ALGEBRA LINEARE I (A) PER SCIENZE STATISTICHE, SGI, A.A. 2013/2014, GEMMA PARMEGGIANI

Università degli Studi di Padova
Dipartimento di Matematica
via Trieste, 63
35131 Padova

- Programma del corso.
- Nota 1: Matrici elementari ed operazioni elementari sulle righe di una matrice.
- Nota 2: Osservazioni sul rango di una matrice.
- Nota 3: Basi dello spazio delle colonne di una matrice: applicazioni.
- Nota 4: Calcolo di determinanti.
- Esercizi Tipo.
- Testi degli esercizi per casa.
- Svolgimenti degli esercizi per casa.

Typeset by $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$-TEX

PROGRAMMA SVOLTO

Il testo di riferimento è: Algebra Lineare, E. Gregorio, S. Salce, ed. Libreria Progetto Padova

Programma svolto nella prima settimana:

1/10/13 Presentazione del corso. Insiemi. Esempi. Notazioni. Intersezione ed unione di insiemi. La forma algebrica ed il coniugato di un numero complesso.

2/10/13 Il modulo di un numero complesso. Proprietà del modulo e del coniugato di un numero complesso. La forma algebrica dell'inverso di un numero complesso non nullo. Enunciato del Teorema fondamentale dell'Algebra. Matrici. Esempi. Tipi particolari di matrici.

Dal libro: Appendice A: da pag. 267 a pag. 271. pag. 273, da pag. 1 a pag. 4.

Esercizi per casa: Esercizi 1, 2, 3 e 4 degli "Esercizi 1".

Programma svolto nella seconda settimana:

7/10/13 Altri tipi particolari di matrici. Prodotto di una matrice per uno scalare. Somma di due matrici. Prodotto di un vettore riga per un vettore colonna. Prodotto righe per colonne di matrici. Esempi. Proprietà del prodotto per uno scalare, della somma di matrici, del prodotto righe per colonne. Potenze di matrici quadrate.

Dal libro: Da pag. 3 a pag. 7, pag. 9.

Esercizi per casa: Esercizio 5 degli "Esercizi 1".

8/10/13 Il prodotto righe per colonne non è commutativo. Premoltiplicazione e postmoltiplicazione per matrici diagonali. Le matrici $n \times n$ che commutano con ogni matrice $n \times n$ sono esattamente le matrici scalari di ordine n. Trasposta, coniugata ed H-trasposta di una matrice.

Dal libro: Da pag. 10 a pag. 13.

Esercizi per casa: Esercizi 6, 7, 8, 9 e 10 degli "Esercizi 1"

9/10/13 Matrici simmetriche, anti-simmetriche, hermitiane, anti-hermitiane e loro proprietà. Ogni matrice quadrata si scrive in modo unico come somma di una matrice hermitiana ed una matrice anti-hermitiana (parte hermitiana ed anti-hermitiana di una matrice quadrata). Sottomatrici. Matrici a blocchi.

Dal libro: Da pag. 14 a pag. 18.

Esercizi per casa: Esercizi 1, 2, 3 e 4 degli "Esercizi 2".

Programma svolto nella terza settimana:

14/10/13 Operazioni a blocchi. Casi particolari di decomposizioni a blocchi. Esercizio Tipo 1.

Dal libro: Da pag. 19 a pag. 21.

bf esercizi per casa: esercizi 5, 6 e 7 degli "Esercizi 2".

15/10/13 Scrittura matriciale di un sistema lineare. Operazioni elementari sulle equazioni di un sistema. Matrici elementari ed operazioni elementari sulle righe di una matrice.

Dal libro: Da pag. 21 a pag. 24. Pag. 8. Pag. 46 e pag. 47. Nota 1 (file sulla pag. web).

Esercizi per casa: Esercizi 1, 2 e 3 degli "Esercizi 3".

16/10/13 Eliminazione di Gauss (EG). Forma ridotta di Gauss di una matrice, colonne dominanti, colonne libere. Esempi. Risoluzione di sistemi lineari. Esercizio Tipo 2.

Dal libro: Da pag. 25 a pag. 30.

Esercizi per casa: Esercizi 4 e 6 degli "Esercizi 3".

Programma svolto nella quarta settimana:

21/10/13 Esercizio Tipo 3. Rango di una matrice. Inverse destre, sinistre, bilatere. Esempi. Criteri per l'esistenza di una inversa destra e per l'esistenza di un'inversa sinistra.

Dal libro: Da pag. 30 a pag. 35. Nota 2 (file sulla pag. web).

Esercizi per casa: Esercizi 5 e 7 degli "Esercizi 3".

22/10/13 Costruzione di inverse destre e di inverse sinistre. Esercizio Tipo 4 e 4 bis. Algoritmo di Gauss-Jordan per il calcolo dell'inversa.

Dal libro: Da pag. 41 a pag. 46.

Esercizi per casa: Esercizi 8 e 9 degli "Esercizi 3".

23/10/13 Esercizio Tipo 5. Inverse di matrici 2×2. Inverse e trasposte delle matrici elementari. Decomposizioni a rango pieno.

Dal libro: Da pag. 47 a pag. 51.

Esercizi per casa: Esercizi 1, 2, 3, 4, 5, 6 e 7 degli "Esercizi 4".

Programma svolto nella quinta settimana:

28/10/13 Decomposizione LU. Esercizio Tipo 6.

Dal libro: Da pag. 49 a pag. 51.

Esercizi per casa: Esercizio 8 degli "Esercizi 4".

29/10/12 Decomposizione $P^T LU$. Esercizio Tipo 7.

Dal libro: Da pag. 51 a pag. 57.

Esercizi per casa: Esercizio 1 degli "Esercizi 5".

30/10/12 Spazi vettoriali. Esempi. Sottospazi di spazi vettoriali. Esempi.

Dal libro: Da pag. 63 a pag. 70.

Esercizi per casa: Esercizi 2, 3 ,4, 5 e 6 degli "Esercizi 5".

Programma svolto nella sesta settimana:

4/11/13 Lo spazio nullo di una matrice. Insiemi di vettori. Sottoinsiemi ed unioni di insiemi di vettori. Combinazioni lineari. Sottospazi generati da insiemi di vettori. Insiemi di generatori. Esempi. Esercizio Tipo 8.

Dal libro: Da pag. 70 a pag. 74.

Esercizi per casa: Esercizi 7, 8 e 9 degli "Esercizi 5".

5/11/13 Insiemi di vettori linearmente dipendenti ed insiemi di vettori linearmente indipendenti. Esercizio Tipo 9. Basi. Esempi di basi.

Dal libro: Da pag. 75 a pag. 81.

Esercizi per casa: Esercizi 1 , 2, 3 e 4 degli "Esercizi 6".

6/11/13 Caratterizzazione delle basi come insiemi di generatori minimali. Ogni spazio vettoriale finitamente generato ha una base. Come estrarre una base da un insieme di generatori. Esercizio Tipo 10. Teorema di Steinitz. Equipotenza delle basi di uno spazio vettoriale finitamente generato. Dimensione di uno spazio vettoriale.

Dal libro: Da pag. 81 a pag. 87.

Esercizi per casa: Esercizio 5 degli "Esercizi 6".

Programma svolto nella settima settimana:

11/11/13 Definizione di somma e di somma diretta di sottospazi. Applicazioni lineari. Esempi. Applicazione lineare indotta da una matrice. Spazio nullo e spazio immagine di un'applicazione lineare. Teorema nullità+rango. I 4 sottospazi fondamentali di una matrice.

Dal libro: Da pag. 88 a pag. 94.

Esercizi per casa: Esercizi 6, 7 e 8 degli "Esercizi 6".

12/11/13 Spazio nullo e spazio immagine dell'applicazione lineare indotta da una matrice. Come trovare una base dello spazio nullo di una matrice. Esercizio Tipo 11. Basi dello spazio delle colonne e dello spazio delle righe di una matrice. Esercizio Tipo 12.

Dal libro: Da pag. 95 a pag 104.

Esercizi per casa: Esercizi 1 e 2 degli "Esercizi 7".

13/11/13 Basi dello spazio delle colonne e dello spazio delle righe di una matrice: applicazioni. Enunciato del Teorema 5.10. Basi ordinate. Coordinate di un vettore rispetto ad una base ordinata. Esempi. Applicazione delle coordinate.

Dal libro: Nota 3 (file sulla pag. web). Da pag. 110 a pag. 111.

Esercizi per casa: Esercizi 3 e 4 degli "Esercizi 7".

Programma svolto nella ottava settimana:

18/11/13 Matrice associata ad un'applicazione lineare rispetto a fissate basi ordinate su dominio e codominio. Esercizio Tipo 13. Matrice di passaggio da una base ordinata ad un'altra. Esercizio Tipo 14. Come cambia la matrice associata ad un'applicazione lineare rispetto a fissate basi ordinate su dominio e codominio cambiando le basi. Esercizio Tipo 15.

Dal libro: Da pag. 105 a pag. 109. Da pag. 111 a pag. 113.

Esercizi per casa: Esercizi 5, 6 e 7 degli "Esercizi 7".

19/11/13 Interpretazione geometrica di $\mathbb{R}^2$ ed $\mathbb{R}^3$. Regola del parallelogramma. Definizione di norma. Esercizio Tipo 16. Le norme $\|\cdot\|_2$ e $\|\cdot\|_1$.

Dal libro: Appendice C: da pag. 285 a pag. 290. Da pag. 119 a pag. 122.

Esercizi per casa: Esercizio 3 degli "Esercizi 8".

20/11/13 La norma $\|\cdot\|_\infty$. Il coseno dell'angolo tra due vettori di $\mathbb{R}^2$. Prodotti interni. Il prodotto interno standard. Esercizio Tipo 17. La norma indotta da un prodotto interno. Il coseno dell'angolo tra due vettori in uno spazio vettoriale euclideo.

Dal libro: Da pag 122 a pag. 131.

Esercizi per casa: Esercizi 1,2, 4, 5, 6 e 7 degli "Esercizi 8".

Programma svolto nella nona settimana:

25/11/13 Vettori ortogonali in uno spazio euclideo. Insiemi ortogonali e basi ortogonali. Basi ortonormali. L'algoritmo di Gram-Schmidt. Esercizio Tipo 18.

Dal libro: Da pag. 131 a pag. 133. Pag 141. Da pag. 144 a pag. 150.

Esercizi per casa: Esercizi 8, 9 e 10 degli "Esercizi 8".

26/11/13 Il complemento ortogonale di un sottospazio di uno spazio euclideo. La proiezione ortogonale di un vettore di uno spazio euclideo su di un sottospazio, ed il suo calcolo. Esercizio Tipo 19.

Dal libro: Da pag. 133 a pag. 140. Pag. 143.

Esercizi per casa: Esercizi 1, 2, 3 e 4 degli "Esercizi 9".

27/11/13 Decomposizione Q_0R_0-non-normalizzata di una matrice. Decomposizione QR-normalizzata di una matrice. Esercizio Tipo 20. Il determinante di una matrice 2×2.

Dal libro: Da pag. 154 a pag. 157. Pag. 152.

Esercizi per casa: Esercizi 5 e 6 degli "Esercizi 9".

Programma svolto nella decima settimana:

28/11/12 Calcolo del determinante di una matrice. Proprietà del determinante. Esercizio Tipo 21.

Dal libro: Nota 4 (file sulla pag. web).

Esercizi per casa: Esercizi 7, 8 e 9 degli "Esercizi 9".

NOTE

Nota 1: Matrici elementari ed operazioni elementari sulle righe di una matrice

Sia A una matrice $m \times n$. Si chiamano **operazioni elementari sulle righe di A** le tre seguenti operazioni:

$\boxed{1}$ sommare ad una riga un'altra riga di $\mathbf{A}$ moltiplicata per uno scalare,

$\boxed{2}$ moltiplicare una riga di $\mathbf{A}$ per uno scalare non nullo,

$\boxed{3}$ scambiare due righe di $\mathbf{A}$.

Studiando i prodotti a blocchi abbiamo visto:

$(*)$ la i-esima riga di $\mathbf{A}$ è uguale a $\mathbf{e_i}^T\mathbf{A}$;

$(**)$ se $\mathbf{C}=\begin{pmatrix} \mathbf{s_1}^T \\ \mathbf{s_2}^T \\ \vdots \\ \mathbf{s_t}^T \end{pmatrix}$ si può premoltiplicare ad $\mathbf{A}$, allora $\mathbf{CA}=\begin{pmatrix} \mathbf{s_1}^T\mathbf{A} \\ \mathbf{s_2}^T\mathbf{A} \\ \vdots \\ \mathbf{s_t}^T\mathbf{A} \end{pmatrix}$.

$\boxed{1}$ Sia $\mathbf{B}$ la matrice che si ottiene da $\mathbf{A}$ sommando alla i-esima riga di $\mathbf{A}$ la j-esima riga di $\mathbf{A}$ moltiplicata per lo scalare c, ossia sia $\mathbf{B}= [b_{kr}]$ la matrice con tutte le righe diverse dalla i-esima uguali alle corrispondenti righe di $\mathbf{A}= [a_{kr}]$, e con i-esima riga il vettore riga

$$\begin{pmatrix} b_{i1} & b_{i2} & \dots & b_{in} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{i1}+ca_{j1} & a_{i2}+ca_{j2} & \dots & a_{in}+ca_{jn} \end{pmatrix}.$$

Allora da $(*)$ e $(**)$ segue che

$$\mathbf{B} = \mathbf{E_{ij}(c)A}$$

dove $\mathbf{E_{ij}(c)}$ è la matrice che ha tutte le righe uguali a quelle della matrice $\mathbf{I_m}$, tranne eventualmente la i-esima, che è $\mathbf{e_i}^T + c\mathbf{e_j}^T$ (ed è uguale alla i-esima riga di $\mathbf{I_m}$ solo se $c = 0$). Dunque $\mathbf{E_{ij}(c)}$ si ottiene da $\mathbf{I_m}$ sommando alla i-esima riga di $\mathbf{I_m}$ la j-esima riga di $\mathbf{I_m}$ moltiplicata per lo scalare c.

Per indicare che $\mathbf{B}$ è la matrice ottenuta dalla matrice $\mathbf{A}$ eseguendo l'operazione elementare "sommare alla i-esima riga la j-esima riga moltiplicata per lo scalare c", scriviamo:

$$\mathbf{A} \xrightarrow{E_{ij}(c)} \mathbf{B}.$$

$\boxed{2}$ Sia $\mathbf{B}$ la matrice che si ottiene da $\mathbf{A}$ moltiplicando la i-esima riga di $\mathbf{A}$ per lo scalare c ($c \neq 0$), ossia sia $\mathbf{B}= [b_{kr}]$ la matrice con tutte le righe diverse dalla i-esima uguali alle corrispondenti righe di $\mathbf{A}= [a_{kr}]$, ed con i-esima riga il vettore riga

$$\begin{pmatrix} b_{i1} & b_{i2} & \dots & b_{in} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ca_{i1} & ca_{i2} & \dots & ca_{in} \end{pmatrix}.$$

Allora da $(*)$ e $(**)$ segue che

$$\mathbf{B} = \mathbf{E_i(c)A}$$

dove $\mathbf{E_i(c)}$ è la matrice che ha tutte le righe uguali a quelle della matrice $\mathbf{I_m}$, tranne eventualmente la i-esima, che è $c\mathbf{e_i}^T$ (ed è uguale alla i-esima riga di $\mathbf{I_m}$ solo se $c = 1$). Dunque $\mathbf{E_i(c)}$ si ottiene da $\mathbf{I_m}$ moltiplicando la i-esima riga di $\mathbf{I_m}$ per lo scalare per lo scalare c ($c \neq 0$).

Per indicare che $\mathbf{B}$ è la matrice ottenuta dalla matrice $\mathbf{A}$ eseguendo l'operazione elementare "moltiplicare la i-esima riga per lo scalare (non nullo) c", scriviamo:

$$\mathbf{A} \xrightarrow{E_i(c)} \mathbf{B}.$$

$\boxed{3}$ Sia B la matrice che si ottiene da $\mathbf{A}$ scambiando la i-esima riga di $\mathbf{A}$ con la j-esima, ossia sia $\mathbf{B}= [b_{kr}]$ la matrice con tutte le righe diverse dalla i-esima e dalla j-esima uguali alle corrispondenti righe di $\mathbf{A}$, e con i-esima e j-esima riga rispettivamente:

$$\begin{pmatrix} b_{i1} & b_{i2} & \dots & b_{in} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{j1} & a_{j2} & \dots & a_{jn} \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} b_{j1} & b_{j2} & \dots & b_{jn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \end{pmatrix}.$$

Allora da $(*)$ e $(**)$ segue che

$$\mathbf{B} = \mathbf{E_{ij}A}$$

dove $\mathbf{E_{ij}}$ è la matrice che si ottiene da $\mathbf{I_m}$ scambiando la i-esima riga di $\mathbf{I_m}$ con la j-esima.

Per indicare che $\mathbf{B}$ è la matrice ottenuta dalla matrice $\mathbf{A}$ eseguendo l'operazione elementare "scambiare la i-esima riga con la j-esima riga", scriviamo:

$$\mathbf{A} \xrightarrow{E_{ij}} \mathbf{B}.$$

N.B. Le matrici $\mathbf{E_{ij}(c)}, \mathbf{E_i(c)}$ e $\mathbf{E_{ij}}$ si chiamano matrici elementari, sono il "risultato" delle operazioni elementari sulle righe di una matrice identica, e la loro premoltiplicazione per una matrice $\mathbf{A}$ "produce" le operazioni elementari sulle righe di $\mathbf{A}$.

Nota 2: Osservazioni sul rango di una matrice

$\boxed{1}$ Sia $\mathbf{A}$ una matrice $m \times n$. Se $\mathbf{U}_1$ ed $\mathbf{U}_2$ sono due forme ridotte di Gauss per $\mathbf{A}$, allora il numero delle righe non nulle di $\mathbf{U}_1$ è uguale al numero delle righe non nulle di $\mathbf{U}_2$. Ció dipende dal fatto che l'esistenza di diverse forme ridotte di Gauss per una matrice dipende esclusivamente dalla eventuale possibilità di fare delle scelte negli scambi di righe in una EG su $\mathbf{A}$, e gli scambi di righe non decrescono il numero delle righe non nulle.

Il numero delle righe non nulle di una forma ridotta di Gauss di $\mathbf{A}$ dipende quindi esclusivamente da $\mathbf{A}$ (e non dalle operazioni elementari che si fanno in una EG su $\mathbf{A}$) e si chiama **il rango di A** (piú avanti nel corso daremo un'altra definizione di rango di una matrice, equivalente a questa). Si indica con il simbolo rk($\mathbf{A}$).

$\boxed{2}$ Siano $\mathbf{A}$ una matrice $m \times n$ di rango k ed $\mathbf{U}$ una forma ridotta di Gauss per $\mathbf{A}$. Poichè ogni "scalino"di $\mathbf{U}$ è "alto"una riga, allora

$$k = \text{numero delle righe non nulle di } \mathbf{U} = \text{numero delle colonne dominanti di } \mathbf{U}.$$

$\boxed{3}$ Se $\mathbf{A}$ una matrice $m \times n$ di rango k allora

$$k \leq m \quad \text{e} \quad k \leq n.$$

Infatti se $\mathbf{U}$ è ua forma ridotta di Gauss per $\mathbf{A}$ allora $\mathbf{U}$ è $m \times n$ e

$$k = \text{numero delle righe non nulle di } \mathbf{U} \leq \text{numero delle righe di } \mathbf{U} = m$$
$$k = \text{numero delle colonne dominanti di } \mathbf{U} \leq \text{numero delle colonne di } \mathbf{U} = n$$

Nota 3: Basi dello spazio delle colonne di una matrice: applicazioni.

$\boxed{1}$ Siano $\mathbf{v}_1; \mathbf{v}_2; \dots; \mathbf{v}_n \in K^m$, con $K \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, $\mathcal{S} = \{\mathbf{v}_1; \mathbf{v}_2; \dots; \mathbf{v}_n\}$ e $W = \langle \mathcal{S} \rangle$ il sottospazio di K^m generato da $\mathcal{S}$.

Per trovare una base $\mathcal{B}$ di W contenuta in $\mathcal{S}$, piuttosto che procedere come nell'Esercizio Tipo 10, conviene:

(1) costruire la matrice $m \times n$ $\mathbf{A} = (\mathbf{v}_1 \quad \mathbf{v}_2 \quad \dots \quad \mathbf{v}_n)$, ossia costruire una matrice le cui colonne siano gli elementi di $\mathcal{S}$;

(2) fare una EG su $\mathbf{A}$, trovando una forma ridotta di Gauss $\mathbf{U}$ per $\mathbf{A}$;

(3) se $\mathbf{u}_{i_1}, \mathbf{u}_{i_2}, \dots, \mathbf{u}_{i_k}$ sono le colonne dominanti di $\mathbf{U}$, allora $\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_{i_1}; \mathbf{v}_{i_2}; \dots; \mathbf{v}_{i_k}\}$, ossia l'insieme delle colonne di $\mathbf{A}$ corrispondenti alle colonne dominanti di $\mathbf{U}$, è una base di $C(\mathbf{A}) = \langle \mathbf{v}_1; \mathbf{v}_2; \dots; \mathbf{v}_n \rangle = W$ contenuta in $\mathcal{S}$.

$\boxed{2}$ Siano $\mathbf{v}_1; \mathbf{v}_2; \dots; \mathbf{v}_n \in K^n$, con $K \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, e $\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_1; \mathbf{v}_2; \dots; \mathbf{v}_n\}$.

Per verificare se $\mathcal{B}$ è o meno una base di K^n, piuttosto che verificare se $\mathcal{B}$ è un insieme di generatori linearmente indipendente di K^n, conviene considerare la matrice $n \times n$ $\mathbf{A} = (\mathbf{v}_1 \quad \mathbf{v}_2 \quad \dots \quad \mathbf{v}_n)$ (ossia una matrice le cui colonne siano gli elementi di $\mathcal{B}$).

Da $C(\mathbf{A}) \le K^n$ segue che

$$\dim \mathrm{C}(\mathbf{A}) = rk(\mathbf{A}) = n \iff \mathrm{C}(\mathbf{A}) = K^n;$$

inoltre, dal momento che $\mathcal{B}$ ha n elementi e contiene una base di $C(\mathbf{A})$,

$$\dim \mathrm{C}(\mathbf{A}) = rk(\mathbf{A}) = n \iff \text{ogni base di } \mathrm{C}(\mathbf{A}) \text{ ha n elementi} \iff \mathcal{B} \text{ è una base di } \mathrm{C}(\mathbf{A}).$$

Quindi

$$\dim \mathrm{C}(\mathbf{A}) = rk(\mathbf{A}) = n \iff \mathcal{B} \text{ è una base di } K^n.$$

Nota 4: Calcolo di determinanti

Sia **A** una matrice **quadrata** di ordine n.

Il **determinante di A** è un numero che dipende da **A**. Esso si indica con il simbolo det(**A**), oppure Det(**A**). Impariamo a calcolarlo, cominciando con i casi $n = 1, 2, 3$.

Il caso n=1. Se $\mathbf{A} = (\, a_{11} \,)$, è $\mathrm{Det}(\mathbf{A}) = a_{11}$.

Il caso n=2. Se $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, è $\mathrm{Det}(\mathbf{A}) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$.

Esempio 1. Il determinante di $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$ è $\mathrm{Det}(\mathbf{A}) = 2 \times 5 - 3 \times 4 = 10 - 12 = -2$.

Abbiamo detto che $\mathrm{Det}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$. Osserviamo che

$$\begin{aligned}
a_{11}a_{22} &= a_{11}(-1)^{1+1}\mathrm{Det}\,(\, a_{22} \,) = \\
&= a_{11}(-1)^{(\text{la somma degli indici di } a_{11})}\mathrm{Det}\,(\, a_{22} \,) = \\
&= a_{11}(-1)^{(\text{la somma degli indici di } a_{11})}\begin{pmatrix} \text{il determinante della matrice che} \\ \text{si ottiene da A sopprimendo} \\ \text{la } 1^a \text{ riga e la } 1^a \text{colonna di A} \end{pmatrix} = \\
&= a_{11}(-1)^{(\text{la somma degli indici di } a_{11})}\begin{pmatrix} \text{il determinante della matrice che si ottiene da A} \\ \text{sopprimendo la riga e la colonna in cui si trova } a_{11} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
-a_{12}a_{21} &= a_{12}(-1)^{1+2}\mathrm{Det}\,(\, a_{21} \,) = \\
&= a_{12}(-1)^{(\text{la somma degli indici di } a_{12})}\mathrm{Det}\,(\, a_{21} \,) = \\
&= a_{12}(-1)^{(\text{la somma degli indici di } a_{12})}\begin{pmatrix} \text{il determinante della matrice che} \\ \text{si ottiene da } \mathbf{A} \text{ sopprimendo} \\ \text{la } 1^a \text{ riga e la } 2^a \text{colonna di } \mathbf{A} \end{pmatrix} = \\
&= a_{12}(-1)^{(\text{la somma degli indici di } a_{12})}\begin{pmatrix} \text{il determinante della matrice che si ottiene da } \mathbf{A} \\ \text{sopprimendo la riga e la colonna in cui si trova } a_{12} \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Indicando con i simboli

$\mathbf{C}_{11}$ la matrice che si ottiene da **A** sopprimendo la 1^a riga e la 1^a colonna,

$\mathbf{C}_{12}$ la matrice che si ottiene da **A** sopprimendo la 1^a riga e la 2^a colonna,

ed inoltre

$$\mathbf{A}_{11} = (-1)^{1+1}\mathrm{Det}\mathbf{C}_{11},$$
$$\mathbf{A}_{12} = (-1)^{1+2}\mathrm{Det}\mathbf{C}_{12},$$

abbiamo:

$$\text{Det}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11}\mathbf{A}_{11} + a_{12}\mathbf{A}_{12}.$$

Si tenga a mente che a_{11} ed a_{12} sono gli elementi della 1^a riga di $\mathbf{A}$.

Quindi se $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, quello che abbiamo fatto per calcolare $\text{Det}(\mathbf{A})$ è stato:

(1) mettere in evidenza gli elementi della 1^a riga di $\mathbf{A}$: $\begin{pmatrix} \boxed{a_{11}} & \boxed{a_{12}} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$,

(2) per ciascuna posizione $(1, j)$ della 1^a riga di $\mathbf{A}$ (posto $(1, 1)$ e posto $(1, 2)$)

– costruire la matrice $\mathbf{C}_{1j}$ (ottenuta sopprimendo da A la 1^a riga e la $j-$esima colonna di $\mathbf{A}$),
– calcolare $\text{Det}(\mathbf{C}_{1j})$,
– calcolare $(-1)^{1+j}$,
– calcolare $\mathbf{A}_{1j} = (-1)^{1+j}\text{Det}(\mathbf{C}_{1j})$,

(3) calcolare il prodotto $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11} \\ \mathbf{A}_{12} \end{pmatrix}$.

Il caso n=3. Sia $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$. Per calcolare $\text{Det}(\mathbf{A})$ procediamo come nel caso $n = 2$.

(1) Mettiamo in evidenza gli elementi della 1^a riga di $\mathbf{A}$: $\begin{pmatrix} \boxed{a_{11}} & \boxed{a_{12}} & \boxed{a_{13}} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$.

(2) per ciascuna posizione $(1, j)$ della 1^a riga di $\mathbf{A}$ (posto $(1, 1)$, posto $(1, 2)$ e posto $(1, 3)$)

– costruiamo la matrice C_{1j} (ottenuta sopprimendo da A la 1^a riga e la $j-$esima colonna di A):

$$\mathbf{C}_{11} = \begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{C}_{12} = \begin{pmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{C}_{13} = \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}.$$

– calcoliamo $\text{Det}(\mathbf{C}_{1j})$, usando il caso $n = 2$, ossia il caso precedente a quello che stiamo analizzando ora (che è $n = 3$):

$$\text{Det}\mathbf{C}_{11} = \text{Det}\begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32},$$

$$\text{Det}\mathbf{C}_{12} = \text{Det}\begin{pmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{pmatrix} = a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31},$$

$$\text{Det}\mathbf{C}_{13} = \text{Det}\begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} = a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31},$$

– calcoliamo $(-1)^{1+j}$: $(-1)^{1+1} = 1, (-1)^{1+2} = -1, (-1)^{1+3} = 1$,

– calcoliamo $\mathbf{A}_{1j} = (-1)^{1+j}\mathrm{Det}(\mathbf{C}_{1j})$:

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}_{11} &= (-1)^{1+1}\mathrm{Det}\mathbf{C}_{11} = a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32},\\
\mathbf{A}_{12} &= (-1)^{1+2}\mathrm{Det}\mathbf{C}_{12} = -(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}),\\
\mathbf{A}_{13} &= (-1)^{1+3}\mathrm{Det}\mathbf{C}_{13} = a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}.
\end{aligned}$$

(3) Il determinante di $\mathbf{A}$ è il prodotto

$$\begin{aligned}
\mathrm{Det}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{A}_{11}\\ \mathbf{A}_{12}\\ \mathbf{A}_{13}\end{pmatrix} = a_{11}\mathbf{A}_{11} + a_{12}\mathbf{A}_{12} + a_{13}\mathbf{A}_{13} =\\
&= a_{11}(-1)^{1+1}\mathrm{Det}\mathbf{C}_{11} + a_{12}(-1)^{1+2}\mathrm{Det}\mathbf{C}_{12} + a_{13}(-1)^{1+3}\mathrm{Det}\mathbf{C}_{13}
\end{aligned}$$

Esempio 2. Calcoliamo il determinante della matrice $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1\\ 0 & 1 & 4\\ 2 & 6 & 3\end{pmatrix}$.

In questo caso abbiamo

$$a_{11} = 3, \qquad a_{12} = -2, \qquad a_{13} = 1,$$

$$\mathbf{C}_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 4\\ 6 & 3\end{pmatrix}, \qquad \mathbf{C}_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 4\\ 2 & 3\end{pmatrix}, \qquad \mathbf{C}_{13} = \begin{pmatrix} 0 & 1\\ 2 & 6\end{pmatrix},$$

per cui

$$\begin{aligned}
\mathrm{Det}A &= 3(-1)^{1+1}\mathrm{Det}\begin{pmatrix} 1 & 4\\ 6 & 3\end{pmatrix} + (-2)(-1)^{1+2}\mathrm{Det}\begin{pmatrix} 0 & 4\\ 2 & 3\end{pmatrix} + 1(-1)^{1+3}\mathrm{Det}\begin{pmatrix} 0 & 1\\ 2 & 6\end{pmatrix} =\\
&= 3(3-24) + (-2)(-1)(0-8) + (0-2) = 3(-21) - 16 - 2 =\\
&= -81.
\end{aligned}$$

Quello che abbiamo fatto è quindi:

(a) per le matrici 1×1 porre $\mathrm{Det}(\, a_{11}\,) = a_{11}$,

(b) dare una formula che permetta di calcolare il determinante delle matrici 2×2 sapendo come calcolare il determinante delle matrici 1×1, ossia dare una formula che permetta di calcolare il determinante delle matrici nel caso $n = 2$ sapendo come calcolare il determinante delle matrici nel caso precedente, cioè il caso $n = 1$ (si veda il punto (a)),

(c) dare una formula che permetta di calcolare il determinante delle matrici 3×3 sapendo come calcolare il determinante delle matrici 2×2, ossia dare una formula che permetta di calcolare il determinante delle matrici nel caso $n = 3$ sapendo come calcolare il determinante delle matrici nel caso precedente, cioè il caso $n = 2$ (si veda il punto (b)).

Procediamo quindi allo stesso modo, dando una formula che permetta di calcolare il determinante delle matrici $n\times n$ sapendo come calcolare il determinante delle matrici $(n-1)\times(n-1)$, ossia dare una formula che permetta di calcolare il determinante delle matrici nel caso n sapendo come calcolare il determinante delle matrici nel caso precedente, cioè il caso $n-1$.

Sia dunque $\mathbf{A} = (\, a_{ij}\,)$ una matrice $n \times n$. Cominciamo con il dare la seguente definizione:

Def. 1. Per ogni $1 \leq i \leq n$ e $1 \leq j \leq n$ si chiama **matrice complementare dell'elemento** a_{ij} od anche **matrice complementare di posto (i,j) in A**, e si indica con il simbolo $\mathbf{C}_{ij}$, la matrice che si ottiene da $\mathbf{A}$ sopprimendo la i-esima riga e la j-esima colonna. Dunque $\mathbf{C}_{ij}$ è una matrice $(n-1) \times (n-1)$.

Esempio 3. Se $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & i & 3 & 4 & 11 \\ 0 & 2 & 7 & -3 & 8 \\ 1+i & 2 & 5 & -5 & 17 \\ -1 & 6i & 0 & 5i & 1-4i \\ 12 & 7+2i & 34 & 4-6i & 14i \end{pmatrix}$, allora

$$\begin{pmatrix} 1 & i & 3 & \boxed{4} & 11 \\ \boxed{0} & \boxed{2} & \boxed{7} & \boxed{-3} & \boxed{8} \\ 1+i & 2 & 5 & \boxed{-5} & 17 \\ -1 & 6i & 0 & \boxed{5i} & 1-4i \\ 12 & 7+2i & 34 & \boxed{4-6i} & 14i \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{e la } 4^a \text{ colonna}]{\text{togliendo la } 2^a \text{ riga}} \mathbf{C}_{24} = \begin{pmatrix} 1 & i & 3 & 11 \\ 1+i & 2 & 5 & 17 \\ -1 & 6i & 0 & 1-4i \\ 12 & 7+2i & 34 & 14i \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & i & 3 & 4 & \boxed{11} \\ 0 & 2 & 7 & -3 & \boxed{8} \\ 1+i & 2 & 5 & -5 & \boxed{17} \\ \boxed{-1} & \boxed{6i} & \boxed{0} & \boxed{5i} & \boxed{1-4i} \\ 12 & 7+2i & 34 & 4-6i & \boxed{14i} \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{e la } 5^a \text{ colonna}]{\text{togliendo la } 3^a \text{ riga}} \mathbf{C}_{35} = \begin{pmatrix} 1 & i & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 7 & -3 \\ 1+i & 2 & 5 & -5 \\ 12 & 7+2i & 34 & 4-6i \end{pmatrix}$$

Def. 2. Per ogni $1 \leq i \leq n$ e $1 \leq j \leq n$ si chiama **cofattore di posto (i,j) di A**, e si indica con il simbolo $\mathbf{A}_{ij}$, il numero

$$\mathbf{A}_{ij} = (-1)^{i+j}\text{Det}\,(\mathbf{C}_{ij}),$$

dove $\mathbf{C}_{ij}$ è la matrice complementare di posto (i,j) in $\mathbf{A}$.

Si ha:

Formula del determinante di una matrice sviluppato rispetto alla 1^ariga

se $\mathbf{A} = (\, a_{ij}\,)$ è una matrice $n \times n$ allora

$$\text{Det}\mathbf{A} = a_{11}\mathbf{A}_{11} + a_{12}\mathbf{A}_{12} + \ldots + a_{1,n-1}\mathbf{A}_{1,n-1} + a_{1n}\mathbf{A}_{1n}$$

dove $\mathbf{A}_{11}$, $\mathbf{A}_{12}$, $\ldots$, $\mathbf{A}_{1,n-1}$, $\mathbf{A}_{1n}$ sono i cofattori di $\mathbf{A}$ di posti $(1,1)$, $(1,2)$, $\ldots$, $(1,n-1)$, $(1,n)$ (ossia i posti della 1^a riga) rispettivamente.

Esempio 4. Calcoliamo il determinante della matrice $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -5 & 0 & 3 \\ 6 & 2 & 0 & 4 \\ -2 & 0 & 0 & 2 \\ -1 & 7 & 5 & 1 \end{pmatrix}$.

Usando la formula dello sviluppo del determinante rispetto alla 1^a riga di $\mathbf{A}$ abbiamo:

$$\mathrm{Det}\mathbf{A} = 1 \times \mathbf{A}_{11} + (-5) \times \mathbf{A}_{12} + 0 \times \mathbf{A}_{13} + 3 \times \mathbf{A}_{14} = \mathbf{A}_{11} - 5\mathbf{A}_{12} + 3\mathbf{A}_{14}.$$

Dobbiamo quindi calcolare $\mathbf{A}_{11}, \mathbf{A}_{12}$ ed $\mathbf{A}_{14}$.

