_4\}$ è L.D. Togliamo $\mathbf{v}_4$. Chiamiamo $\mathcal{S}_4 = \mathcal{S}_3 \setminus \{\mathbf{v}_3\} = \{\mathbf{v}_1; \mathbf{v}_4; \mathbf{v}_5; \mathbf{v}_6\}$.

5. $\{\mathbf{v}_1; \mathbf{v}_3; \mathbf{v}_5\}$ è L.D. Togliamo $\mathbf{v}_5$. Chiamiamo $\mathcal{S}_5 = \mathcal{S}_4 \setminus \{\mathbf{v}_5\} = \{\mathbf{v}_1; \mathbf{v}_4; \mathbf{v}_6\}$.

6. $\{\mathbf{v}_1; \mathbf{v}_3; \mathbf{v}_6\}$ è L.I. Teniamo $\mathbf{v}_6$. Chiamiamo $\mathcal{S}_6 = \mathcal{S}_5$.

Dunque $\mathcal{S}_6 = \{\mathbf{v}_1; \mathbf{v}_3; \mathbf{v}_6\}$ è una base di $\mathbb{R}^3$ contenuta in $\mathcal{S}$.

$\boxed{2}$ Sia $\mathcal{S} = \left\{ \mathbf{C_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \mathbf{C_2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \mathbf{C_3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \mathbf{C_4} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \right\}$. Si provi che $\mathcal{S}$ è un insieme di generatori dello spazio vettoriale reale $W = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} | a, b \in \mathbb{R} \right\}$ delle matrici diagonali reali di ordine 2, e si trovi una base di W contenuta in $\mathcal{S}$.

Per provare che $\mathcal{S} = \{\mathbf{C_1}; \mathbf{C_2}; \mathbf{C_3}; \mathbf{C_4}\}$ è un insieme di generatori di W occorre provare che **per ogni** $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \in W$ **esistono** scalari $\alpha, \beta, \delta, \gamma \in \mathbb{R}$ tali che

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} = \alpha \mathbf{C_1} + \beta \mathbf{C_2} + \delta \mathbf{C_3} + \gamma \mathbf{C_4} = \alpha \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \delta \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha + \beta + 5\gamma & 0 \\ 0 & \alpha + 5\gamma \end{pmatrix},$$

ossia che il sistema lineare, nelle incognite $\alpha, \beta, \delta, \gamma$

$$(*) \qquad \begin{cases} \alpha + \beta + 5\gamma = a \\ \alpha + 5\gamma = b \end{cases}$$

ha soluzione **per ogni** $a, b \in \mathbb{R}$. Facendo una E.G. sulla matrice aumentata del sistema si ha:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 5 & a \\ 1 & 0 & 0 & 5 & b \end{array}\right) \xrightarrow{E_{21}(-1)} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 5 & a \\ 0 & -1 & 0 & 0 & b-a \end{array}\right) \xrightarrow{E_2(-1)} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 5 & a \\ 0 & 1 & 0 & 0 & a-b \end{array}\right) = (U \mid \mathbf{d}).$$

Poichè $\mathbf{d}$ è dominante **per ogni** $a, b \in \mathbb{R}$, allora $(*)$ ha soluzione **per ogni** $a, b \in \mathbb{R}$, e quindi $\mathcal{S}$ è un insieme di generatori di W.

Per trovare una base di W contenuta in $\mathcal{S}$, “restringiamo”$\mathcal{S}$.

Poichè $\mathbf{C_3} = \mathbf{O}$, $\mathbf{C_3}$ è combinazione lineare degli elementi di $\mathcal{S}$ diversi da $\mathbf{C_3}$, per cui l'insieme

$$\mathcal{S}_1 = \left\{ \mathbf{C_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \mathbf{C_2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \mathbf{C_4} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \right\}$$

che si ottiene da $\mathcal{S}$ togliendo $\mathbf{C_3}$ è ancora un insieme di generatori di W.

Poichè $\mathbf{C_4} = 5\mathbf{C_1}$, ossia $\mathbf{C_1}$ e $\mathbf{C_4}$ sono l'uno multiplo dell'altro (per cui in particolare $\mathbf{C_1}$ è combinazione lineare degli elementi di $\mathcal{S}_1$ diversi da $\mathbf{C_1}$, ed analogamente $\mathbf{C_4}$ è combinazione lineare degli elementi di $\mathcal{S}_1$ diversi da $\mathbf{C_4}$), allora l'insieme che si ottiene da $\mathcal{S}_1$ togliendo uno tra $\mathbf{C_1}$ e $\mathbf{C_4}$ è ancora un insieme di generatori di W. Scegliamo di togliere $\mathbf{C_1}$ e poniamo

$$\mathcal{S}_2 = \left\{ \mathbf{C_2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \mathbf{C_4} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \right\}$$

$\mathcal{S}_2$ è ancora un insieme di generatori di W.

Sia $\alpha\mathbf{C_2} + \beta\mathbf{C_4} = \mathbf{O}$ una combinazione lineare nulla dei vettori di $\mathcal{S}_2$. Allora da

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha + 5\beta & 0 \\ 0 & 5\beta \end{pmatrix}$$

si ottiene il sistema lineare, nelle incognite α e β

$$\begin{cases} \alpha + 5\beta = 0 \\ 5\beta = 0 \end{cases}$$

che ha come unica soluzione quella nulla. Dunque $\mathcal{S}_2$ è linearmente indipendente, per cui è una base di W contenuta in $\mathcal{S}$.

$\boxed{3}$ Sappiamo che l'insieme W delle matrici complesse hermitiane di ordine 2 è uno spazio vettoriale reale e che $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix} \right\}$ è un insieme di generatori di W. Qual è la dimensione di W come spazio vettoriale reale ?

La dimensione di W è il numero degli elementi di una sua base. Poichè

$$\mathcal{S} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

è un insieme di generatori di W, possiamo estrarre da $\mathcal{S}$ una base $\mathcal{B}$ di W. Avremo poi che la dimensione di W è il numero degli elementi di $\mathcal{B}$. Restringiamo dunque $\mathcal{S}$. Sia

$$\alpha \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \delta \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \alpha, \beta, \delta, \gamma \in \mathbb{R}$$

una combinazione lineare nulla dei vettori di $\mathcal{S}$ **a coefficienti reali** (prendiamo coefficienti reali perchè W è uno **spazio vettoriale reale**). Poichè

$$\alpha \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \delta \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \delta + i\gamma \\ \delta + i\gamma & \beta \end{pmatrix},$$

si ottiene il sistema lineare, nelle incognite **reali** $\alpha, \beta, \delta, \gamma$

$$\begin{cases} \alpha = 0 \\ \delta + i\gamma = 0 \\ \beta = 0 \end{cases}$$

e quindi $\alpha = \beta = \delta = \gamma = 0$. Pertanto il sistema ha come unica soluzione quella nulla, per cui $\mathcal{S}$ è linearmente indipendente e $\mathcal{B} = \mathcal{S}$ è una base di W. La dimensione di W è allora il numero degli elementi di $\mathcal{B}$, cioè 4.

$\boxed{4}$ $\mathcal{A} = \{\mathbf{e_1}; \mathbf{e_1} + \mathbf{e_3}; \mathbf{e_2}; 2\mathbf{e_1} + \mathbf{e_2}\}$ è un insieme di generatori di $\mathbb{C}^3$ e $\mathcal{B} = \{\mathbf{e_1} + \mathbf{e_2}; \mathbf{e_3}\}$ è un sottoinsieme linearmente indipendente (L.I.) di $\mathbb{C}^3$.

Si trovi $\mathbf{v} \in \mathcal{B}$ tale che $\mathcal{C} = \{\mathbf{e_1}; \mathbf{v}; \mathbf{e_2}; 2\mathbf{e_1} + \mathbf{e_2}\}$ sia ancora un insieme di generatori di $\mathbb{C}^3$.

• Sia $\mathcal{C}_1 = \{\mathbf{e_1}; \mathbf{e_1} + \mathbf{e_2}; \mathbf{e_2}; 2\mathbf{e_1} + \mathbf{e_2}\}$ l'insieme di vettori di $\mathbb{C}^3$ che si ottiene dall'insieme di generatori $\mathcal{A}$ (di $\mathbb{C}^3$) rimpiazzando l' elemento $\mathbf{e_1} + \mathbf{e_3}$ con l'elemento $\mathbf{e_1} + \mathbf{e_2}$ dell'insieme L.I. $\mathcal{B}$. Ci chiediamo se $\mathcal{C}_1$ sia ancora un insieme di generatori (di $\mathbb{C}^3$), ossia se per ogni $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^3$ esistano o meno $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 \in \mathbb{C}$ tali che

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \alpha_1\mathbf{e_1} + \alpha_2(\mathbf{e_1} + \mathbf{e_2}) + \alpha_3\mathbf{e_2} + \alpha_4(2\mathbf{e_1} + \mathbf{e_2}) =$$

$$= \alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_4 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_4 \\ \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ossia se il sistema lineare

$$(*) \qquad \begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_4 = a \\ \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = b \\ 0 = c \end{cases}$$

nelle incognite $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ abbia o meno soluzione **per ogni** $a, b, c \in \mathbb{C}$. Prendendo $c \neq 0$, $(*)$ non ha soluzione, per cui $\mathcal{C}_1$ non è un insieme di generatori di $\mathbb{C}^3$.