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}_{11} &= (-1)^{1+1}\mathrm{Det}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \\ 7 & 5 & 1 \end{pmatrix} = \\
&= \mathrm{Det}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \\ 7 & 5 & 1 \end{pmatrix} = \\
&= 2(-1)^{1+1}\mathrm{Det}\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} + 0(-1)^{1+2}\mathrm{Det}\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 7 & 1 \end{pmatrix} + 4(-1)^{1+3}\mathrm{Det}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 7 & 5 \end{pmatrix} = \\
&= 2(0-10) + 4(0-0) = -20, \\
\mathbf{A}_{12} &= (-1)^{1+2}\mathrm{Det}\begin{pmatrix} 6 & 0 & 4 \\ -2 & 0 & 2 \\ -1 & 5 & 1 \end{pmatrix} = \\
&= -\mathrm{Det}\begin{pmatrix} 6 & 0 & 4 \\ -2 & 0 & 2 \\ -1 & 5 & 1 \end{pmatrix} = \\
&= -(6(-1)^{1+1}\mathrm{Det}\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} + 0(-1)^{1+2}\mathrm{Det}\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} + 4(-1)^{1+3}\mathrm{Det}\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}) = \\
&= -(6(0-10) + 4(-10-0)) = -(-60-40) = 100, \\
\mathbf{A}_{14} &= (-1)^{1+4}\mathrm{Det}\begin{pmatrix} 6 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ -1 & 7 & 5 \end{pmatrix} = \\
&= -\mathrm{Det}\begin{pmatrix} 6 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ -1 & 7 & 5 \end{pmatrix} = \\
&= -(6(-1)^{1+1}\mathrm{Det}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 7 & 5 \end{pmatrix} + 2(-1)^{1+2}\mathrm{Det}\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} + 0(-1)^{1+3}\mathrm{Det}\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ -1 & 7 \end{pmatrix}) = \\
&= -(6(0-0) - 2(-10-0)) = 2(-10) = -20.
\end{aligned}$$

Dunque otteniamo:

$$\mathrm{Det}\mathbf{A} = \mathbf{A}_{11} - 5\mathbf{A}_{12} + 3\mathbf{A}_{14} = -20 - 5 \times 100 + 3(-20) = -580.$$

Si puó dimostrare il seguente

Teorema. Sia $\mathbf{A}$ una matrice $n \times n$. Allora, fissato $i \in \{1, \dots, n\}$ si ha che

$$a_{i1}\mathbf{A}_{i1} + a_{i2}\mathbf{A}_{i2} + \ldots + a_{i,n-1}\mathbf{A}_{i,n-1} + a_{in}\mathbf{A}_{in} = a_{11}\mathbf{A}_{11} + a_{12}\mathbf{A}_{12} + \ldots + a_{1,n-1}\mathbf{A}_{1,n-1} + a_{1n}\mathbf{A}_{1n},$$

ossia che

$$(*) \quad \mathrm{Det}\mathbf{A} = a_{i1}\mathbf{A}_{i1} + a_{i2}\mathbf{A}_{i2} + \ldots + a_{i,n-1}\mathbf{A}_{i,n-1} + a_{in}\mathbf{A}_{in}.$$

$(*)$ si chiama **lo sviluppo di Laplace del determinante di A rispetto alla i-esima riga di A**.

Quindi, per calcolare il determinante di una matrice $\mathbf{A}$, si puó partire mettendo in evidenza gli elementi di una riga qualunque, e non necessariamente la 1^a, come abbiamo fatto fino ad ora.

Esempio 5. Sia $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ una matrice 2×2. Sviluppiamo il determinante di $\mathbf{A}$ rispetto alla 2^a riga di $\mathbf{A}$:

– mettiamo in evidenza gli elementi della 2^a riga di $\mathbf{A}$: $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ \boxed{a_{21}} & \boxed{a_{22}} \end{pmatrix}$,

– $\mathbf{C}_{21}$ è la matrice che si ottiene da $\mathbf{A}$ togliendo la 2^a riga e la 1^a colonna, quindi $\mathbf{C}_{21} = (\, a_{12}\,)$; $\mathbf{C}_{22}$ è la matrice che si ottiene da $\mathbf{A}$ togliendo la 2^a riga e la 2^a colonna, quindi $\mathbf{C}_{22} = (\, a_{11}\,)$.

Allora

$$\begin{aligned} & a_{21}\mathbf{A}_{21} + a_{22}\mathbf{A}_{22} = a_{21}(-1)^{2+1}\mathrm{Det}\mathbf{C}_{21} + a_{22}(-1)^{2+2}\mathrm{Det}\mathbf{C}_{22} = \\ & = -a_{21}\mathrm{Det}\,(\, a_{12}\,) + a_{22}\mathrm{Det}\,(\, a_{11}\,) = -a_{21}a_{12} + a_{22}a_{11} = \\ & = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \end{aligned}$$

dà lo stesso risultato che abbiamo ottenuto partendo dalla 1^a riga.

Conviene quindi sviluppare il determinante rispetto alla riga che contiene piú zeri.

Esempio 6. Riconsideriamo la matrice dell'Esempio 4, $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -5 & 0 & 3 \\ 6 & 2 & 0 & 4 \\ -2 & 0 & 0 & 2 \\ -1 & 7 & 5 & 1 \end{pmatrix}$, e calcoliamo il suo determinante rispetto alla 3^a riga (che contiene due zeri). Allora

$$\mathrm{Det}\mathbf{A} = (-2)(-1)^{3+1}\mathrm{Det}\begin{pmatrix} -5 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 4 \\ 7 & 5 & 1 \end{pmatrix} + 2(-1)^{3+4}\mathrm{Det}\begin{pmatrix} 1 & -5 & 0 \\ 6 & 2 & 0 \\ -1 & 7 & 5 \end{pmatrix}.$$

Calcoliamo separatamente $\mathrm{Det}\begin{pmatrix} -5 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 4 \\ 7 & 5 & 1 \end{pmatrix}$ e $\mathrm{Det}\begin{pmatrix} 1 & -5 & 0 \\ 6 & 2 & 0 \\ -1 & 7 & 5 \end{pmatrix}$. Per entrambe queste matrici 3×3 non è conveniente calcolare il determinante rispetto alla 3^a riga, ma è indifferente scegliere la 1^a o la 2^a. Per fare esercizio scegliamo in entrambi i casi la 2^a riga:

$$\begin{aligned} & \mathrm{Det}\begin{pmatrix} -5 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 4 \\ 7 & 5 & 1 \end{pmatrix} = 2(-1)^{2+1}\mathrm{Det}\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} + 4(-1)^{2+3}\mathrm{Det}\begin{pmatrix} -5 & 0 \\ 7 & 5 \end{pmatrix} = \\ & = -2(0-15) - 4(-25-0) = 30 + 100 = 130 \\ & \mathrm{Det}\begin{pmatrix} 1 & -5 & 0 \\ 6 & 2 & 0 \\ -1 & 7 & 5 \end{pmatrix} = 6(-1)^{2+1}\mathrm{Det}\begin{pmatrix} -5 & 0 \\ 7 & 5 \end{pmatrix} + 2(-1)^{2+2}\mathrm{Det}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} = \\ & = -6(-25-0) + 2(5-0) = 150 + 10 = 160 \end{aligned}$$

Quindi $\mathrm{Det}(\mathbf{A}) = (-2) \times 130 + (-2) \times 160 = -580$ (lo stesso numero che avevamo ottenuto sviluppando il determinante rispetto alla 1^a riga).

Cosí come si puó sviluppare il determinante di una matrice rispetto ad una qualunque sua riga, lo si puó sviluppare rispetto ad una qualunque sua colonna, dal momento che vale il seguente

Teorema. Sia $\mathbf{A}$ una matrice $n \times n$. Allora, fissati $j \in \{1, \ldots, n\}$ e si ha che

$$(**) \quad \text{Det}\mathbf{A} = a_{1j}\mathbf{A}_{1j} + a_{2j}\mathbf{A}_{2j} + \ldots + a_{n-1,j}\mathbf{A}_{n-1,j} + a_{nj}\mathbf{A}_{nj}.$$

$(**)$ si chiama **lo sviluppo di Laplace del determinante di A rispetto alla j-esima colonna di A**.

Conviene quindi sviluppare il determinante rispetto alla riga oppure alla colonna che contiene piú zeri.

Esempio 7. Riconsideriamo la matrice degli Esempi 4 e 6, $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -5 & 0 & 3 \\ 6 & 2 & 0 & 4 \\ -2 & 0 & 0 & 2 \\ -1 & 7 & 5 & 1 \end{pmatrix}$, e calcoliamo il suo determinante rispetto alla 3^a colonna (che contiene tre zeri). Allora

$$\begin{aligned}
\text{Det}\mathbf{A} &= 0 \times (-1)^{1+3}\text{Det}\begin{pmatrix} 6 & 2 & 4 \\ -2 & 0 & 2 \\ -1 & 7 & 1 \end{pmatrix} + 0 \times (-1)^{2+3}\text{Det}\begin{pmatrix} 1 & -5 & 3 \\ -2 & 0 & 2 \\ -1 & 7 & 1 \end{pmatrix} + \\
&+ 0 \times (-1)^{3+3}\text{Det}\begin{pmatrix} 1 & -5 & 3 \\ 6 & 2 & 4 \\ -1 & 7 & 1 \end{pmatrix} + 5(-1)^{4+3}\text{Det}\begin{pmatrix} 1 & -5 & 3 \\ 6 & 2 & 4 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \\
&= -5\text{Det}\begin{pmatrix} 1 & -5 & 3 \\ 6 & 2 & 4 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Calcoliamo Det $\begin{pmatrix} 1 & -5 & 3 \\ 6 & 2 & 4 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, ad esempio rispetto alla 2^a colonna:

$$\begin{aligned}
&\text{Det}\begin{pmatrix} 1 & -5 & 3 \\ 6 & 2 & 4 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \\
&= (-5)(-1)^{1+2}\text{Det}\begin{pmatrix} 6 & 4 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} + 2(-1)^{2+2}\text{Det}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} + 0 \times (-1)^{3+2}\text{Det}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 6 & 4 \end{pmatrix} = \\
&= (-5)(-1)(12+8) + 2(2+6) = 100 + 16 = 116
\end{aligned}$$

quindi $\text{Det}(\mathbf{A}) = (-5) \times 116 = -580$ (si noti che è lo stesso numero che abbiamo ottenuto sviluppando il determinante rispetto alla 1^a oppure alla 3^a riga).

Proprietà del determinante.

Sia $\mathbf{A}$ una matrice $n \times n$.

(1) Se $\mathbf{A}$ ha una riga (risp. una colonna) nulla, oppure se $\mathbf{A}$ ha due righe (risp. due colonne) uguali, allora $\text{Det}(\mathbf{A}) = 0$.

(2) Se $\mathbf{A}'$ è la matrice che si ottiene da $\mathbf{A}$ mediante lo scambio di due righe (risp. due colonne) allora $\mathrm{Det}(\mathbf{A}') = -\mathrm{Det}(\mathbf{A})$.

(3) Se $\mathbf{A}'$ è la matrice che si ottiene da $\mathbf{A}$ sommando ad una riga (risp. ad una colonna) di $\mathbf{A}$ un'altra riga (risp. un'altra colonna) di $\mathbf{A}$ moltiplicata per un numero c, allora $\mathrm{Det}(\mathbf{A}') = \mathrm{Det}(\mathbf{A})$.

(4) Se $\mathbf{A}'$ è la matrice che si ottiene da $\mathbf{A}$ moltiplicando una riga (risp. una colonna) di $\mathbf{A}$ per un numero c, allora $\mathrm{Det}(\mathbf{A}') = c\mathrm{Det}(\mathbf{A})$.

(5) $\mathrm{Det}(\mathbf{A}^T) = \mathrm{Det}(\mathbf{A})$.

(6) Se $\mathbf{B}$ è un'altra matrice $n \times n$ allora $\mathbf{Det(AB)=Det(A)\ Det(B)}$.

(7) **A è non singolare se e solo se Det(A)**$\neq 0$, e se $\mathbf{A}$ è non singolare si ha

$$\mathrm{Det}(\mathbf{A}^{-1}) = \frac{1}{\mathrm{Det}(\mathbf{A})}.$$

$\boxed{N.B.}$

Per quanto riguarda la proprietà (7), si ricordi che avevamo già osservato che una matrice 2×2 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ è non singolare se e solo se il numero $ad - bc \neq 0$, e tale numero è proprio $\mathrm{Det}(\mathbf{A})$.

Esercizio. Si provi che **il determinante di una matrice triangolare superiore (risp. inferiore) è il prodotto degli elementi diagonali**.

Sia T una matrice $n \times n$ triangolare superiore (la dimostrazione è simile per le matrici triangolari inferiori):

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} t_{11} & & & & & & \\ 0 & t_{22} & & & & & \\ 0 & 0 & t_{33} & & & * & \\ 0 & 0 & 0 & t_{44} & & & \\ \vdots & & & & \ddots & & \\ & & \mathbb{O} & & & \ddots & \\ 0 & & & & \dots & \dots & t_{nn} \end{pmatrix}.$$

Chiamiamo:

$\mathbf{T}_1$ la matrice che si ottiene da $\mathbf{T}$ sopprimendo la 1^a riga e la 1^a colonna ($\mathbf{T}_1$ è triangolare superiore $(n-1) \times (n-1)$):

$$\mathbf{T}_1 = \begin{pmatrix} t_{22} & & & & \\ 0 & t_{33} & & * & \\ 0 & 0 & t_{44} & & \\ \vdots & & & \ddots & \\ & & \mathbb{O} & & \\ 0 & & & \dots & t_{nn} \end{pmatrix},$$

$\mathbf{T}_2$ la matrice che si ottiene da $\mathbf{T}_1$ sopprimendo la 1^a riga e la 1^a colonna ($\mathbf{T}_2$ è triangolare superiore

$(n-2) \times (n-2)$):

$$\mathbf{T}_2 = \begin{pmatrix} t_{33} & & & & \\ 0 & t_{44} & & * & \\ \vdots & & \ddots & & \\ & \mathbb{O} & & & \\ & & & \dots & t_{nn} \end{pmatrix},$$

e cosí via per ogni $k = 2, \dots, n-1$ chiamiamo $\mathbf{T}_k$ la matrice che si ottiene da $\mathbf{T}_{k-1}$ sopprimendo la 1^a riga e la 1^a colonna. $\mathbf{T}_k$ è una matrice triangolare superiore $(n-k) \times (n-k)$.

Sviluppiamo il determinante di $\mathbf{T}$ ripetto alla 1^a colonna di $\mathbf{T}$:

$$\mathrm{Det}\mathbf{T} = t_{11}(-1)^{1+1}\mathrm{Det}\mathbf{T}_1 = t_{11}\mathrm{Det}\mathbf{T}_1.$$

Sviluppiamo il determinante di T_1 ripetto alla 1^a colonna di T_1:

$$\mathrm{Det}\mathbf{T} = t_{11}\mathrm{Det}\mathbf{T}_1 = t_{11}(t_{22}(-1)^{1+1}\mathrm{Det}\mathbf{T}_2) = t_{11}t_{22}\mathrm{Det}\mathbf{T}_2.$$

Cosí procedendo otteniamo:

$$\begin{aligned} \mathrm{Det}\mathbf{T} &= t_{11}t_{22}\mathrm{Det}\mathbf{T}_2 = \\ &= t_{11}t_{22}t_{33}\mathrm{Det}\mathbf{T}_3 = \\ &= t_{11}t_{22}t_{33}t_{44}\mathrm{Det}\mathbf{T}_4 = \\ &= \qquad \dots \qquad = \\ &= t_{11}t_{22} \quad \dots \quad t_{n-1,n-1}\mathrm{Det}\mathbf{T}_{n-1} = \\ &= t_{11}t_{22} \quad \dots \quad t_{n-1,n-1}\mathrm{Det}\,(\,t_{nn}\,) = \\ &= t_{11}t_{22} \quad \dots \quad t_{n-1,n-1}t_{nn}. \end{aligned}$$

In particolare da ció segue:

Il determinante di una matrice diagonale è il prodotto degli elementi diagonali,

poichè le matrici diagonali sono particolari matrici triangolari superiori.

Esercizio. Sia $\mathbf{A}$ una matrice $n \times n$. Si provi che per ogni scalare c si ha:

$$\mathrm{Det}(c\mathbf{A}) = c^n\mathrm{Det}(\mathbf{A}).$$

Si ha:

$$\mathrm{Det}(c\mathbf{A}) \underset{\substack{\uparrow \\ c\mathbf{A}=c(\mathbf{I}_n\mathbf{A})=(c\mathbf{I}_n)\mathbf{A}}}{=} \mathrm{Det}((c\mathbf{I}_n)\mathbf{A}) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{proprietà 6 del det.}}}{=} \mathrm{Det}(c\mathbf{I}_n)\mathrm{Det}(\mathbf{A}).$$

Poichè $c\mathbf{I}_n$ è una matrice scalare $n \times n$, in particolare una matrice diagonale, per l'esercizio precedente si ha che

$$\mathrm{Det}(c\mathbf{I}_n) = \text{ prodotto degli elementi diagonali di } c\mathbf{I}_n.$$

Tali elementi sono tutti uguali a c, ed il loro prodotto ha n fattori (perchè $c\mathbf{I}_n$ è $n \times n$), dunque $\mathrm{Det}(c\mathbf{I}_n) = c^n$, per cui

$$\mathrm{Det}(c\mathbf{A}) = c^n\mathrm{Det}(\mathbf{A}).$$

ESERCIZI TIPO

ESERCIZIO TIPO 1

Siano $\mathbf{u},\mathbf{v} \in \mathbb{R}^{n-1}$ ed $a \in \mathbb{R}$. Si consideri la matrice a blocchi

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & \mid & \mathbf{u}^T \\ - & \mid & --- \\ \mathbf{v} & \mid & a\mathbf{I_{n-1}} \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{R}).$$

(a) Sia $\mathbf{w} = \begin{pmatrix} -a \\ - \\ \mathbf{v} \end{pmatrix}$. Si provi che $\mathbf{Aw} = \mathbf{0}$ se e solo se $\mathbf{u}^T\mathbf{v} = a$.

(b) Dopo aver calcolato $\mathbf{A}^2$ a blocchi, si provi che se $a \neq 0$ ed $\mathbf{A} = \mathbf{A}^2$ allora $\mathbf{A} = \mathbf{I_n}$.

(a) Calcolando $\mathbf{Aw}$ a blocchi si ottiene

$$\mathbf{Aw} = \begin{pmatrix} 1 & \mid & \mathbf{u}^T \\ - & \mid & --- \\ \mathbf{v} & \mid & a\mathbf{I_{n-1}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -a \\ - \\ \mathbf{v} \end{pmatrix} \underset{\mathbf{v}\cdot(-a)=-a\mathbf{v}}{\underset{\uparrow}{=}} \begin{pmatrix} -a+\mathbf{u}^T\mathbf{v} \\ ----- \\ -a\mathbf{v}+(a\mathbf{I_{n-1}})\mathbf{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a+\mathbf{u}^T\mathbf{v} \\ --- \\ -a\mathbf{v}+a\mathbf{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a+\mathbf{u}^T\mathbf{v} \\ --- \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}.$$

Dunque

$$\mathbf{Aw} = \mathbf{0} \iff -a+\mathbf{u}^T\mathbf{v} = 0 \iff \mathbf{u}^T\mathbf{v} = a.$$

(b) Calcolando $\mathbf{A}^2$ a blocchi si ottiene

$$\mathbf{A}^2 = \begin{pmatrix} 1 & \mid & \mathbf{u}^T \\ - & \mid & --- \\ \mathbf{v} & \mid & a\mathbf{I_{n-1}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \mid & \mathbf{u}^T \\ - & \mid & --- \\ \mathbf{v} & \mid & a\mathbf{I_{n-1}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+\mathbf{u}^T\mathbf{v} & \mid & \mathbf{u}^T+\mathbf{u}^T(a\mathbf{I_{n-1}}) \\ ------- & \mid & ------- \\ \mathbf{v}+(a\mathbf{I_{n-1}})\mathbf{v} & \mid & \mathbf{v}\mathbf{u}^T+(a\mathbf{I_{n-1}})^2 \end{pmatrix} =$$

$$\underset{\mathbf{u}^T(a\mathbf{I_{n-1}})=a\mathbf{u}^T\mathbf{I_{n-1}}=a\mathbf{u}^T}{\underset{\uparrow}{=}} \begin{pmatrix} 1+\mathbf{u}^T\mathbf{v} & \mid & \mathbf{u}^T+a\mathbf{u}^T \\ ------- & \mid & ------- \\ \mathbf{v}+a\mathbf{v} & \mid & \mathbf{v}\mathbf{u}^T+a^2\mathbf{I_{n-1}} \end{pmatrix}$$

Per ipotesi $\mathbf{A} = \mathbf{A}^2$, quindi

$$\begin{cases} 1 = 1+\mathbf{u}^T\mathbf{v} \\ \mathbf{u}^T = \mathbf{u}^T + a\mathbf{u}^T \\ \mathbf{v} = \mathbf{v}+a\mathbf{v} \\ a\mathbf{I_{n-1}} = \mathbf{v}\mathbf{u}^T + a^2\mathbf{I_{n-1}} \end{cases}$$

Dalla seconda equazione si ricava $a\mathbf{u}^T = \mathbf{0}^T$, per cui, essendo $a \neq 0$, $\mathbf{u}^T = \mathbf{0}^T$ (in particolare, $\mathbf{u}^T\mathbf{v} = \mathbf{0}^T\mathbf{v} = 0$, e la prima equazione non fornisce informazioni).

Dalla terza equazione si ricava $a\mathbf{v} = \mathbf{0}$, e quindi, essendo $a \neq 0$, $\mathbf{v} = \mathbf{0}$.

Sostituendo $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ nella quarta equazione, si ottiene

$$a\mathbf{I_{n-1}} = \mathbf{v}\mathbf{u}^T + a^2\mathbf{I_{n-1}} = \mathbf{O} + a^2\mathbf{I_{n-1}} = a^2\mathbf{I_{n-1}},$$

da cui segue

$$(a - a^2)\mathbf{I_{n-1}} = a\mathbf{I_{n-1}} - a^2\mathbf{I_{n-1}} = \mathbf{O}.$$

Dunque $a - a^2 = 0$, e poichè $a \neq 0$ concludiamo che $a = 1$. Allora

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & | & \mathbf{u}^T \\ - & | & --- \\ \mathbf{v} & | & a\mathbf{I_{n-1}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & | & \mathbf{0}^T \\ - & | & --- \\ \mathbf{0} & | & \mathbf{I_{n-1}} \end{pmatrix} = \mathbf{I_n}.$$

ESERCIZIO TIPO 2

Risolvere il sistema lineare $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ nei tre seguenti casi:

(a) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 7 \end{pmatrix}$ e $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$;

(b) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 2 & 6 & -3 & 4 \end{pmatrix}$ e $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$;

(c) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & 8 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ e $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

(a) Troviamo una forma ridotta di Gauss della matrice aumentata del sistema:

$$(\,\mathbf{A} \mid \mathbf{b}\,) = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & -1 \\ 3 & 3 & 7 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{E_{31}(-3)E_{21}(-1)E_1(\frac{1}{2})} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \rightarrow$$

$$\xrightarrow{E_{32}(-1)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) = (\,\mathbf{U} \mid \mathbf{d}\,)$$

Poichè $\mathbf{d}$ è dominante, allora $\mathbf{Ux} = \mathbf{d}$, e quindi anche $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, non ha soluzioni.
(Infatti: il sistema $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ è equivalente al sistema $\mathbf{Ux} = \mathbf{d}$, che è una scrittura compatta per

$$(*) \qquad \begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 & = 0 \\ \qquad\qquad x_3 & = -1 \\ \qquad\qquad 0 & = 1 \end{cases},$$

e poichè l'ultima equazione di $(*)$ non ha soluzioni, $(*)$ non ha soluzioni).

(b) Troviamo una forma ridotta di Gauss della matrice aumentata del sistema:

$$(\,\mathbf{A} \mid \mathbf{b}\,) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 2 \\ 2 & 6 & -3 & 4 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow{E_{31}(-2)} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right) \rightarrow$$

$$\xrightarrow{E_{32}(-1)E_2(\frac{1}{2})} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) = (\,\mathbf{U} \mid \mathbf{d}\,).$$

Il sistema $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ è equivalente al sistema $\mathbf{Ux} = \mathbf{d}$, che è una scrittura compatta per

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 2x_3 + x_4 & = -1 \\ \qquad\qquad x_3 + 2x_4 & = 1 \end{cases}.$$

Poichè $\mathbf{d}$ è libera, $\mathbf{Ux} = \mathbf{d}$ ammette soluzioni.

Poichè $\mathbf{U}$ ha esattamente due colonne libere (la 2^a e la 4^a), $\mathbf{Ux} = \mathbf{d}$ ha ∞^2 soluzioni.

Scegliamo come parametri le variabili corrispondenti alle colonne libere di $\mathbf{U}$ e con la sostituzione all'indietro otteniamo:

$$\begin{cases} x_2 = h \\ x_4 = k \\ x_3 = -2x_4 + 1 = -2k + 1 \\ x_1 = -3x_2 + 2x_3 - x_4 - 1 = -3h + 2 \times (-2k+1) - k - 1 = -3h - 5k + 1 \end{cases}$$

Dunque l'insieme delle soluzioni di $\mathbf{Ux} = \mathbf{d}$, e quindi anche di $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, è

$$\left\{ \begin{pmatrix} -3h - 5k + 1 \\ h \\ -2k + 1 \\ k \end{pmatrix} | h, k \in \mathbb{C} \right\}.$$

(c) Troviamo una forma ridotta di Gauss della matrice aumentata del sistema:

$$(\mathbf{A} \mid \mathbf{b}) = \begin{pmatrix} 4 & 8 & 4 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & 2 \\ 1 & 3 & 2 & | & 0 \\ 1 & 2 & 1 & | & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{41}(-1)E_{31}(-1)E_1(\frac{1}{4})} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & 2 \\ 0 & 1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \to$$

$$\xrightarrow{E_{23}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & | & 0 \\ 0 & 1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & 2 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} = (\mathbf{U} \mid \mathbf{d})$$

Il sistema $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ è equivalente al sistema $\mathbf{Ux} = \mathbf{d}$, che è una scrittura compatta per

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 & = 0 \\ \quad\quad x_2 + x_3 & = 0 \\ \quad\quad\quad\quad x_3 & = 2 \end{cases}.$$

Poichè $\mathbf{d}$ è libera, $\mathbf{Ux} = \mathbf{d}$ ammette soluzioni.

Poichè $\mathbf{U}$ non ha colonne libere, $\mathbf{Ux} = \mathbf{d}$ ha esattamente una soluzione.

Con la sostituzione all'indietro otteniamo:

$$\begin{cases} x_3 = 2 \\ x_2 = -x_3 = -2 \\ x_1 = -2x_2 - x_3 = -2 \times (-2) - 2 = 4 - 2 = 2 \end{cases}$$

Dunque l'unica soluzione di $\mathbf{Ux} = \mathbf{d}$, e quindi anche di $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, è il vettore $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$.

ESERCIZIO TIPO 3

Si risolva il sistema lineare $\mathbf{A}(\alpha)\mathbf{x} = \mathbf{b}(\alpha)$ dipendente dal parametro complesso α dove

$$\mathbf{A}(\alpha) = \begin{pmatrix} 3 & 3\alpha & 3 \\ 1 & \alpha+1 & \alpha+1 \\ 1 & \alpha & \alpha+1-i \\ 0 & 2 & 2\alpha \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{b}(\alpha) = \begin{pmatrix} 3\alpha \\ \alpha+1 \\ \alpha \\ \alpha^2+3 \end{pmatrix}.$$

Troviamo una forma ridotta di Gauss della matrice aumentata del sistema.

$$(\,\mathbf{A}(\alpha) \quad | \quad \mathbf{b}(\alpha)\,) = \begin{pmatrix} 3 & 3\alpha & 3 & | & 3\alpha \\ 1 & \alpha+1 & \alpha+1 & | & \alpha+1 \\ 1 & \alpha & \alpha+1-i & | & \alpha \\ 0 & 2 & 2\alpha & | & \alpha^2+3 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{31}(-1)E_{21}(-1)E_1(\frac{1}{3})}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & \alpha & 1 & | & \alpha \\ 0 & 1 & \alpha & | & 1 \\ 0 & 0 & \alpha-i & | & 0 \\ 0 & 2 & 2\alpha & | & \alpha^2+3 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{42}(-2)} \begin{pmatrix} 1 & \alpha & 1 & | & \alpha \\ 0 & 1 & \alpha & | & 1 \\ 0 & 0 & \alpha-i & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & \alpha^2+1 \end{pmatrix} = (\,\mathbf{B}(\alpha) \quad | \quad \mathbf{c}(\alpha)\,).$$

$\boxed{1^0 \text{ CASO}}$ $\quad \alpha = i \quad (\,\mathbf{B}(i) \quad | \quad \mathbf{c}(i)\,) = \begin{pmatrix} 1 & i & 1 & | & i \\ 0 & 1 & i & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$ è una forma ridotta di Gauss per $(\,\mathbf{A}(i) \quad | \quad \mathbf{b}(i)\,)$, quindi $\mathbf{A}(i)\mathbf{x} = \mathbf{b}(i)$ è equivalente a $\mathbf{B}(i)\mathbf{x} = \mathbf{c}(i)$ che è una forma compatta per

$$(*) \qquad \begin{cases} x_1 + ix_2 + x_3 &= i \\ \qquad x_2 + ix_3 &= 1 \end{cases}$$

Poichè $\mathbf{c}(i)$ è libera, $\mathbf{B}(i)\mathbf{x} = \mathbf{c}(i)$ ammette soluzioni.

Poichè $\mathbf{B}(i)$ ha esattamente una colonna libera, $\mathbf{B}(i)\mathbf{x} = \mathbf{c}(i)$ ha ∞^1 soluzioni.

Scegliamo come parametro la variabile corrispondente alla colonna libera di $\mathbf{B}(i)$ (la 3^a) e con la sostituzione all'indietro da $(*)$ otteniamo

$$\begin{cases} x_3 = h \\ x_2 = -ix_3 + 1 = -ih + 1 \\ x_1 = -ix_2 - x_3 + i = -i(-ih+1) - h + i = -h - i - h + i = -2h \end{cases}$$

L'insieme delle soluzioni del sistema $\mathbf{B}(i)\mathbf{x} = \mathbf{c}(i)$ (e quindi l'insieme delle soluzioni del sistema $\mathbf{A}(i)\mathbf{x} = \mathbf{b}(i)$) è

$$\left\{ \begin{pmatrix} -2h \\ -ih+1 \\ h \end{pmatrix} | h \in \mathbb{C} \right\}.$$

$\boxed{2^0 \text{ CASO}}$ $\quad \alpha \neq i$

$$
(\,\mathbf{B}(\alpha) \quad | \quad \mathbf{c}(\alpha)\,) = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & 1 & | & \alpha \\ 0 & 1 & \alpha & | & 1 \\ 0 & 0 & \alpha - i & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & \alpha^2+1 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_3(\frac{1}{\alpha-i})}
$$

$$
\to \begin{pmatrix} 1 & \alpha & 1 & | & \alpha \\ 0 & 1 & \alpha & | & 1 \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & \alpha^2+1 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_4(\frac{1}{\alpha-i})} \begin{pmatrix} 1 & \alpha & 1 & | & \alpha \\ 0 & 1 & \alpha & | & 1 \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & \alpha+i \end{pmatrix} = (\,\mathbf{C}(\alpha)| \quad \mathbf{d}(\alpha)\,)\,.
$$

$\boxed{1^0 \text{ Sottocaso}}$ $\alpha = -i$ $\quad (\,\mathbf{C}(-i) \quad | \quad \mathbf{d}(-i)\,) = \begin{pmatrix} 1 & -i & 1 & | & -i \\ 0 & 1 & -i & | & 1 \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$ è una forma ridotta di Gauss per $(\,\mathbf{A}(-i) \quad | \quad \mathbf{b}(-i)\,)$, quindi $\mathbf{A}(-i)\mathbf{x} = \mathbf{b}(-i)$ è equivalente a $\mathbf{C}(-i)\mathbf{x} = \mathbf{d}(-i)$ che è una forma compatta per

$$
(*) \qquad \begin{cases} x_1 - ix_2 + x_3 & = -i \\ \qquad x_2 - ix_3 & = 1 \\ \qquad\qquad x_3 & = 0 \end{cases}
$$

Poichè $\mathbf{d}(-i)$ è libera, $\mathbf{C}(-i)\mathbf{x} = \mathbf{d}(-i)$ ammette soluzioni.

Poichè tutte le colonne di $\mathbf{C}(-i)$ sono dominanti, $\mathbf{C}(-i)\mathbf{x} = \mathbf{d}(-i)$ ammette un'unica soluzione. Con la sostituzione all'indietro da $(*)$ otteniamo

$$
\begin{cases} x_3 = 0 \\ x_2 = ix_3 + 1 = 1 \\ x_1 = ix_2 - x_3 - i = i - i = 0 \end{cases}
$$

L'unica soluzione di $\mathbf{C}(-i)\mathbf{x} = \mathbf{d}(-i)$ (e quindi di $\mathbf{A}(-i)\mathbf{x} = \mathbf{b}(-i)$) è $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

$\boxed{2^0 \text{ Sottocaso}}$ $\alpha \notin \{i, -i\}$

$$
(\,\mathbf{C}(\alpha)| \quad \mathbf{d}(\alpha)\,) = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & 1 & | & \alpha \\ 0 & 1 & \alpha & | & 1 \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & \alpha+i \end{pmatrix} \xrightarrow{E_4(\frac{1}{\alpha+i})} \begin{pmatrix} 1 & \alpha & 1 & | & \alpha \\ 0 & 1 & \alpha & | & 1 \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 1 \end{pmatrix} = (\,\mathbf{D}(\alpha)| \quad \mathbf{e}(\alpha)\,)
$$

è una forma ridotta di Gauss per $(\,\mathbf{A}(\alpha) \quad | \quad \mathbf{b}(\alpha)\,)$. Poichè $\mathbf{e}(\alpha)$ è dominante, $\mathbf{D}(\alpha)\mathbf{x} = \mathbf{e}(\alpha)$ (e quindi di $\mathbf{A}(\alpha)\mathbf{x} = \mathbf{b}(\alpha)$) non ammette soluzioni.

ESERCIZIO TIPO 4

Si trovino tutte le inverse destre della matrice $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Un'inversa destra di $\mathbf{A}$ è una matrice 3×2 $\mathbf{R}$ tale che se $\mathbf{R} = (\,\mathbf{c}_1 \quad | \quad \mathbf{c}_2\,)$, allora

$\mathbf{c}_1$ è soluzione di (1) $\mathbf{Ax} = \mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e

$\mathbf{c}_2$ è soluzione di (2) $\mathbf{Ax} = \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Cerchiamo tutte le soluzioni di (1) e (2).

$$(\,\mathbf{A} \quad | \quad \mathbf{I}_2\,) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & | & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & | & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{21}(-2)}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & | & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & | & -2 & 1 \end{pmatrix} = (\,\mathbf{U} \quad | \quad \mathbf{b}_1 \quad \mathbf{b}_2\,).$$

(1) è equivalente a (1′) $\mathbf{Ux} = \mathbf{b}_1$ che è una forma compatta per

$$\begin{cases} x_1 - x_3 = 1 \\ x_2 + x_3 = -2 \end{cases}$$

Scegliamo come parametro la variabile corrispondente all'unica colonna libera di U (la 3^a) e con la sostituzione all'indietro otteniamo

$$\begin{cases} x_3 = h \\ x_2 = -2 - h \\ x_1 = 1 + h \end{cases}$$

L'insieme delle soluzioni di (1) è

$$\left\{ \begin{pmatrix} h+1 \\ -h-2 \\ h \end{pmatrix} | h \in \mathbb{C} \right\}.$$

(2) è equivalente a (2′) $\mathbf{Ux} = \mathbf{b}_2$ che è una forma compatta per

$$\begin{cases} x_1 - x_3 = 0 \\ x_2 + x_3 = 1 \end{cases}$$

Scegliamo come parametro la variabile corrispondente all'unica colonna libera di U (la 3^a) e con la sostituzione all'indietro otteniamo

$$\begin{cases} x_3 = k \\ x_2 = 1 - k \\ x_1 = k \end{cases}$$

L'insieme delle soluzioni di (2) è

$$\left\{ \begin{pmatrix} k \\ -k+1 \\ k \end{pmatrix} | k \in \mathbb{C} \right\}.$$

Le inverse destre di $\mathbf{A}$ sono esattamente tutte le matrici del tipo $\mathbf{R(h,k)} = \begin{pmatrix} h+1 & k \\ -h-2 & -k+1 \\ h & k \end{pmatrix}$, al variare di $h, k \in \mathbb{C}$.

ESERCIZIO TIPO 4 bis

Si trovino tutte le inverse sinistre della matrice $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$.

1. Poniamo $\mathbf{B} = \mathbf{A}^T$.

2. Cerchiamo tutte le inverse destre di $\mathbf{B}$. Dall'ESERCIZIO TIPO 4 sappiamo che sono tutte e sole le matrici del tipo $\begin{pmatrix} h+1 & k \\ -h-2 & -k+1 \\ h & k \end{pmatrix}$ con $h, k \in \mathbb{C}$.