• $\mathcal{C}_2 = \{\mathbf{e_1}; \mathbf{e_3}; \mathbf{e_2}; 2\mathbf{e_1} + \mathbf{e_2}\}$ l'insieme di vettori di $\mathbb{C}^3$ che si ottiene dall'insieme di generatori $\mathcal{A}$ (di $\mathbb{C}^3$) rimpiazzando l' elemento $\mathbf{e_1} + \mathbf{e_3}$ con l'elemento $\mathbf{e_3}$ dell'insieme L.I. $\mathcal{B}$. $\mathcal{C}_2$ è senz'altro ancora un insieme di generatori (di $\mathbb{C}^3$), dal momento che $\mathcal{C}_2$ contiene la base canonica $\mathcal{E} = \{\mathbf{e_1}; \mathbf{e_2}; \mathbf{e_3}\}$ di $\mathbb{C}^3$ che è in particolare un insieme di generatori di $\mathbb{C}^3$ (si ricordi che sovrainsiemi di insiemi di generatori sono ancora insiemi di generatori).

Dunque $\mathbf{v} = \mathbf{e_3}$.

Per il teorema di Steinitz, sappiamo che, essendo $\mathcal{A}$ un insieme di generatori e $\mathcal{B}$ un inisme L.I., una volta scelto ad arbitrio alcuni elementi di $\mathcal{A}$ **esistono** in loro corrispondenza **opportuni** elementi di $\mathcal{B}$ tali che l'insieme che si ottiene rimpiazzando gli elementi di $\mathcal{A}$ scelti ad arbitrio con questi opportuni elementi di $\mathcal{B}$ sia ancora un insieme di generatori. Dunque, avendo scelto in questo caso il solo elemento $\mathbf{e_1} + \mathbf{e_3}$ di $\mathcal{A}$, dal teorema di Steinitz segue che **esiste** $\mathbf{v} \in \mathcal{B}$ tale che l'insieme $\mathcal{C} = \{\mathbf{e_1}; \mathbf{v}; \mathbf{e_2}; 2\mathbf{e_1} + \mathbf{e_2}\}$ ottenuto da $\mathcal{A}$ rimpiazzando $\mathbf{e_1} + \mathbf{e_3}$ con $\mathbf{v}$ sia ancora un insieme di generatori.

Questo esercizio sottolinea che tale $\mathbf{v}$ non puó essere preso arbitrariamente in $\mathcal{B}$.

$\boxed{5}$ Si dica quale delle seguenti posizioni, al variare di $\mathbf{A} \in M_2(\mathbb{C})$, definisce un'applicazione lineare da $M_2(\mathbb{C})$ in $M_2(\mathbb{C})$: $f_1(\mathbf{A}) = \mathbf{A}\mathbf{A}^T$, $f_2(\mathbf{A}) = \mathbf{A} - \mathbf{I_2}$, $f_3(\mathbf{A}) = 2\mathbf{A}$, $f_4(\mathbf{A}) = \mathbf{A}^2$, e quale delle seguenti posizioni, al variare di $\mathbf{A} \in M_2(\mathbb{C})$, definisce un'applicazione lineare da $M_2(\mathbb{C})$ in $\mathbb{C}^2$: $g_1(\mathbf{A}) = \mathbf{A}\mathbf{e_1}$, $g_2(\mathbf{A}) = \mathbf{A}\mathbf{e_1} + \mathbf{e_1}$.

Fissato $i \in \{1, 2, 3, 4\}$, per vedere che $f_i : M_2(\mathbb{C}) \to M_2(\mathbb{C})$ è un'applicazione lineare occorre verificare che siano soddisfatte le seguenti condizioni:

(1) $f_i(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = f_i(\mathbf{A}) + f_i(\mathbf{B})$ per ogni $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in M_2(\mathbb{C})$;

(2) $f_i(\alpha\mathbf{A}) = \alpha f_i(\mathbf{A})$ per ogni $\mathbf{A} \in M_2(\mathbb{C})$ ed ogni $\alpha \in \mathbb{C}$.

• f_1 verifica la condizione (1) ? Essendo

$$f_1(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = (\mathbf{A} + \mathbf{B})(\mathbf{A} + \mathbf{B})^T = (\mathbf{A} + \mathbf{B})(\mathbf{A}^T + \mathbf{B}^T) = \mathbf{A}\mathbf{A}^T + \mathbf{B}\mathbf{A}^T + \mathbf{A}\mathbf{B}^T + \mathbf{B}\mathbf{B}^T,$$

$f_1(\mathbf{A}) = \mathbf{A}\mathbf{A}^T$ e $f_1(\mathbf{B}) = \mathbf{B}\mathbf{B}^T$, se fosse $f_1(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = f_1(\mathbf{A}) + f_1(\mathbf{B})$ per ogni $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in M_2(\mathbb{C})$, sarebbe

$$(*) \quad \mathbf{B}\mathbf{A}^T + \mathbf{A}\mathbf{B}^T = \mathbf{O} \quad \forall \mathbf{A}, \mathbf{B} \in M_2(\mathbb{C})$$

Ma $(*)$ è falsa: si prenda, ad esempio, $\mathbf{A} = \mathbf{B} = \mathbf{I_2}$. Dunque f_1 non è un'applicazione lineare.

• f_2 verifica la condizione (2) ? Essendo

$$f_2(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \mathbf{A} + \mathbf{B} - \mathbf{I_2},$$

$f_2(\mathbf{A}) = \mathbf{A} - \mathbf{I_2}$ e $f_2(\mathbf{B}) = \mathbf{B} - \mathbf{I_2}$, se fosse $f_2(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = f_2(\mathbf{A}) + f_2(\mathbf{B})$ per ogni $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in M_2(\mathbb{C})$, si avrebbe

$$\mathbf{A} - \mathbf{I_2} + \mathbf{B} - \mathbf{I_2} = \mathbf{A} + \mathbf{B} - \mathbf{I_2} \quad \forall \mathbf{A}, \mathbf{B} \in M_2(\mathbb{C}),$$

da cui $\mathbf{I_2} = \mathbf{O}$, che è falso. Dunque f_2 non è un'applicazione lineare.

• f_3 verifica la condizione (1) ? Sí , essendo

$$f_3(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = 2(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = 2\mathbf{A} + 2\mathbf{B} = f_3(\mathbf{A}) + f_3(\mathbf{B}) \quad \forall \mathbf{A}, \mathbf{B} \in M_2(\mathbb{C}).$$

f_3 verifica la condizione (2) ? Sí , essendo

$$f_3(\alpha\mathbf{A}) = 2(\alpha\mathbf{A}) = \alpha(2\mathbf{A}) = \alpha f_3(\mathbf{A}) \quad \forall \mathbf{A} \in M_2(\mathbb{C}), \quad \forall \alpha \in \mathbb{C}.$$

Dunque f_3 è un'applicazione lineare.

• f_4 verifica la condizione (1) ? Essendo

$$f_4(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = (\mathbf{A} + \mathbf{B})^2 = (\mathbf{A} + \mathbf{B})(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \mathbf{A}^2 + \mathbf{B}\mathbf{A} + \mathbf{A}\mathbf{B} + \mathbf{B}^2,$$

$f_4(\mathbf{A}) = \mathbf{A}^2$ e $f_4(\mathbf{B}) = \mathbf{B}^2$, se fosse $f_4(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = f_4(\mathbf{A}) + f_4(\mathbf{B})$ per ogni $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in M_2(\mathbb{C})$, sarebbe

$$(*) \quad \mathbf{B}\mathbf{A} + \mathbf{A}\mathbf{B} = \mathbf{O} \quad \forall \mathbf{A}, \mathbf{B} \in M_2(\mathbb{C})$$

Ma $(*)$ è falsa: si prenda, ad esempio, $\mathbf{A} = \mathbf{B} = \mathbf{I_2}$. Dunque f_4 non è un'applicazione lineare.

Fissato $i \in \{1, 2\}$, per vedere che $g_i : M_2(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}^2$ è un'applicazione lineare occorre verificare che siano soddisfatte le seguenti condizioni:

(1) $g_i(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = g_i(\mathbf{A}) + g_i(\mathbf{B})$ per ogni $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in M_2(\mathbb{C})$;

(2) $g_i(\alpha\mathbf{A}) = \alpha g_i(\mathbf{A})$ per ogni $\mathbf{A} \in M_2(\mathbb{C})$ ed ogni $\alpha \in \mathbb{C}$.

• g_1 verifica la condizione (1) ? Sí , essendo

$$g_1(\mathbf{A}+\mathbf{B}) = (\mathbf{A}+\mathbf{B})\mathbf{e_1} = \mathbf{Ae_1} + \mathbf{Be_1} = g_1(\mathbf{A}) + g_1(\mathbf{B}) \quad \forall \mathbf{A},\mathbf{B} \in M_2(\mathbb{C}).$$

g_1 verifica la condizione (2) ? Sí , essendo

$$g_1(\alpha\mathbf{A}) = (\alpha\mathbf{A})\mathbf{e_1} = \alpha(\mathbf{Ae_1}) = \alpha g_1(\mathbf{A}) \quad \forall \mathbf{A} \in M_2(\mathbb{C}), \quad \forall \alpha \in \mathbb{C}.$$

Dunque g_1 è un'applicazione lineare.