3. Una matrice è inversa sinistra di $\mathbf{A}$ se e solo se è la trasposta di una inversa destra di $\mathbf{B}$. Quindi le inverse sinistre di $\mathbf{A}$ sono esattamente tutte le matrici del tipo $\begin{pmatrix} h+1 & -h-2 & h \\ k & -k+1 & k \end{pmatrix}$ al variare di $h, k \in \mathbb{C}$.

ESERCIZIO TIPO 5

Sia $\mathbf{A}(\alpha) = \begin{pmatrix} \alpha-1 & 1 & \alpha-1 \\ \alpha-1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, dove $\alpha \in \mathbb{R}$. Per quegli $\alpha \in \mathbb{R}$ per cui $\mathbf{A}(\alpha)$ è non singolare, si calcoli $\mathbf{A}(\alpha)^{-1}$.

$$(\,\mathbf{A}(\alpha) \quad | \quad \mathbf{I}_3\,) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} \alpha-1 & 1 & \alpha-1 & 1 & 0 & 0 \\ \alpha-1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{E_{21}(-\alpha+1)E_1(\frac{1}{\alpha-1}) \quad \boxed{\alpha \neq 1 : \mathbf{A}(1) \text{ non ha inversa}}}$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{1}{\alpha-1} & 1 & \frac{1}{\alpha-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\alpha & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{E_{23}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{1}{\alpha-1} & 1 & \frac{1}{\alpha-1} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -\alpha & -1 & 1 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow$$

$$\xrightarrow{E_3(-\frac{1}{-\alpha}) \quad \boxed{\alpha \neq 0 : \mathbf{A}(0) \text{ non ha inversa}}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{1}{\alpha-1} & 1 & \frac{1}{\alpha-1} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{\alpha} & -\frac{1}{\alpha} & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{E_{13}(-1)}$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{1}{\alpha-1} & 0 & \frac{1}{\alpha(1-\alpha)} & \frac{1}{\alpha} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{\alpha} & -\frac{1}{\alpha} & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{E_{12}(-\frac{1}{\alpha-1})} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{\alpha(\alpha-1)} & \frac{1}{\alpha} & -\frac{1}{\alpha-1} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{\alpha} & -\frac{1}{\alpha} & 0 \end{array}\right) = (\,\mathbf{I_3}|\mathbf{A}(\alpha)^{-1}\,).$$

Se $\boxed{\alpha \notin \{0, 1\}}$ $\qquad \mathbf{A}(\alpha)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\alpha(\alpha-1)} & \frac{1}{\alpha} & -\frac{1}{\alpha-1} \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{\alpha} & -\frac{1}{\alpha} & 0 \end{pmatrix}.$

ESERCIZIO TIPO 6

Sia $\mathbf{A}(\alpha) = \begin{pmatrix} \alpha-1 & 3\alpha-3 & 2\alpha-2 \\ 0 & \alpha^2+4 & 0 \\ 2 & 6 & 2\alpha-6 \\ \alpha & 3\alpha+2 & \alpha+5 \end{pmatrix}$, dove $\alpha \in \mathbb{C}$.

(a) Per ogni $\alpha \notin \{1, 2i, -2i\}$ si trovi una decomposizione $\mathbf{A}(\alpha) = \mathbf{L}(\alpha)\mathbf{U}(\alpha)$, scrivendo anche $\mathbf{L}(\alpha)$ come prodotto di matrici elementari.

(b) Per ogni $\alpha \notin \{1, 2i, -2i\}$ si trovi una decomposizione a rango pieno $\mathbf{A}(\alpha) = \mathbf{L_0}(\alpha)\mathbf{U_0}(\alpha)$.

$$\mathbf{A}(\alpha) = \begin{pmatrix} \boxed{\alpha-1} & 3\alpha-3 & 2\alpha-2 \\ \boxed{0} & \alpha^2+4 & 0 \\ \boxed{2} & 6 & 2\alpha-6 \\ \boxed{\alpha} & 3\alpha+2 & \alpha+5 \end{pmatrix} \xrightarrow[E_{41}(-\alpha)E_{31}(-2)E_1(\frac{1}{\alpha-1}) \quad \boxed{\alpha \neq 1}]{}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & \boxed{\alpha^2+4} & 0 \\ 0 & \boxed{0} & 2\alpha-10 \\ 0 & \boxed{2} & 5-\alpha \end{pmatrix} \xrightarrow[E_{42}(-2)E_2(\frac{1}{\alpha^2+4}) \quad \boxed{\alpha \notin \{2i, -2i\}}]{}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2\alpha-10 \\ 0 & 0 & 5-\alpha \end{pmatrix} = \mathbf{B}(\alpha)$$

$\boxed{1^o CASO}$ $\alpha \neq 5$ (nonchè $\alpha \neq 1, 2i, -2i$)

$$\mathbf{B}(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{2\alpha-10} \\ 0 & 0 & \boxed{5-\alpha} \end{pmatrix} \xrightarrow[E_{43}(-5+\alpha)E_3(\frac{1}{2\alpha-10})]{} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{U}(\alpha)$$

$$\mathbf{L}(\alpha) = \begin{pmatrix} \boxed{\alpha-1} & 0 & 0 & 0 \\ \boxed{0} & \boxed{\alpha^2+4} & 0 & 0 \\ \boxed{2} & \boxed{0} & \boxed{2\alpha-10} & 0 \\ \boxed{\alpha} & \boxed{2} & \boxed{5-\alpha} & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \mathbf{E_1}(\alpha-1)\mathbf{E_{31}}(2)\mathbf{E_{41}}(\alpha)\mathbf{E_2}(\alpha^2+4)\mathbf{E_{42}}(2)\mathbf{E_3}(2\alpha-10)\mathbf{E_{43}}(5-\alpha)$$

$\boxed{2^o CASO}$ $\alpha = 5$

$$\mathbf{B(5)} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{U(5)}$$

$$\mathbf{L(5)} = \begin{pmatrix} \boxed{4} & 0 & 0 & 0 \\ \boxed{0} & \boxed{29} & 0 & 0 \\ \boxed{2} & \boxed{0} & 1 & 0 \\ \boxed{5} & \boxed{2} & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{E_1}(4)\mathbf{E_{31}}(2)\mathbf{E_{41}}(5)\mathbf{E_2}(29)\mathbf{E_{42}}(2)$$

$\boxed{N.B.}$ Se $\alpha \in \{1, 2i, -2i\}$ non è possibile trovare una forma ridotta di Gauss di $\mathbf{A}(\alpha)$ senza fare scambi di righe, quindi $\mathbf{A}(\alpha)$ **NON** ha una decomposizione $\mathbf{L}(\alpha)\mathbf{U}(\alpha)$.

Per ogni $\alpha \notin \{5, 1, 2i, -2i\}$, si ha una decomposizione a rango pieno $\mathbf{A}(\alpha) = \mathbf{L_0}(\alpha)\mathbf{U_0}(\alpha)$ prendendo

$$\mathbf{U_0}(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ e } \mathbf{L_0}(\alpha) = \begin{pmatrix} \alpha - 1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha^2 + 4 & 0 \\ 2 & 0 & 2\alpha - 10 \\ \alpha & 2 & 5 - \alpha \end{pmatrix};$$

per $\alpha = 5$ si ha una decomposizione a rango pieno $\mathbf{A(5)} = \mathbf{L_0(5)U_0(5)}$ prendendo

$$\mathbf{U_0(5)} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ e } \mathbf{L_0(5)} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 29 \\ 2 & 0 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}.$$

ESERCIZIO TIPO 7

Sia $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -4 \\ -2 & -6 & -10 \\ 1 & 3 & 6 \\ 1 & -4 & 10 \end{pmatrix}$.

Si trovino una decomposizione $\mathbf{A} = \mathbf{P}^T\mathbf{LU}$ ed una decomposizione a rango pieno per $\mathbf{A}$.

Applicando l'algoritmo di Gauss ad A si ottiene:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -4 \\ -2 & -6 & -10 \\ 1 & 3 & 6 \\ 1 & -4 & 10 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{13}} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 \\ -2 & -6 & -10 \\ 0 & 2 & -4 \\ 1 & -4 & 10 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{41}(1)E_{21}(2)} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & -7 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{23}}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & -7 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{42}(7)E_2(\frac{1}{2})} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -10 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{43}(10)E_3(\frac{1}{2})} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Sia

$$\mathbf{P} = \mathbf{E_{23}E_{13}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Allora

$$\mathbf{PA} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 & -4 \\ -2 & -6 & -10 \\ 1 & 3 & 6 \\ 1 & -4 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 0 & 2 & -4 \\ -2 & -6 & -10 \\ 1 & -4 & 10 \end{pmatrix}.$$

Applicando l'algoritmo di Gauss senza scambi di righe a $\mathbf{PA}$ otteniamo una decomposizione $\mathbf{LU}$ per $\mathbf{PA}$:

$$\mathbf{PA} = \begin{pmatrix} \boxed{1} & 3 & 6 \\ \boxed{0} & 2 & -4 \\ \boxed{-2} & -6 & -10 \\ \boxed{1} & -4 & 10 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{41}(-1)E_{31}(2)} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 0 & \boxed{2} & -4 \\ 0 & \boxed{0} & 2 \\ 0 & \boxed{-7} & 4 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\xrightarrow{E_{42}(7)E_2(\frac{1}{2})} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & \boxed{2} \\ 0 & 0 & \boxed{-10} \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{43}(-10)E_3(\frac{1}{2})} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{U},$$

ed $\mathbf{L} = \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 & 0 \\ \boxed{0} & \boxed{2} & 0 & 0 \\ \boxed{-2} & \boxed{0} & \boxed{2} & 0 \\ \boxed{1} & \boxed{-7} & \boxed{-10} & 1 \end{pmatrix}$.

Dunque $\mathbf{A} = \mathbf{P}^T\mathbf{LU}$ dove

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{L} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & -7 & -10 & 1 \end{pmatrix} \text{ e } \mathbf{U} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

SI NOTI:

$\boxed{1}$ **P** ha

la 3^a riga di $\mathbf{I_4}$ in 1^a posizione (procedendo dall'alto verso il basso)

la 1^a riga di $\mathbf{I_4}$ in 2^a posizione

la 2^a riga di $\mathbf{I_4}$ in 3^a posizione

la 4^a riga di $\mathbf{I_4}$ in 4^a posizione.

Invertendo le righe con le posizioni, la matrice che ha

la 1^a riga di $\mathbf{I_4}$ in 3^a posizione

la 2^a riga di $\mathbf{I_4}$ in 1^a posizione

la 3^a riga di $\mathbf{I_4}$ in 2^a posizione

la 4^a riga di $\mathbf{I_4}$ in 4^a posizione

è quindi

$$\mathbf{P}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad (= \mathbf{P}^T).$$

(d'altronde da $\mathbf{P} = \mathbf{E_{23}E_{13}}$ segue

$$\mathbf{P}^{-1} = (\mathbf{E_{23}E_{13}})^{-1} = \mathbf{E_{13}}^{-1}\mathbf{E_{23}}^{-1} = \mathbf{E_{13}E_{23}} = \mathbf{E_{13}}^T\mathbf{E_{23}}^T = (\mathbf{E_{23}E_{13}})^T = \mathbf{P}^T.)$$

$\boxed{2}$

$$\mathbf{H} = \mathbf{E_{13}E_{23}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \neq \mathbf{P}$$

e facendo un'eliminazione di Gauss su **HA** si ottiene:

$$\mathbf{HA} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 & -4 \\ -2 & -6 & -10 \\ 1 & 3 & 6 \\ 1 & -4 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -6 & -10 \\ 1 & 3 & 6 \\ 0 & 2 & -4 \\ 1 & -4 & 10 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{41}(-1)E_{21}(-1)E_1(-\frac{1}{2})} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & -7 & 5 \end{pmatrix}.$$

Dunque **HA** non ha una decomposizione **LU**.

Quindi è fondamentale, per costruire **P**, l'ordine in cui si moltiplicano le matrici corrispondenti agli scambi di righe effettuati (si parte dall'ultimo procedendo a ritroso).

$\boxed{3}$ Dall'eliminazione di Gauss fatta su $\mathbf{A}$ si ottiene che

$$\mathbf{E_{43}}(10)\mathbf{E_3}(\frac{1}{2})\mathbf{E_{42}}(7)\mathbf{E_2}(\frac{1}{2})\mathbf{E_{23}}\mathbf{E_{41}}(1)\mathbf{E_{21}}(2)\mathbf{E_{13}}\mathbf{A} = \mathbf{U}.$$

Quindi la tentazione di intuire $\mathbf{L}$ direttamente da questa eliminazione di Gauss è fuorviante: posto

$$\mathbf{B} = \mathbf{E_{43}}(10)\mathbf{E_3}(\frac{1}{2})\mathbf{E_{42}}(7)\mathbf{E_2}(\frac{1}{2})\mathbf{E_{41}}(1)\mathbf{E_{21}}(2)$$

il prodotto delle matrici elementari diverse da quelle corrispondenti agli scambi di righe, si ha che $\mathbf{BPA} \neq \mathbf{U}$, e quindi $\mathbf{PA} \neq \mathbf{B}^{-1}\mathbf{U}$, ossia $\mathbf{B}^{-1}$ non è un buon candidato per $\mathbf{L}$.

$\boxed{4}$ Mostriamo che esistono una forma ridotta di Gauss $\mathbf{U}^*$ per $\mathbf{A}$, una matrice di permutazione $\mathbf{P}^*$ ed una matrice triangolare inferiore non singolare $\mathbf{L}^*$ tali che

$$\mathbf{U}^* \neq \mathbf{U}, \qquad \mathbf{P}^* \neq \mathbf{P}, \qquad \mathbf{L}^* \neq \mathbf{L}, \qquad \text{ma } \mathbf{A} = (\mathbf{P}^*)^T\mathbf{L}^*\mathbf{U}^* = \mathbf{P}^T\mathbf{L}\mathbf{U},$$

ossia la decomposizione $\mathbf{A} = \mathbf{P}^T\mathbf{L}\mathbf{U}$ non è unica.

Facciamo una eliminazione di Gauss su $\mathbf{A}$ scegliendo degli scambi di riga diverse da quelli scelti nell'eliminazione che abbiamo fatto precedentemente.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -4 \\ -2 & -6 & -10 \\ 1 & 3 & 6 \\ 1 & -4 & 10 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{14}} \begin{pmatrix} 1 & -4 & 10 \\ -2 & -6 & -10 \\ 1 & 3 & 6 \\ 0 & 2 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{31}(-1)E_{21}(2)} \begin{pmatrix} 1 & -4 & 10 \\ 0 & -14 & 10 \\ 0 & 7 & -4 \\ 0 & 2 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{32}(-7)E_2(-\frac{1}{14})}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & -4 & 10 \\ 0 & 1 & -\frac{5}{7} \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{42}(-2)} \begin{pmatrix} 1 & -4 & 10 \\ 0 & 1 & -\frac{5}{7} \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{18}{7} \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{43}(\frac{18}{7})} \begin{pmatrix} 1 & -4 & 10 \\ 0 & 1 & -\frac{5}{7} \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Sia $\mathbf{P}^* = \mathbf{E_{14}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Allora

$$\mathbf{P}^*\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 & -4 \\ -2 & -6 & -10 \\ 1 & 3 & 6 \\ 1 & -4 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{1} & -4 & 10 \\ \boxed{-2} & -6 & -10 \\ \boxed{1} & 3 & 6 \\ \boxed{0} & 2 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{31}(-1)E_{21}(2)}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & -4 & 10 \\ 0 & \boxed{-14} & 10 \\ 0 & \boxed{7} & -4 \\ 0 & \boxed{2} & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{42}(-2)E_{32}(-7)E_2(-\frac{1}{14})} \begin{pmatrix} 1 & -4 & 10 \\ 0 & 1 & -\frac{5}{7} \\ 0 & 0 & \boxed{1} \\ 0 & 0 & \boxed{-\frac{18}{7}} \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{43}(\frac{18}{7})} \begin{pmatrix} 1 & -4 & 10 \\ 0 & 1 & -\frac{5}{7} \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{U}^*.$$

Quindi $\mathbf{A} = (\mathbf{P}^*)^T\mathbf{L}^*\mathbf{U}^*$ con

$$\mathbf{P}^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \neq \mathbf{P}, \quad \mathbf{U}^* = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 10 \\ 0 & 1 & -\frac{5}{7} \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \neq \mathbf{U}, \quad \mathbf{L}^* = \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 & 0 \\ \boxed{-2} & \boxed{-14} & 0 & 0 \\ \boxed{1} & \boxed{7} & \boxed{1} & 0 \\ \boxed{0} & \boxed{2} & \boxed{-\dfrac{18}{7}} & 1 \end{pmatrix} \neq \mathbf{L}.$$

Per trovare una decomposizione a rango pieno per $\mathbf{A}$, partiamo, ad esempio, dalla decomposizione $\mathbf{A} = \mathbf{P}^T\mathbf{L}\mathbf{U}$ dove

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{L} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & -7 & -10 & 1 \end{pmatrix} \text{ e } \mathbf{U} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Calcoliamo $\mathbf{P}^T\mathbf{L}$:

$$\mathbf{P}^T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{P}^T\mathbf{L} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & -7 & -10 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -7 & -10 & 1 \end{pmatrix} =: \mathbf{B}$$

Allora $\mathbf{A} = \mathbf{B}\mathbf{U}$ e si ottiene una decomposizione a rango pieno $\mathbf{A} = \mathbf{B}_0\mathbf{U}_0$ prendendo

$$\mathbf{U}_0 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ e } \mathbf{B}_0 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -7 & -10 \end{pmatrix}$$

ossia prendendo come $\mathbf{U}_0$ la matrice che si ottiene da $\mathbf{U}$ togliendo le ultime $m-k$ righe, dove $m = 4 =$ numero delle righe di $\mathbf{U}$ e $k = 3 =$ rango di $\mathbf{U}$ (e quindi anche $k =$ rango di $\mathbf{A}$), e prendendo come $\mathbf{B}_0$ la matrice che si ottiene da $\mathbf{B}$ togliendo le ultime $m-k$ colonne (ossia le colonne in posizioni corrispondenti alle ultime righe nulle tolte da $\mathbf{U}$).

ESERCIZIO TIPO 8

Si dica se $\mathcal{S} = \left\{ \mathbf{A}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \mathbf{A}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}; \mathbf{A}_3 = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}; \mathbf{A}_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ è un insieme di generatori di $M_2(\mathbb{R})$.

Per sapere se $\mathcal{S}$ è o meno un insieme di generatori di $M_2(\mathbb{R})$ dobbiamo verificare se per ogni $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$ esistano o meno $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 \in \mathbb{R}$ tali che

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \alpha_1 \mathbf{A}_1 + \alpha_2 \mathbf{A}_2 + \alpha_3 \mathbf{A}_3 + \alpha_4 \mathbf{A}_4 =$$

$$= \alpha_1 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} + \alpha_4 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3 & \alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 \\ 2\alpha_2 + 2\alpha_3 & \alpha_4 \end{pmatrix}$$

ossia se il sistema lineare

$$(*) \qquad \begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3 = a \\ \alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 = b \\ 2\alpha_2 + 2\alpha_3 = c \\ \alpha_4 = d \end{cases}$$

nelle incognite $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ abbia o meno soluzione **per ogni** $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

Se $(*)$ avesse soluzione **per ogni** $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ allora $\mathcal{S}$ sarebbe un insieme di generatori di $M_2(\mathbb{R})$, in caso contrario (ossia se esistono $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ per cui $(*)$ non ha soluzione), no.

Facendo una eliminazione di Gauss sulla matrice aumentata del sistema si ottiene

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 & a \\ 1 & 2 & 3 & 0 & b \\ 0 & 2 & 2 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 & 1 & d \end{array}\right) \xrightarrow[E_{21}(-1)]{} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 & a \\ 0 & 1 & 1 & 0 & b-a \\ 0 & 2 & 2 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 & 1 & d \end{array}\right) \rightarrow$$

$$\xrightarrow[E_{32}(-2)]{} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 & a \\ 0 & 1 & 1 & 0 & b-a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c-2b+2a \\ 0 & 0 & 0 & 1 & d \end{array}\right) \xrightarrow[E_{43}]{} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 & a \\ 0 & 1 & 1 & 0 & b-a \\ 0 & 0 & 0 & 1 & d \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c-2b+2a \end{array}\right) = (\mathbf{U} \mid \mathbf{d}).$$

Poichè esistono $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ per cui $\mathbf{d}$ è dominante (ad esempio si prendano $a = b = d = 0$ e $c = 1$), allora $\mathcal{S}$ non è un insieme di generatori di $M_2(\mathbb{R})$

(in altre parole: poichè esistono delle matrici di $M_2(\mathbb{R})$ che **NON** si possono esprimere come combinazione lineare degli elementi di $\mathcal{S}$, ad esempio la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, allora $\mathcal{S}$ **NON** è un insieme di generatori di $M_2(\mathbb{R})$).

ESERCIZIO TIPO 9

Siano $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Si dica se $\mathcal{S} = \{\mathbf{v}_1; \mathbf{v}_2; \mathbf{v}_3\} \subset \mathbb{C}^3$ è linearmente dipendente o linearmente indipendente.

Siano $\alpha, \beta, \delta \in \mathbb{C}$ tali che

$$(*) \qquad \mathbf{0} = \alpha \mathbf{v}_1 + \beta \mathbf{v}_2 + \delta \mathbf{v}_3 = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + \delta \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha + 2\beta + \delta \\ \beta + \delta \\ 3\alpha + 4\beta + \delta \end{pmatrix}.$$

Allora $(*)$ equivale a (1) $\begin{cases} \alpha + 2\beta + \delta & = 0 \\ \beta + \delta & = 0 \\ 3\alpha + 4\beta + \delta & = 0 \end{cases}$.

(1) è un sistema lineare nelle incognite α, β, δ.

(1) ha sempre la soluzione nulla $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ (ossia $\alpha = \beta = \delta = 0$).

Se essa dovesse essere l'unica soluzione di (1) (quindi se (1) avesse un'unica soluzione) allora $\mathcal{S}$ sarebbe L.I., altrimenti, se (1) ha anche una soluzione non nulla (quindi se (1) ha piú di una soluzione) allora $\mathcal{S}$ è L.D.

Vediamo allora quante soluzioni ha (1). Facendo una eliminazione di Gauss sulla sua matrice aumentata si ottiene

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[E_{31}(-3)]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[E_{32}(2)]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) = (\mathbf{U} \mid \mathbf{0})$$

L'ultima colonna di $(\mathbf{U} \mid \mathbf{0})$, ossia $\mathbf{0}$, è libera, per cui (1) ha, come avevamo già osservato, soluzioni.

Poichè non tutte le colonne di $\mathbf{U}$ sono dominanti, il sistema (1) non ha un'unica soluzione, quindi $\mathcal{S}$ è L.D.

Volendo risolvere (1), si ha che (1) è equivalente ad (1′) $\begin{cases} \alpha + 2\beta + \delta & = 0 \\ \beta + \delta & = 0 \end{cases}$

Scegliendo come parametro la variabile corrispondente alla colonna libera di $\mathbf{U}$ (la 3^a), con la sostituzione all'indietro si ottiene $\begin{cases} \delta = k \\ \beta = -\delta = -k \\ \alpha = -2\beta - \delta = -2(-k) - k = k \end{cases}$

Il sistema (1′) ha ∞^1 soluzioni: tutti gli elementi dell'insieme $\left\{ \begin{pmatrix} k \\ -k \\ k \end{pmatrix} |k \in \mathbb{C} \right\}$.

Prendendo ad esempio $k = 1$ si ottiene $\alpha = 1 = \delta$ e $\beta = -1$:

$$\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3 = \mathbf{0}$$

è una combinazione lineare nulla di $\{\mathbf{v}_1; \mathbf{v}_2; \mathbf{v}_3\}$ con coefficienti non tutti nulli.

ESERCIZIO TIPO 10

Sia W l'insieme delle matrici 2×2 reali triangolari superiori. L'insieme

$$\mathcal{S} = \left\{ \mathbf{C}_1 = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}; \mathbf{C}_2 = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \mathbf{C}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \mathbf{C}_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \mathbf{C}_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \mathbf{C}_6 = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} \right\}$$

è un insieme di generatori di W. Si trovi una base di W contenuta in $\mathcal{S}$.

"Restringiamo" un insieme di generatori di W.

1^0 **passaggio**. Esistono in $\mathcal{S}$ vettori che siano combinazioni lineari degli altri vettori di $\mathcal{S}$?

$\mathbf{C}_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ è senz'altro combinazione degli altri:

$$\mathbf{C}_4 = \mathbf{O} = 0\mathbf{C}_1 + 0\mathbf{C}_2 + 0\mathbf{C}_3 + 0\mathbf{C}_5 + 0\mathbf{C}_6,$$

per cui togliamo subito $\mathbf{C}_4$ (**togliamo** comunque subito **tutti gli eventuali vettori di $\mathcal{S}$ che siano nulli**), **e poniamo**

$$\mathcal{S}_1 = \left\{ \mathbf{C}_1 = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}; \mathbf{C}_2 = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \mathbf{C}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \mathbf{C}_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \mathbf{C}_6 = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} \right\}.$$

2^0 **passaggio**. $\mathcal{S}_1$ è ancora un insieme di generatori di W. Esistono in $\mathcal{S}_1$ vettori che siano combinazioni lineari degli altri vettori di $\mathcal{S}_1$? Poichè

$$\mathbf{C}_1 = -\frac{1}{2}\mathbf{C}_6 = 0\mathbf{C}_2 + 0\mathbf{C}_3 + 0\mathbf{C}_5 - \frac{1}{2}\mathbf{C}_6$$

ma anche

$$\mathbf{C}_6 = -2\mathbf{C}_1 = -2\mathbf{C}_1 + 0\mathbf{C}_2 + 0\mathbf{C}_3 + 0\mathbf{C}_5$$

possiamo togliere da $\mathcal{S}_1$ il vettore $\mathbf{C}_1$, oppure possiamo togliere da $\mathcal{S}_1$ il vettore $\mathbf{C}_6$, ottenendo ancora un insieme di generatori di W. Dunque, **guardiamo se tra i vettori di $\mathcal{S}_1$ ci siano coppie di vettori di cui l'uno è multiplo dell'altro, e per ciascuna di queste eventuali coppie togliamo uno dei due vettori**. In questo caso abbiamo individuato la coppia $\mathbf{C}_1, \mathbf{C}_6$ e scegliamo di togliere $\mathbf{C}_1$.

Poniamo

$$\mathcal{S}_2 = \left\{ \mathbf{C}_2 = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \mathbf{C}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \mathbf{C}_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \mathbf{C}_6 = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} \right\}.$$

3^0 **passaggio**. $\mathcal{S}_2$ è ancora un insieme di generatori di W. Esistono in $\mathcal{S}_2$ vettori che siano combinazioni lineari degli altri vettori di $\mathcal{S}_2$?

Sia $\alpha_1\mathbf{C}_2 + \alpha_2\mathbf{C}_3 + \alpha_3\mathbf{C}_5 + \alpha_4\mathbf{C}_6 = \mathbf{O}$ una combinazione lineare nulla dei vettori di $\mathcal{S}_2$. Allora da

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \alpha_1 \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \alpha_4 \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + 2\alpha_4 & 3\alpha_1 + \alpha_2 - 4\alpha_4 \\ 0 & \alpha_3 - 4\alpha_4 \end{pmatrix}$$

si ottiene il sistema lineare, nelle incognite $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$

$$\begin{cases} 2\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + 2\alpha_4 = 0 \\ 3\alpha_1 + \alpha_2 - 4\alpha_4 = 0 \\ \alpha_3 - 4\alpha_4 = 0 \end{cases}$$

Facendo una E.G. sulla sua matrice aumentata si ha:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{E_{21}(-3)E_1(\frac{1}{2})} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & -7 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{E_2(-2)} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 14 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & 0 \end{array}\right),$$

per cui il sistema è equivalente al sistema

$$(*) \qquad \begin{cases} \alpha_1 + \frac{1}{2}\alpha_2 + \frac{1}{2}\alpha_3 + \alpha_4 = 0 \\ \alpha_2 + 3\alpha_3 + 14\alpha_4 = 0 \\ \alpha_3 - 4\alpha_4 = 0 \end{cases}$$

il cui insieme delle soluzioni è

$$\left\{ \begin{pmatrix} 10h \\ -26h \\ 4h \\ h \end{pmatrix} | h \in \mathbb{R} \right\}$$

Prendendo una sua soluzione non nulla, ad esempio $\begin{pmatrix} 10 \\ -26 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ (si ponga $h = 1$), si ottiene

$$10\mathbf{C}_2 - 26\mathbf{C}_3 + 4\mathbf{C}_5 + \mathbf{C}_6 = \mathbf{O},$$

per cui $\mathbf{C}_2$,$\mathbf{C}_3$, $\mathbf{C}_5$ e $\mathbf{C}_6$ sono combinazioni lineari degli altri elementi di $\mathcal{S}_2$ e ciascuno di loro puó essere scelto come elemento da eliminare da $\mathcal{S}_2$.

Scegliamo di togliere da $\mathcal{S}_2$ la matrice $\mathbf{C}_2$ (combinazione lineare degli altri elementi di $\mathcal{S}_2$) e poniamo

$$\mathcal{S}_3 = \left\{ \mathbf{C}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \mathbf{C}_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \mathbf{C}_6 = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} \right\}$$

4^0 **passaggio**. $\mathcal{S}_3$ è ancora un insieme di generatori di W. Esistono in $\mathcal{S}_3$ vettori che siano combinazioni lineari degli altri vettori di $\mathcal{S}_3$?

Sia $\alpha_1\mathbf{C}_3 + \alpha_2\mathbf{C}_5 + \alpha_3\mathbf{C}_6 = \mathbf{O}$ una combinazione lineare nulla dei vettori di $\mathcal{S}_3$. Allora da

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \alpha_1 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3 & \alpha_1 - 4\alpha_3 \\ 0 & \alpha_2 - 4\alpha_3 \end{pmatrix}$$

si ottiene il sistema lineare, nelle incognite $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3 = 0 \\ \alpha_1 - 4\alpha_3 = 0 \\ \alpha_2 - 4\alpha_3 = 0 \end{cases}$$

Facendo una E.G. sulla sua matrice aumentata si ottiene:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & | & 0 \\ 1 & 0 & -4 & | & 0 \\ 0 & 1 & -4 & | & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{21}(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & | & 0 \\ 0 & -1 & -6 & | & 0 \\ 0 & 1 & -4 & | & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{32}(-1)E_2(-1)}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & | & 0 \\ 0 & 1 & 6 & | & 0 \\ 0 & 0 & -10 & | & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_3(-\frac{1}{10})} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & | & 0 \\ 0 & 1 & 6 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 \end{pmatrix}$$

L'unica soluzione del sistema è quella nulla, per cui $\mathcal{S}_3$ è linearmente indipendente, ed è una base di W contenuta in $\mathcal{S}$.

ESERCIZIO TIPO 11

Si trovi una base dello spazio nullo $N(\mathbf{A})$ della matrice $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

Poichè $N(\mathbf{A}) = N(\mathbf{U})$ per ogni forma ridotta di Gauss $\mathbf{U}$ di $\mathbf{A}$, troviamo una base dello spazio nullo di una forma ridotta di Gauss per $\mathbf{A}$.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{21}(-2)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{U}$$

$\mathbf{U}$ è una forma ridotta di Gauss per $\mathbf{A}$. Per il teorema "nullità + rango"si ha

$$\text{dim N}(\mathbf{U}) = (\text{numero delle colonne di } \mathbf{U} \text{ - rk}(\mathbf{U})) = 4 - 2 = 2.$$

Poichè

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in N(\mathbf{U}) \Longleftrightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

scegliendo come parametri le variabili corrispondenti alle colonne libere di $\mathbf{U}$ (la 2^a e la 4^a) con la sostituzione all'indietro si ottiene

$$\begin{cases} x_2 & = & h & & \\ x_4 & = & k & & \\ x_3 & = & -x_4 & = & -k \\ x_1 & = & -2x_2 - x_3 & = & -2h - (-k) = \quad -2h + k \end{cases}$$

Quindi

$$N(\mathbf{A}) = N(\mathbf{U}) = \left\{ \begin{pmatrix} -2h + k \\ h \\ -k \\ k \end{pmatrix} | h, k \in \mathbb{C} \right\}$$

e chiamando $\mathbf{v}_1$ l'elemento di $N(\mathbf{A})$ che si ottiene ponendo $h = 1$ e $k = 0$ e $\mathbf{v}_2$ l'elemento di $N(\mathbf{A})$ che si ottiene ponendo $h = 0$ e $k = 1$, si ha che una base di $N(\mathbf{A})$ è

$$\left\{ \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

ESERCIZIO TIPO 12

Sia $\mathbf{A}_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & i & 0 \\ 1 & \alpha+2i & 0 \\ 2 & 2i & \alpha^2+1 \end{pmatrix}$, dove $\alpha \in \mathbb{C}$.

Per ogni $\alpha \in \mathbb{C}$ si dica qual è $rk(\mathbf{A}_\alpha)$ e si trovino una base $\mathcal{B}_\alpha$ di $C(\mathbf{A}_\alpha)$ ed una base $\mathcal{D}_\alpha$ di $R(\mathbf{A}_\alpha)$.

$$\mathbf{A}_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & i & 0 \\ 1 & \alpha+2i & 0 \\ 2 & 2i & \alpha^2+1 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{31}(-2)E_{21}(-1)} \begin{pmatrix} 1 & i & 0 \\ 0 & \alpha+i & 0 \\ 0 & 0 & \alpha^2+1 \end{pmatrix} = \mathbf{B}_\alpha$$

$\boxed{1^o CASO}$ $\alpha \neq -i$ $\quad \mathbf{B}_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & i & 0 \\ 0 & \alpha+i & 0 \\ 0 & 0 & \alpha^2+1 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_2(\frac{1}{\alpha+i})} \begin{pmatrix} 1 & i & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha^2+1 \end{pmatrix} = \mathbf{C}_\alpha$

$\boxed{1^o Sottocaso}$ $\alpha \neq -i, i:$ $\quad \mathbf{C}_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & i & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha^2+1 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_3(\frac{1}{\alpha^2+1})} \begin{pmatrix} 1 & i & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{U}_\alpha$

$$rk(\mathbf{A}_\alpha) = 3, \quad \mathcal{D}_\alpha = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, \quad \mathcal{B}_\alpha = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} i \\ \alpha+2i \\ 2i \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \alpha^2+1 \end{pmatrix} \right\}$$

$\boxed{2^o Sottocaso}$ $\alpha = i:$ $\quad \mathbf{C}_i = \begin{pmatrix} 1 & i & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{U}_i$

$$rk(\mathbf{A}_i) = 2, \quad \mathcal{D}_i = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}, \quad \mathcal{B}_i = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} i \\ 3i \\ 2i \end{pmatrix} \right\}$$

$\boxed{2^o CASO}$ $\alpha = -i : \mathbf{B}_{-i} = \begin{pmatrix} 1 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{U}_{-i}, rk(\mathbf{A}_{-i}) = 1, \mathcal{D}_{-i} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ 0 \end{pmatrix} \right\}, \mathcal{B}_{-i} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$

ESERCIZIO TIPO 13 Si consideri l'applicazione lineare $f : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^3$ definita da

$$f(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 4a+b \\ 3a \\ a-2b \end{pmatrix}.$$

Si determini la matrice $\mathbf{A}$ associata ad f rispetto alle basi ordinate

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix} \right\} \quad \text{e} \quad \mathcal{D} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

su dominio e codominio rispettivamente.