• g_2 verifica la condizione (1) ? Essendo

$$g_2(\mathbf{A}+\mathbf{B}) = (\mathbf{A}+\mathbf{B})\mathbf{e_1} + \mathbf{e_1} = \mathbf{Ae_1} + \mathbf{Be_1} + \mathbf{e_1},$$

$g_2(\mathbf{A}) = \mathbf{Ae_1} + \mathbf{e_1}$ e $g_2(\mathbf{B}) = \mathbf{Be_1} + \mathbf{e_1}$, se fosse $g_2(\mathbf{A}+\mathbf{B}) = g_2(\mathbf{A}) + g_2(\mathbf{B})$ per ogni $\mathbf{A},\mathbf{B} \in M_2(\mathbb{C})$, sarebbe $\mathbf{e_1} = \mathbf{0}$ che è falso. Dunque g_2 non è un'applicazione lineare.

$\boxed{6}$ Sia $\quad \mathbf{A}_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \alpha & 4 \\ 1 & \alpha+2 & 2\alpha+2 & 4 \\ 2 & 0 & \alpha^2+2\alpha-4 & \alpha^2+4 \\ 0 & \alpha+2 & \alpha^2+\alpha-2 & \alpha^2+\alpha-4 \end{pmatrix}, \quad$ dove $\alpha \in \mathbb{C}$.

Per ogni $\alpha \in \mathbb{C}$ si dica qual è $rk(\mathbf{A}_\alpha)$ e si trovino una base $\mathcal{B}_\alpha$ di $C(\mathbf{A}_\alpha)$ ed una base $\mathcal{D}_\alpha$ di $R(\mathbf{A}_\alpha)$.

$$\mathbf{A}_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \alpha & 4 \\ 1 & \alpha+2 & 2\alpha+2 & 4 \\ 2 & 0 & \alpha^2+2\alpha-4 & \alpha^2+4 \\ 0 & \alpha+2 & \alpha^2+\alpha-2 & \alpha^2+\alpha-4 \end{pmatrix} \to$$
$$\xrightarrow{E_{31}(-2)E_{21}(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \alpha & 4 \\ 0 & \alpha+2 & \alpha+2 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha^2-4 & \alpha^2-4 \\ 0 & \alpha+2 & \alpha^2+\alpha-2 & \alpha^2+\alpha-4 \end{pmatrix} = \mathbf{B}_\alpha$$

$\boxed{1^o CASO}$ $\quad \alpha \neq -2$

$$\mathbf{B}_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \alpha & 4 \\ 0 & \alpha+2 & \alpha+2 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha^2-4 & \alpha^2-4 \\ 0 & \alpha+2 & \alpha^2+\alpha-2 & \alpha^2+\alpha-4 \end{pmatrix} \to$$
$$\xrightarrow{E_{42}(-\alpha-2)E_2(\frac{1}{\alpha+2})} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \alpha & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha^2-4 & \alpha^2-4 \\ 0 & 0 & \alpha^2-4 & \alpha^2+\alpha-4 \end{pmatrix} = \mathbf{C}_\alpha$$

$\boxed{1^o \textit{Sottocaso}}$ $\quad \alpha \neq -2, 2$

$$\mathbf{C}_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \alpha & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha^2-4 & \alpha^2-4 \\ 0 & 0 & \alpha^2-4 & \alpha^2+\alpha-4 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{43}(-\alpha^2+4)E_3(\frac{1}{\alpha^2-4})} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \alpha & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix} = \mathbf{D}_\alpha$$

$\boxed{1^o Sotto-sottocaso}$ $\alpha \neq -2, 2, 0$

$$\mathbf{D}_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \alpha & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix} \xrightarrow{E_4(\frac{1}{\alpha})} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \alpha & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{U}_\alpha$$

$$rk(\mathbf{A}_\alpha) = 4, \qquad \mathcal{D}_\alpha = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \alpha \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\mathcal{B}_\alpha = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha+2 \\ 0 \\ \alpha+2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \alpha \\ 2\alpha+2 \\ \alpha^2+2\alpha-4 \\ \alpha^2+\alpha-2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ \alpha^2+4 \\ \alpha^2+\alpha-4 \end{pmatrix} \right\}$$

$\boxed{2^o Sotto-sottocaso}$ $\alpha = 0$

$$\mathbf{D}_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{U}_0$$

$$rk(\mathbf{A}_0) = 3, \qquad \mathcal{D}_0 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \qquad \mathcal{B}_0 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}$$

$\boxed{2^o Sottocaso}$ $\alpha = 2$

$$\mathbf{C}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_3(\frac{1}{2})E_{34}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{U}_2$$

$$rk(\mathbf{A}_2) = 3, \qquad \mathcal{D}_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \qquad \mathcal{B}_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 8 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

$\boxed{2^o CASO}$ $\alpha = -2$

$$\mathbf{B}_{-2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_2(\frac{-1}{2})E_{24}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{U}_{-2}$$

$$rk(\mathbf{A}_{-2}) = 2, \qquad \mathcal{D}_{-2} = \{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \} \qquad \mathcal{B}_{-2} = \{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 8 \\ -2 \end{pmatrix} \}$$

$\boxed{7}$ Siano $\mathcal{B} = \left\{ \mathbf{w}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \mathbf{w}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \mathbf{w}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \mathbf{w}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ e $\mathcal{B}' = \left\{ \mathbf{z}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \ \mathbf{z}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}; \right.$ $\left. \mathbf{z}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}; \ \mathbf{z}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$.

1) Si provi che $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$ sono due basi ordinate di $\mathbb{R}^4$.

(2) Si calcoli la matrice di passaggio $\mathbf{M}_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{B}'}$ da $\mathcal{B}'$ a $\mathcal{B}$.

(1) Siano $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ed $\mathbf{A}' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ le matrici che hanno come colonne gli elementi di $\mathcal{B}$ e di $\mathcal{B}'$ rispettivamente.

Occorre provare che entrambe hanno rango uguale a 4.

Facendo una E.G. su $\mathbf{A}$ si ottiene:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{41}(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{43}(1)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{U}$$

per cui rk($\mathbf{A}$)=rk($\mathbf{U}$) $= 4$, ed, analogamente, facendo una E.G. su $\mathbf{A}'$ si ottiene:

$$\mathbf{A}' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{31}(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{23}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{42}(1)}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_4(-1)E_3(\frac{1}{2})} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{U}'$$

per cui rk($\mathbf{A}'$)=rk($\mathbf{U}'$) $= 4$.

(2) La matrice di passaggio $\mathbf{M}_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{B}'}$ da $\mathcal{B}'$ a $\mathcal{B}$ è

$$\mathbf{M}_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} C_{\mathcal{B}}(\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}) & C_{\mathcal{B}}(\begin{pmatrix}0\\0\\1\\-1\end{pmatrix}) & C_{\mathcal{B}}(\begin{pmatrix}0\\2\\-1\\1\end{pmatrix}) & C_{\mathcal{B}}(\begin{pmatrix}0\\0\\-1\\0\end{pmatrix}) \end{pmatrix}.$$

Per calcolarla, piuttosto che calcolare separatamente $C_{\mathcal{B}}(\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix})$, $C_{\mathcal{B}}(\begin{pmatrix}0\\0\\1\\-1\end{pmatrix})$, $C_{\mathcal{B}}(\begin{pmatrix}0\\2\\-1\\-1\end{pmatrix})$ e $C_{\mathcal{B}}(\begin{pmatrix}0\\0\\-1\\0\end{pmatrix})$, calcoliamo $C_{\mathcal{B}}(\begin{pmatrix}a\\b\\c\\d\end{pmatrix})$ per un generico vettore $\begin{pmatrix}a\\b\\c\\d\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$, e specializziamo la formula ottenuta ai quattro diversi vettori $\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0\\0\\1\\-1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0\\2\\-1\\1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0\\0\\-1\\0\end{pmatrix}$. Poichè

$$C_{\mathcal{B}}(\begin{pmatrix}a\\b\\c\\d\end{pmatrix}) = \begin{pmatrix}\alpha\\\beta\\\delta\\\gamma\end{pmatrix} \quad | \quad \begin{pmatrix}a\\b\\c\\d\end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix}1\\1\\0\\1\end{pmatrix} + \delta\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix} + \gamma\begin{pmatrix}1\\0\\1\\1\end{pmatrix}$$

allora

$$C_{\mathcal{B}}(\begin{pmatrix}a\\b\\c\\d\end{pmatrix}) = \begin{pmatrix}\alpha\\\beta\\\delta\\\gamma\end{pmatrix} \quad | \quad \begin{pmatrix}\alpha+\beta+\delta+\gamma\\\beta\\\delta+\gamma\\\alpha+\beta+\gamma\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a\\b\\c\\d\end{pmatrix}$$

ossia α, β, δ e γ sono tali che

$$(*) \quad \begin{cases} \alpha+\beta+\delta+\gamma = a \\ \beta = b \\ \delta+\gamma = c \\ \alpha+\beta+\gamma = d \end{cases}$$

Facendo una EG sulla matrice aumentata di $(*)$ si ottiene:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1&1&1&1&a\\0&1&0&0&b\\0&0&1&1&c\\1&1&0&1&d \end{array}\right) \xrightarrow{E_{41}(-1)} \left(\begin{array}{cccc|c} 1&1&1&1&a\\0&1&0&0&b\\0&0&1&1&c\\0&0&-1&0&d-a \end{array}\right) \xrightarrow{E_{43}(1)}$$
$$\rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1&1&1&1&a\\0&1&0&0&b\\0&0&1&1&c\\0&0&0&1&d-a+c \end{array}\right),$$

per cui con la sostituzione all'indietro

$$\begin{cases} \gamma = d-a+c \\ \delta = -\gamma+c = -d+a-c+c = a-d \\ \beta = b \\ \alpha = -\beta-\delta-\gamma+a = -b+d-a-d+a-c+a = a-c-b \end{cases},$$

e quindi

$$C_{\mathcal{B}}(\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} a-b-c \\ b \\ a-d \\ -a+c+d \end{pmatrix}.$$

In particolare si ha:

$$C_{\mathcal{B}}(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad C_{\mathcal{B}}(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad C_{\mathcal{B}}(\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad C_{\mathcal{B}}(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Dunque

$$\mathbf{M}_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

ESERCITAZIONI* 6

$\boxed{1}$ Sia $f : M_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^2$ definita da $f(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} a+b-c \\ a+b \end{pmatrix}$.