La matrice che cerchiamo è $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} C_{\mathcal{D}}(f(\begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix})) & C_{\mathcal{D}}(f(\begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix})) \end{pmatrix}$. Poichè

$$f(\begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}) \underset{\boxed{a=2,b=6}}{\overset{\uparrow}{=}} \begin{pmatrix} 14 \\ 6 \\ -10 \end{pmatrix}, \qquad f(\begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}) \underset{\boxed{a=2,b=-4}}{\overset{\uparrow}{=}} \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 10 \end{pmatrix},$$

allora $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} C_{\mathcal{D}}(\begin{pmatrix} 14 \\ 6 \\ -10 \end{pmatrix}) & C_{\mathcal{D}}(\begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 10 \end{pmatrix}) \end{pmatrix}$. Piuttosto che calcolare separatamente $C_{\mathcal{D}}(\begin{pmatrix} 8 \\ 3 \\ -13 \end{pmatrix})$ e $C_{\mathcal{D}}(\begin{pmatrix} -1 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix})$, e calcoliamo $C_{\mathcal{D}}(\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix})$ per un generico vettore $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$, e specializziamo la formula ottenuta ai due diversi vettori $\begin{pmatrix} 14 \\ 6 \\ -10 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 10 \end{pmatrix}$. Poichè

$$C_{\mathcal{D}}(\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \delta \end{pmatrix} \quad | \quad \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \delta \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha+\delta \\ 3\beta \\ \alpha-\delta \end{pmatrix}$$

allora

$$\begin{cases} \alpha+\delta = a \\ 3\beta = b \\ \alpha-\delta = c \end{cases} \implies \begin{cases} \alpha = (a+c)/2 \\ \beta = b/3 \\ \delta = (a-c)/2 \end{cases} \implies C_{\mathcal{D}}(\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} (a+c)/2 \\ b/3 \\ (a-c)/2 \end{pmatrix}.$$

Ponendo $a = 14$, $b = 6$ e $c = -10$ otteniamo $C_{\mathcal{D}}(\begin{pmatrix} 14 \\ 6 \\ -10 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 12 \end{pmatrix}$; ponendo $a = 4$, $b = 6$ e $c = 10$ otteniamo $C_{\mathcal{D}}(\begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 10 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$. Quindi

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 2 & 2 \\ 12 & -3 \end{pmatrix}.$$

ESERCIZIO TIPO 14

Si calcoli la matrice di passaggio $M_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{B}'}$ da $\mathcal{B}'$ a $\mathcal{B}$, dove $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$ sono le seguenti basi ordinate di $\mathbb{R}^3$:

$$\mathcal{B}=\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix};\begin{pmatrix}0\\3\\0\end{pmatrix};\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}\right\},\qquad \mathcal{B}'=\left\{\begin{pmatrix}3\\0\\1\end{pmatrix};\begin{pmatrix}1\\3\\1\end{pmatrix};\begin{pmatrix}5\\0\\1\end{pmatrix}\right\}.$$

La matrice di passaggio $M_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{B}'}$ da $\mathcal{B}'$ a $\mathcal{B}$ è

$$M_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{B}'}=\left(C_{\mathcal{B}}(\begin{pmatrix}3\\0\\1\end{pmatrix})\quad C_{\mathcal{B}}(\begin{pmatrix}1\\3\\1\end{pmatrix})\quad C_{\mathcal{B}}(\begin{pmatrix}5\\0\\1\end{pmatrix})\right).$$

Nell'ESERCIZIO TIPO 13 abbiamo calcolato

$$C_{\mathcal{B}}(\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix})=\begin{pmatrix}(a+c)/2\\b/3\\(a-c)/2\end{pmatrix}.$$

Specializzando la formula ottenuta ai tre diversi vettori $\begin{pmatrix}3\\0\\1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1\\3\\1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}5\\0\\1\end{pmatrix}$ otteniamo

$$C_{\mathcal{B}}(\begin{pmatrix}3\\0\\1\end{pmatrix})=\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix},\quad C_{\mathcal{B}}(\begin{pmatrix}1\\3\\1\end{pmatrix})=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\quad C_{\mathcal{B}}(\begin{pmatrix}5\\0\\1\end{pmatrix})=\begin{pmatrix}3\\0\\2\end{pmatrix}.$$

Dunque

$$M_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{B}'}=\begin{pmatrix}2&1&3\\0&1&0\\1&0&2\end{pmatrix}.$$

ESERCIZIO TIPO 15

Sia $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 2 & 2 \\ 12 & -3 \end{pmatrix}$ la matrice associata ad un'applicazione lineare $f : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^3$ rispetto alle basi ordinate

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix} \right\} \quad \text{e} \quad \mathcal{D} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

su dominio e codominio rispettivamente. Si determini la matrice $\mathbf{A}'$ associata ad f rispetto alle basi ordinate

$$\mathcal{B}' = \left\{ \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix} \right\} \quad \text{e} \quad \mathcal{D}' = \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

su dominio e codominio rispettivamente.

La matrice che cerchiamo è

$$\mathbf{A}' = \mathbf{M}^{-1}_{\mathcal{D}\leftarrow\mathcal{D}'}\mathbf{A}\mathbf{M}_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{B}'}$$

dove $\mathbf{M}_{\mathcal{D}\leftarrow\mathcal{D}'}$ è la matrice di passaggio da $\mathcal{D}'$ a $\mathcal{D}$, e $\mathbf{M}_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{B}'}$ è la matrice di passaggio da $\mathcal{B}'$ a $\mathcal{B}$.

Nell'ESERCIZIO TIPO 14 abbiamo calcolato $\mathbf{M}_{\mathcal{D}\leftarrow\mathcal{D}'} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Calcoliamo la sua inversa:

$$(\,\mathbf{M}_{\mathcal{D}\leftarrow\mathcal{D}'} \quad | \quad \mathbf{I}_3\,) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{E_{13}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \to$$

$$\xrightarrow{E_{31}(-2)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & -2 \end{array}\right) \xrightarrow{E_{32}(-1)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & -2 \end{array}\right) \xrightarrow{E_{3}(-1)}$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{E_{13}(-2)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 2 \end{array}\right) = (\,\mathbf{I}_3 \quad | \quad \mathbf{M}^{-1}_{\mathcal{D}\leftarrow\mathcal{D}'}\,).$$

$$\mathbf{M}_{\mathcal{D}'\leftarrow\mathcal{D}} = \mathbf{M}^{-1}_{\mathcal{D}\leftarrow\mathcal{D}'} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Calcoliamo

$$\mathbf{M}_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{B}'} = \left(C_{\mathcal{B}}(\begin{pmatrix} 6 \\ 8 \end{pmatrix}) \quad C_{\mathcal{B}}(\begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}) \right).$$

Calcoliamo $C_{\mathcal{B}}(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix})$ per un generico vettore $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2$, e specializziamo la formula ottenuta ai due diversi vettori $\begin{pmatrix} 6 \\ 8 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}$. Poichè

$$C_{\mathcal{B}}(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \quad | \quad \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\alpha + 2\beta \\ 6\alpha - 4\beta \end{pmatrix}$$

risolvendo il sistema lineare $\begin{cases} 2\alpha + 2\beta = a \\ 6\alpha - 4\beta = b \end{cases}$ (nelle incognite α e β)si ottiene

$$C_{\mathcal{B}}(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} \frac{2a+b}{10} \\ \frac{3a-b}{10} \end{pmatrix}.$$

Ponendo $a = 6$ e $b = 8$ otteniamo $C_{\mathcal{B}}(\begin{pmatrix} 6 \\ 8 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$; ponendo $a = 2$ e $b = -4$ otteniamo $C_{\mathcal{B}}(\begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.
Quindi

$$\mathbf{M}_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} C_{\mathcal{B}}(\begin{pmatrix} 6 \\ 8 \end{pmatrix}) & C_{\mathcal{B}}(\begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dunque

$$\mathbf{A}' = \mathbf{M}^{-1}_{\mathcal{D}\leftarrow\mathcal{D}'}\mathbf{A}\mathbf{M}_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 2 & 2 \\ 12 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -36 & 19 \\ 2 & 2 \\ 24 & -11 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -53 & 19 \\ 6 & 2 \\ 37 & -11 \end{pmatrix}.$$

ESERCIZIO TIPO 16

Si verifichi che $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ definita da $\phi(\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix}) = |a_0 + a_1| + |a_0 - a_1|$ è una norma.

$\boxed{1}$ $\phi(\mathbf{0}) = \phi(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}) = |0+0| + |0-0| = 0.$

Sia $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix}$. Poichè $\phi(\mathbf{v}) \geq 0$, per provare che

$$\mathbf{v} \neq \mathbf{0} \implies \phi(\mathbf{v}) > 0$$

basta provare che

$$\mathbf{v} \neq \mathbf{0} \implies \phi(\mathbf{v}) \neq 0,$$

ossia basta provare che

$$\phi(\mathbf{v}) = 0 \implies \mathbf{v} = \mathbf{0}.$$

Ora:

$$\left.\begin{array}{r} \phi(\mathbf{v}) = 0 \\ \mathbf{v} = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} \end{array}\right\} \implies \begin{cases} |a_0 + a_1| = 0 \\ |a_0 - a_1| = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} a_0 + a_1 = 0 \\ a_0 - a_1 = 0 \end{cases} \implies a_0 = a_1 = 0 \implies \mathbf{v} = \mathbf{0}.$$

$\boxed{2}$

$$\begin{aligned} \phi(\alpha\mathbf{v}) = \phi(\alpha \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix}) = \phi(\begin{pmatrix} \alpha a_0 \\ \alpha a_1 \end{pmatrix}) = |\alpha a_0 + \alpha a_1| + |\alpha a_0 - \alpha a_1| = \\ = |\alpha||a_0 + a_1| + |\alpha||a_0 - a_1| = |\alpha|(|a_0 + a_1| + |a_0 - a_1|) = |\alpha|\phi(\mathbf{v}). \end{aligned}$$

$\boxed{3}$ Siano $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix}$ e $\mathbf{w} = \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned} \phi(\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \phi(\begin{pmatrix} a_0 + b_0 \\ a_1 + b_1 \end{pmatrix}) = |(a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)| + |(a_0 + b_0) - (a_1 + b_1)| = \\ = |(a_0 + a_1) + (b_0 + b_1)| + |(a_0 - a_1) + (b_0 - b_1)| \leq \\ \leq |a_0 + a_1| + |b_0 + b_1| + |a_0 - a_1| + |b_0 - b_1| = \phi(\mathbf{v}) + \phi(\mathbf{w}). \end{aligned}$$

ESERCIZIO TIPO 17

Si verifichi che $(\cdot|\cdot): \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$ definita da

$$\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \Big| \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) = \overline{x}_1 y_1 + 2\overline{x}_2 y_2$$

è un prodotto interno.

$\boxed{1}$ Siano $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2$.

$$\overline{(\mathbf{y}|\mathbf{x})} \stackrel{?}{=} (\mathbf{x}|\mathbf{y})$$

$$\overline{(\mathbf{y}|\mathbf{x})} \quad = \quad \overline{\overline{y}_1 x_1 + 2\overline{y}_2 x_2} \quad = \quad y_1 \overline{x}_1 + 2 y_2 \overline{x}_2 \quad = \quad (\mathbf{x}|\mathbf{y}).$$

$\boxed{2}$ Siano $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$.

$$(\mathbf{x}|\alpha\mathbf{y} + \beta\mathbf{w}) \stackrel{?}{=} \alpha(\mathbf{x}|\mathbf{y}) + \beta(\mathbf{x}|\mathbf{w})$$

$$\begin{aligned}(\mathbf{x}|\alpha\mathbf{y} + \beta\mathbf{w}) &= \overline{x_1}(\alpha y_1 + \beta w_1) + 2\overline{x_2}(\alpha y_2 + \beta w_2) = \alpha \overline{x_1} y_1 + \beta \overline{x_1} w_1 + 2\alpha \overline{x_2} y_2 + 2\beta \overline{x_2} w_2 = \\ &= \alpha(\overline{x_1} y_1 + 2\overline{x_2} y_2) + \beta(\overline{x_1} w_1 + 2\overline{x_2} w_2) = \alpha(\mathbf{x}|\mathbf{y}) + \beta(\mathbf{x}|\mathbf{w}).\end{aligned}$$

$\boxed{3}$

$$\bullet \quad (\mathbf{0}|\mathbf{0}) \stackrel{?}{=} 0$$

$$\bullet\bullet \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \neq \mathbf{0} \quad \stackrel{?}{\Longrightarrow} \quad (\mathbf{x}|\mathbf{x}) \in \mathbb{R}_{>0}$$

$$\bullet \quad (\mathbf{0}|\mathbf{0}) \quad = \quad 0 + 2 \times 0 \quad = \quad 0$$

$$\bullet\bullet \quad (\mathbf{x}|\mathbf{x}) \quad = \quad \overline{x}_1 x_1 + 2\overline{x}_2 x_2 \quad = \quad |x_1|^2 + 2|x_2|^2$$

Essendo $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$, si ha che $x_1 \neq 0$ oppure $x_2 \neq 0$, per cui $|x_1|^2 \in \mathbb{R}_{>0}$ oppure $|x_2|^2 \in \mathbb{R}_{>0}$.

Quindi $|x_1|^2 + 2|x_2|^2 \in \mathbb{R}_{>0}$.

ESERCIZIO TIPO 18

Si trovi una base ortonormale del sottospazio di $\mathbb{C}^4$

$$V = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ i \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ i \end{pmatrix} \right\rangle.$$

$\boxed{1^0\textbf{MODO}}$

$\boxed{1}$ Troviamo una base $\mathcal{B}_1$ di V.

Poniamo

$$\mathbf{w}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ i \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{w}_2 = \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{w}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{w}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ i \end{pmatrix}$$

e costruiamo la matrice $\mathbf{A} = (\, \mathbf{w}_1 \quad \mathbf{w}_2 \quad \mathbf{w}_3 \quad \mathbf{w}_4 \,)$, ossia una matrice tale che $C(\mathbf{A}) = V$.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & i & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ i & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & i \end{pmatrix} \xrightarrow[E_{31}(-i)]{} \begin{pmatrix} 1 & i & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & i \end{pmatrix} \xrightarrow[E_{42}(1)E_{32}(-1)]{} \begin{pmatrix} 1 & i & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \end{pmatrix} \to$$

$$\xrightarrow[E_{34}]{} \begin{pmatrix} 1 & i & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[E_3(-i)]{} \begin{pmatrix} 1 & i & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{U}$$

Dunque $\mathcal{B}_1 = \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_4\}$ è una base di $C(\mathbf{A}) = V$.

$\boxed{2}$ Troviamo una base ortogonale $\mathcal{B}_2$ di V: poniamo $\mathbf{v}_1 = \mathbf{w}_1, \mathbf{v}_2 = \mathbf{w}_2$ e $\mathbf{v}_3 = \mathbf{w}_4$, e applichiamo l'algoritmo di Gram-Schmidt a $\{\mathbf{v}_1; \mathbf{v}_2; \mathbf{v}_3\}$.

$$\mathbf{u}_1 = \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ i \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{u}_2 = \mathbf{v}_2 - \alpha_{12}\mathbf{u}_1, \qquad \mathbf{u}_1 \neq \mathbf{0} \quad \Longrightarrow \quad \alpha_{12} = \frac{(\mathbf{u}_1|\mathbf{v}_2)}{(\mathbf{u}_1|\mathbf{u}_1)}$$

$$(\mathbf{u}_1|\mathbf{v}_2) = \mathbf{u}_1^H\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = i$$

$$(\mathbf{u}_1|\mathbf{u}_1) = \mathbf{u}_1^H\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ i \\ 0 \end{pmatrix} = 2$$

$$\Longrightarrow \quad \alpha_{12} = i/2$$

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_2 &= \mathbf{v}_2 - \alpha_{12}\mathbf{u}_1 = \\ &= \mathbf{v}_2 - \frac{i}{2}\mathbf{u}_1 = \\ &= \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} - \frac{i}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ i \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{i}{2} \\ 1 \\ \frac{1}{2} \\ -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\mathbf{u}_3 = \mathbf{v}_3 - \alpha_{13}\mathbf{u}_1 - \alpha_{23}\mathbf{u}_2,$$

$$\mathbf{u}_1 \neq \mathbf{0} \quad \Longrightarrow \quad \alpha_{13} = \frac{(\mathbf{u}_1|\mathbf{v}_3)}{(\mathbf{u}_1|\mathbf{u}_1)}$$

$$(\mathbf{u}_1|\mathbf{v}_3) = \mathbf{u}_1^H\mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ i \end{pmatrix} = 0$$

$$\Longrightarrow \quad \alpha_{13} = 0$$

$$\mathbf{u}_2 \neq \mathbf{0} \quad \Longrightarrow \quad \alpha_{23} = \frac{(\mathbf{u}_2|\mathbf{v}_3)}{(\mathbf{u}_2|\mathbf{u}_2)}$$

$$(\mathbf{u}_2|\mathbf{v}_3) = \mathbf{u}_2^H\mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} -\frac{i}{2} & 1 & \frac{1}{2} & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ i \end{pmatrix} = -i$$

$$(\mathbf{u}_2|\mathbf{u}_2) = \mathbf{u}_2^H\mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} -\frac{i}{2} & 1 & \frac{1}{2} & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{i}{2} \\ 1 \\ \frac{1}{2} \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{5}{2}$$

$$\Longrightarrow \quad \alpha_{23} = -\frac{2}{5}i$$

$$\begin{aligned}\mathbf{u}_3 &= \mathbf{v}_3 - \alpha_{13}\mathbf{u}_1 - \alpha_{23}\mathbf{u}_2 = \\ &= \mathbf{v}_3 + \frac{2i}{5}\mathbf{u}_2 = \\ &= \begin{pmatrix} 0\\0\\0\\i \end{pmatrix} + \frac{2i}{5}\begin{pmatrix} \frac{i}{2}\\1\\\frac{1}{2}\\-1 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -1\\2i\\i\\3i \end{pmatrix}\end{aligned}$$

$\mathcal{B}_2 = \{\mathbf{u}_1; \mathbf{u}_2; \mathbf{u}_3\}$, dove

$$\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 1\\0\\i\\0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} i\\2\\1\\-2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}_3 = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -1\\2i\\i\\3i \end{pmatrix},$$

è una base ortogonale di V.

$\boxed{3}$ Troviamo una base ortonormale $\mathcal{B}$ di V, normalizzando gli elementi di $\mathcal{B}_2$.

$$\begin{aligned}&\|\mathbf{u}_1\|_2 = \sqrt{(\mathbf{u}_1|\mathbf{u}_1)} = \sqrt{2}\\ &\|\mathbf{u}_2\|_2 = \sqrt{(\mathbf{u}_2|\mathbf{u}_2)} = \sqrt{5/2}\\ &\|\mathbf{u}_3\|_2 = \sqrt{(\mathbf{u}_3|\mathbf{u}_3)} = \sqrt{\mathbf{u}_3^H\mathbf{u}_3} = \sqrt{\frac{1}{5}\begin{pmatrix} -1 & -2i & -i & -3i \end{pmatrix}\frac{1}{5}\begin{pmatrix} -1\\2i\\i\\3i \end{pmatrix}} = \frac{\sqrt{15}}{5}\end{aligned}$$

$\mathcal{B} = \{\frac{\mathbf{u}_1}{\|\mathbf{u}_1\|_2}; \frac{\mathbf{u}_2}{\|\mathbf{u}_2\|_2}; \frac{\mathbf{u}_3}{\|\mathbf{u}_3\|_2}\}$, dove

$$\frac{\mathbf{u}_1}{\|\mathbf{u}_1\|_2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1\\0\\i\\0 \end{pmatrix}, \quad \frac{\mathbf{u}_2}{\|\mathbf{u}_2\|_2} = \frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix} i\\2\\1\\-2 \end{pmatrix}, \quad \frac{\mathbf{u}_3}{\|\mathbf{u}_3\|_2} = \frac{1}{\sqrt{15}}\begin{pmatrix} -1\\2i\\i\\3i \end{pmatrix},$$

è una base ortonormale di V.

$\boxed{2^0\textbf{MODO}}$

$\boxed{1}$ Costruiamo dapprima **un insieme di generatori ortogonale di V**: poniamo

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1\\0\\i\\0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} i\\1\\0\\-1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 0\\-1\\-1\\1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_4 = \begin{pmatrix} 0\\0\\0\\i \end{pmatrix}$$

e applichiamo l'algoritmo di Gram-Schimdt a $\{\mathbf{v}_1; \mathbf{v}_2; \mathbf{v}_3; \mathbf{v}_4\}$. Otterremo 4 vettori, $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4$, e l'insieme $\{\mathbf{u}_1; \mathbf{u}_2; \mathbf{u}_3; \mathbf{u}_4\}$ sarà un insieme di generatori ortogonale di V.

Per sapere se alcuni degli $\mathbf{u}_i$ saranno nulli, e in tal caso quali, troviamo innanzitutto una forma ridotta di Gauss U della matrice A che ha come colnne $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4$: le eventuali colonne libere di U corrisponderanno agli $\mathbf{u}_i$ nulli.

$$\mathbf{A} = (\,\mathbf{v}_1 \quad \mathbf{v}_2 \quad \mathbf{v}_3 \quad \mathbf{v}_4\,) = \begin{pmatrix} 1 & i & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ i & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & i \end{pmatrix} \xrightarrow[E_{31}(-i)]{} \begin{pmatrix} 1 & i & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & i \end{pmatrix} \xrightarrow[E_{42}(1)E_{32}(-1)]{}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & i & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \end{pmatrix} \xrightarrow[E_{34}]{} \begin{pmatrix} 1 & i & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[E_{3}(-i)]{} \begin{pmatrix} 1 & i & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{U}$$

Poichè $\mathbf{U}$ ha come unica colonna libera la 3^a, allora applicando l'algoritmo di Gram-Schimdt a $\{\mathbf{v}_1; \mathbf{v}_2; \mathbf{v}_3; \mathbf{v}_4\}$ otterremo $\mathbf{u}_3 = \mathbf{0}$.

$$\mathbf{u}_1 = \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ i \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{u}_2 = \mathbf{v}_2 - \alpha_{12}\mathbf{u}_1, \qquad \mathbf{u}_1 \neq \mathbf{0} \quad \Longrightarrow \quad \alpha_{12} = \frac{(\mathbf{u}_1|\mathbf{v}_2)}{(\mathbf{u}_1|\mathbf{u}_1)}$$

$$(\mathbf{u}_1|\mathbf{v}_2) = \mathbf{u}_1^H \mathbf{v}_2 = (\,1 \quad 0 \quad -i \quad 0\,) \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = i$$

$$(\mathbf{u}_1|\mathbf{u}_1) = \mathbf{u}_1^H \mathbf{u}_1 = (\,1 \quad 0 \quad -i \quad 0\,) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ i \\ 0 \end{pmatrix} = 2$$

$$\Longrightarrow \quad \alpha_{12} = i/2$$

$$\mathbf{u}_2 = \mathbf{v}_2 - \alpha_{12}\mathbf{u}_1 = \mathbf{v}_2 - \frac{i}{2}\mathbf{u}_1 =$$

$$= \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} - \frac{i}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ i \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{i}{2} \\ 1 \\ \frac{1}{2} \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{u}_3 = \mathbf{v}_3 - \alpha_{13}\mathbf{u}_1 - \alpha_{23}\mathbf{u}_2,$$

$$\mathbf{u}_1 \neq \mathbf{0} \quad \Longrightarrow \quad \alpha_{13} = \frac{(\mathbf{u}_1|\mathbf{v}_3)}{(\mathbf{u}_1|\mathbf{u}_1)}$$

$$(\mathbf{u}_1|\mathbf{v}_3) = \mathbf{u}_1^H\mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = i$$

$$(\mathbf{u}_1|\mathbf{u}_1) = 2$$

$$\Longrightarrow \quad \alpha_{13} = \frac{i}{2}$$

$$\mathbf{u}_2 \neq \mathbf{0} \quad \Longrightarrow \quad \alpha_{23} = \frac{(\mathbf{u}_2|\mathbf{v}_3)}{(\mathbf{u}_2|\mathbf{u}_2)}$$

$$(\mathbf{u}_2|\mathbf{v}_3) = \mathbf{u}_2^H\mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} -\frac{i}{2} & 1 & \frac{1}{2} & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$= -1 - \frac{1}{2} - 1 = -\frac{5}{2}$$

$$(\mathbf{u}_2|\mathbf{u}_2) = \mathbf{u}_2^H\mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} -\frac{i}{2} & 1 & \frac{1}{2} & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{i}{2} \\ 1 \\ \frac{1}{2} \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{5}{2}$$

$$\Longrightarrow \quad \alpha_{23} = -1$$

$$\mathbf{u}_3 = \mathbf{v}_3 - \alpha_{13}\mathbf{u}_1 - \alpha_{23}\mathbf{u}_2 =$$

$$= \mathbf{v}_3 - \frac{i}{2}\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{i}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ i \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{i}{2} \\ 1 \\ \frac{1}{2} \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{u}_4 = \mathbf{v}_4 - \alpha_{14}\mathbf{u}_1 - \alpha_{24}\mathbf{u}_2 - \alpha_{34}\mathbf{u}_3$$

$$\mathbf{u}_1 \neq \mathbf{0} \quad \Longrightarrow \quad \alpha_{14} = \frac{(\mathbf{u}_1|\mathbf{v}_4)}{(\mathbf{u}_1|\mathbf{u}_1)}$$

$$(\mathbf{u}_1|\mathbf{v}_4) = \mathbf{u}_1^H\mathbf{v}_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ i \end{pmatrix} = 0$$

$$\Longrightarrow \quad \alpha_{14} = 0$$

$$\mathbf{u}_2 \neq \mathbf{0} \quad \Longrightarrow \quad \alpha_{24} = \frac{(\mathbf{u}_2|\mathbf{v}_4)}{(\mathbf{u}_2|\mathbf{u}_2)}$$

$$(\mathbf{u}_2|\mathbf{v}_4) = \mathbf{u}_2^H \mathbf{v}_4 = \begin{pmatrix} -\frac{i}{2} & 1 & \frac{1}{2} & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ i \end{pmatrix} = -i$$

$$(\mathbf{u}_2|\mathbf{u}_2) = \mathbf{u}_2^H \mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} -\frac{i}{2} & 1 & \frac{1}{2} & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{i}{2} \\ 1 \\ \frac{1}{2} \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{5}{2}$$

$$\Longrightarrow \quad \alpha_{24} = -\frac{2}{5}i$$

$$\mathbf{u}_3 = \mathbf{0} \quad \Longrightarrow \quad \alpha_{34} = 0 \quad \text{per def.}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_4 &= \mathbf{v}_4 - \alpha_{24}\mathbf{u}_2 = \\ &= \mathbf{v}_4 + \frac{2i}{5}\mathbf{u}_2 = \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ i \end{pmatrix} + \frac{2i}{5} \begin{pmatrix} \frac{i}{2} \\ 1 \\ \frac{1}{2} \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -1 \\ 2i \\ i \\ 3i \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Dunque $\left\{ \mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ i \\ 0 \end{pmatrix}; \mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} \frac{i}{2} \\ 1 \\ \frac{1}{2} \\ -1 \end{pmatrix}; \mathbf{u}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \mathbf{u}_4 = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -1 \\ 2i \\ i \\ 3i \end{pmatrix} \right\}$ è un insieme di generatori ortogonale di V.

$\boxed{2}$ Costruiamo **una base ortogonale di V** togliendo dall'insieme di generatori ortogonale di V trovato al punto $\boxed{1}$ gli eventuali $\mathbf{u}_i$ nulli. In questo caso poniamo:

$$\mathbf{w}_1 = \mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ i \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{w}_2 = \mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} \frac{i}{2} \\ 1 \\ \frac{1}{2} \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{w}_3 = \mathbf{u}_4 = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -1 \\ 2i \\ i \\ 3i \end{pmatrix}.$$

L'insieme $\left\{ \mathbf{w}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ i \\ 0 \end{pmatrix}; \mathbf{w}_2 = \begin{pmatrix} \frac{i}{2} \\ 1 \\ \frac{1}{2} \\ -1 \end{pmatrix}; \mathbf{w}_3 = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -1 \\ 2i \\ i \\ 3i \end{pmatrix} \right\}$ è una base ortogonale di V.

$\boxed{3}$ Costruiamo **base ortonormale di V** normalizzando la base ortogonale trovata al punto $\boxed{2}$, ossia dividendo ciascun elemento della base ortogonale trovata in $\boxed{2}$ per la propria norma euclidea.

Cominciamo con il calcolare la norma euclidea di $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3$:

$$\|\mathbf{w}_1\|_2 = \sqrt{(\mathbf{u}_1|\mathbf{u}_1)} = \sqrt{2}$$
$$\|\mathbf{w}_2\|_2 = \sqrt{(\mathbf{u}_2|\mathbf{u}_2)} = \sqrt{5/2}$$
$$\|\mathbf{w}_3\|_2 = \sqrt{(\mathbf{u}_4|\mathbf{u}_4)} = \sqrt{\mathbf{u}_4^H\mathbf{u}_4} = \sqrt{\frac{1}{5}\begin{pmatrix} -1 & -2i & -i & -3i \end{pmatrix}\frac{1}{5}\begin{pmatrix} -1 \\ 2i \\ i \\ 3i \end{pmatrix}} = \frac{\sqrt{15}}{5}$$

Allora $\mathcal{B} = \{\frac{\mathbf{w}_1}{\|\mathbf{w}_1\|_2}; \frac{\mathbf{w}_2}{\|\mathbf{w}_2\|_2}; \frac{\mathbf{w}_3}{\|\mathbf{w}_3\|_2}\}$, dove

$$\frac{\mathbf{w}_1}{\|\mathbf{w}_1\|_2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ i \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \frac{\mathbf{w}_2}{\|\mathbf{w}_2\|_2} = \frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix} i \\ 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \frac{\mathbf{w}_3}{\|\mathbf{w}_3\|_2} = \frac{1}{\sqrt{15}}\begin{pmatrix} -1 \\ 2i \\ i \\ 3i \end{pmatrix},$$

è una base ortonormale di V.

ESERCIZIO TIPO 19

Si consideri il sottospazio $W = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ i \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} -i \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \rangle$ di $\mathbb{C}^3$.

(a) Si trovi il complemento ortogonale $W^\perp$ di W in $\mathbb{C}^3$.

(b) Si calcoli la proiezione ortogonale $P_W(\mathbf{v})$ del vettore $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 5i \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ su W.

Posto $\mathbf{w}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ i \end{pmatrix}$, $\mathbf{w}_2 = \begin{pmatrix} -i \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{w}_3 = \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, sia $\mathbf{A} = (\,\mathbf{w}_1 \quad \mathbf{w}_2 \quad \mathbf{w}_3\,) = \begin{pmatrix} 1 & -i & i \\ 0 & 0 & 1 \\ i & 1 & -1 \end{pmatrix}$ una matrice tale che $C(\mathbf{A}) = \langle \mathbf{w}_1; \mathbf{w}_2; \mathbf{w}_3 \rangle = W$.

(a) Da $W = C(\mathbf{A})$ segue $W^\perp = C(\mathbf{A})^\perp = N(\mathbf{A}^H)$. Facendo una EG su $\mathbf{A}^H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -i \\ i & 0 & 1 \\ -i & 1 & -1 \end{pmatrix}$ si ottiene

$$\mathbf{A}^H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -i \\ i & 1 & 1 \\ -i & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[E_{31}(i)E_{21}(-i)]{} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[E_{23}]{} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -i \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{U}$$

Poichè

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in N(\mathbf{U}) \quad \iff \quad \begin{cases} x_1 - ix_3 & = 0 \\ \quad x_2 & = 0 \end{cases} \quad \text{allora} \quad N(\mathbf{A}^H) = N(\mathbf{U}) = \left\{ \begin{pmatrix} ih \\ 0 \\ h \end{pmatrix} | h \in \mathbb{C} \right\}.$$

(b) Troviamo una base ortonormale di W. Facendo una EG su $\mathbf{A}$ si ottiene:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -i & i \\ 0 & 0 & 1 \\ i & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[E_{31}(-i)]{} \begin{pmatrix} 1 & -i & i \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Poichè le colonne dominanti di una forma ridotta di Gauss per $\mathbf{A}$ sono la 1^a e la 3^a, $\mathcal{B}_1 = \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_3\}$ è una base di $C(\mathbf{A}) = W$. Posto

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{w}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ i \end{pmatrix} \text{ e } \mathbf{v}_2 = \mathbf{w}_3 = \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

applichiamo l'algoritmo di GS a $\{\mathbf{v}_1;\mathbf{v}_2\}$ per trovare una base ortogonale $\{\mathbf{u}_1;\mathbf{u}_2\}$ di W.

$$\mathbf{u}_1 = \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ i \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{u}_2 = \mathbf{v}_2 - \alpha_{12}\mathbf{u}_1, \qquad \mathbf{u}_1 \neq \mathbf{0} \implies \alpha_{12} = \frac{(\mathbf{u}_1|\mathbf{v}_2)}{(\mathbf{u}_1|\mathbf{u}_1)}$$

$$(\mathbf{u}_1|\mathbf{v}_2) = \mathbf{u}_1^H\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} i \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 2i$$

$$(\mathbf{u}_1|\mathbf{u}_1) = \mathbf{u}_1^H\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ i \end{pmatrix} = 2$$

$$\implies \alpha_{12} = 2i/2 = i$$

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_2 &= \mathbf{v}_2 - \alpha_{12}\mathbf{u}_1 = \\ &= \mathbf{v}_2 - i\mathbf{u}_1 = \\ &= \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} - i\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Dunque $\mathcal{B}_2 = \left\{ \mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ i \end{pmatrix}; \mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ è una base ortogonale di W.

Troviamo una base ortonormale $\mathcal{B}$ di W, normalizzando gli elementi di $\mathcal{B}_2$. Essendo

$$\|\mathbf{u}_1\|_2 = \sqrt{(\mathbf{u}_1|\mathbf{u}_1)} = \sqrt{2} \text{ e } \|\mathbf{u}_2\|_2 = \sqrt{(\mathbf{u}_2|\mathbf{u}_2)} = \sqrt{1} = 1,$$

$\mathcal{B} = \left\{ \mathbf{u}_1^* = \frac{\mathbf{u}_1}{\|\mathbf{u}_1\|_2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ i \end{pmatrix}; \mathbf{u}_2^* = \frac{\mathbf{u}_2}{\|\mathbf{u}_2\|_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ è una base ortonormale di W.

La proiezione ortogonale $P_W(\mathbf{v})$ di $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 5i \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ su W è

$$\begin{aligned} P_W(\mathbf{v}) &= (\mathbf{u}_1^*|\mathbf{v})\mathbf{u}_1^* + (\mathbf{u}_2^*|\mathbf{v})\mathbf{u}_2^* = \\ &= (\mathbf{u}_1^*)^H\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}_1^* + (\mathbf{u}_2^*)^H\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}_2^* = \\ &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5i \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5i \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \\ &= \frac{1}{2}(5i-i)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ i \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \\ &= 2i\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ i \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2i \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

ESERCIZIO TIPO 20

Sia $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -5 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 5 & -1 & -2 \end{pmatrix}$.

(a) Si trovi una decomposizione $\mathbf{Q_0R_0}$-non-normalizzata per $\mathbf{A}$.

(b) Si trovi una decomposizione $\mathbf{QR}$-normalizzata per $\mathbf{A}$.

(c) Si calcoli la matrice di proiezione sullo spazio delle colonne $C(\mathbf{A})$ di $\mathbf{A}$.

(a) $\boxed{I}$ Poniamo

$$\mathbf{v_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v_2} = \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v_3} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v_4} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

e applichiamo l'algoritmo di Gram-Schimdt a $\{\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \mathbf{v_3}, \mathbf{v_4}\}$.

Otterremo 4 vettori, $\mathbf{u_1}, \mathbf{u_2}, \mathbf{u_3}, \mathbf{u_4}$. Per sapere se alcuni degli $\mathbf{u_i}$ saranno nulli, e in tal caso quali, troviamo innanzitutto una forma ridotta di Gauss $\mathbf{U}$ di $\mathbf{A}$: le eventuali colonne libere di $\mathbf{U}$ corrisponderanno agli $\mathbf{u_i}$ nulli.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -5 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 5 & -1 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{31}(1)} \begin{pmatrix} 1 & -5 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{32}(-2)} \begin{pmatrix} 1 & -5 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{U}$$

Poichè $\mathbf{U}$ ha come colonne libere la 2^a e la 4^a, applicando l'algoritmo di Gram-Schimdt a $\{\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \mathbf{v_3}, \mathbf{v_4}\}$ otterremo $\mathbf{u_2} = \mathbf{0} = \mathbf{u_4}$.

$$\boxed{\mathbf{u_1} = \mathbf{v_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}}$$

$$\mathbf{u_2} = \mathbf{v_2} - \alpha_{12}\mathbf{u_1}, \qquad \mathbf{u_1} \neq \mathbf{0} \implies \alpha_{12} = \frac{(\mathbf{u_1}|\mathbf{v_2})}{(\mathbf{u_1}|\mathbf{u_1})}$$

$$(\mathbf{u_1}|\mathbf{v_2}) = \mathbf{u_1}^H\mathbf{v_2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} = -10$$

$$(\mathbf{u_1}|\mathbf{u_1}) = \mathbf{u_1}^H\mathbf{u_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = 2$$

$$\implies \boxed{\alpha_{12} = -10/2 = -5}$$

$$\mathbf{u_2} = \mathbf{v_2} - \alpha_{12}\mathbf{u_1} = \mathbf{v_2} + 5\mathbf{u_1} =$$
$$= \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} + 5 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \boxed{\mathbf{0} = \mathbf{u_2}}$$

$$\mathbf{u_3} = \mathbf{v_3} - \alpha_{13}\mathbf{u_1} - \alpha_{23}\mathbf{u_2},$$

$$\mathbf{u_1} \neq \mathbf{0} \quad \Longrightarrow \quad \alpha_{13} = \frac{(\mathbf{u_1}|\mathbf{v_3})}{(\mathbf{u_1}|\mathbf{u_1})}$$

$$(\mathbf{u_1}|\mathbf{v_3}) = \mathbf{u_1}^H\mathbf{v_3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 4$$

$$\Longrightarrow \quad \boxed{\alpha_{13} = 4/2 = 2}$$

$$\mathbf{u_2} = \mathbf{0} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{\alpha_{23} = 0}$$

$$\mathbf{u_3} = \mathbf{v_3} - \alpha_{13}\mathbf{u_1} - \alpha_{23}\mathbf{u_2} =$$
$$= \mathbf{v_3} - 2\mathbf{u_1} =$$
$$= \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \mathbf{u_3}}$$

$$\mathbf{u_4} = \mathbf{v_4} - \alpha_{14}\mathbf{u_1} - \alpha_{24}\mathbf{u_2} - \alpha_{34}\mathbf{u_3},$$

$$\mathbf{u_1} \neq \mathbf{0} \quad \Longrightarrow \quad \alpha_{14} = \frac{(\mathbf{u_1}|\mathbf{v_4})}{(\mathbf{u_1}|\mathbf{u_1})}$$

$$(\mathbf{u_1}|\mathbf{v_4}) = \mathbf{u_1}^H\mathbf{v_4} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = 6$$

$$\Longrightarrow \quad \boxed{\alpha_{14} = 6/2 = 3}$$

$$\mathbf{u_2} = \mathbf{0} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{\alpha_{24} = 0}$$

$$\mathbf{u_3} \neq \mathbf{0} \quad \Longrightarrow \quad \alpha_{34} = \frac{(\mathbf{u_3}|\mathbf{v_4})}{(\mathbf{u_3}|\mathbf{u_3})}$$

$$(\mathbf{u_3}|\mathbf{v_4}) = \mathbf{u_3}^H\mathbf{v_4} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = 3$$

$$(\mathbf{u_3}|\mathbf{u_3}) = \mathbf{u_3}^H\mathbf{u_3} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 3$$

$$\Longrightarrow \quad \boxed{\alpha_{34} = 3/3 = 1}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{u_4} &= \mathbf{v_4} - \alpha_{14}\mathbf{u_1} - \alpha_{24}\mathbf{u_2} - \alpha_{34}\mathbf{u_3} = \\ &= \mathbf{v_4} - 3\mathbf{u_1} - \mathbf{u_3} = \\ &= \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \boxed{\mathbf{0} = \mathbf{u_4}}\end{aligned}$$

$\boxed{II}$ Poniamo

$$\mathbf{Q_0} = \begin{pmatrix} \mathbf{u_1} & \mathbf{u_2} & \mathbf{u_3} & \mathbf{u_4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{R_0} = \begin{pmatrix} 1 & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \alpha_{14} \\ 0 & 1 & \alpha_{23} & \alpha_{24} \\ 0 & 0 & 1 & \alpha_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -5 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$\mathbf{A} = \mathbf{Q_0 R_0}$ è una decomposizione $\mathbf{Q_0R_0}$-non-normalizzata per $\mathbf{A}$.

(b) $\boxed{III}$ Sia $\mathbf{Q_1}$ la matrice che si ottiene dalla matrice $\mathbf{Q_0}$, ottenuta al punto (2), togliendo tutte le (eventuali) colonne nulle di $\mathbf{Q_0}$. In questo caso $\mathbf{Q_0}$ ha due colonne nulle, la 2^a e la 4^a, quindi

$$\mathbf{Q_1} = \begin{pmatrix} \mathbf{u_1} & \mathbf{u_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Sia $\mathbf{R_1}$ la matrice che si ottiene dalla matrice $\mathbf{R_0}$, ottenuta al punto (2), togliendo le righe di $\mathbf{R_0}$ che corrispondono alle colonne che sono state tolte da $\mathbf{Q_0}$ per ottenere $\mathbf{Q_1}$. In questo caso, poichè per ottenere $\mathbf{Q_1}$ sono state tolte da $\mathbf{Q_0}$ la 2^a e la 4^a colonna, allora per ottenere $\mathbf{R_1}$ si toglie da $\mathbf{R_0}$ la 2^a riga e la 4^a riga. Dunque

$$\mathbf{R_1} = \begin{pmatrix} 1 & -5 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$\boxed{IV}$ Costruiamo la matrice diagonale $\mathbf{D}$ che ha sulla diagonale la norma euclidea delle colonne di $\mathbf{Q_1}$ (ossia delle colonne non nulle di $\mathbf{Q_0}$), e calcoliamo $\mathbf{D}^{-1}$.

Poichè

$$||\mathbf{u_1}||_2 = \sqrt{(\mathbf{u_1}|\mathbf{u_1})} = \sqrt{2} \quad \text{e} \quad ||\mathbf{u_3}||_2 = \sqrt{(\mathbf{u_3}|\mathbf{u_3})} = \sqrt{3},$$

allora

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} ||\mathbf{u_1}||_2 & 0 \\ 0 & ||\mathbf{u_3}||_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & \sqrt{3} \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{D}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}.$$

$\boxed{V}$ Poniamo

$$\mathbf{Q} = \mathbf{Q_1 D}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{R} = \mathbf{DR_1} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & \sqrt{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -5 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & -5\sqrt{2} & 2\sqrt{2} & 3\sqrt{2} \\ 0 & 0 & \sqrt{3} & \sqrt{3} \end{pmatrix}.$$

Allora $\mathbf{A} = \mathbf{QR}$ è una decomposizione $\mathbf{QR}$-normalizzata di $\mathbf{A}$.

(c) La matrice di proiezione sullo spazio delle colonne $C(\mathbf{A})$ di $\mathbf{A}$ è $\mathbf{P} = \mathbf{QQ}^H$:

$$\mathbf{P} = \mathbf{QQ}^H = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{2}+\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{2}+\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{2}+\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2}+\frac{1}{3} \end{pmatrix} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

ESERCIZIO TIPO 21

Sia $\mathbf{A}(z) = \begin{pmatrix} z & \overline{z} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & z-i \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, dove $z \in \mathbb{C}$.

Si dica per quali $z \in \mathbb{C}$ la matrice $\mathbf{A}(z)$ è non singolare.

$\mathbf{A}(z)$ è non singolare se e solo se $\mathrm{Det}(\mathbf{A}(z)) \neq 0$. Calcoliamo dunque $\mathrm{Det}(\mathbf{A}(z))$.

$$\mathrm{Det}(\mathbf{A}(z)) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{sviluppato rispetto} \\ \text{alla } 2^a \text{ riga}}}{=} (-1)^{2+3}\mathrm{Det}\begin{pmatrix} z & \overline{z} & 0 \\ 1 & 1 & z-i \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{sviluppato rispetto} \\ \text{alla } 3^a \text{ colonna}}}{=} -(z-i)(-1)^{2+3}\mathrm{Det}\begin{pmatrix} z & \overline{z} \\ 1 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= (z-i)(z-\overline{z})$$

Quindi $\mathbf{A}(z)$ è non singolare se e solo se $(z-i)(z-\overline{z}) \neq 0$.

Si osservi che $(z-i)(z-\overline{z}) = 0$ se e solo se o $z-i=0$, e quindi $z=i$, oppure $z-\overline{z}=0$, e quindi $z=\overline{z}$. Poichè

$$z = \overline{z} \iff z \in \mathbb{R},$$

allora

$$\mathrm{Det}(\mathbf{A}(z)) = 0 \iff z \in \mathbb{R} \cup \{i\}$$

e quindi

$$\mathrm{Det}(\mathbf{A}(z)) \neq 0 \iff z \notin \mathbb{R} \cup \{i\}.$$

Concludendo

$$\mathbf{A}(z) \text{ è non singolare} \iff z \notin \mathbb{R} \cup \{i\}.$$

TESTI DEGLI ESERCIZI PER CASA

ESERCIZI PER CASA 1

$\boxed{1}$ Per ciascuno dei seguenti numeri complessi

$$z_1 = i, \quad z_2 = -3i, \quad z_3 = 1-2i \quad \text{e} \quad z_4 = 5+3i$$

si calcolino il modulo ed il coniugato, e si scriva l'inverso in forma algebrica.

$\boxed{2}$ Quali sono i numeri complessi z tali che $z = -\overline{z}$?

$\boxed{3}$ Si scrivano in forma trigonometrica i numeri complessi $z_1 = 3\sqrt{3}+3i$ e $z_2 = 3\sqrt{2}(1+i)$ ed in forma algebrica il numero complesso $w = 4(\cos(\frac{2}{3}\pi) + i\sin(\frac{2}{3}\pi))$.

$\boxed{4}$ Di ciascuna delle seguenti matrici si dica se è scalare, diagonale, triangolare superiore, triangolare inferiore o nessuna delle precedenti:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 5 & 5 & 0 \\ 5 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 & 0 & 5 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

$\boxed{5}$ Siano $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 1 & -3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 4 & -2 & -3 \end{pmatrix}$, $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ e $\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 0 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$.

Si calcoli $\mathbf{B}(\mathbf{DC} - 2\mathbf{A}) + 4\mathbf{C}$.

$\boxed{6}$ Sia $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

(a) Si trovino tutte le matrici reali $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ tali che $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$.

(b) Si trovino tutte le matrici reali 2×2 $\mathbf{C}$ tali che $\mathbf{AC} = \mathbf{O}$.

$\boxed{7}$ Si trovino tutte le matrici reali 2×2 $\mathbf{A}$ triangolari superiori tali che $\mathbf{A}^2 = \mathbf{I}_2$.

$\boxed{8}$ Si trovino tutte le matrici reali 2×2 $\mathbf{A}$ triangolari superiori tali che $\mathbf{A}^2 = \mathbf{A}$.

$\boxed{9}$ Si trovino tutte le matrici reali 2×2 $\mathbf{A}$ tali che $\mathbf{A}^2 = \mathbf{O}$.

$\boxed{10}$ Sia $\mathbf{A}$ una matrice reale $m \times 2$ non nulla in cui la prima colonna è il doppio della seconda. Si trovino tutte le matrici reali diagonali $\mathbf{D}$ per cui ciascuna colonna di $\mathbf{AD}$ è il doppio della seguente.

ESERCIZI PER CASA 2

$\boxed{1}$ Siano $\quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2-3i & 1+i \\ 0 & i \\ 1-i & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = (2 \quad 1+i), \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 3+5i \\ 6 \\ 2-2i \end{pmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{pmatrix} 7+i & 2+3i \\ 3-2i & 0 \end{pmatrix}.$

(a) Di ciascuna delle precedenti matrici si calcolino la trasposta, la coniugata e la H-trasposta.

(b) Si calcoli $(\mathbf{A}^H\overline{\mathbf{C}} + i\mathbf{B}^T)\overline{\mathbf{B}} + (1+3i)\mathbf{D}^H$.

$\boxed{2}$ Di ciascuna delle seguenti matrici si dica se è simmetrica, anti-simmetrica, hermitiana, anti-hermitiana o nessuna delle precedenti:

$$\begin{pmatrix} 2 & 2+3i \\ 2-3i & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 2+3i \\ 2+3i & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2+3i \\ -2+3i & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2+3i \\ -2-3i & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$\boxed{3}$ Siano $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ e $\mathbf{C}$ matrici complesse quadrate di ordine n. Si supponga che $\mathbf{A}$ sia anti-hermitiana, $\mathbf{B}$ sia reale e $\mathbf{C}$ sia simmetrica. Si provi che

(a) $(\mathbf{AB} + \mathbf{C})^H + \mathbf{B}^T\mathbf{A} = \overline{\mathbf{C}}$;

(b) $[(\mathbf{A} + \mathbf{B}^T)\overline{\mathbf{C}}]^H - (\overline{\mathbf{A}}\mathbf{C})^T = \mathbf{CB}$.

$\boxed{4}$ Si calcolino la parte hermitiana e la parte anti-hermitiana della matrice complessa $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2+i & -2 \\ 3 & 1-i \end{pmatrix}$.

$\boxed{5}$ Sia $\mathbf{A}$ una matrice quadrata e siano $\mathbf{B}$ e $\mathbf{C}$ la parte hermitiana e la parte anti-hermitiana di $\mathbf{A}$. Si provi che $\mathbf{BC} = \mathbf{CB}$ se e solo se $\mathbf{AA}^H = \mathbf{A}^H\mathbf{A}$.

$\boxed{6}$ Sia $\mathbf{G}(\mathbf{v})$ la matrice $n \times n$ dipendente dal vettore $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^{n-1}$ definita da $\mathbf{G}(\mathbf{v}) = \begin{pmatrix} 1 & | & \mathbf{0}^T \\ - & | & --- \\ \mathbf{v} & | & \mathbf{I}_{n-1} \end{pmatrix}$.

(a) Si provi che per ogni $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in \mathbb{R}^{n-1}$ esiste $\mathbf{v}_3 \in \mathbb{R}^{n-1}$ tale che $\mathbf{G}(\mathbf{v}_1) \cdot \mathbf{G}(\mathbf{v}_2) = \mathbf{G}(\mathbf{v}_3)$.

(b) Sia $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & | & \mathbf{0}^T \\ - & | & -- \\ \mathbf{u} & | & \mathbf{B} \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{R})$ (per cui $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^{n-1}$ e $\mathbf{B} \in M_{n-1}(\mathbb{R})$).

Si provi che per ogni $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^{n-1}$ esiste $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^{n-1}$ tale che $\mathbf{A} \cdot \mathbf{G}(\mathbf{v}) = \mathbf{G}(\mathbf{w}) \cdot \mathbf{A}$.

$\boxed{7}$ Sia $\mathbf{A} \in M_{n-1}(\mathbb{R})$ una matrice simmetrica e siano $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^{n-1}$ ed $a \in \mathbb{R}$. Si considerino le matrici

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} a & | & \mathbf{u}^T \\ - & | & -- \\ \mathbf{v} & | & \mathbf{A} \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{R}) \quad \text{e} \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} a & | & \mathbf{v}^T \\ - & | & -- \\ \mathbf{u} & | & -\mathbf{A} \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{R}).$$

Si provi che $\mathbf{BC}$ è simmetrica se e solo se $\mathbf{Au} = \mathbf{0}$.

ESERCIZI PER CASA 3

$\boxed{1}$ Si scrivano le matrici elementari $\mathbf{E_{13}(4)}$, $\mathbf{E_3(4)}$ ed $\mathbf{E_{13}}$ di ordine 3 e di ordine 4.

$\boxed{2}$ Sia $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{r}^T \\ \mathbf{r}^T \end{pmatrix}$ una matrice reale $2 \times n$ non nulla con le righe uguali. Si trovino tutte le matrici elementari $\mathbf{E}$ tali che $\mathbf{EA} = \begin{pmatrix} \mathbf{r}^T \\ 3\mathbf{r}^T \end{pmatrix}$.

$\boxed{3}$ Siano $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ ed $\mathbf{E_{ij}(c_1)}$, $\mathbf{E_{ij}(c_2)}$, $\mathbf{E_i(c_1)}$, $\mathbf{E_i(c_2)}$ di ordine n.

(a) Si trovi $c_3 \in \mathbb{R}$ tale che $\mathbf{E_{ij}(c_1)E_{ij}(c_2)} = \mathbf{E_{ij}(c_3)}$.

(b) Si trovi $c_4 \in \mathbb{R}$ tale che $\mathbf{E_i(c_1)E_i(c_2)} = \mathbf{E_i(c_4)}$.

$\boxed{4}$ Si trovino forme ridotte di Gauss per le seguenti matrici:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 4 & 0 \\ 3 & -3 & 9 & 6 \\ 3 & -3 & 3 & -6 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 3 & -9 \\ -2 & 6 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{w}^T = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

$\boxed{5}$ Sia $\mathbf{A}(\alpha) = \begin{pmatrix} 2i & 0 & -2i & 2i\alpha \\ 1 & \alpha^2+4 & 0 & \alpha \\ 2 & 2\alpha^2+8 & 0 & 4\alpha \end{pmatrix}$, dove $\alpha \in \mathbb{C}$. Per ogni $\alpha \in \mathbb{C}$ si trovi una forma ridotta di Gauss $\mathbf{U}(\alpha)$ per $\mathbf{A}(\alpha)$ e si dica quali sono le colonne dominanti e quali sono le colonne libere di $\mathbf{U}(\alpha)$.

$\boxed{6}$ Si risolva il sistema lineare $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ nei seguenti casi: (a) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 9 & 6 \\ 1 & -1 & 7 & 4 \\ 1 & -1 & 3 & 2 \\ -2 & 2 & -6 & -4 \end{pmatrix}$ e $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$;

(b) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 9 & 6 \\ 1 & -1 & 7 & 4 \\ 1 & -1 & 3 & 2 \\ -2 & 2 & -6 & -4 \end{pmatrix}$ e $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}$; (c) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 9 & 6 \\ 1 & 0 & 7 & 4 \\ 1 & -1 & 5 & 2 \\ 1 & 0 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ e $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix}$.

$\boxed{7}$ Si risolva il sistema lineare $\mathbf{A}(\alpha)\mathbf{x} = \mathbf{b}(\alpha)$ dipendente dal parametro complesso α dove

$$\mathbf{A}(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & \alpha-i & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & \alpha-i & \alpha+i \\ -\alpha-i & -\alpha^2-1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{b}(\alpha) = \begin{pmatrix} \alpha-i \\ \alpha^2+1 \\ 2\alpha \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$\boxed{8}$ Si trovino tutte le inverse destre della matrice $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

$\boxed{9}$ Si trovino tutte le inverse sinistre della matrice $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.

ESERCIZI PER CASA 4

$\boxed{1}$ Si provi che se $\mathbf{A}$ è una matrice con un'unica inversa destra $\mathbf{R}$, allora $\mathbf{A}$ è quadrata ed $\mathbf{R} = \mathbf{A}^{-1}$ (sugg.: si osservi che, essendo $\mathbf{R}$ unica, ogni sistema $\mathbf{Ax} = \mathbf{e_i}$ ha un'unica soluzione, per cui rk$(\mathbf{A}) = \dots$)

$\boxed{2}$ Sia $\mathbf{A}$ una matrice $m \times n$ con $m < n$ e rk$(\mathbf{A}) = m$. Si provi che esiste $\mathbf{B} \neq \mathbf{O}$ tale che $\mathbf{AB} = \mathbf{O}$ (sugg.: si usi l'esercizio precedente).

$\boxed{3}$ Si trovi una forma ridotta di Gauss-Jordan per la matrice $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 & 0 & 0 & 6 \\ 2 & -2 & 3 & -2 & -1 & 8 \\ -2 & 2 & -2 & 0 & 0 & 5 \\ 3 & -3 & 4 & -2 & -1 & 12 \end{pmatrix}$.

$\boxed{4}$ Sia $\mathbf{A}(\alpha) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \alpha & \alpha^2 & -\alpha \\ 2\alpha & 2\alpha^2 & 1 \end{pmatrix}$, dove $\alpha \in \mathbb{R}$. Per quegli $\alpha \in \mathbb{R}$ per cui $\mathbf{A}(\alpha)$ è non singolare, si calcoli $\mathbf{A}(\alpha)^{-1}$.

$\boxed{5}$ Sia $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 6i & 1-i \\ 3 & -i \end{pmatrix}$. Si calcoli $\mathbf{A}^{-1}$.

$\boxed{6}$ Si dica per quali $\alpha \in \mathbb{C}$ la matrice $\mathbf{A}(\alpha) = \begin{pmatrix} \alpha + 3i & \alpha \\ \alpha + 3i & \alpha - i \end{pmatrix}$ è non singolare. Per tali α, si trovi l'inversa di $\mathbf{A}(\alpha)$.

$\boxed{7}$ Sia $\mathbf{A} = \mathbf{E_{47}}(2)\mathbf{E_3}(6)\mathbf{E_{12}}(-3)\mathbf{E_{24}}\mathbf{E_5}(3)$ di ordine n. Si scrivano $\mathbf{A}^{-1}$ ed $\mathbf{A}^T$ come prodotti di matrici elementari.

$\boxed{8}$ Sia $\mathbf{A}(\alpha) = \begin{pmatrix} \alpha & 3\alpha & 2\alpha & -2\alpha \\ 0 & 0 & \alpha^2+9 & \alpha^2+9 \\ 2 & 6 & 4 & -3+\alpha \\ 1 & 3 & 1 & -6-3\alpha \\ \alpha+1 & 3\alpha+3 & 2\alpha+1 & -1 \end{pmatrix}$, dove $\alpha \in \mathbb{C}$.

(a) Per ogni $\alpha \notin \{0, 3i, -3i\}$ si trovi una decomposizione $\mathbf{A}(\alpha) = \mathbf{L}(\alpha)\mathbf{U}(\alpha)$, scrivendo anche $\mathbf{L}(\alpha)$ come prodotto di matrici elementari.

(b) Per ogni $\alpha \notin \{0, 3i, -3i\}$ si trovi una decomposizione a rango pieno $\mathbf{A}(\alpha) = \mathbf{L_0}(\alpha)\mathbf{U_0}(\alpha)$.

ESERCIZI PER CASA 5

$\boxed{1}$ Sia $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 9 & -6 & 0 \\ -2 & -6 & 4 & -1 \\ 0 & 2 & -4 & 0 \\ 1 & 7 & 6 & 0 \\ 1 & -4 & 10 & -4 \end{pmatrix}$.

(a) Si trovi una decomposizione $\mathbf{A} = \mathbf{P}^T\mathbf{LU}$.

(b) Si trovi una decomposizione a rango pieno per $\mathbf{A}$.

$\boxed{2}$ Si provi che l'insieme delle matrici simmetriche (complesse) di ordine n è un sottospazio vettoriale di $M_n(\mathbb{C})$ e che l'insieme delle matrici anti-hermitiane (complesse) di ordine n non è.

$\boxed{3}$ Si dica quale dei seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{R}^2$ è un suo sottospazio:

$$W_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Big| x - 2y = 0 \right\}, \quad W_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Big| x^2 - 2y = 0 \right\}, \quad W_3 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Big| x - 2y = 1 \right\}.$$

$\boxed{4}$ Sia $\mathbf{A} \in M_n(\mathbb{C})$. Si provi che i tre seguenti sottoinsiemi di $M_n(\mathbb{C})$ sono sottospazi vettoriali di $M_n(\mathbb{C})$:

$W_1 = \{\mathbf{B} \in M_n(\mathbb{C}) | \mathbf{AB} = \mathbf{BA}\}$, $W_2 = \{\mathbf{B} \in M_n(\mathbb{C}) | \mathbf{AB} \text{ è scalare}\}$ e $W_3 = \{\mathbf{B} \in M_n(\mathbb{C}) | \mathbf{AB} = \mathbf{B}^T\}$.

$\boxed{5}$ Sia $V = \mathbb{R}^2$ (sp. vett. reale). Si dica quale dei seguenti sottoinsiemi di V è un sottospazio vettoriale di V:

$\mathrm{S}_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}; \mathrm{S}_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}; \mathrm{S}_3 = \left\{ \begin{pmatrix} a-2 \\ b \end{pmatrix} | a, b \in \mathbb{R} \right\}; \mathrm{S}_4 = \left\{ \begin{pmatrix} a-2 \\ a+1 \end{pmatrix} | a \in \mathbb{R} \right\}.$

$\boxed{6}$ Si dica se $W_1 = \{i \cdot \mathbf{v} | \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n\}$ e $W_2 = \{2 \cdot \mathbf{v} | \mathbf{v} \in \mathbb{C}^n\}$ sono sottospazi di $\mathbb{C}^n$.

$\boxed{7}$ Sia $W = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix} | a \in \mathbb{R} \right\}$ l'insieme delle matrici reali anti-simmetriche di ordine 2. Si provi che W è un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale reale $M_2(\mathbb{R})$ e si dica quali dei seguenti sottoinsiemi di $M_2(\mathbb{R})$ è un insieme di generatori per W:

(a) $\left\{ \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \right\}$ **(b)** $\left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$ **(c)** $\left\{ \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} \right\}$

$\boxed{8}$ Si dica se $\mathcal{S} = \left\{ \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}; \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 8 \end{pmatrix}; \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} \right\}$ è un insieme di generatori di $\mathbb{R}^3$.

$\boxed{9}$ Siano $\mathbf{v_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$; $\mathbf{v_2} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $\mathbf{v_3} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ ed $\mathbf{e_3} \in \mathbb{R}^3$. Si dica per quali $x \in \mathbb{R}$ l'insieme di vettori $\mathcal{S}(x) = \{\mathbf{v_1}; \mathbf{v_2}; \mathbf{v_3}; x \cdot \mathbf{e_3}\}$ è un insieme di generatori di $\mathbb{R}^3$.

ESERCIZI PER CASA 6

$\boxed{1}$ Si dica quale dei seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{R}^3$ è linearmente indipendente:

$$\left\{\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}; \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}; \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}, \quad \left\{\mathbf{w}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}; \mathbf{w}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}; \mathbf{w}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix};\right\}.$$

$\boxed{2}$ Siano V uno spazio vettoriale ed $\mathcal{S} = \{\mathbf{v}_1; \mathbf{v}_2; \mathbf{v}_3\}$ un insieme linearmente indipendente di vettori di V.

Si dica quale dei seguenti insiemi di vettori di V è linearmente indipendente:

$$\begin{aligned} &(1) \quad \mathcal{S}_1 = \{\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3; \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_3; \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3\}, \\ &(2) \quad \mathcal{S}_2 = \{\mathbf{v}_1 - 2\mathbf{v}_3; \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2; \mathbf{v}_2 + 2\mathbf{v}_3\}. \end{aligned}$$

$\boxed{3}$ Sia $V = \{a + bx + cx^2 \mid a, b, c \in \mathbb{C}\}$ lo spazio dei polinomi a coefficienti complessi di grado minore od uguale a 2. Si provi che $\mathcal{B} = \{2 + x^2; x - x^2; 1 + x\}$ è una base di V.

$\boxed{4}$ Si provi che

$$\mathcal{B} = \left\{\mathbf{B}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}; \mathbf{B}_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}; \mathbf{B}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right\}$$

è una base dello spazio vettoriale V delle matrici complesse triangolari inferiori 2×2.

$\boxed{5}$ Sia W l'insieme delle matrici 2×2 reali simmetriche. L'insieme

$$\mathcal{S} = \left\{\mathbf{C}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}; \mathbf{C}_2 = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}; \mathbf{C}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \mathbf{C}_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \mathbf{C}_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \mathbf{C}_6 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right\}$$

è un insieme di generatori di W. Si trovi una base di W contenuta in $\mathcal{S}$.

$\boxed{6}$ Qual è la dimensione dello spazio vettoriale delle matrici 2×2 reali simmetriche ?

$\boxed{7}$ Si dica quale delle seguenti posizioni, al variare di $\mathbf{A} \in M_n(\mathbb{C})$, definisce un'applicazione lineare da $M_n(\mathbb{C})$ in $M_n(\mathbb{C})$: $f_1(\mathbf{A}) = \overline{\mathbf{A}}$, $f_2(\mathbf{A}) = \mathbf{A}^T$, $f_3(\mathbf{A}) = \mathbf{A}^2$.

$\boxed{8}$ Sia $g : M_2(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}^2$ definita da $g(\mathbf{A}) = \mathbf{A}\mathbf{e_1}$.

(a) Si provi che g è un'applicazione lineare.

(b) Si trovino lo spazio nullo $N(g)$ e lo spazio immagine $Im(g)$ di g.

ESERCIZI PER CASA 7

$\boxed{1}$ Sia $\mathbf{A}_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 1 & \alpha+2 & \alpha & \alpha+2 \\ 2 & 4 & 0 & \alpha+6 \end{pmatrix}$. Per ogni $\alpha \in \mathbb{C}$ si trovi una base dello spazio nullo $N(\mathbf{A}_\alpha)$ di $\mathbf{A}_\alpha$.

$\boxed{2}$ Sia $\mathbf{A}_\alpha = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 2i \\ 0 & \alpha & 0 & 2i \\ 4 & \alpha-1 & 0 & 4i \\ 0 & 2 & 4\alpha-6 & 0 \end{pmatrix}$, dove $\alpha \in \mathbb{C}$.

Per ogni $\alpha \in \mathbb{C}$ si dica qual è $rk(\mathbf{A}_\alpha)$ e si trovino una base $\mathcal{B}_\alpha$ di $C(\mathbf{A}_\alpha)$ ed una base $\mathcal{D}_\alpha$ di $R(\mathbf{A}_\alpha)$.

$\boxed{3}$ Siano $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} i \\ -1 \\ 2i \\ 0 \\ i \end{pmatrix}$, $\mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2i \\ 2 \\ -i \\ 1 \end{pmatrix}$ ed $\mathcal{S} = \{\mathbf{v}_1; \mathbf{v}_2; \mathbf{v}_3; \mathbf{v}_4\}$. Sia W il sottospazio di $\mathbb{C}^4$ generato da $\mathcal{S}$. Si trovi una base $\mathcal{B}$ di W contenuta in $\mathcal{S}$ (si usi la Nota 3).

$\boxed{4}$ Si dica per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ l'insieme $\mathcal{B}_\alpha = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \\ 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha+1 \\ \alpha+1 \end{pmatrix} \right\}$ è una base di $\mathbb{R}^3$ (si usi la Nota 3).

$\boxed{5}$ Sia $f : \mathbb{R}^2 \to M_2(\mathbb{R})$ definita da $f(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} a & a+b \\ a-b & b \end{pmatrix}$. Dopo aver provato che f è un'applicazione lineare, si determini la matrice $\mathbf{A}$ associata ad f rispetto alle basi ordinate $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$ e $\mathcal{D} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$ su dominio e codominio rispettivamente.

$\boxed{6}$ Siano $\mathcal{B} = \left\{ \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ e $\mathcal{B}' = \left\{ \mathbf{v}_1' = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \mathbf{v}_2' = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \mathbf{v}_3' = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$. Dopo aver provato che $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$ sono due basi ordinate di $\mathbb{R}^3$, si calcolino le matrici di passaggio $\mathbf{M}_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{B}'}$ da $\mathcal{B}'$ a $\mathcal{B}$ e $\mathbf{M}_{\mathcal{B}'\leftarrow\mathcal{B}}$ da $\mathcal{B}$ a $\mathcal{B}'$.

$\boxed{7}$ Sia $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 6 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$ la matrice associata ad un'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ rispetto alle basi ordinate $\mathcal{B} = \left\{ \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ e $\mathcal{D} = \left\{ \mathbf{w}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \mathbf{w}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \mathbf{w}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ su dominio e codominio rispettivamente. Si determini la matrice $\mathbf{A}'$ associata ad f rispetto alle basi ordinate $\mathcal{B}' = \left\{ \mathbf{v}_1' = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}; \mathbf{v}_2' = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} \right\}$ e $\mathcal{D}' = \left\{ \mathbf{w}_1' = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \mathbf{w}_2' = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}; \mathbf{w}_3' = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ su dominio e codominio rispettivamente.

ESERCIZI PER CASA 8

$\boxed{1}$ Sia $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$. Si provi che $\|\mathbf{v}\|_\infty = \|\mathbf{v}\|_1$ se e solo se $\mathbf{v}$ è un multiplo di una colonna di $\mathbf{I}_n$.

$\boxed{2}$ Sia $\mathbf{A} = (a_{ij})$ una matrice complessa quadrata di ordine n tale che $\mathbf{A} = \mathbf{A}^H = \mathbf{A}^2$ e siano $\mathbf{b_1}$, $\mathbf{b_2}$, ..., $\mathbf{b_n} \in \mathbb{C}^n$ le colonne di $\mathbf{A}$. Si provi che $\|\mathbf{b_i}\|_2^2 = a_{ii}$ per ogni $i = 1, \dots, n$.

$\boxed{3}$ Si verifichi che $\phi : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ definita da $\phi(\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}) = |2a - b| + |a + c| + |ib|$ è una norma.

$\boxed{4}$ Siano V uno spazio vettoriale, $\mathcal{B} = \{\mathbf{v_1}; \dots; \mathbf{v_n}\}$ una sua base ordinata e $C_\mathcal{B} : V \to \mathbb{C}^n$ l'applicazione delle coordinate rispetto a $\mathcal{B}$. Si provi che la funzione $\|\cdot\|_\mathcal{B} : V \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ definita da $\|\mathbf{w}\|_\mathcal{B} = \|C_\mathcal{B}(\mathbf{w})\|_\infty$ per ogni $\mathbf{w} \in V$ è una norma.

$\boxed{5}$ Si verifichi che la posizione $(\cdot|\cdot) : M_2(\mathbb{C}) \times M_2(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$

$$\left(\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} \,\Big|\, \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{pmatrix}\right) = \sum_{i=1}^{4} \overline{a_i} b_i.$$

definisce un prodotto interno.

$\boxed{6}$ Sia $V = \mathbb{C}^2$. Si dica quali delle seguenti posizioni definisce un prodotto interno:

(*a*) $(\cdot|\cdot) : \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$ definita da $\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \,\Big|\, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) = \overline{x}_1 y_1 - 3\overline{x}_2 y_2$

(*b*) $(\cdot|\cdot) : \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$ definita da $\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \,\Big|\, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) = \overline{x}_1 y_1 + 3\overline{x}_2 y_2$

$\boxed{7}$ Sia $\|\cdot\| : M_2(\mathbb{C}) \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ la norma indotta dal prodotto interno definito nell'esercizio $\boxed{5}$. Si trovino tutte le matrici complesse scalari $\mathbf{A}$ di ordine 2 tali che $\|\mathbf{A}\| = 2\sqrt{2}$.

$\boxed{8}$ Siano $\mathbf{u} = \mathbf{e_1} + \mathbf{e_2}$ e $\|\cdot\| : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ la norma indotta dal prodotto interno definito nell'Esercizio Tipo 17.

(*a*) Si trovino tutti i vettori $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ tali che $\|\mathbf{x}\| = \|\mathbf{x}\|_2$.

(*b*) Si calcolino $\cos(\widehat{\mathbf{e_1}\mathbf{u}})$ e $\cos(\widehat{\mathbf{e_2}\mathbf{u}})$.

$\boxed{9}$ Si trovi una base ortonormale del sottospazio $V = \left\langle \begin{pmatrix} i \\ -1 \\ i \\ -1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} -1 \\ -i \\ -1 \\ -i \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2i \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$ di $\mathbb{C}^4$.

$\boxed{10}$ Si consideri il sottospazio $W = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 2i \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1+2i \end{pmatrix} \right\rangle$ di $M_2(\mathbb{C})$. Si trovi una base ortonormale di W rispetto al prodotto interno $(\cdot|\cdot) : M_2(\mathbb{C}) \times M_2(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ definito nell'esercizio $\boxed{5}$.

ESERCIZI PER CASA 9

$\boxed{1}$ Si calcoli la proiezione ortogonale di $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 2i \\ -6 \\ 8i \\ 10 \end{pmatrix}$ sul sottospazio $U = \langle \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 8i \\ 0 \\ -i \\ 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 7i \\ -1 \\ -i \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$ di $\mathbb{C}^3$.

$\boxed{2}$ Siano W e $(\cdot|\cdot) : M_2(\mathbb{C}) \times M_2(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ come nell'esercizio $\boxed{5}$ degli "Esercizi per casa 8". Si calcoli la proiezione ortogonale $P_W(\mathbf{v})$ di $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 & i \\ 2i & 3\sqrt{5} \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{C})$ su W rispetto al prodotto interno $(\cdot|\cdot)$.

$\boxed{3}$ Siano $V_1 = \langle \begin{pmatrix} 0 \\ i \\ 2 \end{pmatrix} \rangle$ e $V_2 = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 1 \\ i \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} i \\ -1 \\ i \\ -1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$. Si trovino basi di $V_1^{\perp}$ e $V_2^{\perp}$.

$\boxed{4}$ Siano W e $(\cdot|\cdot) : M_2(\mathbb{C}) \times M_2(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ come nell'esercizio $\boxed{5}$ degli "esercizi per casa 8". Si trovi il complemento ortogonale $W^{\perp}$ di W in $M_2(\mathbb{C})$ rispetto al prodotto interno $(\cdot|\cdot)$.

$\boxed{5}$ Sia $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & i & -2 & 9i \\ i & -1 & -2i & 0 \\ -1 & -i & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

(a) Si trovino una decomposizione $\mathbf{Q_0R_0}$-non-normalizzata ed una decomposizione $\mathbf{QR}$-normalizzata per $\mathbf{A}$.

(b) Si calcoli la matrice di proiezione sullo spazio delle colonne $C(\mathbf{A})$ di $\mathbf{A}$.

$\boxed{6}$ Siano $\mathbf{0} \neq \mathbf{v} \in \mathbb{R}^m$, $\alpha \in \mathbb{R}$ ed $\mathbf{A}(\alpha) = (\mathbf{v} \quad \alpha\mathbf{v})$. Si trovino:

(a) una decomposizione $\mathbf{Q_0R_0}$-non-normalizzata per $\mathbf{A}(\alpha)$;

(b) una decomposizione $\mathbf{QR}$-normalizzata per $\mathbf{A}(\alpha)$;

(c) la matrice di proiezione sullo spazio delle colonne $C(\mathbf{A}(\alpha))$ di $\mathbf{A}(\alpha)$.