(a) Si provi che f è un'applicazione lineare.

(b) Si determini la matrice $\mathbf{A}$ associata ad f rispetto alle basi ordinate

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\} \quad \text{e} \quad \mathcal{D} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

su dominio e codominio rispettivamente.

$\boxed{2}$ Sia $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ la matrice associata ad un'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ rispetto alle basi ordinate $\mathcal{B} = \left\{ \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ e $\mathcal{D} = \left\{ \mathbf{w}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}; \mathbf{w}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$ su dominio e codominio rispettivamente. Si determini la matrice $\mathbf{A}'$ associata ad f rispetto alle basi ordinate $\mathcal{B}' = \left\{ \mathbf{v}'_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \mathbf{v}'_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}; \mathbf{v}'_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ e $\mathcal{D}' = \left\{ \mathbf{w}'_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \mathbf{w}'_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ su dominio e codominio rispettivamente.

$\boxed{3}$ Si verifichi che $\phi : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ definita da $\phi(\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}) = |2a-b| + |a+c| + |ib|$ è una norma.

$\boxed{4}$ Siano $\mathbf{z} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}$ ed $S = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \quad | \quad \|\mathbf{x} - \mathbf{z}\|_\infty \leq 1\}$. Si provi che esistono $\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1 \in S$ tali che

$$\|\mathbf{x}_0\|_2 \quad \leq \quad \|\mathbf{x}\|_2 \quad \leq \quad \|\mathbf{x}_1\|_2 \qquad \text{per ogni } \mathbf{x} \in S,$$

e si calcolino $\|\mathbf{x}_0\|_2$ e $\|\mathbf{x}_1\|_2$.

$\boxed{5}$ Sia $V = M_2(\mathbb{C})$. Si verifichi che $(\cdot|\cdot) : V \times V \to \mathbb{C}$ definito da

$$(\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} | \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{pmatrix}) = \sum_{i=1}^{4} \overline{a_i} b_i$$

è un prodotto interno.

$\boxed{6}$ Si trovi una base di $V^\perp$ nei seguenti casi:

$$V = \langle \begin{pmatrix} 0 \\ i \\ 2 \end{pmatrix} \rangle, \qquad V = \langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1+i \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \rangle, \qquad V = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 1 \\ i \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} i \\ -1 \\ i \\ -1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle.$$

Svolgimento delle Esercitazioni 6

$\boxed{1}$ Sia $f : M_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^2$ definita da $f(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} a+b-c \\ a+b \end{pmatrix}$.

(a) Si provi che f è un'applicazione lineare.

(b) Si determini la matrice $\mathbf{A}$ associata ad f rispetto alle basi ordinate

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\} \quad \text{e} \quad \mathcal{D} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

(a) Per provare che f è un'applicazione lineare occorre provare :

1. $f(\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix}) \underset{?}{=} f(\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}) + f(\begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix})$
   per ogni $a_1, b_1, c_1, d_1, a_2, b_2, c_2, d_2 \in \mathbb{R}$
2. $f(\alpha \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}) \underset{?}{=} \alpha f(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix})$ per ogni $\alpha, a, b, c, d \in \mathbb{R}$

1. $$f(\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix}) \underset{\boxed{\text{def. somma matrici}}}{\overset{}{\underset{\uparrow}{=}}} f(\begin{pmatrix} a_1+a_2 & b_1+b_2 \\ c_1+c_2 & d_1+d_2 \end{pmatrix}) \underset{\boxed{\text{def. f}}}{\underset{\uparrow}{=}}$$

$$= \begin{pmatrix} (a_1+a_2)+(b_1+b_2)-(c_1+c_2) \\ (a_1+a_2)+(b_1+b_2) \end{pmatrix} \underset{\boxed{\text{propr. assoc. e commut. di + in } \mathbb{R}}}{\underset{\uparrow}{=}} \begin{pmatrix} (a_1+b_1-c_1)+(a_2+b_2-c_2) \\ (a_1+b_1)+(a_2+b_2) \end{pmatrix} =$$

$$\underset{\boxed{\text{def. somma vettori colonna}}}{\underset{\uparrow}{=}} \begin{pmatrix} a_1+b_1-c_1 \\ a_1+b_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2+b_2-c_2 \\ a_2+b_2 \end{pmatrix} \underset{\boxed{\text{def. f}}}{\underset{\uparrow}{=}} f(\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}) + f(\begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix})$$

2. $$f(\alpha \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}) \underset{\boxed{\text{def. prod. di uno scal. per una matr.}}}{\underset{\uparrow}{=}} f(\begin{pmatrix} \alpha a & \alpha b \\ \alpha c & \alpha d \end{pmatrix}) \underset{\boxed{\text{def. f}}}{\underset{\uparrow}{=}} \begin{pmatrix} \alpha a+\alpha b-\alpha c \\ \alpha a+\alpha b \end{pmatrix} \underset{\boxed{\text{propr. distr. in } \mathbb{R}}}{\underset{\uparrow}{=}}$$

$$= \begin{pmatrix} \alpha(a+b-c) \\ \alpha(a+b) \end{pmatrix} \underset{\boxed{\text{def. prod. di uno scal. per un vett. colonna}}}{\underset{\uparrow}{=}} \alpha \begin{pmatrix} a+b-c \\ a+b \end{pmatrix} \underset{\boxed{\text{def. f}}}{\underset{\uparrow}{=}} \alpha f(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix})$$

(b) La matrice $\mathbf{A}$ associata ad f rispetto alle basi ordinate $\mathcal{B}$ e $\mathcal{D}$ su dominio e codominio rispettivamente è la matrice

$$\mathbf{A} = \left(C_{\mathcal{D}}(f(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix})) \quad C_{\mathcal{D}}(f(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix})) \quad C_{\mathcal{D}}(f(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix})) \quad C_{\mathcal{D}}(f(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix})) \right).$$

Dalla definizione di f si ottiene:

$$f(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad f(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$f(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad f(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix},$$

quindi $A = \begin{pmatrix} C_{\mathcal{D}}(\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}) & C_{\mathcal{D}}(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}) & C_{\mathcal{D}}(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}) & C_{\mathcal{D}}(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}) \end{pmatrix}$.

Calcoliamo le coordinate rispetto alla base ordinata $\mathcal{D}$ di un generico elemento $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$.

$$C_{\mathcal{D}}(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \quad | \quad \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ -\alpha + \beta \end{pmatrix}$$

Risolvendo il sistema $\begin{cases} \alpha & = a \\ -\alpha + \beta & = b \end{cases}$ otteniamo $\begin{cases} \alpha & = a \\ \beta & = a + b \end{cases}$, quindi

$$C_{\mathcal{D}}(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} a \\ a + b \end{pmatrix}.$$

In particolare, specializzando a $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, otteniamo

$$C_{\mathcal{D}}(\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}) \underset{\boxed{\substack{a=2 \\ b=2}}}{\overset{}{\underset{\uparrow}{=}}} \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad C_{\mathcal{D}}(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}) \underset{\boxed{\substack{a=0 \\ b=0}}}{\underset{\uparrow}{=}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, C_{\mathcal{D}}(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}) \underset{\boxed{\substack{a=1 \\ b=1}}}{\underset{\uparrow}{=}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, C_{\mathcal{D}}(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}) \underset{\boxed{\substack{a=1 \\ b=2}}}{\underset{\uparrow}{=}} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

La matrice $\mathbf{A}$ associata ad f rispetto alle basi ordinate $\mathcal{B}$ e $\mathcal{D}$ su dominio e codominio rispettivamente è quindi la matrice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

$\boxed{2}$ Sia $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ la matrice associata ad un'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ rispetto alle basi ordinate $\mathcal{B} = \left\{ \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ e $\mathcal{D} = \left\{ \mathbf{w}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}; \mathbf{w}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$ su dominio e codominio rispettivamente. Si determini la matrice $\mathbf{A}'$ associata ad f rispetto alle basi ordinate $\mathcal{B}' = \left\{ \mathbf{v}'_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \mathbf{v}'_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}; \mathbf{v}'_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ e $\mathcal{D}' = \left\{ \mathbf{w}'_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \mathbf{w}'_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ su dominio e codominio rispettivamente.