$\boxed{7}$ Si calcoli il determinante delle seguenti matrici:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2-i & 1 & 0 \\ 2 & 1+i & 3 \\ i & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} i & 1 & 1+i \\ -1 & 1 & 2 \\ i & i & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1+i \end{pmatrix}.$$

$\boxed{8}$ Sia $\mathbf{A}(\alpha) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \alpha & 0 & 1 \\ 4 & \alpha-1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 3\alpha-1 & 1 \end{pmatrix}$, dove $\alpha \in \mathbb{R}$. Si dica per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ si ha che $\mathbf{A}(\alpha)$ è non singolare (sugg.: si calcoli il determinante $\mathrm{Det}(\mathbf{A}(\alpha))$ di $\mathbf{A}(\alpha)$).

$\boxed{9}$ Sia $\mathbf{A}$ una matrice quadrata non singolare e sia $\mathbf{P}$ la matrice di proiezione sullo spazio delle colonne $C(\mathbf{A})$ di $\mathbf{A}$. Si provi che $\mathrm{Det}(\mathbf{P}) \in \{0, 1\}$.

SVOLGIMENTO DEGLI ESERCIZI PER CASA

Algebra Lineare 1 A, Svolgimento degli Esercizi per casa 1

$\boxed{1}$ Per ciascuno dei seguenti numeri complessi

$$z_1 = i, \quad z_2 = -3i, \quad z_3 = 1 - 2i \quad \text{e} \quad z_4 = 5 + 3i$$

si calcolino il modulo ed il coniugato, e si scriva l'inverso in forma algebrica.

$$\begin{aligned}
|z_1| &= |i| = \sqrt{0^2 + 1^2} = \sqrt{1} = 1 \quad \text{e} \quad \overline{z}_1 = -i \\
|z_2| &= |-3i| = \sqrt{0^2 + (-3)^2} = \sqrt{9} = 3 \quad \text{e} \quad \overline{z}_2 = 3i \\
|z_3| &= |1 - 2i| = \sqrt{1^2 + (-2)^2} = \sqrt{1 + 4} = \sqrt{5} \quad \text{e} \quad \overline{z}_3 = 1 + 2i \\
|z_4| &= |5 + 3i| = \sqrt{5^2 + 3^2} = \sqrt{25 + 9} = \sqrt{34} \quad \text{e} \quad \overline{z}_4 = 5 - 3i
\end{aligned}$$

Siano $w_1 = z_1^{-1}$, $w_2 = z_2^{-1}$, $w_3 = z_3^{-1}$ e $w_4 = z_4^{-1}$. Allora

$$w_1 = \frac{1}{z_1} = \frac{1}{i} = \frac{1}{i} \cdot \frac{\overline{i}}{\overline{i}} = \frac{1}{i} \cdot \frac{(-i)}{(-i)} = \frac{-i}{-i^2} = \frac{-i}{1} = -i$$

è la forma algebrica di w_1: $a_1 = 0$ e $b_1 = -1$ sono la parte reale e la parte immaginaria di w_1;

$$w_2 = \frac{1}{z_2} = \frac{1}{-3i} = \frac{1}{-3i} \cdot \frac{\overline{-3i}}{\overline{-3i}} = \frac{1}{-3i} \cdot \frac{3i}{3i} = \frac{3i}{-9i^2} = \frac{3i}{9} = \frac{1}{3}i$$

è la forma algebrica di w_2: $a_2 = 0$ e $b_2 = 1/3$ sono la parte reale e la parte immaginaria di w_2;

$$w_3 = \frac{1}{z_3} = \frac{1}{1 - 2i} = \frac{1}{1 - 2i} \cdot \frac{\overline{1 - 2i}}{\overline{1 - 2i}} = \frac{1}{1 - 2i} \cdot \frac{1 + 2i}{1 + 2i} = \frac{1 + 2i}{1^2 - (2i)^2} = \frac{1 + 2i}{1^2 - 4i^2} = \frac{1 + 2i}{1 + 4} = \frac{1}{5} + \frac{2}{5}i$$

è la forma algebrica di w_3: $a_3 = 1/5$ e $b_3 = 2/5$ sono la parte reale e la parte immaginaria di w_3;

$$w_4 = \frac{1}{z_4} = \frac{1}{5 + 3i} = \frac{1}{5 + 3i} \cdot \frac{\overline{5 + 3i}}{\overline{5 + 3i}} = \frac{1}{5 + 3i} \cdot \frac{5 - 3i}{5 - 3i} = \frac{5 - 3i}{5^2 - (3i)^2} = \frac{5 - 3i}{5^2 - 9i^2} = \frac{5 - 3i}{25 + 9} = \frac{5}{34} - \frac{3}{34}i$$

è la forma algebrica di w_4: $a_4 = 5/34$ e $b_4 = -3/34$ sono la parte reale e la parte immaginaria di w_4.

$\boxed{2}$ Quali sono i numeri complessi z tali che $z = -\overline{z}$?

Scrivendo $z \in \mathbb{C}$ in forma algebrica, si ha $z = a + ib$ con $a, b \in \mathbb{R}$. Il coniugato $\overline{z}$ di z è $\overline{z} = a - ib$, e $-\overline{z} = -a + ib$. Poichè

$$a + ib = -a + ib \iff a = -a \iff a = 0,$$

si ottiene che

$$z = -\overline{z} \iff z = ib, \text{ con } b \in \mathbb{R},$$

ossia z è l'opposto del suo coniugato se e solo se z è un numero immaginario puro.

$\boxed{3}$ Si scrivano in forma trigonometrica i numeri complessi $z_1 = 3\sqrt{3} + 3i$ e $z_2 = 3\sqrt{2}(1 + i)$ ed in forma algebrica il numero complesso $w = 4(\cos(\frac{2}{3}\pi) + i\sin(\frac{2}{3}\pi))$.

La forma trigonometrica di z_1 è $z_1 = |z_1|(\cos\alpha_1 + i\sin\alpha_1)$ dove $|z_1| = \sqrt{(3\sqrt{3})^2 + 3^2} = \sqrt{27+9} = \sqrt{36} = 6$ e

$$\begin{cases} \cos\alpha_1 = \frac{3\sqrt{3}}{|z_1|} = \frac{3\sqrt{3}}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \\ \sin\alpha_1 = \frac{3}{|z_1|} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \end{cases}$$

per cui $\alpha_1 = \frac{1}{6}\pi$. Analogamente, la forma trigonometrica di z_2 è $z_2 = |z_2|(\cos\alpha_2 + i\sin\alpha_2)$ dove $|z_2| = \sqrt{(3\sqrt{2})^2 + (3\sqrt{2})^2} = \sqrt{18+18} = \sqrt{36} = 6$ e

$$\begin{cases} \cos\alpha_2 = \frac{3\sqrt{2}}{|z_2|} = \frac{3\sqrt{2}}{6} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \\ \sin\alpha_2 = \frac{3\sqrt{2}}{|z_2|} = \frac{3\sqrt{2}}{6} = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

per cui $\alpha_2 = \frac{1}{4}\pi$. Poichè $\cos(\frac{2}{3}\pi) = -\frac{1}{2}$ e $\sin(\frac{2}{3}\pi) = \frac{\sqrt{3}}{2}$,

$$w = 4\Big(-\frac{1}{2} + i\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\Big) = -2 + 2\sqrt{3}i.$$

$\boxed{4}$ Di ciascuna delle seguenti matrici si dica se è scalare, diagonale, triangolare superiore, triangolare inferiore o nessuna delle precedenti:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 5 & 5 & 0 \\ 5 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 & 0 & 5 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

scalari: $\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$

diagonali: $\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$

triang. sup.: $\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 & 0 & 5 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$

triang. inf.: $\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 5 & 5 & 0 \\ 5 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$

nessuna delle precedenti: $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \end{pmatrix}$

$\boxed{5}$ Siano $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 1 & -3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 4 & -2 & -3 \end{pmatrix}$, $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ e $\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 0 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$.

Si calcoli $\mathbf{B}(\mathbf{DC} - 2\mathbf{A}) + 4\mathbf{C}$.

$$4\mathbf{C} = 4\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 4 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{DC} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 0 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4\times 2 + 2\times 0 & 4\times 1 + 2\times 1 \\ 1\times 2 + 0\times 0 & 1\times 1 + 0\times 1 \\ (-1)\times 2 + (-2)\times 0 & (-1)\times 1 + (-2)\times 1 \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} 8+0 & 4+2 \\ 2+0 & 1+0 \\ -2+0 & -1-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 6 \\ 2 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$$

$$-2\mathbf{A} = -2\begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 1 & -3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 & 0 \\ -2 & 6 \\ -4 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{DC} - 2\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 8 & 6 \\ 2 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -12 & 0 \\ -2 & 6 \\ -4 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 6 \\ 0 & 7 \\ -6 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{DC} - 2\mathbf{A}) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 4 & -2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 & 6 \\ 0 & 7 \\ -6 & 1 \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} 2\times(-4) + 1\times 0 + 0\times(-6) & 2\times 6 + 1\times 7 + 0\times 1 \\ 4\times(-4) - 2\times 0 - 3\times(-6) & 4\times 6 - 2\times 7 - 3\times 1 \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} -8+0+0 & 12+7+0 \\ -16+0+18 & 24-14-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & 19 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{DC} - 2\mathbf{A}) + 4\mathbf{C} = \begin{pmatrix} -8 & 19 \\ 2 & 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 8 & 4 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 23 \\ 2 & 11 \end{pmatrix}$$

$\boxed{6}$ Sia $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

(a) Si trovino tutte le matrici reali $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ tali che $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$.

(b) Si trovino tutte le matrici reali 2×2 $\mathbf{C}$ tali che $\mathbf{AC} = \mathbf{O}$.

(a) Poichè

$$\mathbf{AB} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+z & y+t \\ x+z & y+t \end{pmatrix} \quad \text{e}$$
$$\mathbf{BA} = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y & x+y \\ z+t & z+t \end{pmatrix},$$

la condizione $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$ equivale a $\begin{cases} x+z=x+y \\ y+t=x+y \\ x+z=z+t \\ y+t=z+t \end{cases}$, ossia a $\begin{cases} z=y \\ \\ t=x \end{cases}$

Dunque le matrici reali 2×2 $\mathbf{B}$ tali che $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$ sono tutte e sole le matrici del tipo

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} x & y \\ y & x \end{pmatrix}, \qquad \text{dove} \qquad x, y \in \mathbb{R}.$$

(b) Siano $x, y, z, t \in \mathbb{R}$ tali che $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$. Poichè

$$\mathbf{AC} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+z & y+t \\ x+z & y+t \end{pmatrix}$$

la condizione $\mathbf{AC} = \mathbf{O} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ equivale a $\begin{cases} x+z=0 \\ \\ y+t=0 \end{cases}$ ossia $\begin{cases} z=-x \\ \\ t=-y \end{cases}$ Dunque le matrici reali 2×2 $\mathbf{C}$ tali che $\mathbf{AC} = \mathbf{O}$ sono tutte e sole le matrici del tipo

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} x & y \\ -x & -y \end{pmatrix}, \qquad \text{dove} \qquad x, y \in \mathbb{R}.$$

$\boxed{7}$ Si trovino tutte le matrici reali 2×2 $\mathbf{A}$ triangolari superiori tali che $\mathbf{A}^2 = \mathbf{I}_2$.

Sia $\mathbf{A}$ una matrice reale 2×2 triangolare superiore. Dunque $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & z \end{pmatrix}$, con $x, y, z \in \mathbb{R}$. Poichè

$$\mathbf{A}^2 = \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2 & xy+yz \\ 0 & z^2 \end{pmatrix},$$

allora

$$\mathbf{A}^2 = \mathbf{I}_2 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{cases} x^2 = 1 \\ z^2 = 1 \\ y(x+z) = 0 \end{cases}$$

Dalle prime due equazioni si ottiene che $x, z \in \{1, -1\}$.

Se $z = -x$ (ossia se $\{x, z\} = \{1, -1\}$), l'ultima equazione è soddisfatta per ogni valore di y. Si ottengono cosí le famiglie di matrici

$$\begin{pmatrix} 1 & y \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, y \in \mathbb{R}.$$

Se $z \neq -x$ (per cui $z = x = 1$ oppure $z = x = -1$), dall'ultima equazione si deduce, dividendo ambo i membri per $x + z \neq 0$, che $y = 0$. Si ottengono cosí le due matrici

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

$\boxed{8}$ Si trovino tutte le matrici reali 2×2 $\mathbf{A}$ triangolari superiori tali che $\mathbf{A}^2 = \mathbf{A}$.

Sia $\mathbf{A}$ una matrice reale 2×2 triangolare superiore. Dunque $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & z \end{pmatrix}$, con $x, y, z \in \mathbb{R}$. Poichè

$$\mathbf{A}^2 = \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2 & xy + yz \\ 0 & z^2 \end{pmatrix},$$

allora

$$\mathbf{A}^2 = \mathbf{A} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} x^2 = x \\ z^2 = z \\ y(x+z) = y \end{cases}$$

Dalle prime due equazioni si ottiene che $x, z \in \{0, 1\}$.

• Se $x = 0 = z$, dalla terza equazione si ottiene $y = 0$, e quindi la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

• Se $x = 0$ e $z = 1$, la terza equazione è soddisfatta per ogni valore di y. Si ottiene cosí la famiglia di matrici $\begin{pmatrix} 0 & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $y \in \mathbb{R}$.

• Se $x = 1$ e $z = 0$, la terza equazione è soddisfatta per ogni valore di y. Si ottiene cosí la famiglia di matrici $\begin{pmatrix} 1 & y \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $y \in \mathbb{R}$.

• Se $x = 1 = z$, dalla terza equazione si ottiene $2y = 0$, per cui $y = 0$, e quindi la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

$\boxed{9}$ Si trovino tutte le matrici reali 2×2 $\mathbf{A}$ tali che $\mathbf{A}^2 = \mathbf{O}$.

Sia $\mathbf{A}$ una matrice reale 2×2. Dunque $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$, con $x, y, z, t \in \mathbb{R}$. Poichè

$$\mathbf{A}^2 = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2 + yz & xy + yt \\ zx + tz & zy + t^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2 + yz & (x+t)y \\ (x+t)z & zy + t^2 \end{pmatrix},$$

allora

$$\mathbf{A}^2 = \mathbf{O} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} x^2 + yz = 0 \\ (x+t)y = 0 \\ (x+t)z = 0 \\ zy + t^2 = 0 \end{cases}$$

Per la legge di cancellazione del prodotto, dall'equazione

$$(x+t)y = 0$$

si deduce

$$y = 0 \qquad \text{o} \qquad x + t = 0.$$

Conviene quindi dividere il problema in due parti:

(•) trovare tutte e sole le (eventuali) matrici $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} x & 0 \\ z & t \end{pmatrix}$, con $x, z, t \in \mathbb{R}$ tali che $\mathbf{A}^2 = \mathbf{O}$ (quelle cioé, tra le eventuali soluzioni del nostro prolema, che hanno $y = 0$),

(••) trovare tutte e sole le (eventuali) matrici $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$, con $x, y, z, t \in \mathbb{R}$ e $y \neq 0$ tali che $\mathbf{A}^2 = \mathbf{O}$. **In questo secondo caso, deve essere $x + t = 0$.**

Cerchiamo le soluzioni di ($\bullet$).

Da $\begin{cases} x^2+yz=0 \\ (x+t)y=0 \\ (x+t)z=0 \\ zy+t^2=0 \end{cases}$, ricaviamo, se $y=0$, il sistema $\begin{cases} x^2=0 \\ (x+t)z=0 \\ t^2=0 \end{cases}$

La 1^a e 3^a equazione danno $x=0$ e $t=0$ rispettivamente. Ponendo $x=0=t$ nella 2^a equazione otteniamo $(0+0)z=0$, che è soddisfatta per ogni $z\in\mathbb{R}$. Allora le matrici

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ z & 0 \end{pmatrix}, \quad z\in\mathbb{R}$$

sono tutte e sole le matrici reali 2×2 triangolari inferiori (ossia, nelle nostre notazioni iniziali, con $y=0$) il cui quadrato è $\mathbf{O}$.

Cerchiamo le soluzioni di ($\bullet\bullet$).

Ponendo $x+t=0$ in $\begin{cases} x^2+yz=0 \\ (x+t)y=0 \\ (x+t)z=0 \\ zy+t^2=0 \end{cases}$, otteniamo il sistema $\begin{cases} x+t=0 \\ x^2+yz=0 \\ zy+t^2=0 \end{cases}$, di cui dobbiamo trovare le soluzioni con $y\neq 0$.

Dalla 1^a equazione si ricava $t=-x$, e, **essendo** $y\neq 0$, dalla 2^a equazione si ricava $z=-x^2/y$ (sostituendo poi $t=-x$ e $z=-x^2/y$ in $zy+t^2$, si ottiene $zy+t^2=(-x^2/y)\cdot y+(-x)^2=-x^2+x^2=0$, per cui la 3^a equazione non dà contributo).

Dunque le matrici

$$\begin{pmatrix} x & y \\ -x^2/y & -x \end{pmatrix}, \quad x,y\in\mathbb{R}, \quad y\neq 0$$

sono tutte e sole le matrici reali 2×2 non triangolari inferiori (ossia, nelle nostre notazioni iniziali, con $y\neq 0$) il cui quadrato è $\mathbf{O}$.

Concludendo, le matrici reali 2×2 il cui quadrato è nullo sono gli elementi del seguente insieme:

$$\left\{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ z & 0 \end{pmatrix} \middle| z\in\mathbb{R}\right\} \quad \cup \quad \left\{\begin{pmatrix} x & y \\ -x^2/y & -x \end{pmatrix} \middle| x,y\in\mathbb{R}, \quad y\neq 0\right\}$$

$\boxed{10}$ Sia $\mathbf{A}$ una matrice reale $m\times 2$ non nulla in cui la prima colonna è il doppio della seconda. Si trovino tutte le matrici reali diagonali $\mathbf{D}$ per cui ciascuna colonna di $\mathbf{AD}$ è il doppio della seguente.

Poichè $\mathbf{A}$ ha due colonne ed esiste $\mathbf{AD}$, allora $\mathbf{D}$ ha due righe. Quindi, essendo $\mathbf{D}$ diagonale reale, è $\mathbf{D}=\begin{pmatrix} d_1 & 0 \\ 0 & d_2 \end{pmatrix}$ per opportuni numeri reali d_1 e d_2.

Siano $\mathbf{c_1}$ e $\mathbf{c_2}$ la prima e la seconda colonna di $\mathbf{A}$ rispettivamente. Avendo $\mathbf{A}$ m righe, $\mathbf{c_1}$ e $\mathbf{c_2}$ sono vettori colonna con m coordinate. Inoltre per ipotesi $\mathbf{c_1}=2\mathbf{c_2}$, per cui $\mathbf{A}=(\,\mathbf{c_1} \quad \mathbf{c_2}\,)=(\,2\mathbf{c_2} \quad \mathbf{c_2}\,)$. Dunque

$$\mathbf{AD}=(\,2\mathbf{c_2} \quad \mathbf{c_2}\,)\begin{pmatrix} d_1 & 0 \\ 0 & d_2 \end{pmatrix}=(\,2d_1\mathbf{c_2} \quad d_2\mathbf{c_2}\,).$$

La condizione che ciascuna colonna di $\mathbf{AD}$ sia il doppio della seguente dà

$$2d_1\mathbf{c_2}=2(d_2\mathbf{c_2})=2d_2\mathbf{c_2}$$

ossia

$$(2d_1 - 2d_2)\mathbf{c_2} = \mathbf{0}$$

Se fosse $\mathbf{c_2} = \mathbf{0}$ non potremmo trarre alcuna conclusione.

Ma $\mathbf{c_2} \neq \mathbf{0}$, essendo $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2\mathbf{c_2} & \mathbf{c_2} \end{pmatrix} \neq \mathbf{O}$ per ipotesi. Allora

$$\begin{cases} (2d_1 - 2d_2)\mathbf{c_2} = \mathbf{0} \\ \\ \mathbf{c_2} \neq \mathbf{0} \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad 2d_1 - 2d_2 = 0 \quad \Longrightarrow \quad d_1 = d_2$$

per cui le soluzioni del nostro problema sono esattamente le matrici del tipo $\mathbf{D} = \begin{pmatrix} d & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}$ con d numero reale, ossia le matrici reali scalari di ordine 2.

Algebra Lineare 1 A, Svolgimento degli Esercizi per casa 2

$\boxed{1}$ Siano $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2-3i & 1+i \\ 0 & i \\ 1-i & 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 1+i \end{pmatrix}$, $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 3+5i \\ 6 \\ 2-2i \end{pmatrix}$, $\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 7+i & 2+3i \\ 3-2i & 0 \end{pmatrix}$.

(a) Di ciascuna delle precedenti matrici si calcolino la trasposta, la coniugata e la H-trasposta.

(b) Si calcoli $(\mathbf{A}^H\overline{\mathbf{C}} + i\mathbf{B}^T)\overline{\mathbf{B}} + (1+3i)\mathbf{D}^H$.

$$\mathbf{A}^T = \begin{pmatrix} 2-3i & 0 & 1-i \\ 1+i & i & 1 \end{pmatrix} \qquad \overline{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} 2+3i & 1-i \\ 0 & -i \\ 1+i & 1 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{A}^H = \begin{pmatrix} 2+3i & 0 & 1+i \\ 1-i & -i & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{B}^T = \begin{pmatrix} 2 \\ 1+i \end{pmatrix} \qquad \overline{\mathbf{B}} = \begin{pmatrix} 2 & 1-i \end{pmatrix} \qquad \mathbf{B}^H = \begin{pmatrix} 2 \\ 1-i \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{C}^T = \begin{pmatrix} 3+5i & 6 & 2-2i \end{pmatrix} \qquad \overline{\mathbf{C}} = \begin{pmatrix} 3-5i \\ 6 \\ 2+2i \end{pmatrix} \qquad \mathbf{C}^H = \begin{pmatrix} 3-5i & 6 & 2+2i \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{D}^T = \begin{pmatrix} 7+i & 3-2i \\ 2+3i & 0 \end{pmatrix} \qquad \overline{\mathbf{D}} = \begin{pmatrix} 7-i & 2-3i \\ 3+2i & 0 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{D}^H = \begin{pmatrix} 7-i & 3+2i \\ 2-3i & 0 \end{pmatrix}$$

$(\mathbf{A}^H\overline{\mathbf{C}} + i\mathbf{B}^T)\overline{\mathbf{B}} + (1+3i)\mathbf{D}^H =$

$$= (\begin{pmatrix} 2+3i & 0 & 1+i \\ 1-i & -i & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3-5i \\ 6 \\ 2+2i \end{pmatrix} + i\begin{pmatrix} 2 \\ 1+i \end{pmatrix})\begin{pmatrix} 2 & 1-i \end{pmatrix} + (1+3i)\begin{pmatrix} 7-i & 3+2i \\ 2-3i & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= (\begin{pmatrix} (2+3i)(3-5i)+(1+i)(2+2i) \\ (1-i)(3-5i)-6i+2+2i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2i \\ i(1+i) \end{pmatrix})\begin{pmatrix} 2 & 1-i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} (1+3i)(7-i) & (1+3i)(3+2i) \\ (1+3i)(2-3i) & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 6+9i-10i+15+2+2i+2i-2 \\ 3-3i-5i-5-6i+2+2i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ -1+i \end{pmatrix})\begin{pmatrix} 2 & 1-i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7+21i-i+3 & 3+9i+2i-6 \\ 2+6i-3i+9 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= (\begin{pmatrix} 21+3i \\ -12i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2i \\ -1+i \end{pmatrix})\begin{pmatrix} 2 & 1-i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 10+20i & -3+11i \\ 11+3i & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 21+5i \\ -1-11i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1-i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 10+20i & -3+11i \\ 11+3i & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2(21+5i) & (21+5i)(1-i) \\ 2(-1-11i) & (-1-11i)(1-i) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 10+20i & -3+11i \\ 11+3i & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 42+10i & 21+5i-21i+5 \\ -2-22i & -1-11i+i-11 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 10+20i & -3+11i \\ 11+3i & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 42+10i & 26-16i \\ -2-22i & -12-10i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 10+20i & -3+11i \\ 11+3i & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 52+30i & 23-5i \\ 9-19i & -12-10i \end{pmatrix}$$

$\boxed{2}$ Di ciascuna delle seguenti matrici si dica se è simmetrica, anti-simmetrica, hermitiana, anti-hermitiana o nessuna delle precedenti:

$$\begin{pmatrix} 2 & 2+3i \\ 2-3i & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 2+3i \\ 2+3i & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2+3i \\ -2+3i & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2+3i \\ -2-3i & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

simmetriche: $\begin{pmatrix} 2 & 2+3i \\ 2+3i & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

anti-simmetriche: $\begin{pmatrix} 0 & 2+3i \\ -2-3i & 0 \end{pmatrix}$

hermitiane: $\begin{pmatrix} 2 & 2+3i \\ 2-3i & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

anti-hermitiane: $\begin{pmatrix} 0 & 2+3i \\ -2+3i & 0 \end{pmatrix}$

nessuna delle precedenti: $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$\boxed{3}$ Siano $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ e $\mathbf{C}$ matrici complesse quadrate di ordine n. Si supponga che $\mathbf{A}$ sia anti-hermitiana, $\mathbf{B}$ sia reale e $\mathbf{C}$ sia simmetrica. Si provi che

(a) $(\mathbf{AB}+\mathbf{C})^H + \mathbf{B}^T\mathbf{A} = \overline{\mathbf{C}}$;

(b) $[(\mathbf{A}+\mathbf{B}^T)\overline{\mathbf{C}}]^H - (\overline{\mathbf{A}}\mathbf{C})^T = \mathbf{CB}$.

Poichè $\mathbf{A}$ è anti-hermitiana, $\mathbf{B}$ è reale e $\mathbf{C}$ è simmetrica, si ha

$$(i) \quad \mathbf{A}^H = -\mathbf{A}, \qquad (ii) \quad \overline{\mathbf{B}} = \mathbf{B}, \qquad (iii) \quad \mathbf{C}^T = \mathbf{C}.$$

(a) $$(\mathbf{AB}+\mathbf{C})^H + \mathbf{B}^T\mathbf{A} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{l'H-trasposta di una somma è la somma delle H-trasposte}}}{=}$$

$$= (\mathbf{AB})^H + \mathbf{C}^H + \mathbf{B}^T\mathbf{A} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{l'H-trasposta di un prodotto è il prodotto delle H-trasposte in ordine scambiato}}}{=}$$

$$= \mathbf{B}^H\mathbf{A}^H + \mathbf{C}^H + \mathbf{B}^T\mathbf{A} \underset{\mathbf{B}=\overline{\mathbf{B}} \Longrightarrow \mathbf{B}^H=\overline{\mathbf{B}}^H=(\overline{\overline{\mathbf{B}}})^T=\mathbf{B}^T}{\underset{\uparrow}{=}}$$

$$= \mathbf{B}^T\mathbf{A}^H + \mathbf{C}^H + \mathbf{B}^T\mathbf{A} \underset{(i)}{\underset{\uparrow}{=}}$$

$$= \mathbf{B}^T(-\mathbf{A}) + \mathbf{C}^H + \mathbf{B}^T\mathbf{A} \underset{\mathbf{X}(\alpha\mathbf{Y})=\alpha\mathbf{X}\mathbf{Y} \quad \forall \mathbf{X},\mathbf{Y}\in M_n(\mathbb{C}),\alpha\in\mathbb{C}}{\underset{\uparrow}{=}}$$

$$= -\mathbf{B}^T\mathbf{A} + \mathbf{C}^H + \mathbf{B}^T\mathbf{A} =$$

$$= \mathbf{C}^H \underset{\mathbf{C}=\mathbf{C}^T \Longrightarrow \mathbf{C}^H=(\mathbf{C}^T)^H=\overline{(\mathbf{C}^T)^T}=\overline{\mathbf{C}}}{\underset{\uparrow}{=}} \overline{\mathbf{C}}.$$

(b)

$$((\mathbf{A}+\mathbf{B}^T)\overline{\mathbf{C}})^H - (\overline{\mathbf{A}}\mathbf{C})^T \underset{\text{l'H-trasposta di un prodotto è il prodotto delle H-trasposte in ordine scambiato}}{\underset{\uparrow}{=}}$$

$$= \overline{\mathbf{C}}^H(\mathbf{A}+\mathbf{B}^T)^H - (\overline{\mathbf{A}}\mathbf{C})^T \underset{\text{l'H-trasposta di una somma è la somma delle H-trasposte}}{\underset{\uparrow}{=}}$$

$$= \overline{\mathbf{C}}^H(\mathbf{A}^H+(\mathbf{B}^T)^H) - (\overline{\mathbf{A}}\mathbf{C})^T \underset{\text{la trasposta di un prodotto è il prodotto delle trasposte in ordine scambiato}}{\underset{\uparrow}{=}}$$

$$= \overline{\mathbf{C}}^H(\mathbf{A}^H+(\mathbf{B}^T)^H) - \mathbf{C}^T\overline{\mathbf{A}}^T \underset{\overline{\mathbf{X}}^H=(\overline{\overline{\mathbf{X}}})^T=\mathbf{X}^T \quad \forall \mathbf{X}}{\underset{\uparrow}{=}}$$

$$= \mathbf{C}^T(\mathbf{A}^H+(\mathbf{B}^T)^H) - \mathbf{C}^T\overline{\mathbf{A}}^T \underset{(\mathbf{X}^T)^H=\overline{(\mathbf{X}^T)^T}=\overline{\mathbf{X}} \quad \forall \mathbf{X}}{\underset{\uparrow}{=}}$$

$$= \mathbf{C}^T(\mathbf{A}^H+\overline{\mathbf{B}}) - \mathbf{C}^T\overline{\mathbf{A}}^T \underset{\overline{\mathbf{X}}^T=\mathbf{X}^H \quad \forall \mathbf{X}}{\underset{\uparrow}{=}}$$

$$= \mathbf{C}^T(\mathbf{A}^H+\overline{\mathbf{B}}) - \mathbf{C}^T\mathbf{A}^H \underset{(iii)}{\underset{\uparrow}{=}}$$

$$= \mathbf{C}(\mathbf{A}^H+\overline{\mathbf{B}}) - \mathbf{C}\mathbf{A}^H \underset{(i)}{\underset{\uparrow}{=}}$$

$$= \mathbf{C}(-\mathbf{A}+\overline{\mathbf{B}}) - \mathbf{C}(-\mathbf{A}) \underset{\text{proprietà distributiva}}{\underset{\uparrow}{=}}$$

$$= \mathbf{C}(-\mathbf{A}) + \mathbf{C}\overline{\mathbf{B}} - \mathbf{C}(-\mathbf{A}) = \mathbf{C}\overline{\mathbf{B}} \underset{(ii)}{\underset{\uparrow}{=}} \mathbf{C}\mathbf{B}.$$

$\boxed{4}$ Si calcolino la parte hermitiana e la parte anti-hermitiana della matrice complessa $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2+i & -2 \\ 3 & 1-i \end{pmatrix}$.

Poichè $\mathbf{A}^H = \begin{pmatrix} 2-i & 3 \\ -2 & 1+i \end{pmatrix}$, la parte hermitiana di $\mathbf{A}$ è

$$\mathbf{B} = \frac{\mathbf{A}+\mathbf{A}^H}{2} = \frac{1}{2}(\begin{pmatrix} 2+i & -2 \\ 3 & 1-i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2-i & 3 \\ -2 & 1+i \end{pmatrix}) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix},$$

e la parte anti-hermitiana di $\mathbf{A}$ è

$$\mathbf{C} = \frac{\mathbf{A} - \mathbf{A}^H}{2} = \begin{pmatrix} 2+i & -2 \\ 3 & 1-i \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2-i & 3 \\ -2 & 1+i \end{pmatrix}) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2i & -5 \\ 5 & -2i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i & -\frac{5}{2} \\ \frac{5}{2} & -i \end{pmatrix}.$$

Dunque $\mathbf{A} = \mathbf{B} + \mathbf{C}$ con $\mathbf{B}^H = \mathbf{B}$ e $\mathbf{C}^H = -\mathbf{C}$.

$\boxed{5}$ Sia $\mathbf{A}$ una matrice quadrata e siano $\mathbf{B}$ e $\mathbf{C}$ la parte hermitiana e la parte anti-hermitiana di $\mathbf{A}$. Si provi che $\mathbf{BC} = \mathbf{CB}$ se e solo se $\mathbf{AA}^H = \mathbf{A}^H\mathbf{A}$.

Essendo $\mathbf{B} = \frac{1}{2}(\mathbf{A} + \mathbf{A}^H)$ e $\mathbf{C} = \frac{1}{2}(\mathbf{A} - \mathbf{A}^H)$, si ha

$$\mathbf{BC} = \frac{1}{2}(\mathbf{A} + \mathbf{A}^H)\frac{1}{2}(\mathbf{A} - \mathbf{A}^H) = \frac{1}{4}(\mathbf{A} + \mathbf{A}^H)(\mathbf{A} - \mathbf{A}^H) = \frac{1}{4}(\mathbf{A}^2 + \mathbf{A}^H\mathbf{A} - \mathbf{AA}^H - (\mathbf{A}^H)^2)$$

e

$$\mathbf{CB} = \frac{1}{2}(\mathbf{A} - \mathbf{A}^H)\frac{1}{2}(\mathbf{A} + \mathbf{A}^H) = \frac{1}{4}(\mathbf{A} - \mathbf{A}^H)(\mathbf{A} + \mathbf{A}^H) = \frac{1}{4}(\mathbf{A}^2 - \mathbf{A}^H\mathbf{A} + \mathbf{AA}^H - (\mathbf{A}^H)^2).$$

Dunque

$$\begin{aligned} \mathbf{BC} = \mathbf{CB} &\iff \frac{1}{4}(\mathbf{A}^2 + \mathbf{A}^H\mathbf{A} - \mathbf{AA}^H - (\mathbf{A}^H)^2) = \frac{1}{4}(\mathbf{A}^2 - \mathbf{A}^H\mathbf{A} + \mathbf{AA}^H - (\mathbf{A}^H)^2) \\ &\iff \mathbf{A}^2 + \mathbf{A}^H\mathbf{A} - \mathbf{AA}^H - (\mathbf{A}^H)^2 = \mathbf{A}^2 - \mathbf{A}^H\mathbf{A} + \mathbf{AA}^H - (\mathbf{A}^H)^2 \\ &\iff \mathbf{A}^H\mathbf{A} - \mathbf{AA}^H = -\mathbf{A}^H\mathbf{A} + \mathbf{AA}^H \\ &\iff 2\mathbf{A}^H\mathbf{A} = 2\mathbf{AA}^H \\ &\iff \mathbf{A}^H\mathbf{A} = \mathbf{AA}^H \end{aligned}$$

$\boxed{6}$ Sia $\mathbf{G}(\mathbf{v})$ la matrice $n \times n$ dipendente dal vettore $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^{n-1}$ definita da $\mathbf{G}(\mathbf{v}) = \begin{pmatrix} 1 & \mid & \mathbf{0}^T \\ - & \mid & --- \\ \mathbf{v} & \mid & \mathbf{I}_{n-1} \end{pmatrix}$.

(a) Si provi che per ogni $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in \mathbb{R}^{n-1}$ esiste $\mathbf{v}_3 \in \mathbb{R}^{n-1}$ tale che $\mathbf{G}(\mathbf{v}_1) \cdot \mathbf{G}(\mathbf{v}_2) = \mathbf{G}(\mathbf{v}_3)$.

(b) Sia $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & \mid & \mathbf{0}^T \\ - & \mid & -- \\ \mathbf{u} & \mid & \mathbf{B} \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{R})$ (per cui $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^{n-1}$ e $\mathbf{B} \in M_{n-1}(\mathbb{R})$).

Si provi che per ogni $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^{n-1}$ esiste $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^{n-1}$ tale che $\mathbf{A} \cdot \mathbf{G}(\mathbf{v}) = \mathbf{G}(\mathbf{w}) \cdot \mathbf{A}$.

(a) Siano $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in \mathbb{R}^{n-1}$. Poichè

$$\mathbf{G}(\mathbf{v}_1) \cdot \mathbf{G}(\mathbf{v}_2) = \begin{pmatrix} 1 & \mid & \mathbf{0}^T \\ - & \mid & --- \\ \mathbf{v}_1 & \mid & \mathbf{I}_{n-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & \mid & \mathbf{0}^T \\ - & \mid & --- \\ \mathbf{v}_2 & \mid & \mathbf{I}_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + \mathbf{0}^T\mathbf{v}_2 & \mid & \mathbf{0}^T + \mathbf{0}^T\mathbf{I}_{n-1} \\ ----- & \mid & ------ \\ \mathbf{v}_1 + \mathbf{I}_{n-1}\mathbf{v}_2 & \mid & \mathbf{v}_1\mathbf{0}^T + \mathbf{I}_{n-1}^2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & \mid & \mathbf{0}^T \\ --- & \mid & --- \\ \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 & \mid & \mathbf{I}_{n-1} \end{pmatrix} = \mathbf{G}(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2),$$

prendendo $\mathbf{v}_3 = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$ si ha $\mathbf{G}(\mathbf{v}_1) \cdot \mathbf{G}(\mathbf{v}_2) = \mathbf{G}(\mathbf{v}_3)$.

(b) Siano $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^{n-1}$. Allora

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{G}(\mathbf{v}) = \mathbf{G}(\mathbf{w}) \cdot \mathbf{A} \iff \begin{pmatrix} 1 & \mid & \mathbf{0}^T \\ - & \mid & -- \\ \mathbf{u} & \mid & \mathbf{B} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \mid & \mathbf{0}^T \\ -- & \mid & -- \\ \mathbf{v} & \mid & \mathbf{I}_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \mid & \mathbf{0}^T \\ -- & \mid & -- \\ \mathbf{w} & \mid & \mathbf{I}_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \mid & \mathbf{0}^T \\ - & \mid & -- \\ \mathbf{u} & \mid & \mathbf{B} \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{pmatrix} 1 + \mathbf{0}^T\mathbf{v} & \mid & \mathbf{0}^T + \mathbf{0}^T\mathbf{I}_{n-1} \\ ----- & \mid & --------- \\ \mathbf{u} + \mathbf{B}\mathbf{v} & \mid & \mathbf{u} \cdot \mathbf{0}^T + \mathbf{B}\mathbf{I}_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + \mathbf{0}^T\mathbf{u} & \mid & \mathbf{0}^T + \mathbf{0}^T\mathbf{B} \\ ----- & \mid & --------- \\ \mathbf{w} + \mathbf{I}_{n-1}\mathbf{u} & \mid & \mathbf{w} \cdot \mathbf{0}^T + \mathbf{I}_{n-1}\mathbf{B} \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{pmatrix} 1 & \mid & \mathbf{0}^T \\ ----- & \mid & ---- \\ \mathbf{u} + \mathbf{B}\mathbf{v} & \mid & \mathbf{B} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \mid & \mathbf{0}^T \\ ----- & \mid & ---- \\ \mathbf{w} + \mathbf{u} & \mid & \mathbf{B} \end{pmatrix}$$

$$\iff \mathbf{u} + \mathbf{B}\mathbf{v} = \mathbf{w} + \mathbf{u}$$
$$\iff \mathbf{w} = \mathbf{B}\mathbf{v}$$

Dunque per ogni $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^{n-1}$ esiste $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^{n-1}$ per cui $\mathbf{A} \cdot \mathbf{G}(\mathbf{v}) = \mathbf{G}(\mathbf{w}) \cdot \mathbf{A}$: si prenda $\mathbf{w} = \mathbf{B}\mathbf{v}$.

$\boxed{7}$ Sia $\mathbf{A} \in M_{n-1}(\mathbb{R})$ una matrice simmetrica e siano $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^{n-1}$ ed $a \in \mathbb{R}$. Si considerino le matrici

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} a & \mid & \mathbf{u}^T \\ - & \mid & -- \\ \mathbf{v} & \mid & \mathbf{A} \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{R}) \quad \text{e} \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} a & \mid & \mathbf{v}^T \\ - & \mid & -- \\ \mathbf{u} & \mid & -\mathbf{A} \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{R}).$$

Si provi che $\mathbf{BC}$ è simmetrica se e solo se $\mathbf{A}\mathbf{u} = \mathbf{0}$.

$\mathbf{BC}$ è simmetrica se e solo se $(\mathbf{BC})^T = \mathbf{BC}$.

Calcolando $\mathbf{BC}$ a blocchi si ottiene:

$$\mathbf{BC} = \begin{pmatrix} a & \mid & \mathbf{u}^T \\ - & \mid & --- \\ \mathbf{v} & \mid & \mathbf{A} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & \mid & \mathbf{v}^T \\ - & \mid & --- \\ \mathbf{u} & \mid & -\mathbf{A} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 + \mathbf{u}^T\mathbf{u} & \mid & a\mathbf{v}^T + \mathbf{u}^T \cdot (-\mathbf{A}) \\ ------ & \mid & ------ \\ \mathbf{v}a + \mathbf{A}\mathbf{u} & \mid & \mathbf{v}\mathbf{v}^T + \mathbf{A} \cdot (-\mathbf{A}) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a^2 + \mathbf{u}^T\mathbf{u} & \mid & a\mathbf{v}^T - \mathbf{u}^T\mathbf{A} \\ ----- & \mid & ------ \\ a\mathbf{v} + \mathbf{A}\mathbf{u} & \mid & \mathbf{v}\mathbf{v}^T - \mathbf{A}^2 \end{pmatrix}$$

da cui

$$(\mathbf{BC})^T = \begin{pmatrix} a^2 + \mathbf{u}^T\mathbf{u} & \mid & (a\mathbf{v} + \mathbf{A}\mathbf{u})^T \\ ----- & \mid & ------ \\ (a\mathbf{v}^T - \mathbf{u}^T\mathbf{A})^T & \mid & (\mathbf{v}\mathbf{v}^T - \mathbf{A}^2)^T \end{pmatrix}.$$

Essendo $\mathbf{A}$ simmetrica, è $\mathbf{A}^T = \mathbf{A}$, per cui

$$(a\mathbf{v}+\mathbf{A}\mathbf{u})^T = (a\mathbf{v})^T + (\mathbf{A}\mathbf{u})^T = a\mathbf{v}^T + \mathbf{u}^T\mathbf{A}^T \underset{\substack{\uparrow\\ \mathbf{A}^T=\mathbf{A}}}{=} a\mathbf{v}^T + \mathbf{u}^T\mathbf{A},$$

$$(a\mathbf{v}^T-\mathbf{u}^T\mathbf{A})^T = (a\mathbf{v}^T)^T - (\mathbf{u}^T\mathbf{A})^T = a(\mathbf{v}^T)^T - \mathbf{A}^T(\mathbf{u}^T)^T = a\mathbf{v} - \mathbf{A}^T\mathbf{u} \underset{\substack{\uparrow\\ \mathbf{A}^T=\mathbf{A}}}{=} a\mathbf{v} - \mathbf{A}\mathbf{u},$$

$$(\mathbf{v}\mathbf{v}^T-\mathbf{A}^2)^T = (\mathbf{v}\mathbf{v}^T)^T - (\mathbf{A}^2)^T = (\mathbf{v}^T)^T\mathbf{v}^T - (\mathbf{A}\mathbf{A})^T = \mathbf{v}\mathbf{v}^T - \mathbf{A}^T\mathbf{A}^T \underset{\substack{\uparrow\\ \mathbf{A}^T=\mathbf{A}}}{=} \mathbf{v}\mathbf{v}^T - \mathbf{A}\mathbf{A} = \mathbf{v}\mathbf{v}^T - \mathbf{A}^2$$

e quindi

$$(\mathbf{BC})^T = \begin{pmatrix} a^2+\mathbf{u}^T\mathbf{u} & | & (a\mathbf{v}+\mathbf{A}\mathbf{u})^T \\ ----- & | & ------ \\ (a\mathbf{v}^T-\mathbf{u}^T\mathbf{A})^T & | & (\mathbf{v}\mathbf{v}^T-\mathbf{A}^2)^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2+\mathbf{u}^T\mathbf{u} & | & a\mathbf{v}^T+\mathbf{u}^T\mathbf{A} \\ ----- & | & ------ \\ a\mathbf{v}-\mathbf{A}\mathbf{u} & | & \mathbf{v}\mathbf{v}^T-\mathbf{A}^2 \end{pmatrix}.$$

Dunque

$$\mathbf{BC} = (\mathbf{BC})^T \iff \begin{cases} a^2+\mathbf{u}^T\mathbf{u} = a^2+\mathbf{u}^T\mathbf{u} \\ a\mathbf{v}^T-\mathbf{u}^T\mathbf{A} = a\mathbf{v}^T+\mathbf{u}^T\mathbf{A} \\ a\mathbf{v}+\mathbf{A}\mathbf{u} = a\mathbf{v}-\mathbf{A}\mathbf{u} \\ \mathbf{v}\mathbf{v}^T-\mathbf{A}^2 = \mathbf{v}\mathbf{v}^T-\mathbf{A}^2 \end{cases} \iff \begin{cases} -\mathbf{u}^T\mathbf{A} = \mathbf{u}^T\mathbf{A} \\ \mathbf{A}\mathbf{u} = -\mathbf{A}\mathbf{u} \end{cases} \iff \begin{cases} \mathbf{u}^T\mathbf{A} = \mathbf{0}^T \\ \mathbf{A}\mathbf{u} = \mathbf{0} \end{cases}$$

Essendo

$$\mathbf{A}\mathbf{u} = \mathbf{0} \iff (\mathbf{A}\mathbf{u})^T = \mathbf{0}^T$$

ed

$$(\mathbf{A}\mathbf{u})^T = \mathbf{u}^T\mathbf{A}^T \underset{\substack{\uparrow\\ \mathbf{A}^T=\mathbf{A}}}{=} \mathbf{u}^T\mathbf{A},$$

allora

$$\mathbf{A}\mathbf{u} = \mathbf{0} \iff \mathbf{u}^T\mathbf{A} = \mathbf{0}^T.$$

In conclusione

$$\mathbf{BC} = (\mathbf{BC})^T \iff \mathbf{A}\mathbf{u} = \mathbf{0}.$$

Algebra Lineare 1 A, Svolgimento degli Esercizi per casa 3

$\boxed{1}$ Si scrivano le matrici elementari $\mathbf{E_{13}(4)}$, $\mathbf{E_3(4)}$ ed $\mathbf{E_{13}}$ di ordine 3 e di ordine 4.

di ordine 3: $\quad \mathbf{E_{13}}(\mathbf{4}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{E_3}(\mathbf{4}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \mathbf{E_{13}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

di ordine 4: $\quad \mathbf{E_{13}}(\mathbf{4}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{E_3}(\mathbf{4}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{E_{13}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\boxed{2}$ Sia $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{r}^T \\ \mathbf{r}^T \end{pmatrix}$ una matrice reale $2 \times n$ non nulla con le righe uguali. Si trovino tutte le matrici elementari $\mathbf{E}$ tali che $\mathbf{EA} = \begin{pmatrix} \mathbf{r}^T \\ 3\mathbf{r}^T \end{pmatrix}$.

Premoltiplicare $\mathbf{A}$ per una matrice elementare equivale ad eseguire un'operazione elementare sulle sue righe.

Poichè $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{r}^T \\ \mathbf{r}^T \end{pmatrix}$ con $\mathbf{r}^T \neq \mathbf{0}^T$ (essendo $\mathbf{A} \neq \mathbf{O}$), le operazioni elementari sulle righe di $\mathbf{A}$ che permettono di ottenere la matrice $\begin{pmatrix} \mathbf{r}^T \\ 3\mathbf{r}^T \end{pmatrix}$ da $\mathbf{A}$ sono esattamente le seguenti:

(a) moltiplicare la 2^a riga di $\mathbf{A}$ per il numero 3,

(b) sommare alla 2^a riga di $\mathbf{A}$ la 1^a riga di $\mathbf{A}$ moltiplicata per il numero 2.

Eseguire l'operazione (a) equivale a premoltiplicare $\mathbf{A}$ per la matrice elementare $\mathbf{E_2}(\mathbf{3}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$; eseguire l'operazione (b) equivale a premoltiplicare $\mathbf{A}$ per la matrice elementare $\mathbf{E_{21}}(\mathbf{2}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Dunque $\mathbf{E} \in \{\mathbf{E_2}(\mathbf{3}), \mathbf{E_{21}}(\mathbf{2})\}$.

N.B. Se $\mathbf{A}$ fosse nulla, anche $\begin{pmatrix} \mathbf{r}^T \\ 3\mathbf{r}^T \end{pmatrix}$ sarebbe nulla, e per ogni matrice elementare $\mathbf{E}$ di ordine 2 si avrebbe $\mathbf{AE} = \begin{pmatrix} \mathbf{r}^T \\ 3\mathbf{r}^T \end{pmatrix}$.

$\boxed{3}$ Siano $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ ed $\mathbf{E_{ij}(c_1)}$, $\mathbf{E_{ij}(c_2)}$, $\mathbf{E_i(c_1)}$, $\mathbf{E_i(c_2)}$ di ordine n.

(a) Si trovi $c_3 \in \mathbb{R}$ tale che $\mathbf{E_{ij}(c_1)E_{ij}(c_2)} = \mathbf{E_{ij}(c_3)}$.

(b) Si trovi $c_4 \in \mathbb{R}$ tale che $\mathbf{E_i(c_1)E_i(c_2)} = \mathbf{E_i(c_4)}$.

Siano $\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \dots, \mathbf{e_n}$ le colonne della matrice identica $\mathbf{I_n}$. Per ogni $k = 1, \dots, n$ ed ogni $c \in \mathbb{R}$, la k-esima riga di $\mathbf{E_{ij}(c)}$ è $\quad \mathbf{e_k}^T\mathbf{E_{ij}(c)} = \begin{cases} \mathbf{e_k}^T & \text{se } k \neq i \\ \mathbf{e_i}^T + c \cdot \mathbf{e_j}^T & \text{se } k = i \end{cases}$

la k-esima riga di $\mathbf{E_i(c)}$ è $\quad \mathbf{e_k}^T\mathbf{E_i(c)} = \begin{cases} \mathbf{e_k}^T & \text{se } k \neq i \\ c \cdot \mathbf{e_i}^T & \text{se } k = i \end{cases}$

Quindi la i-esima riga di $\mathbf{E_{ij}(c_1)E_{ij}(c_2)}$ è

$$\begin{aligned} \mathbf{e_i}^T\mathbf{E_{ij}(c_1)E_{ij}(c_2)} &= (\mathbf{e_i}^T + c_1 \cdot \mathbf{e_j}^T)\mathbf{E_{ij}(c_2)} = \mathbf{e_i}^T\mathbf{E_{ij}(c_2)} + c_1 \cdot \mathbf{e_j}^T\mathbf{E_{ij}(c_2)} = \\ &= (\mathbf{e_i}^T + c_2 \cdot \mathbf{e_j}^T) + c_1 \cdot \mathbf{e_j}^T = \mathbf{e_i}^T + (c_2 + c_1)\mathbf{e_j}^T \end{aligned}$$

ossia è uguale alla i-esima riga di $\mathbf{E_{ij}(c_1 + c_2)}$, e se $k \neq i$, la k-esima riga di $\mathbf{E_{ij}(c_1)E_{ij}(c_2)}$ è

$$\mathbf{e_k}^T\mathbf{E_{ij}(c_1)E_{ij}(c_2)} = \mathbf{e_k}^T\mathbf{E_{ij}(c_2)} = \mathbf{e_k}^T,$$

ossia uguale alla k-esima riga di $\mathbf{E_{ij}(c_1 + c_2)}$.
Per cui $\mathbf{E_{ij}(c_1)E_{ij}(c_2)} = \mathbf{E_{ij}(c_1 + c_2)}$ e $c_3 = c_1 + c_2$.
La i-esima riga di $\mathbf{E_i(c_1)E_i(c_2)}$ è

$$\mathbf{e_i}^T\mathbf{E_i(c_1)E_i(c_2)} = c_1 \cdot \mathbf{e_i}^T\mathbf{E_i(c_2)} = c_1 \cdot c_2 \cdot \mathbf{e_i}^T$$

ossia è uguale alla i-esima riga di $\mathbf{E_i(c_1 \cdot c_2)}$, e se $k \neq i$, la k-esima riga di $\mathbf{E_i(c_1)E_i(c_2)}$ è

$$\mathbf{e_k}^T\mathbf{E_i(c_1)E_i(c_2)} = \mathbf{e_k}^T\mathbf{E_i(c_2)} = \mathbf{e_k}^T,$$

ossia uguale alla k-esima riga di $\mathbf{E_i(c_1 \cdot c_2)}$.
Per cui $\mathbf{E_i(c_1)E_i(c_2)} = \mathbf{E_i(c_1 \cdot c_2)}$ e $c_4 = c_1 \cdot c_2$.

$\boxed{4}$ Si trovino forme ridotte di Gauss per le seguenti matrici:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 4 & 0 \\ 3 & -3 & 9 & 6 \\ 3 & -3 & 3 & -6 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 3 & -9 \\ -2 & 6 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{w}^T = (4 \quad 0 \quad 3), \quad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Facendo un'eliminazione di Gauss su $\mathbf{A}$ si ottiene:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 4 & 0 \\ 3 & -3 & 9 & 6 \\ 3 & -3 & 3 & -6 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{31}(-3)E_{21}(-3)E_1(1/2)} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & -3 & -6 \end{pmatrix} \rightarrow$$
$$\xrightarrow{E_{32}(3)E_2(1/3)} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{U}_1$$

ed U_1 è una forma ridotta di Gauss per $\mathbf{A}$.

Facendo un'eliminazione di Gauss su $\mathbf{B}$ si ottiene:

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 3 & -9 \\ -2 & 6 \\ 4 & 8 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{31}(-4)E_{21}(2)E_1(1/3)} \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 0 \\ 0 & 20 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_2(\frac{1}{20})E_{23}} \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{U}_2$$

ed $\mathbf{U}_2$ è una forma ridotta di Gauss per $\mathbf{B}$.

Facendo un'eliminazione di Gauss su $\mathbf{w}^T$ si ottiene:

$$\mathbf{w}^T = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_1(1/4)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3/4 \end{pmatrix} = \mathbf{z}^T$$

e $\mathbf{z}^T$ è una forma ridotta di Gauss per $\mathbf{w}^T$.

Facendo un'eliminazione di Gauss su $\mathbf{v}$ si ottiene:

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{12}} \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{31}(-3)E_1(1/7)} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \mathbf{u}$$

ed $\mathbf{u}$ è una forma ridotta di Gauss per $\mathbf{v}$.

$\boxed{5}$ Sia $\quad \mathbf{A}(\alpha) = \begin{pmatrix} 2i & 0 & -2i & 2i\alpha \\ 1 & \alpha^2+4 & 0 & \alpha \\ 2 & 2\alpha^2+8 & 0 & 4\alpha \end{pmatrix}$, dove $\alpha \in \mathbb{C}$. Per ogni $\alpha \in \mathbb{C}$ si trovi una forma ridotta di Gauss $\mathbf{U}(\alpha)$ per $\mathbf{A}(\alpha)$ e si dica quali sono le colonne dominanti e quali sono le colonne libere di $\mathbf{U}(\alpha)$.

Facciamo un'eliminazione di Gauss su $\mathbf{A}(\alpha)$:

$$\mathbf{A}(\alpha) = \begin{pmatrix} 2i & 0 & -2i & 2i\alpha \\ 1 & \alpha^2+4 & 0 & \alpha \\ 2 & 2\alpha^2+8 & 0 & 4\alpha \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{31}(-2)E_{21}(-1)E_1(-\frac{1}{2}i)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & \alpha \\ 0 & \alpha^2+4 & 1 & 0 \\ 0 & 2\alpha^2+8 & 2 & 2\alpha \end{pmatrix} = \mathbf{B}(\alpha)$$

$\boxed{1^o CASO}$ $\quad \alpha^2+4 \neq 0$ ossia $\alpha \neq 2i$ ed $\alpha \neq -2i$.

$$\mathbf{B}(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & \alpha \\ 0 & \alpha^2+4 & 1 & 0 \\ 0 & 2\alpha^2+8 & 2 & 2\alpha \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{32}(-2\alpha^2-8)E_2(\frac{1}{\alpha^2+4})} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & \alpha \\ 0 & 1 & 1/(\alpha^2+4) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2\alpha \end{pmatrix} = \mathbf{C}(\alpha)$$

$\boxed{1^o \quad \text{sottocaso del} \quad 1^0 \quad \text{caso}}$ $\alpha \neq 2i, \quad \alpha \neq -2i, \quad \alpha \neq 0$

$$\mathbf{C}(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & \alpha \\ 0 & 1 & 1/(\alpha^2+4) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2\alpha \end{pmatrix} \xrightarrow{E_3(1/2\alpha)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & \alpha \\ 0 & 1 & 1/(\alpha^2+4) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{U}(\alpha)$$

$\mathbf{U}(\alpha)$ è una forma ridotta di Gauss per $\mathbf{A}(\alpha)$, le colonne dominanti sono la 1^a, la 2^a e la 4^a, l'unica colonna libera è la 3^a.

$\boxed{2^o \quad \text{sottocaso del} \quad 1^0 \quad \text{caso}}$ $\alpha = 0$ $\quad \mathbf{C}(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{U}(0)$ è una forma ridotta di Gauss per $\mathbf{A}(0)$, le colonne dominanti sono la 1^a e la 2^a, quelle libere la 3^a e la 4^a.

$\boxed{2^o CASO}$ $\alpha^2 + 4 = 0$ ossia $\alpha = 2i$ oppure $\alpha = -2i$.

$$\mathbf{B}(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & \alpha \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2\alpha \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{32}(-2)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & \alpha \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2\alpha \end{pmatrix} \xrightarrow{E_3(1/2\alpha) \quad (\alpha\neq 0)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & \alpha \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{U}(\alpha)$$

$\mathbf{U}(\alpha)$ è una forma ridotta di Gauss per $\mathbf{A}(\alpha)$, le colonne dominanti sono la 1^a, la 3^a e la 4^a, l'unica colonna libera è la 2^a.

$\boxed{6}$ Si risolva il sistema lineare $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ nei seguenti casi: (a) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 9 & 6 \\ 1 & -1 & 7 & 4 \\ 1 & -1 & 3 & 2 \\ -2 & 2 & -6 & -4 \end{pmatrix}$ e $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$;

(b) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 9 & 6 \\ 1 & -1 & 7 & 4 \\ 1 & -1 & 3 & 2 \\ -2 & 2 & -6 & -4 \end{pmatrix}$ e $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}$; $\quad (c)$ $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 9 & 6 \\ 1 & 0 & 7 & 4 \\ 1 & -1 & 5 & 2 \\ 1 & 0 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ e $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix}$.

.

(a) Troviamo una forma ridotta di Gauss della matrice aumentata del sistema.

$$(\mathbf{A} \mid \mathbf{b}) = \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & -3 & 9 & 6 & 6 \\ 1 & -1 & 7 & 4 & 4 \\ 1 & -1 & 3 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & -6 & -4 & -4 \end{array}\right) \xrightarrow{E_{41}(2)E_{31}(-1)E_{21}(-1)E_1(\frac{1}{3})}$$

$$\to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{E_2(\frac{1}{4})} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) = (\mathbf{U} \mid \mathbf{d}).$$

Il sistema $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ è equivalente al sistema $\mathbf{Ux} = \mathbf{d}$ che è una forma compatta per

$$(*) \qquad \begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 + 2x_4 &= 2 \\ \qquad\qquad x_3 + \frac{1}{2}x_4 &= \frac{1}{2} \end{cases}$$

Poichè $\mathbf{d}$ è libera, $\mathbf{Ux} = \mathbf{d}$ ammette soluzioni.

Poichè $\mathbf{U}$ ha esattamente due colonne libere, $\mathbf{Ux} = \mathbf{d}$ ha ∞^2 soluzioni.

Scegliamo come parametri le variabili corrispondenti alle colonne libere di $\mathbf{U}$ (la 2^a e la 4^a) e con la sostituzione all'indietro da $(*)$ otteniamo

$$\begin{cases} x_2 = h \\ x_4 = k \\ x_3 = -\dfrac{1}{2}x_4 + \dfrac{1}{2} = -\dfrac{1}{2}k + \dfrac{1}{2} \\ x_1 = x_2 - 3x_3 - 2x_4 + 2 = h - 3(-\dfrac{1}{2}k + \dfrac{1}{2}) - 2k + 2 = h - \dfrac{1}{2}k + \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

L'insieme delle soluzioni del sistema $\mathbf{Ux} = \mathbf{d}$ (e quindi l'insieme delle soluzioni del sistema $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$) è

$$\left\{ \begin{pmatrix} h - \frac{1}{2}k + \frac{1}{2} \\ h \\ -\frac{1}{2}k + \frac{1}{2} \\ k \end{pmatrix} | h, k \in \mathbb{C} \right\}.$$

(b) Troviamo una forma ridotta di Gauss della matrice aumentata del sistema.

$$(\mathbf{A} \mid \mathbf{b}) = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 9 & 6 & | & 6 \\ 1 & -1 & 7 & 4 & | & 4 \\ 1 & -1 & 3 & 2 & | & 3 \\ -2 & 2 & -6 & -4 & | & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{41}(2)E_{31}(-1)E_{21}(-1)E_1(\frac{1}{3})}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 2 & | & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 2 & | & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_2(\frac{1}{4})} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 2 & | & 2 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & | & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} = (\mathbf{U} \mid \mathbf{d}).$$

Il sistema $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ è equivalente al sistema $\mathbf{Ux} = \mathbf{d}$.

Poichè $\mathbf{d}$ è dominante, allora $\mathbf{Ux} = \mathbf{d}$, e quindi anche $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, non ha soluzioni.

(c) Troviamo una forma ridotta di Gauss della matrice aumentata del sistema.

$$(\,\mathbf{A} \mid \mathbf{b}\,) = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 9 & 6 & \mid & 6 \\ 1 & 0 & 7 & 4 & \mid & 4 \\ 1 & -1 & 5 & 2 & \mid & 4 \\ 1 & 0 & 5 & 6 & \mid & 8 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{41}(-1)E_{31}(-1)E_{21}(-1)E_1(\frac{1}{3})}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 2 & \mid & 2 \\ 0 & 1 & 4 & 2 & \mid & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & \mid & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 4 & \mid & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{42}(-1)} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 2 & \mid & 2 \\ 0 & 1 & 4 & 2 & \mid & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & \mid & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & \mid & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{43}(2)E_3(\frac{1}{2})}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 2 & \mid & 2 \\ 0 & 1 & 4 & 2 & \mid & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \mid & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & \mid & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_4(\frac{1}{2})} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 2 & \mid & 2 \\ 0 & 1 & 4 & 2 & \mid & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \mid & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \mid & 3 \end{pmatrix} = (\,\mathbf{U} \mid \mathbf{d}\,).$$

Il sistema $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ è equivalente al sistema $\mathbf{Ux} = \mathbf{d}$ che è una forma compatta per

$$(*) \qquad \begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 + 2x_4 & = 2 \\ \phantom{x_1 - {}} x_2 + 4x_3 + 2x_4 & = 2 \\ x_3 & = 1 \\ x_4 & = 3 \end{cases}$$

Poichè $\mathbf{d}$ è libera, $\mathbf{Ux} = \mathbf{d}$ ammette soluzioni.

Poichè $\mathbf{U}$ non ha colonne libere, $\mathbf{Ux} = \mathbf{d}$ ha esattamente una soluzione.

Con la sostituzione all'indietro da $(*)$ otteniamo

$$\begin{cases} x_4 = 3 \\ x_3 = 1 \\ x_2 = -4x_3 - 2x_4 + 2 = -8 \\ x_1 = x_2 - 3x_3 - 2x_4 + 2 = -15 \end{cases}$$

Dunque l'unica soluzione di $\mathbf{Ux} = \mathbf{d}$, e quindi anche di $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, è il vettore $\begin{pmatrix} -15 \\ -8 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

$\boxed{7}$ Si risolva il sistema lineare $\mathbf{A}(\alpha)\mathbf{x} = \mathbf{b}(\alpha)$ dipendente dal parametro complesso α dove

$$\mathbf{A}(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & \alpha - i & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & \alpha - i & \alpha + i \\ -\alpha - i & -\alpha^2 - 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{b}(\alpha) = \begin{pmatrix} \alpha - i \\ \alpha^2 + 1 \\ 2\alpha \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^4.$$

Troviamo una forma ridotta di Gauss della matrice aumentata del sistema.

$$(\,\mathbf{A}(\alpha) \quad | \quad \mathbf{b}(\alpha)\,) = \begin{pmatrix} 1 & \alpha - i & 0 & | & \alpha - i \\ 0 & 1 & 0 & | & \alpha^2+1 \\ 1 & \alpha - i & \alpha + i & | & 2\alpha \\ -\alpha - i & -\alpha^2 - 1 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{41}(\alpha+i)E_{31}(-1)}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & \alpha - i & 0 & | & \alpha - i \\ 0 & 1 & 0 & | & \alpha^2+1 \\ 0 & 0 & \alpha + i & | & \alpha + i \\ 0 & 0 & 0 & | & \alpha^2+1 \end{pmatrix} = (\,\mathbf{B}(\alpha) \quad | \quad \mathbf{c}(\alpha)\,).$$

$\boxed{1^0 \text{ CASO}}$ $\qquad \alpha = -i \qquad (\,\mathbf{B}(-\mathbf{i}) \quad | \quad \mathbf{c}(-\mathbf{i})\,) = \begin{pmatrix} 1 & -2i & 0 & | & -2i \\ 0 & 1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$ è una forma ridotta di Gauss per $(\,\mathbf{A}(-\mathbf{i}) \quad | \quad \mathbf{b}(-\mathbf{i})\,)$, quindi $\mathbf{A}(-\mathbf{i})\mathbf{x} = \mathbf{b}(-\mathbf{i})$ è equivalente a $\mathbf{B}(-\mathbf{i})\mathbf{x} = \mathbf{c}(-\mathbf{i})$ che è una forma compatta per

$$(*) \qquad \begin{cases} x_1 - 2ix_2 & = -2i \\ \qquad\; x_2 & = 0 \end{cases}$$

Poichè $\mathbf{c}(-\mathbf{i})$ è libera, $\mathbf{B}(-\mathbf{i})\mathbf{x} = \mathbf{c}(-\mathbf{i})$ ammette soluzioni.

Poichè $\mathbf{B}(-\mathbf{i})$ ha esattamente una colonna libera, $\mathbf{B}(-\mathbf{i})\mathbf{x} = \mathbf{c}(-\mathbf{i})$ ha ∞^1 soluzioni.

Scegliamo come parametro la variabile corrispondente alla colonna libera di $\mathbf{B}(-\mathbf{i})$ (la 3^a) e con la sostituzione all'indietro da $(*)$ otteniamo

$$\begin{cases} x_3 = h \\ x_2 = 0 \\ x_1 = 2ix_2 - 2i = -2i \end{cases}$$

L'insieme delle soluzioni del sistema $\mathbf{B}(-\mathbf{i})\mathbf{x} = \mathbf{c}(-\mathbf{i})$ (e quindi l'insieme delle soluzioni del sistema $\mathbf{A}(-\mathbf{i})\mathbf{x} = \mathbf{b}(-\mathbf{i})$) è

$$\left\{ \begin{pmatrix} -2i \\ 0 \\ h \end{pmatrix} | h \in \mathbb{C} \right\}.$$

$\boxed{2^0 \text{ CASO}}$ $\qquad \alpha \neq -i$

$$(\,\mathbf{B}(\alpha) \quad | \quad \mathbf{c}(\alpha)\,) = \begin{pmatrix} 1 & \alpha - i & 0 & | & \alpha - i \\ 0 & 1 & 0 & | & \alpha^2+1 \\ 0 & 0 & \alpha + i & | & \alpha + i \\ 0 & 0 & 0 & | & \alpha^2+1 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_3(\frac{1}{\alpha+i})}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & \alpha - i & 0 & | & \alpha - i \\ 0 & 1 & 0 & | & \alpha^2+1 \\ 0 & 0 & 1 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & | & \alpha^2+1 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_4(\frac{1}{\alpha+i})} \begin{pmatrix} 1 & \alpha - i & 0 & | & \alpha - i \\ 0 & 1 & 0 & | & \alpha^2+1 \\ 0 & 0 & 1 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & | & \alpha - i \end{pmatrix} = (\,\mathbf{C}(\alpha) | \quad \mathbf{d}(\alpha)\,).$$

$\boxed{1^0 \text{ Sottocaso}}$ $\alpha = i$ $(\mathbf{C(i)} \mid \mathbf{d(i)}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$ è una forma ridotta di Gauss per $(\mathbf{A(i)} \mid \mathbf{b(i)})$, quindi $\mathbf{A(i)x} = \mathbf{b(i)}$ è equivalente a $\mathbf{C(i)x} = \mathbf{d(i)}$ che è una forma compatta per

$$(*) \qquad \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 1 \end{cases}$$

Poichè $\mathbf{d(i)}$ è libera, $\mathbf{C(i)x} = \mathbf{d(i)}$ ammette soluzioni.

Poichè tutte le colonne di $\mathbf{C(i)}$ sono dominanti, $\mathbf{C(i)x} = \mathbf{d(i)}$ ammette un'unica soluzione. L'unica soluzione di $\mathbf{C(i)x} = \mathbf{d(i)}$ (e quindi di $\mathbf{A(i)x} = \mathbf{b(i)}$) è

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$\boxed{2^0 \text{ Sottocaso}}$ $\alpha \notin \{i, -i\}$ $(\mathbf{C}(\alpha) \mid \mathbf{d}(\alpha)) = \begin{pmatrix} 1 & \alpha - i & 0 & | & \alpha - i \\ 0 & 1 & 0 & | & \alpha^2 + 1 \\ 0 & 0 & 1 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & | & \alpha - i \end{pmatrix} \xrightarrow{E_4(\frac{1}{\alpha - i})}$

$\begin{pmatrix} 1 & \alpha - i & 0 & | & \alpha - i \\ 0 & 1 & 0 & | & \alpha^2 + 1 \\ 0 & 0 & 1 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & | & 1 \end{pmatrix} = (\mathbf{D}(\alpha) \mid \mathbf{e}(\alpha))$ è una forma ridotta di Gauss per $(\mathbf{A}(\alpha) \mid \mathbf{b}(\alpha))$.

Poichè $\mathbf{e}(\alpha)$ è dominante, $\mathbf{D}(\alpha)\mathbf{x} = \mathbf{e}(\alpha)$ (e quindi di $\mathbf{A}(\alpha)\mathbf{x} = \mathbf{b}(\alpha)$) non ammette soluzioni.

$\boxed{8}$ Si trovino tutte le inverse destre della matrice $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

Un'inversa destra di $\mathbf{A}$ è una matrice 3×2 $\mathbf{R}$ tale che se $\mathbf{R} = (\mathbf{c}_1 \mid \mathbf{c}_2)$, allora

$\mathbf{c}_1$ è soluzione di (1) $\mathbf{Ax} = \mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e

$\mathbf{c}_2$ è soluzione di (2) $\mathbf{Ax} = \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Cerchiamo tutte le soluzioni di (1) e (2).

$$(\mathbf{A} \mid \mathbf{I}_2) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & | & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & | & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{21}(-1)E_1(\frac{1}{2})} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 & | & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 3 & | & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\xrightarrow{E_2(-2)} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 & | & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & -6 & | & 1 & -2 \end{pmatrix} = (\mathbf{U} \mid \mathbf{b}_1 \ \ \mathbf{b}_2).$$

(1) è equivalente a (1′) $\mathbf{Ux} = \mathbf{b}_1$ che è una forma compatta per

$$\begin{cases} x_1 + \frac{1}{2}x_2 = \frac{1}{2} \\ x_2 - 6x_3 = 1 \end{cases}$$

Scegliamo come parametro la variabile corrispondente all'unica colonna libera di $\mathbf{U}$ (la 3^a) e con la sostituzione all'indietro otteniamo

$$\begin{cases} x_3 = h \\ x_2 = 6x_3 + 1 = 6h + 1 \\ x_1 = -\dfrac{1}{2}x_2 + \dfrac{1}{2} = -\dfrac{1}{2}(6h+1) + \dfrac{1}{2} = -3h \end{cases}$$

L'insieme delle soluzioni di (1) è

$$\left\{ \begin{pmatrix} -3h \\ 6h+1 \\ h \end{pmatrix} | h \in \mathbb{C} \right\}.$$

(2) è equivalente a (2′) $\mathbf{Ux} = \mathbf{b}_2$ che è una forma compatta per

$$\begin{cases} x_1 + \frac{1}{2}x_2 \quad = 0 \\ x_2 - 6x_3 = -2 \end{cases}$$

Scegliamo come parametro la variabile corrispondente all'unica colonna libera di $\mathbf{U}$ (la 3^a) e con la sostituzione all'indietro otteniamo

$$\begin{cases} x_3 = k \\ x_2 = 6x_3 - 2 = 6k - 2 \\ x_1 = -\dfrac{1}{2}x_2 = -\dfrac{1}{2}(6k-2) = -3k + 1 \end{cases}$$

L'insieme delle soluzioni di (2) è

$$\left\{ \begin{pmatrix} -3k+1 \\ 6k-2 \\ k \end{pmatrix} | k \in \mathbb{C} \right\}.$$

Le inverse destre di $\mathbf{A}$ sono esattamente tutte le matrici del tipo $\mathbf{R(h,k)} = \begin{pmatrix} -3h & -3k+1 \\ 6h+1 & 6k-2 \\ h & k \end{pmatrix}$, al variare di $h, k \in \mathbb{C}$.

$\boxed{9}$ Si trovino tutte le inverse sinistre della matrice $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.