La matrice $\mathbf{A}'$ associata ad f rispetto alle basi ordinate $\mathcal{B}'$ e $\mathcal{D}'$ su dominio e codominio rispettivamente è la matrice

$$\mathbf{A}' = \mathbf{M}^{-1}_{\mathcal{D}\leftarrow\mathcal{D}'}\mathbf{A}\mathbf{M}_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{B}'} \quad \text{dove } \mathbf{M}_{\mathcal{D}\leftarrow\mathcal{D}'} \text{ è la matrice di passaggio da } \mathcal{D}' \text{ a } \mathcal{D} \text{ e } \mathbf{M}_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{B}'} \text{ è la matrice di passaggio da } \mathcal{B}' \text{ a } \mathcal{B}.$$

Per calcolare $\mathbf{M}_{\mathcal{D}\leftarrow\mathcal{D}'} = (\, C_{\mathcal{D}}(\mathbf{w}'_1) \quad C_{\mathcal{D}}(\mathbf{w}'_2)\,)$, calcoliamo per prima cosa le coordinate rispetto a $\mathcal{D}$ di un generico $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$.

$$C_{\mathcal{D}}(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \qquad \text{t.c.} \qquad \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Facendo un'eliminazione di Gauss sulla matrice aumentata del sistema

$$\begin{cases} \alpha + \beta &= a \\ 2\alpha - \beta &= b \end{cases}$$

otteniamo:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & a \\ 2 & -1 & b \end{array}\right) \xrightarrow{E_{21}(-2)} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & a \\ 0 & -3 & b-2a \end{array}\right) \xrightarrow{E_2(-1/3)} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & a \\ 0 & 1 & (2a-b)/3 \end{array}\right),$$

per cui con la sostituzione all'indietro

$$\begin{cases} \beta = (2a-b)/3 \\ \alpha = -\beta + a = (b-2a)/3 + a = (a+b)/3 \end{cases}$$

Dunque $C_{\mathcal{D}}(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} (a+b)/3 \\ (2a-b)/3 \end{pmatrix}$.

In particolare, specializzando a $\mathbf{w}'_1$ e $\mathbf{w}'_2$ otteniamo

$$C_{\mathcal{D}}(\mathbf{w}'_1) = C_{\mathcal{D}}(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}) \underset{\uparrow \atop \boxed{\begin{array}{c} a=1 \\ b=1 \end{array}}}{=} \begin{pmatrix} 2/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}, \qquad C_{\mathcal{D}}(\mathbf{w}'_2) = C_{\mathcal{D}}(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}) \underset{\uparrow \atop \boxed{\begin{array}{c} a=0 \\ b=1 \end{array}}}{=} \begin{pmatrix} 1/3 \\ -1/3 \end{pmatrix},$$

per cui $\mathbf{M}_{\mathcal{D}\leftarrow\mathcal{D}'} = \begin{pmatrix} 2/3 & 1/3 \\ 1/3 & -1/3 \end{pmatrix}$. L'inversa di $\mathbf{M}_{\mathcal{D}\leftarrow\mathcal{D}'}$ e' quindi

$$\mathbf{M}^{-1}_{\mathcal{D}\leftarrow\mathcal{D}'} = \frac{1}{\frac{2}{3}(-\frac{1}{3}) - \frac{1}{3}\frac{1}{3}} \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} = -3 \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Per calcolare $\mathbf{M}_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{B}'} = (\, C_{\mathcal{B}}(\mathbf{v}'_1) \quad C_{\mathcal{B}}(\mathbf{v}'_2) \quad C_{\mathcal{B}}(\mathbf{v}'_3)\,)$, calcoliamo per prima cosa le coordinate rispetto a $\mathcal{B}$ di un generico $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$.

$$C_{\mathcal{B}}(\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \delta \end{pmatrix} \quad | \quad \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \alpha\mathbf{v}_1 + \beta\mathbf{v}_2 + \delta\mathbf{v}_3 = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \delta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha + \beta \\ \alpha + \delta \\ \beta \end{pmatrix}$$

Risolvendo il sistema

$$\begin{cases} \alpha+\beta &= a \\ \alpha+\delta &= b \\ \beta &= c \end{cases}$$

otteniamo

$$\begin{cases} \beta = c \\ \alpha = -\beta+a = -c+a \\ \delta = -\alpha+b = -(-c+a)+b = c-a+b \end{cases},$$

quindi

$$C_{\mathcal{B}}(\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} a-c \\ c \\ -a+b+c \end{pmatrix}.$$

In particolare, specializzando a $\mathbf{v}'_1$, $\mathbf{v}'_2$ e $\mathbf{v}'_3$ otteniamo

$$C_{\mathcal{B}}(\mathbf{v}'_1) = C_{\mathcal{B}}(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}) \underset{\boxed{\begin{smallmatrix} a=1 \\ b=0 \\ c=0 \end{smallmatrix}}}{\underset{\uparrow}{=}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad C_{\mathcal{B}}(\mathbf{v}'_2) = C_{\mathcal{B}}(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}) \underset{\boxed{\begin{smallmatrix} a=1 \\ b=-1 \\ c=0 \end{smallmatrix}}}{\underset{\uparrow}{=}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix},$$

$$C_{\mathcal{B}}(\mathbf{v}'_3) = C_{\mathcal{B}}(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}) \underset{\boxed{\begin{smallmatrix} a=0 \\ b=0 \\ c=1 \end{smallmatrix}}}{\underset{\uparrow}{=}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

per cui $\mathbf{M}_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

La matrice $\mathbf{A}'$ che cerchiamo è quindi

$$\mathbf{A}' = \mathbf{M}^{-1}_{\mathcal{D}\leftarrow\mathcal{D}'}\mathbf{A}\mathbf{M}_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ -2 & -5 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 4 \\ -3 & -4 & -2 \end{pmatrix}.$$

$\boxed{3}$ Si verifichi che $\phi : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ definita da $\phi(\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}) = |2a-b| + |a+c| + |ib|$ è una norma.

(1) $\phi(\mathbf{0}) = \phi(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}) = |2\times 0 - 0| + |0+0| + |i0| = 0.$

Poichè $\phi(\mathbf{x}) \geq 0$ per ogni $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^3$, per provare che

$$\mathbf{x} \neq \mathbf{0} \quad \Longrightarrow \quad \phi(\mathbf{x}) > 0$$

basta provare che

$$\mathbf{x} \neq \mathbf{0} \quad \Longrightarrow \quad \phi(\mathbf{x}) \neq 0,$$

ossia basta provare che

$$\phi(\mathbf{x}) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \mathbf{x} = \mathbf{0}.$$

Dalla definizione di ϕ si ottiene:

$$\left.\begin{array}{rcl} \phi(\mathbf{x}) & = & 0 \\ \mathbf{x} & = & \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \end{array}\right\} \Longrightarrow \begin{cases} |2a-b| & = & 0 \\ |a+c| & = & 0 \\ |ib| & = & 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a & = & b/2 \\ c & = & -a & = & -b/2 \\ ib & = & 0 \end{cases} \Longrightarrow a=b=c=0 \Longrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{0}.$$

(2) $$\phi(\alpha \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}) = \phi(\begin{pmatrix} \alpha a \\ \alpha b \\ \alpha c \end{pmatrix}) = |2\alpha a - \alpha b| + |\alpha a + \alpha c| + |i\alpha b| =$$

$$= |\alpha||2a-b| + |\alpha||a+c| + |\alpha||ib| = |\alpha|(|2a-b| + |a+c| + |ib|) = |\alpha|\phi(\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}).$$

(3) $$\phi(\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{pmatrix}) = \phi(\begin{pmatrix} a_1+a_2 \\ b_1+b_2 \\ c_1+c_2 \end{pmatrix}) =$$
$$= |2(a_1+a_2) - (b_1+b_2)| + |(a_1+a_2) + (c_1+c_2)| + |i(b_1+b_2)| =$$
$$= |(2a_1-b_1) + (2a_2-b_2)| + |(a_1+c_1) + (a_2+c_2)| + |ib_1 + ib_2| \leq$$
$$\leq |2a_1-b_1| + |2a_2-b_2| + |a_1+c_1| + |a_2+c_2| + |ib_1| + |ib_2| = \phi(\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix}) + \phi(\begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{pmatrix}).$$

$\boxed{4}$ Siano $\mathbf{z} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}$ ed $S = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \quad | \quad \|\mathbf{x} - \mathbf{z}\|_\infty \leq 1\}$. Si provi che esistono $\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1 \in S$ tali che

$$\|\mathbf{x}_0\|_2 \quad \leq \quad \|\mathbf{x}\|_2 \quad \leq \quad \|\mathbf{x}_1\|_2 \qquad \text{per ogni } \mathbf{x} \in S,$$

e si calcolino $\|\mathbf{x}_0\|_2$ e $\|\mathbf{x}_1\|_2$.

$$\begin{array}{rcl} S & = & \{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \quad | \quad \max\{|x_1-5|, |x_2-4|\} \leq 1 \quad \} = \\ & = & \{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \quad | \quad -1 \leq x_1 - 5 \leq 1 \quad \text{e} \quad -1 \leq x_2 - 4 \leq 1 \quad \} = \\ & = & \{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \quad | \quad 4 \leq x_1 \leq 6 \quad \text{e} \quad 3 \leq x_2 \leq 5 \quad \} \end{array}$$

Quindi se $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in S$ allora $\|\mathbf{x}\|_2 = \sqrt{|x_1|^2 + |x_2|^2} \geq \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$, e poichè $\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} \in S$ e $\| \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} \|_2 = 5$, allora $\mathbf{x}_0 = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ (e $\|\mathbf{x}_0\|_2 = 5$).

Inoltre se $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in S$ allora $\|\mathbf{x}\|_2 = \sqrt{|x_1|^2 + |x_2|^2} \leq \sqrt{6^2 + 5^2} = \sqrt{61}$, e poichè $\begin{pmatrix} 6 \\ 5 \end{pmatrix} \in S$ e $\| \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \end{pmatrix} \|_2 = \sqrt{61}$, allora $\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \end{pmatrix}$ (e $\|\mathbf{x}_1\|_2 = \sqrt{61}$).

$\boxed{5}$ Sia $V = M_2(\mathbb{C})$. Si verifichi che $(\cdot|\cdot) : V \times V \to \mathbb{C}$ definito da

$$\left(\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} | \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{pmatrix}\right) = \sum_{i=1}^{4} \overline{a_i} b_i$$

è un prodotto interno.

(1) $\overline{(\mathbf{v}|\mathbf{u})} \overset{?}{=} (\mathbf{u}|\mathbf{v})$ per ogni $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix}, \mathbf{v} = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{pmatrix} \in V$

$$\overline{\left(\begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{pmatrix} | \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix}\right)} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{def. di } (\cdot|\cdot)}}{=} \overline{\sum_{i=1}^4 \overline{b_i} a_i} = \sum_{i=1}^4 \overline{\overline{b_i}}\, \overline{a_i} = \sum_{i=1}^4 b_i \overline{a_i} = \sum_{i=1}^4 \overline{a_i} b_i \underset{\substack{\uparrow \\ \text{def. di } (\cdot|\cdot)}}{=}$$

$$= \left(\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} | \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{pmatrix}\right).$$

(2) $(\mathbf{u}|\alpha\mathbf{v} + \beta\mathbf{z}) \overset{?}{=} \alpha(\mathbf{u}|\mathbf{v}) + \beta(\mathbf{u}|\mathbf{z})$ $\forall \mathbf{u} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix}, \mathbf{v} = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{pmatrix}, \mathbf{z} = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 \\ c_3 & c_4 \end{pmatrix} \in V, \alpha, \beta \in \mathbb{C}$

$$(\mathbf{u}|\alpha\mathbf{v} + \beta\mathbf{z}) = \left(\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} | \alpha \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} c_1 & c_2 \\ c_3 & c_4 \end{pmatrix}\right) = \left(\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} | \begin{pmatrix} \alpha b_1 + \beta c_1 & \alpha b_2 + \beta c_2 \\ \alpha b_3 + \beta c_3 & \alpha b_4 + \beta c_4 \end{pmatrix}\right) =$$

$$= \sum_{i=1}^4 \overline{a_i}(\alpha b_i + \beta c_i) = \alpha\left(\sum_{i=1}^4 \overline{a_i} b_i\right) + \beta\left(\sum_{i=1}^4 \overline{a_i} c_i\right) =$$

$$= \alpha\left(\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} | \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{pmatrix}\right) + \beta\left(\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} | \begin{pmatrix} c_1 & c_2 \\ c_3 & c_4 \end{pmatrix}\right) = \alpha(\mathbf{u}|\mathbf{v}) + \beta(\mathbf{u}|\mathbf{z})$$

(3) (•) $(\mathbf{0}|\mathbf{0}) \overset{?}{=} 0$

(••) $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} \neq \mathbf{0} \overset{?}{\Longrightarrow} \left(\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} | \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix}\right) \in \mathbb{R}_{>0}$

(•) $(\mathbf{0}|\mathbf{0}) = \left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} | \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = 4 \times \overline{0} \times 0 = 0$

(••) $\left(\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} | \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix}\right) = \sum_{i=1}^4 \overline{a_i} a_i = \sum_{i=1}^4 |a_i|^2$.

Poichè $|a_i| \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ per ogni $i = 1, \ldots, 4$, allora $\sum_{i=1}^4 |a_i|^2 \in \mathbb{R}_{\geq 0}$. Se $\sum_{i=1}^4 |a_i|^2 = 0$, allora $|a_i|^2 = 0$ per ogni $i = 1, \ldots, 4$, per cui $a_i = 0$ per ogni $i = 1, \ldots, 4$ e quindi $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} = \mathbf{0}$.

$\boxed{6}$ Si trovi una base di $V^{\perp}$ nei seguenti casi:

$$V = \langle \begin{pmatrix} 0 \\ i \\ 2 \end{pmatrix} \rangle, \qquad V = \langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1+i \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \rangle, \qquad V = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 1 \\ i \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} i \\ -1 \\ i \\ -1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle.$$

(a) Se $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 \\ i \\ 2 \end{pmatrix}$ allora $C(\mathbf{A}) = V$ e $V^{\perp} = C(\mathbf{A})^{\perp} = N(\mathbf{A}^H)$.

Facendo un'eliminazione di Gauss su $\mathbf{A}^H$ otteniamo:

$\mathbf{A}^H = \begin{pmatrix} 0 & -i & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[E_1(i)]{} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2i \end{pmatrix} = \mathbf{U}$

Poichè $N(\mathbf{A}^H) = N(\mathbf{U})$ e

$$\dim(N(\mathbf{U})) = \text{numero delle colonne di } \mathbf{U} - \text{rango di } \mathbf{U} = 3 - 1 = 2,$$

una base di $V^{\perp}$ ha 2 elementi (d'altra parte dim$V$=1 e dim$\mathbb{C}^3$=3, per cui a priori potevamo dedurre che dim$V^{\perp}$ = dim$\mathbb{C}^3$ − dim$V = 3 - 1 = 2$).

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in N(\mathbf{A}^H) = N(\mathbf{U}) \quad \Longleftrightarrow \quad x_2 + 2ix_3 = 0$$

quindi $N(\mathbf{U}) = \left\{ \begin{pmatrix} h \\ -2ik \\ k \end{pmatrix} | h, k \in \mathbb{C} \right\}$.

Una base di $V^{\perp}$ è

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ -2i \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

(b) Se $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1+i \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ allora $C(\mathbf{A}) = V$ e $V^{\perp} = C(\mathbf{A})^{\perp} = N(\mathbf{A}^H)$.

Facendo un'eliminazione di Gauss su $\mathbf{A}^H$ otteniamo:

$$\mathbf{A}^H = \begin{pmatrix} 0 & 1-i & 0 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[E_1(\frac{1+i}{2})]{} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \frac{3}{2}(1+i) \end{pmatrix} = \mathbf{U}$$

Poichè $N(\mathbf{A}^H) = N(\mathbf{U})$ e

$$\dim(N(\mathbf{U})) = \text{numero delle colonne di } \mathbf{U} - \text{rango di } \mathbf{U} = 4 - 1 = 3,$$

una base di $V^{\perp}$ ha 3 elementi (d'altra parte dim$V$=1 e dim$\mathbb{C}^4$=4, per cui a priori potevamo dedurre che dim$V^{\perp}$ = dim$\mathbb{C}^4$ − dim$V = 4 - 1 = 3$).

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in N(\mathbf{A}^H) = N(\mathbf{U}) \quad \Longleftrightarrow \quad x_2 + \frac{3}{2}(1+i)x_4 = 0$$

quindi $N(\mathbf{U}) = \left\{ \begin{pmatrix} h \\ -\frac{3}{2}(1+i)r \\ k \\ r \end{pmatrix} | h, k, r \in \mathbb{C} \right\}$.

Una base di $V^\perp$ è

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{3}{2}(1+i) \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

(c) Se $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & i & 1 & 0 \\ i & -1 & 0 & 1 \\ 1 & i & 1 & 0 \\ i & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, allora $C(\mathbf{A}) = V$ e $V^\perp = C(\mathbf{A})^\perp = N(\mathbf{A}^H)$.

Facendo un'eliminazione di Gauss su $\mathbf{A}^H$ otteniamo:

$$\mathbf{A}^H = \begin{pmatrix} 1 & -i & 1 & -i \\ -i & -1 & -i & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[E_{31}(-1)E_{21}(i)]{} \begin{pmatrix} 1 & -i & 1 & -i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & i \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[E_{23}]{}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -i & 1 & -i \\ 0 & i & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[E_{42}(-1)E_2(-i)]{} \begin{pmatrix} 1 & -i & 1 & -i \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{U}$$

Poichè $N(\mathbf{A}^H) = N(\mathbf{U})$ e

$$\dim(N(\mathbf{A})) = \text{numero delle colonne di } \mathbf{U} - \text{rango di } \mathbf{U} = 4 - 2 = 2,$$

una base di $V^\perp$ ha 2 elementi.

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in N(\mathbf{A}^H) = N(\mathbf{U}) \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} x_1 - ix_2 + x_3 - ix_4 & = & 0 \\ \\ x_2 + x_4 & = & 0 \end{cases}$$

Quindi $V^\perp = N(\mathbf{A}^H) = \left\{ \begin{pmatrix} -h \\ -k \\ h \\ k \end{pmatrix} | h, k \in \mathbb{C} \right\}$ ed una sua base è $\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

ESERCITAZIONI* 7

$\boxed{1}$ Si trovi una base ortonormale del sottospazio di $\mathbb{C}^4$

$$V = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 1 \\ i \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} i \\ -1 \\ i \\ -1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle.$$

$\boxed{2}$ Si calcoli la proiezione ortogonale di $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ sul sottospazio $U = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} i \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 \\ -2i \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$ di $\mathbb{C}^3$.

$\boxed{3}$ Si calcoli la proiezione ortogonale di $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ sul complemento ortogonale $U^{\perp}$ del sottospazio $U = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ 1-i \end{pmatrix} \rangle$ di $\mathbb{C}^3$.

$\boxed{4}$ Si calcoli il determinante delle seguenti matrici:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2-i & 1 & 0 \\ 2 & 1+i & 3 \\ i & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} i & 1 & 1+i \\ -1 & 1 & 2 \\ i & i & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1+i \end{pmatrix}.$$

Svolgimento delle Esercitazioni 7

$\boxed{1}$ Si trovi una base ortonormale del sottospazio di $\mathbb{C}^4$

$$V = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 1 \\ i \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} i \\ -1 \\ i \\ -1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle.$$

$\boxed{I}$ Costruiamo dapprima **una base di V**: poniamo

$$\mathbf{w}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 1 \\ i \end{pmatrix}; \quad \mathbf{w}_2 = \begin{pmatrix} i \\ -1 \\ i \\ -1 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{w}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{w}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

e calcoliamo una base di $C(\mathbf{A})$ dove $\mathbf{A} = (\, \mathbf{w}_1 \quad \mathbf{w}_2 \quad \mathbf{w}_3 \quad \mathbf{w}_4 \,)$.

$$\mathbf{A} = (\, \mathbf{w}_1 \quad \mathbf{w}_2 \quad \mathbf{w}_3 \quad \mathbf{w}_4 \,) = \begin{pmatrix} 1 & i & 1 & 0 \\ i & -1 & 0 & 1 \\ 1 & i & 1 & 0 \\ i & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[E_{41}(-i)E_{31}(-1)E_{21}(-i)]{}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & i & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -i & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[E_{42}(i)E_2(i)]{} \begin{pmatrix} 1 & i & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{U}$$

Poichè $\mathbf{U}$ ha come colonne dominanti la 1^a e la 3^a, allora una base di $C(\mathbf{A}) = V$ è $\{\mathbf{w}_1; \mathbf{w}_3\}$.

$\boxed{II}$ Troviamo **una base ortogonale di V** applicando l'algoritmo di Gram-Schmidt a

$$\left\{ \mathbf{v}_1 = \mathbf{w}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 1 \\ i \end{pmatrix}; \mathbf{v}_2 = \mathbf{w}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

$$\mathbf{u}_1 = \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 1 \\ i \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{u}_2 = \mathbf{v}_2 - \alpha_{12}\mathbf{u}_1, \qquad \mathbf{u}_1 \neq \mathbf{0} \implies \alpha_{12} = \frac{(\mathbf{u}_1, \mathbf{v}_2)}{(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_1)}$$

$$(\mathbf{u}_1, \mathbf{v}_2) = \mathbf{u}_1^H \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 & -i & 1 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1 + 1 = 2$$

$$(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_1) = \mathbf{u}_1^H \mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 & -i & 1 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 1 \\ i \end{pmatrix} = 1 + 1 + 1 + 1 = 4$$

$$\implies \quad \alpha_{12} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$\mathbf{u}_2 = \mathbf{v}_2 - \alpha_{12}\mathbf{u}_1 = \mathbf{v}_2 - \frac{1}{2}\mathbf{u}_1 =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 1 \\ i \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ 1 \\ -i \end{pmatrix}$$

Dunque $\{\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ i \\ 0 \end{pmatrix}; \mathbf{u}_2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ 1 \\ -i \end{pmatrix}\}$ è una base ortogonale di V.

$\boxed{III}$ Costruiamo **base ortonormale di V** normalizzando la base ortogonale trovata al punto $\boxed{II}$, ossia dividendo ciascun elemento della base ortogonale trovata in $\boxed{II}$ per la propria norma euclidea.

Cominciamo con il calcolare la norma euclidea di $\mathbf{u}_1$ ed $\mathbf{u}_2$:

$$\|\mathbf{u}_1\|_2 = \sqrt{(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_1)} = \sqrt{4} = 2$$

$$\|\mathbf{u}_2\|_2 = \sqrt{(\mathbf{u}_2, \mathbf{u}_2)} = \sqrt{\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & i & 1 & i \end{pmatrix} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ 1 \\ -i \end{pmatrix}} = \sqrt{\frac{1}{4}(1 + 1 + 1 + 1 + 1)} = 1$$

Allora

$$\mathcal{B} = \{\frac{\mathbf{u}_1}{\|\mathbf{u}_1\|_2}; \frac{\mathbf{u}_2}{\|\mathbf{u}_2\|_2}\} = \left\{ \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 1 \\ i \end{pmatrix}; \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ 1 \\ -i \end{pmatrix} \right\}$$

è una base ortonormale di V.

$\boxed{2}$ Si calcoli la proiezione ortogonale di $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ sul sottospazio $U = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} i \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ -2i \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$ di $\mathbb{C}^3$.

$\boxed{I}$ Troviamo una base ortonormale di U.

Poniamo $\mathbf{w}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{w}_2 = \begin{pmatrix} i \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{w}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2i \\ 1 \end{pmatrix}$ e calcoliamo una base di $C(\mathbf{A})$ dove $\mathbf{A} = (\, \mathbf{w}_1 \quad \mathbf{w}_2 \quad \mathbf{w}_3 \,)$.

$$\mathbf{A} = (\, \mathbf{w}_1 \quad \mathbf{w}_2 \quad \mathbf{w}_3 \,) = \begin{pmatrix} 1 & i & 0 \\ i & -1 & -2i \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[E_{21}(-i)]{} \begin{pmatrix} 1 & i & 0 \\ 0 & 0 & -2i \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[E_{32}(-1)E_2(\frac{1}{2}i)]{} \begin{pmatrix} 1 & i & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{U}$$

Poichè $\mathbf{U}$ ha come colonne dominanti la 1^a e la 3^a, allora una base di $C(\mathbf{A}) = U$ è $\{\mathbf{w}_1; \mathbf{w}_3\}$.

Applichiamo ora l'algoritmo di Gram-Schmidt a

$$\left\{ \mathbf{v}_1 = \mathbf{w}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 0 \end{pmatrix}; \mathbf{v}_2 = \mathbf{w}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2i \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

per trovare una base ortogonale di U.

$$\mathbf{u}_1 = \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{u}_2 = \mathbf{v}_2 - \alpha_{12}\mathbf{u}_1, \qquad \mathbf{u}_1 \neq \mathbf{0} \quad \Longrightarrow \quad \alpha_{12} = \frac{(\mathbf{u}_1|\mathbf{v}_2)}{(\mathbf{u}_1|\mathbf{u}_1)}$$

$$(\mathbf{u}_1|\mathbf{v}_2) = \mathbf{u}_1^H\mathbf{v}_2 = (\, 1 \quad -i \quad 0 \,) \begin{pmatrix} 0 \\ -2i \\ 1 \end{pmatrix} = -2$$

$$(\mathbf{u}_1|\mathbf{u}_1) = \mathbf{u}_1^H\mathbf{u}_1 = (\, 1 \quad -i \quad 0 \,) \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 0 \end{pmatrix} = 2$$

$$\Longrightarrow \quad \alpha_{12} = -\frac{2}{2} = -1$$

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_2 &= \mathbf{v}_2 - \alpha_{12}\mathbf{u}_1 = \\ &= \mathbf{v}_2 + \mathbf{u}_1 = \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ -2i \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$\left\{ \mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 0 \end{pmatrix}; \mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ è una base ortogonale di U.

$$\|\mathbf{u}_1\|_2 = \sqrt{(\mathbf{u}_1|\mathbf{u}_1)} = \sqrt{2}$$

$$\|\mathbf{u}_2\|_2 = \sqrt{(\mathbf{u}_2|\mathbf{u}_2)} = \sqrt{\mathbf{u}_2^H\mathbf{u}_2} = \sqrt{\begin{pmatrix} 1 & i & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ 1 \end{pmatrix}} = \sqrt{1+1+1} = \sqrt{3}$$

$\left\{ \mathbf{u}_1^* = \frac{\mathbf{u}_1}{\|\mathbf{u}_1\|_2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 0 \end{pmatrix}; \mathbf{u}_2^* = \frac{\mathbf{u}_2}{\|\mathbf{u}_2\|_2} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ è una base ortonormale di V.

$\boxed{II}$ La proiezione ortogonale di $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ su U è

$$P_U(\mathbf{v}) = (\mathbf{u}_1^*|\mathbf{v})\mathbf{u}_1^* + (\mathbf{u}_2^*|\mathbf{v})\mathbf{u}_2^*$$

dove

$$(\mathbf{u}_1^*|\mathbf{v}) = (\mathbf{u}_1^*)^H\mathbf{v} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1-i}{\sqrt{2}}$$

$$(\mathbf{u}_2^*|\mathbf{v}) = (\mathbf{u}_2^*)^H\mathbf{v} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & i & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{2+i}{\sqrt{3}}.$$

Quindi $P_U(\mathbf{v}) = \frac{1-i}{\sqrt{2}}\mathbf{u}_1^* + \frac{2+i}{\sqrt{3}}\mathbf{u}_2^* = \frac{1-i}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{2+i}{\sqrt{3}}\frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1-i \\ 1+i \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2+i \\ 1-2i \\ 2+i \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 7-i \\ 5-i \\ 4+2i \end{pmatrix}$.

$\boxed{3}$ Si calcoli la proiezione ortogonale di $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ sul complemento ortogonale $U^\perp$ del sottospazio $U = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ 1-i \end{pmatrix} \rangle$ di $\mathbb{C}^3$.

$\boxed{I}$ Cerchiamo una base di $U^\perp$.

Se $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ 1-i \end{pmatrix}$ allora $C(\mathbf{A}) = U$ e $U^\perp = C(\mathbf{A})^\perp = N(\mathbf{A}^H)$.

$\mathbf{A}^H = \begin{pmatrix} 1 & i & 1+i \end{pmatrix} = \mathbf{U}$ è già in forma ridotta di Gauss. Poichè

$$\dim(N(\mathbf{U})) = \text{numero delle colonne di } \mathbf{U} - \text{rango di } \mathbf{U} = 3 - 1 = 2,$$

una base di $U^{\perp}$ ha 2 elementi (d'altra parte dim$U$=1 e dim$\mathbb{C}^3$=3, per cui a priori potevamo dedurre che dim$U^{\perp}$ = dim$\mathbb{C}^3$ − dim$U$ = 3 − 1 = 2).

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in N(\mathbf{A}^H) = N(\mathbf{U}) \quad \Longleftrightarrow \quad x_1 + ix_2 + (1+i)x_3 = 0$$

quindi $N(\mathbf{U}) = \left\{ \begin{pmatrix} -ih-(1+i)k \\ h \\ k \end{pmatrix} | h,k \in \mathbb{C} \right\}$.

Una base di $U^{\perp}$ è

$$\left\{ \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} -i \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} -1-i \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$\boxed{II}$ Applichiamo l'algoritmo di Gram-Schmidt a $\{\mathbf{v}_1; \mathbf{v}_2\}$ per trovare una base ortogonale di $U^{\perp}$.

$$\mathbf{u}_1 = \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} -i \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{u}_2 = \mathbf{v}_2 - \alpha_{12}\mathbf{u}_1,$$

$$\mathbf{u}_1 \neq \mathbf{0} \quad \Longrightarrow \quad \alpha_{12} = \frac{(\mathbf{u}_1|\mathbf{v}_2)}{(\mathbf{u}_1|\mathbf{u}_1)}$$

$$(\mathbf{u}_1|\mathbf{v}_2) = \mathbf{u}_1^H\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} i & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1-i \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 1-i$$

$$(\mathbf{u}_1|\mathbf{u}_1) = \mathbf{u}_1^H\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} i & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -i \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1+1 = 2$$

$$\Longrightarrow \quad \alpha_{12} = \frac{1-i}{2}$$

$$\mathbf{u}_2 = \mathbf{v}_2 - \frac{1-i}{2}\mathbf{u}_1 = $$
$$= \begin{pmatrix} -1-i \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1-i}{2} \begin{pmatrix} -i \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1-i \\ -1+i \\ 2 \end{pmatrix}$$

Una base ortogonale di $U^{\perp}$ è:

$$\left\{ \mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} -i \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \mathbf{u}_2 = \tfrac{1}{2} \begin{pmatrix} -1-i \\ -1+i \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

$\boxed{III}$ Cerchiamo una base ortonormale di $U^{\perp}$. Normalizziamo quindi la base ortogonale di $U^{\perp}$ trovata al punto precedente.

$$\|\mathbf{u}_1\|_2 = \sqrt{\mathbf{u}_1^H \mathbf{u}_1} = \sqrt{2}$$

$$\|\mathbf{u}_2\|_2 = \sqrt{\mathbf{u}_2^H \mathbf{u}_2} = \sqrt{\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1+i & -1-i & 2 \end{pmatrix} \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1-i \\ -1+i \\ 2 \end{pmatrix}} = \frac{1}{2}\sqrt{(1+1)+(1+1)+2^2} = \sqrt{2}$$

Dunque $\left\{ \mathbf{u}_1^* = \frac{\mathbf{u}_1}{\|\mathbf{u}_1\|_2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -i \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \mathbf{u}_2^* = \frac{\mathbf{u}_2}{\|\mathbf{u}_2\|_2} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1-i \\ -1+i \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$ è una base ortonormale di $U^\perp$.

$\boxed{IV}$ La proiezione ortogonale di $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ su $U^\perp$ è

$$P_{U^\perp}(\mathbf{v}) = (\mathbf{u}_1^*|\mathbf{v})\mathbf{u}_1^* + (\mathbf{u}_2^*|\mathbf{v})\mathbf{u}_2^*$$

dove

$$(\mathbf{u}_1^*|\mathbf{v}) = (\mathbf{u}_1^*)^H \mathbf{v} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} i & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$$

$$(\mathbf{u}_2^*|\mathbf{v}) = (\mathbf{u}_2^*)^H \mathbf{v} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1+i & -1-i & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{2\sqrt{2}}(-1+i-1-i+6) = \frac{4}{2\sqrt{2}} = \sqrt{2}.$$

Quindi

$$P_{U^\perp}(\mathbf{v}) = \frac{1+i}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -i \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \sqrt{2}\frac{1}{2\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1-i \\ -1+i \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -2i \\ 2i \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -i \\ i \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$\boxed{3}$ Si calcoli il determinante delle seguenti matrici:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2-i & 1 & 0 \\ 2 & 1+i & 3 \\ i & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} i & 1 & 1+i \\ -1 & 1 & 2 \\ i & i & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1+i \end{pmatrix}.$$

Conviene sviluppare Det($\mathbf{A}$) rispetto alla riga o alla colonna che contengono piú zeri. In questo caso conviene svilupparlo ripetto alla 1^a riga oppure alla 3^a colonna. Facciamolo in entrambi i modi, per esercizio.

Rispetto alla 1^a riga:

$$\begin{aligned}\mathrm{Det}\mathbf{A} &= (2-i)(-1)^{1+1}\mathrm{Det}\begin{pmatrix} 1+i & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + (-1)^{1+2}\mathrm{Det}\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ i & 1 \end{pmatrix} = \\ &= (2-i)(1+i-3) - (2-3i) = (2-i)(-2+i) - 2 + 3i = \\ &= -(2-i)^2 - 2 + 3i = -(4-1-4i) - 2 + 3i = -5 + 7i\end{aligned}$$

Rispetto alla 3^a colonna:

$$\begin{aligned}\mathrm{Det}\mathbf{A} &= 3(-1)^{2+3}\mathrm{Det}\begin{pmatrix} 2-i & 1 \\ i & 1 \end{pmatrix} + (-1)^{3+3}\mathrm{Det}\begin{pmatrix} 2-i & 1 \\ 2 & 1+i \end{pmatrix} = \\ &= -3(2-i-i) + ((2-i)(1+i)-2) = \\ &= -3(2-2i) + 2 - i + 2i + 1 - 2 = -5 + 7i\end{aligned}$$

Sviluppiamo $\mathrm{Det}(\mathbf{B})$, ad esempio rispetto alla 1^a colonna:

$$\mathrm{Det}\begin{pmatrix} i & 1 & 1+i \\ -1 & 1 & 2 \\ i & i & 1 \end{pmatrix} = i(-1)^{1+1}\mathrm{Det}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ i & 1 \end{pmatrix} + (-1)(-1)^{2+1}\mathrm{Det}\begin{pmatrix} 1 & 1+i \\ i & 1 \end{pmatrix} + i(-1)^{3+1}\mathrm{Det}\begin{pmatrix} 1 & 1+i \\ 1 & 2 \end{pmatrix} =$$
$$= i(1-2i) + 1 - i(1+i) + i(2-1-i) = 5 + i$$

Infine sviluppiamo $\mathrm{Det}(\mathbf{C})$ ad esempio rispetto alla 3^a riga:

$$\mathrm{Det}\mathbf{C} = \mathrm{Det}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1+i \end{pmatrix} =$$
$$= (-1)^{3+1}\mathrm{Det}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1+i \end{pmatrix} + (-1)^{3+2}\mathrm{Det}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1+i \end{pmatrix} + (-1)^{3+3}\mathrm{Det}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+i \end{pmatrix}$$

Sviluppiamo il primo ed il secondo addendo rispetto alla 2^a colonna, mentre il terzo addendo rispetto alla 1^a colonna.

$$\begin{aligned}&\mathrm{Det}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1+i \end{pmatrix} = (-1)^{1+2}\mathrm{Det}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1+i \end{pmatrix} + 2(-1)^{2+2}\mathrm{Det}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1+i \end{pmatrix} = \\ &= -(1+i-1) + 2(1+i-1) = -i + 2i = i \\ &\mathrm{Det}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1+i \end{pmatrix} = (-1)^{1+2}\mathrm{Det}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1+i \end{pmatrix} + 2(-1)^{2+2}\mathrm{Det}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1+i \end{pmatrix} = \\ &= -(2+2i-1) - 2 = -1 - 2i - 1 = -3 - 2i \\ &\mathrm{Det}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+i \end{pmatrix} = 2(-1)^{2+1}\mathrm{Det}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1+i \end{pmatrix} + (-1)^{3+1}\mathrm{Det}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \\ &= -2(1+i-1) + (1-1) = -2i\end{aligned}$$

Quindi

$$\mathrm{Det}(\mathbf{C}) = i - (-3-2i) - 2i = 3 + i.$$