1. Poniamo $\mathbf{B} = \mathbf{A}^T$.

2. Cerchiamo tutte le inverse destre di $\mathbf{B}$. Dall'esercizio $\boxed{8}$ sappiamo che sono tutte e sole le matrici del tipo $\begin{pmatrix} -3h & -3k+1 \\ 6h+1 & 6k-2 \\ h & k \end{pmatrix}$ con $h, k \in \mathbb{C}$.

3. Una matrice è inversa sinistra di $\mathbf{A}$ se e solo se è la trasposta di una inversa destra di $\mathbf{B}$. Quindi le inverse sinistre di $\mathbf{A}$ sono esattamente tutte le matrici del tipo $\begin{pmatrix} -3h & 6h+1 & h \\ -3k+1 & 6k-2 & k \end{pmatrix}$ al variare di $h, k \in \mathbb{C}$.

Algebra Lineare 1 A, Svolgimento degli Esercizi per casa 4

$\boxed{1}$ Si provi che se $\mathbf{A}$ è una matrice con un'unica inversa destra $\mathbf{R}$, allora $\mathbf{A}$ è quadrata ed $\mathbf{R} = \mathbf{A}^{-1}$ (sugg.: si osservi che, essendo $\mathbf{R}$ unica, ogni sistema $\mathbf{Ax} = \mathbf{e_i}$ ha un'unica soluzione, per cui rk$(\mathbf{A}) = \dots$)

Sia $\mathbf{A}$ $m \times n$. Poichè $\mathbf{A}$ ha un'inversa destra,

$$\text{rk}(\mathbf{A}) = \text{numero delle righe di } \mathbf{A} = m.$$

Essendo $\mathbf{R}$ inversa destra di $\mathbf{A}$, è $\mathbf{R} = \begin{pmatrix} \mathbf{c_1} & \mathbf{c_2} & \dots & \mathbf{c_m} \end{pmatrix}$ dove per ogni $i = 1, \dots, m$ il vettore $\mathbf{c_i} \in \mathbb{C}^n$ è una soluzione del sistema $\mathbf{Ax} = \mathbf{e_i}$.

Essendo $\mathbf{R}$ unica, ogni sua colonna è univocamente individuata, per cui ogni sistema $\mathbf{Ax} = \mathbf{e_i}$, ha un'unica soluzione. Quindi per ogni $i = 1, \dots, m$, se $\begin{pmatrix} \mathbf{U} & | & \mathbf{d_i} \end{pmatrix}$ è una forma ridotta di Gauss per la matrice aumentata $\begin{pmatrix} \mathbf{A} & | & \mathbf{e_i} \end{pmatrix}$, la colonna $\mathbf{d_i}$ è libera ed ogni colonna di $\mathbf{U}$ è dominante. In particolare, essendo $\mathbf{U}$ una forma ridotta di Gauss per $\mathbf{A}$, si ha

$$\text{rk}(\mathbf{A}) = \text{rk}(\mathbf{U}) = \text{numero delle colonne dominanti di } \mathbf{U} = n.$$

Dunque $m =$rk$(\mathbf{A}) = n$ ed $\mathbf{A}$ è quadrata, $m \times m$.

Essendo $\mathbf{A}$ quadrata ed $\mathbf{R}$ inversa destra di $\mathbf{A}$, $\mathbf{R}$ è anche inversa sinistra di $\mathbf{A}$ ed $\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{R}$.

$\boxed{2}$ Sia $\mathbf{A}$ una matrice $m \times n$ con $m < n$ e rk$(\mathbf{A}) = m$. Si provi che esiste $\mathbf{B} \neq \mathbf{O}$ tale che $\mathbf{AB} = \mathbf{O}$ (sugg.: si usi l'esercizio precedente).

Essendo rk$(\mathbf{A}) = m =$ numero delle righe di $\mathbf{A}$, $\mathbf{A}$ ha inverse destre, e poichè $\mathbf{A}$ non è quadrata $(m < n)$, dall'esercizio precedente segue che $\mathbf{A}$ ha più di un'inversa destra. Siano $\mathbf{R_1}$ ed $\mathbf{R_2}$ due distinte inverse destre di $\mathbf{A}$. Allora

$$\begin{cases} \mathbf{AR_1} & = & \mathbf{I} \\ \mathbf{AR_2} & = & \mathbf{I} \\ \mathbf{R_1} & \neq & \mathbf{R_2} \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad \begin{cases} \mathbf{A(R_1 - R_2)} & = & \mathbf{O} \\ \mathbf{R_1 - R_2} & \neq & \mathbf{O} \end{cases}$$

e si può prendere $\mathbf{B} = \mathbf{R_1} - \mathbf{R_2}$.

$\boxed{3}$ Si trovi una forma ridotta di Gauss-Jordan per la matrice $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 & 0 & 0 & 6 \\ 2 & -2 & 3 & -2 & -1 & 8 \\ -2 & 2 & -2 & 0 & 0 & 5 \\ 3 & -3 & 4 & -2 & -1 & 12 \end{pmatrix}$.

Facendo una E.G. "in avanti" su $\mathbf{A}$ otteniamo

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 & 0 & 0 & 6\\ 2 & -2 & 3 & -2 & -1 & 8\\ -2 & 2 & -2 & 0 & 0 & 5\\ 3 & -3 & 4 & -2 & -1 & 12\end{pmatrix} \xrightarrow{E_{41}(-3)E_{31}(2)E_{21}(-2)E_1(\frac{1}{2})} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 3\\ 0 & 0 & 1 & -2 & -1 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 11\\ 0 & 0 & 1 & -2 & -1 & 3\end{pmatrix} \xrightarrow{E_{42}(-1)}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 3\\ 0 & 0 & 1 & -2 & -1 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 11\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \xrightarrow{E_{43}(-1)E_3(\frac{1}{11})} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 3\\ 0 & 0 & 1 & -2 & -1 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix} = \mathbf{U}$$

Facendo ora una E.G. "all'indietro" su $\mathbf{U}$ otteniamo

$$\mathbf{U}=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 3\\ 0 & 0 & 1 & -2 & -1 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix} \xrightarrow{E_{13}(-3)E_{23}(-2)} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & -2 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix} \xrightarrow{E_{12}(-1)}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & -2 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix} = \mathbf{W}$$

$\mathbf{W}$ è una forma ridotta di Gauss-Jordan per $\mathbf{A}$.

$\boxed{4}$ Sia $\quad \mathbf{A}(\alpha)=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0\\ \alpha & \alpha^2 & -\alpha\\ 2\alpha & 2\alpha^2 & 1\end{pmatrix}$, dove $\alpha\in\mathbb{R}$. Per quegli $\alpha\in\mathbb{R}$ per cui $\mathbf{A}(\alpha)$ è non singolare, si calcoli $\mathbf{A}(\alpha)^{-1}$.

$$(\,\mathbf{A}(\alpha)\quad|\quad\mathbf{I}_3\,)=\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0\\ \alpha & \alpha^2 & -\alpha & 0 & 1 & 0\\ 2\alpha & 2\alpha^2 & 1 & 0 & 0 & 1\end{array}\right) \xrightarrow{\qquad\qquad E_{21}\qquad\qquad}$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} \alpha & \alpha^2 & -\alpha & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 2\alpha & 2\alpha^2 & 1 & 0 & 0 & 1\end{array}\right) \xrightarrow{E_{31}(-2\alpha)E_1(\frac{1}{\alpha})\quad \boxed{\alpha\neq 0:\ \mathbf{A}(0)\text{ non ha inversa}}}$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \alpha & -1 & 0 & \frac{1}{\alpha} & 0\\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1+2\alpha & 0 & -2 & 1\end{array}\right) \xrightarrow{E_3(\frac{1}{1+2\alpha})\quad \boxed{\alpha\neq -\frac{1}{2}:\ \mathbf{A}(-\frac{1}{2})\text{ non ha inversa}}}$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \alpha & -1 & 0 & \frac{1}{\alpha} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{2}{1+2\alpha} & \frac{1}{1+2\alpha} \end{array}\right) \xrightarrow{E_{13}(1)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \alpha & 0 & 0 & \frac{1}{\alpha(1+2\alpha)} & \frac{1}{1+2\alpha} \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{2}{1+2\alpha} & \frac{1}{1+2\alpha} \end{array}\right) \xrightarrow{E_{12}(-\alpha)}$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\alpha & \frac{1}{\alpha(1+2\alpha)} & \frac{1}{1+2\alpha} \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{2}{1+2\alpha} & \frac{1}{1+2\alpha} \end{array}\right).$$

Se $\boxed{\alpha \notin \{0, -\frac{1}{2}\}}$ $\qquad \mathbf{A}(\alpha)^{-1} = \begin{pmatrix} -\alpha & \frac{1}{\alpha(1+2\alpha)} & \frac{1}{1+2\alpha} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{2}{1+2\alpha} & \frac{1}{1+2\alpha} \end{pmatrix}.$

$\boxed{5}$ Sia $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 6i & 1-i \\ 3 & -i \end{pmatrix}$. Si calcoli $\mathbf{A}^{-1}$.

Ricordando che

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \qquad \text{se} \qquad ad-bc \neq 0,$$

si ha:

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{6i(-i)-3(1-i)}\begin{pmatrix} -i & -1+i \\ -3 & 6i \end{pmatrix} = \frac{1}{6-3+3i}\begin{pmatrix} -i & -1+i \\ -3 & 6i \end{pmatrix} = \frac{1}{3+3i}\begin{pmatrix} -i & -1+i \\ -3 & 6i \end{pmatrix}$$

Poichè

$$\frac{1}{3+3i} = \frac{1}{3+3i} \times \frac{\overline{3+3i}}{\overline{3+3i}} = \frac{3-3i}{(3+3i)(3-3i)} = \frac{3-3i}{3^2-3^2i^2} = \frac{3-3i}{9+9} = \frac{1}{6} - \frac{1}{6}i,$$

allora

$$\mathbf{A}^{-1} = (\frac{1}{6} - \frac{1}{6}i)\begin{pmatrix} -i & -1+i \\ -3 & 6i \end{pmatrix}.$$

$\boxed{6}$ Si dica per quali $\alpha \in \mathbb{C}$ la matrice $\mathbf{A}(\alpha) = \begin{pmatrix} \alpha+3i & \alpha \\ \alpha+3i & \alpha-i \end{pmatrix}$ è non singolare. Per tali α, si trovi l'inversa di $\mathbf{A}(\alpha)$.

Ricordando che $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ è non singolare se e solo se $ad-bc \neq 0$ ed in tal caso si ha

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix},$$

allora $\mathbf{A}(\alpha)$ è non singolare se e solo se

$$(\alpha+3i)(\alpha-i) - \alpha(\alpha+3i) = -i(\alpha+3i) \neq 0,$$

ossia se e solo se $\alpha \neq -3i$, ed in tal caso si ha:

$$\mathbf{A}(\alpha)^{-1} = \frac{1}{-i(\alpha+3i)} \begin{pmatrix} \alpha - i & -\alpha \\ -\alpha - 3i & \alpha + 3i \end{pmatrix}.$$

$\boxed{7}$ Sia $\mathbf{A} = \mathbf{E_{47}}(2)\mathbf{E_3}(6)\mathbf{E_{12}}(-3)\mathbf{E_{24}}\mathbf{E_5}(3)$ di ordine n. Si scrivano $\mathbf{A}^{-1}$ ed $\mathbf{A}^T$ come prodotti di matrici elementari.

Per ogni $i, j = 1, \dots, n$, con $i \neq j$, ed ogni $c, d \in \mathbb{C}$ con $d \neq 0$ si ha

$$\begin{aligned} &\mathbf{E_{ij}(c)}^{-1} = \mathbf{E_{ij}(-c)} \quad \text{ed} \quad \mathbf{E_{ij}(c)}^T = \mathbf{E_{ji}(c)}, \\ &\mathbf{E_i(d)}^{-1} = \mathbf{E_i(1/d)} \quad \text{ed} \quad \mathbf{E_i(d)}^T = \mathbf{E_i(d)}, \\ &\mathbf{E_{ij}}^{-1} = \mathbf{E_{ij}} = \mathbf{E_{ij}}^T. \end{aligned}$$

Inoltre, se $\mathbf{B}, \mathbf{C} \in M_n(\mathbb{C})$ allora $(\mathbf{BC})^T = \mathbf{C}^T\mathbf{B}^T$, e se in più esistono $\mathbf{B}^{-1}$ e $\mathbf{C}^{-1}$ allora esiste $(\mathbf{BC})^{-1}$ ed è $(\mathbf{BC})^{-1} = \mathbf{C}^{-1}\mathbf{B}^{-1}$.

Quindi da $\mathbf{A} = \mathbf{E_{47}}(2)\mathbf{E_3}(6)\mathbf{E_{12}}(-3)\mathbf{E_{24}}\mathbf{E_5}(3)$ segue

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^{-1} &= (\mathbf{E_{47}}(2)\mathbf{E_3}(6)\mathbf{E_{12}}(-3)\mathbf{E_{24}}\mathbf{E_5}(3))^{-1} = \mathbf{E_5}(3)^{-1}\mathbf{E_{24}}^{-1}\mathbf{E_{12}}(-3)^{-1}\mathbf{E_3}(6)^{-1}\mathbf{E_{47}}(2)^{-1} = \\ &= \mathbf{E_5}(\tfrac{1}{3})\mathbf{E_{24}}\mathbf{E_{12}}(3)\mathbf{E_3}(\tfrac{1}{6})\mathbf{E_{47}}(-2) \end{aligned}$$

ed

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^T &= (\mathbf{E_{47}}(2)\mathbf{E_3}(6)\mathbf{E_{12}}(-3)\mathbf{E_{24}}\mathbf{E_5}(3))^T = \mathbf{E_5}(3)^T\mathbf{E_{24}}^T\mathbf{E_{12}}(-3)^T\mathbf{E_3}(6)^T\mathbf{E_{47}}(2)^T = \\ &= \mathbf{E_5}(3)\mathbf{E_{24}}\mathbf{E_{21}}(-3)\mathbf{E_3}(6)\mathbf{E_{74}}(2) \end{aligned}$$

$\boxed{8}$ Sia $\mathbf{A}(\alpha) = \begin{pmatrix} \alpha & 3\alpha & 2\alpha & -2\alpha \\ 0 & 0 & \alpha^2+9 & \alpha^2+9 \\ 2 & 6 & 4 & -3+\alpha \\ 1 & 3 & 1 & -6-3\alpha \\ \alpha+1 & 3\alpha+3 & 2\alpha+1 & -1 \end{pmatrix}$, dove $\alpha \in \mathbb{C}$.

(a) Per ogni $\alpha \notin \{0, 3i, -3i\}$ si trovi una decomposizione $\mathbf{A}(\alpha) = \mathbf{L}(\alpha)\mathbf{U}(\alpha)$, scrivendo anche $\mathbf{L}(\alpha)$ come prodotto di matrici elementari.

(b) Per ogni $\alpha \notin \{0, 3i, -3i\}$ si trovi una decomposizione a rango pieno $\mathbf{A}(\alpha) = \mathbf{L_0}(\alpha)\mathbf{U_0}(\alpha)$.

$$\mathbf{A}(\alpha)=\begin{pmatrix} \boxed{\alpha} & 3\alpha & 2\alpha & -2\alpha \\ \boxed{0} & 0 & \alpha^2+9 & \alpha^2+9 \\ \boxed{2} & 6 & 4 & -3+\alpha \\ \boxed{1} & 3 & 1 & -6-3\alpha \\ \boxed{\alpha+1} & 3\alpha+3 & 2\alpha+1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[E_{51}(-\alpha-1)E_{41}(-1)E_{31}(-2)E_1(\frac{1}{\alpha}) \quad \boxed{\alpha\neq 0}]{}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & \boxed{\alpha^2+9} & \alpha^2+9 \\ 0 & 0 & \boxed{0} & \alpha+1 \\ 0 & 0 & \boxed{-1} & -3\alpha-4 \\ 0 & 0 & \boxed{-1} & 2\alpha+1 \end{pmatrix} \xrightarrow[E_{52}(1)E_{42}(1)E_2(\frac{1}{\alpha^2+9}) \quad \boxed{\alpha\notin\{3i,-3i\}}]{}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha+1 \\ 0 & 0 & 0 & -3\alpha-3 \\ 0 & 0 & 0 & 2\alpha+2 \end{pmatrix} = \mathbf{B}(\alpha)$$

$\boxed{1^o CASO}$ $\quad \alpha\neq -1$ (nonchè $\alpha\neq 0, 3i, -3i$)

$$\mathbf{B}(\alpha)=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{\alpha+1} \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{-3\alpha-3} \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{2\alpha+2} \end{pmatrix} \xrightarrow[E_{53}(-2\alpha-2)E_{43}(3\alpha+3)E_3(\frac{1}{\alpha+1})]{} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{U}(\alpha)$$

$$\mathbf{L}(\alpha)=\begin{pmatrix} \boxed{\alpha} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \boxed{0} & \boxed{\alpha^2+9} & 0 & 0 & 0 \\ \boxed{2} & \boxed{0} & \boxed{\alpha+1} & 0 & 0 \\ \boxed{1} & \boxed{-1} & \boxed{-3\alpha-3} & 1 & 0 \\ \boxed{\alpha+1} & \boxed{-1} & \boxed{2\alpha+2} & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \mathbf{E_1}(\alpha)\mathbf{E_{31}}(2)\mathbf{E_{41}}(1)\mathbf{E_{51}}(\alpha+1)\mathbf{E_2}(\alpha^2+9)\mathbf{E_{42}}(-1)\mathbf{E_{52}}(-1)\mathbf{E_3}(\alpha+1)\mathbf{E_{43}}(-3\alpha-3)\mathbf{E_{53}}(2\alpha+2)$$

$\boxed{2^o CASO}$ $\quad \alpha=-1$

$$\mathbf{B(-1)} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{U(-1)}$$

$$\mathbf{L(-1)} = \begin{pmatrix} \boxed{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \boxed{0} & \boxed{10} & 0 & 0 & 0 \\ \boxed{2} & \boxed{0} & 1 & 0 & 0 \\ \boxed{1} & \boxed{-1} & 0 & 1 & 0 \\ \boxed{0} & \boxed{-1} & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{E_1(-1)E_{31}(2)E_{41}(1)E_2(10)E_{42}(-1)E_{52}(-1)}$$

$\boxed{N.B.}$ Se $\alpha \in \{0, 3i, -3i\}$ non è possibile trovare una forma ridotta di Gauss di $\mathbf{A(\alpha)}$ senza fare scambi di righe, quindi $\mathbf{A(\alpha)}$ **NON** ha una decomposizione $\mathbf{L(\alpha)U(\alpha)}$.

Per ogni $\alpha \notin \{-1, 0, 3i, -3i\}$, si ha una decomposizione a rango pieno $\mathbf{A(\alpha)} = \mathbf{L_0(\alpha)U_0(\alpha)}$ prendendo

$$\mathbf{U_0(\alpha)} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ e } \mathbf{L_0(\alpha)} = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \alpha^2+9 & 0 \\ 2 & 0 & \alpha+1 \\ 1 & -1 & -3\alpha-3 \\ \alpha+1 & -1 & 2\alpha+2 \end{pmatrix};$$

per $\alpha = -1$ si ha una decomposizione a rango pieno $\mathbf{A(-1)} = \mathbf{L_0(-1)U_0(-1)}$ prendendo

$$\mathbf{U_0(-1)} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ e } \mathbf{L_0(-1)} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 10 \\ 2 & 0 \\ 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Algebra Lineare 1 A, Svolgimento degli Esercizi per casa 5

$\boxed{1}$ Sia $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 9 & -6 & 0 \\ -2 & -6 & 4 & -1 \\ 0 & 2 & -4 & 0 \\ 1 & 7 & 6 & 0 \\ 1 & -4 & 10 & -4 \end{pmatrix}$.

(a) Si trovi una decomposizione $\mathbf{A} = \mathbf{P}^T\mathbf{LU}$.

(b) Si trovi una decomposizione a rango pieno per $\mathbf{A}$.

Applicando l'algoritmo di Gauss ad A si ottiene:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 9 & -6 & 0 \\ -2 & -6 & 4 & -1 \\ 0 & 2 & -4 & 0 \\ 1 & 7 & 6 & 0 \\ 1 & -4 & 10 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{51}(-1)E_{41}(-1)E_{21}(2)E_1(\frac{1}{3})} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -4 & 0 \\ 0 & 4 & 8 & 0 \\ 0 & -7 & 12 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{23}}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & 8 & 0 \\ 0 & -7 & 12 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{52}(7)E_{42}(-4)E_2(\frac{1}{2})} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 16 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{34}}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 16 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{53}(2)E_3(\frac{1}{16})} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{54}(4)E_4(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Sia

$$\mathbf{P} = \mathbf{E_{34}E_{23}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Allora

$$\mathbf{PA} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 9 & -6 & 0 \\ -2 & -6 & 4 & -1 \\ 0 & 2 & -4 & 0 \\ 1 & 7 & 6 & 0 \\ 1 & -4 & 10 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 9 & -6 & 0 \\ 0 & 2 & -4 & 0 \\ 1 & 7 & 6 & 0 \\ -2 & -6 & 4 & -1 \\ 1 & -4 & 10 & -4 \end{pmatrix}.$$

Applichiamo l'algoritmo di Gauss senza scambi di righe a $\mathbf{PA}$. Otteniamo una decomposizione $\mathbf{LU}$ per $\mathbf{PA}$:

$$\mathbf{PA} = \begin{pmatrix} \boxed{3} & 9 & -6 & 0 \\ \boxed{0} & 2 & -4 & 0 \\ \boxed{1} & 7 & 6 & 0 \\ \boxed{-2} & -6 & 4 & -1 \\ \boxed{1} & -4 & 10 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{51}(-1)E_{41}(2)E_{31}(-1)E_1(\frac{1}{3})} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & \boxed{2} & -4 & 0 \\ 0 & \boxed{4} & 8 & 0 \\ 0 & \boxed{0} & 0 & -1 \\ 0 & \boxed{-7} & 12 & -4 \end{pmatrix} \to$$

$$\xrightarrow{E_{52}(7)E_{32}(-4)E_2(\frac{1}{2})} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{16} & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{0} & -1 \\ 0 & 0 & \boxed{-2} & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{53}(2)E_3(\frac{1}{16})} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{-1} \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{-4} \end{pmatrix} \to$$

$$\xrightarrow{E_{54}(4)E_4(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{U},$$

ed

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} \boxed{3} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \boxed{0} & \boxed{2} & 0 & 0 & 0 \\ \boxed{1} & \boxed{4} & \boxed{16} & 0 & 0 \\ \boxed{-2} & \boxed{0} & \boxed{0} & \boxed{-1} & 0 \\ \boxed{1} & \boxed{-7} & \boxed{-2} & \boxed{-4} & 1 \end{pmatrix}.$$

Dunque $\mathbf{A} = \mathbf{P}^T\mathbf{LU}$ dove

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{L} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 16 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & -7 & -2 & -4 & 1 \end{pmatrix} \text{ e } \mathbf{U} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

SI NOTI:

$\boxed{1}$

$$\mathbf{H} = \mathbf{E_{23}E_{34}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \neq \mathbf{P}$$

e che facendo un'eliminazione di Gauss su **HA** si ottiene:

$$\mathbf{HA} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 9 & -6 & 0 \\ -2 & -6 & 4 & -1 \\ 0 & 2 & -4 & 0 \\ 1 & 7 & 6 & 0 \\ 1 & -4 & 10 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 9 & -6 & 0 \\ 1 & 7 & 6 & 0 \\ -2 & -6 & 4 & -1 \\ 0 & 2 & -4 & 0 \\ 1 & -4 & 10 & -4 \end{pmatrix} \to$$

$$\xrightarrow{E_{51}(-1)E_{31}(2)E_{21}(-1)E_1(\frac{1}{3})} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 4 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -4 & 0 \\ 0 & -7 & 12 & -4 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\xrightarrow{E_{52}(7)E_{42}(-2)E_2(\frac{1}{4})} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & 26 & -4 \end{pmatrix}.$$

Dunque $\mathbf{HA}$ non ha una decomposizione $\mathbf{LU}$.

Quindi è fondamentale, per costruire $\mathbf{P}$, l'ordine in cui si moltiplicano le matrici corrispondenti agli scambi di righe effettuati (si parte dall'ultimo procedendo a ritroso).

$\boxed{2}$ Dall'eliminazione di Gauss fatta su $\mathbf{A}$ si ottiene che

$$\mathbf{E_{54}}(4)\mathbf{E_4}(-1)\mathbf{E_{53}}(2)\mathbf{E_3}(\frac{1}{16})\mathbf{E_{34}}\mathbf{E_{52}}(7)\mathbf{E_{42}}(-4)\mathbf{E_2}(\frac{1}{2})\mathbf{E_{23}}\mathbf{E_{51}}(-1)\mathbf{E_{41}}(-1)\mathbf{E_{21}}(2)\mathbf{E_1}(\frac{1}{3})\mathbf{A} = \mathbf{U}.$$

Quindi la tentazione di intuire $\mathbf{L}$ direttamente da questa eliminazione di Gauss è fuorviante: posto

$$\mathbf{B} = \mathbf{E_{54}}(4)\mathbf{E_4}(-1)\mathbf{E_{53}}(2)\mathbf{E_3}(\frac{1}{16})\mathbf{E_{52}}(7)\mathbf{E_{42}}(-4)\mathbf{E_2}(\frac{1}{2})\mathbf{E_{51}}(-1)\mathbf{E_{41}}(-1)\mathbf{E_{21}}(2)\mathbf{E_1}(\frac{1}{3})$$

il prodotto delle matrici elementari diverse da quelle corrispondenti agli scambi di righe, si ha che $\mathbf{BPA} \neq \mathbf{U}$, e quindi $\mathbf{PA} \neq \mathbf{B}^{-1}\mathbf{U}$, ossia $\mathbf{B}^{-1}$ non è un buon candidato per $\mathbf{L}$.

$\boxed{3}$ Mostriamo che esistono una forma ridotta di Gauss $\mathbf{U}^*$ per $\mathbf{A}$, una matrice di permutazione $\mathbf{P}^*$ ed una matrice triangolare inferiore non singolare $\mathbf{L}^*$ tali che

$$\mathbf{U}^* \neq \mathbf{U}, \qquad \mathbf{P}^* \neq \mathbf{P}, \qquad \mathbf{L}^* \neq \mathbf{L}, \qquad \text{ma } \mathbf{A} = (\mathbf{P}^*)^T\mathbf{L}^*\mathbf{U}^* = \mathbf{P}^T\mathbf{LU},$$

ossia la decomposizione $\mathbf{A} = \mathbf{P}^T\mathbf{LU}$ non è unica.

Facciamo una eliminazione di Gauss su $\mathbf{A}$ scegliendo degli scambi di riga diversi da quelli scelti nell'eliminazione che abbiamo fatto precedentemente.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 9 & -6 & 0 \\ -2 & -6 & 4 & -1 \\ 0 & 2 & -4 & 0 \\ 1 & 7 & 6 & 0 \\ 1 & -4 & 10 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{51}(-1)E_{41}(-1)E_{21}(2)E_1(\frac{1}{3})} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -4 & 0 \\ 0 & 4 & 8 & 0 \\ 0 & -7 & 12 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{24}}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 4 & 8 & 0 \\ 0 & 2 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -7 & 12 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{52}(7)E_{32}(-2)E_2(\frac{1}{4})} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 26 & -4 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\xrightarrow{E_{53}(-26)E_3(\frac{1}{-8})} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{54}(4)E_4(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Sia $\mathbf{P}^* = \mathbf{E_{24}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Allora

$$\mathbf{P}^*\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 9 & -6 & 0 \\ -2 & -6 & 4 & -1 \\ 0 & 2 & -4 & 0 \\ 1 & 7 & 6 & 0 \\ 1 & -4 & 10 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{3} & 9 & -6 & 0 \\ \boxed{1} & 7 & 6 & 0 \\ \boxed{0} & 2 & -4 & 0 \\ \boxed{-2} & -6 & 4 & -1 \\ \boxed{1} & -4 & 10 & -4 \end{pmatrix} \to$$

$$\xrightarrow{E_{51}(-1)E_{41}(2)E_{21}(-1)E_1(\frac{1}{3})} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & \boxed{4} & 8 & 0 \\ 0 & \boxed{2} & -4 & 0 \\ 0 & \boxed{0} & 0 & -1 \\ 0 & \boxed{-7} & 12 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{52}(7)E_{32}(-2)E_2(\frac{1}{4})} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{-8} & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{0} & -1 \\ 0 & 0 & \boxed{26} & -4 \end{pmatrix} \to$$

$$\xrightarrow{E_{53}(-26)E_3(\frac{1}{-8})} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{-1} \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{-4} \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{54}(4)E_4(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Quindi $\mathbf{A} = (\mathbf{P}^*)^T\mathbf{L}^*\mathbf{U}^*$ con

$$\mathbf{P}^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \neq \mathbf{P}, \quad \mathbf{U}^* = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \neq \mathbf{U},$$

$$\mathbf{L}^* = \begin{pmatrix} \boxed{3} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \boxed{1} & \boxed{4} & 0 & 0 & 0 \\ \boxed{0} & \boxed{2} & \boxed{-8} & 0 & 0 \\ \boxed{-2} & \boxed{0} & \boxed{0} & \boxed{-1} & 0 \\ \boxed{1} & \boxed{-7} & \boxed{26} & \boxed{-4} & 1 \end{pmatrix} \neq \mathbf{L}.$$

Per trovare una decomposizione a rango pieno per $\mathbf{A}$, partiamo, ad esmpio, dalla decomposizione $\mathbf{A} = \mathbf{P}^T\mathbf{L}\mathbf{U}$ dove

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{L} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 16 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & -7 & -2 & -4 & 1 \end{pmatrix} \text{ e } \mathbf{U} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Calcoliamo $\mathbf{P}^T\mathbf{L}$:

$$\mathbf{P}^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{P}^T\mathbf{L} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 16 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & -7 & -2 & -4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 16 & 0 & 0 \\ 1 & -7 & -2 & -4 & 1 \end{pmatrix} =: \mathbf{B}$$

Allora $\mathbf{A} = \mathbf{B}\mathbf{U}$ e si ottiene una decomposizione a rango pieno $\mathbf{A} = \mathbf{B}_0\mathbf{U}_0$ prendendo

$$\mathbf{U}_0 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ e } \mathbf{B}_0 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 16 & 0 \\ 1 & -7 & -2 & -4 \end{pmatrix}$$

ossia prendendo come $\mathbf{U}_0$ la matrice che si ottiene da $\mathbf{U}$ togliendo le ultime $m-k$ righe, dove $m = 4 =$ numero delle righe di $\mathbf{U}$ e $k = 3 =$ rango di $\mathbf{U}$ (e quindi anche $k =$ rango di $\mathbf{A}$), e prendendo come $\mathbf{B}_0$ la matrice che si ottiene da $\mathbf{B}$ togliendo le ultime $m-k$ colonne (ossia le colonne in posizioni corrispondenti alle ultime righe nulle tolte da $\mathbf{U}$).

$\boxed{2}$ Si provi che l'insieme delle matrici simmetriche (complesse) di ordine n è un sottospazio vettoriale di $M_n(\mathbb{C})$ e che l'insieme delle matrici anti-hermitiane (complesse) di ordine n non è.

Sia $W_1 = \{\mathbf{A} \in M_n(\mathbb{C}) | \mathbf{A} = \mathbf{A}^T\}$ l'insieme delle matrici simmetriche (complesse) di ordine n.

(i) $\mathbf{O}_{n\times n} \in W_1$: $\mathbf{O}^T = \mathbf{O}$

(ii) $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in W_1 \overset{?}{\Longrightarrow} \mathbf{A}+\mathbf{B} \in W_1$

$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{r} \mathbf{A} \in W_1 \Longrightarrow \mathbf{A} \in M_n(\mathbb{C}) \\ \mathbf{B} \in W_1 \Longrightarrow \mathbf{B} \in M_n(\mathbb{C}) \end{array}\right\} \Longrightarrow \mathbf{A}+\mathbf{B} \in M_n(\mathbb{C}) \\ \left.\begin{array}{r} \mathbf{A} \in W_1 \Longrightarrow \mathbf{A} = \mathbf{A}^T \\ \mathbf{B} \in W_1 \Longrightarrow \mathbf{B} = \mathbf{B}^T \end{array}\right\} \Longrightarrow (\mathbf{A}+\mathbf{B})^T = \mathbf{A}^T + \mathbf{B}^T = \mathbf{A}+\mathbf{B} \end{array}\right\} \Longrightarrow \mathbf{A}+\mathbf{B} \in W_1$$

(iii) $\alpha \in \mathbb{C}, \mathbf{A} \in W_1 \overset{?}{\Longrightarrow} \alpha\mathbf{A} \in W_1$

$$\left.\begin{array}{r} \mathbf{A} \in W_1 \Longrightarrow \mathbf{A} \in M_n(\mathbb{C}) \Longrightarrow \alpha\mathbf{A} \in M_n(\mathbb{C}) \\ \mathbf{A} \in W_1 \Longrightarrow \mathbf{A} = \mathbf{A}^T \Longrightarrow (\alpha\mathbf{A})^T = \alpha\mathbf{A}^T = \alpha\mathbf{A} \end{array}\right\} \Longrightarrow \alpha\mathbf{A} \in W_1$$

Sia $W_2 = \{\mathbf{A} \in M_n(\mathbb{C}) | \mathbf{A}^H = -\mathbf{A}\}$ l'insieme delle matrici anti-hermitiane (complesse) di ordine n.

(i) $\quad \mathbf{O}_{n\times n} \in W_2$: $\mathbf{O}^H = \mathbf{O} = -\mathbf{O}$

(ii) $\quad \mathbf{A}, \mathbf{B} \in W_2 \quad \stackrel{?}{\Longrightarrow} \quad \mathbf{A}+\mathbf{B} \in W_2$

$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} \mathbf{A} \in W_2 \Longrightarrow \mathbf{A} \in M_n(\mathbb{C}) \\ \\ \mathbf{B} \in W_2 \Longrightarrow \mathbf{B} \in M_n(\mathbb{C}) \end{array}\right\} \quad \Longrightarrow \quad \mathbf{A}+\mathbf{B} \in M_n(\mathbb{C}) \\ \\ \left.\begin{array}{l} \mathbf{A} \in W_2 \Longrightarrow \mathbf{A}^H = -\mathbf{A} \\ \\ \mathbf{B} \in W_2 \Longrightarrow \mathbf{B}^H = -\mathbf{B} \end{array}\right\} \Longrightarrow (\mathbf{A}+\mathbf{B})^H = \mathbf{A}^H + \mathbf{B}^H = -\mathbf{A} + (-\mathbf{B}) = -(\mathbf{A}+\mathbf{B}) \end{array}\right\} \Longrightarrow \mathbf{A}+\mathbf{B} \in W_2$$

(iii) $\quad \alpha \in \mathbb{C}, \mathbf{A} \in W_2 \quad \stackrel{?}{\Longrightarrow} \quad \alpha\mathbf{A} \in W_2$

$$\mathbf{A} \in W_2 \Longrightarrow \mathbf{A} \in M_n(\mathbb{C}) \Longrightarrow \alpha\mathbf{A} \in M_n(\mathbb{C})$$

$$\mathbf{A} \in W_2 \Longrightarrow \mathbf{A}^H = -\mathbf{A} \Longrightarrow (\alpha\mathbf{A})^H = \overline{\alpha}\mathbf{A}^H = \overline{\alpha}(-\mathbf{A}) = -\overline{\alpha}\mathbf{A}$$

Non è vero che $\alpha\mathbf{A} \in W_2$ **per ogni scalare** α **ed ogni** $\mathbf{A} \in W_2$:

prendendo $\mathbf{A} \neq \mathbf{O}$ si ottiene che

$$\overline{\alpha}\mathbf{A} = \alpha\mathbf{A} \quad \underset{\uparrow}{\Longleftrightarrow} \quad \overline{\alpha} = \alpha \iff \alpha \in \mathbb{R}$$

$$\boxed{\text{poichè } \mathbf{A} \neq \mathbf{O}}$$

Quindi se $\mathbf{O} \neq \mathbf{A} \in W_2$ e $\alpha \notin \mathbb{R}$ (ad esempio se $\mathbf{A}$ è la matrice $n \times n$ con 1 al posto $(1, n)$, -1 al posto $(n, 1)$ e 0 altrove, ed $\alpha = i$) allora $\alpha\mathbf{A} \notin W_2$.

Dunque W_2 non è un sottospazio dello spazio vettoriale $M_n(\mathbb{C})$.

$\boxed{3}$ Si dica quale dei seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{R}^2$ è un suo sottospazio:

$$W_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \middle| x - 2y = 0 \right\}, \quad W_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \middle| x^2 - 2y = 0 \right\}, \quad W_3 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \middle| x - 2y = 1 \right\}.$$

• Per vedere se W_1 è o non è un sottospazio di $\mathbb{R}^2$ occorre stabilire se le seguenti condizioni sono soddisfatte:

(i) $\mathbf{0} \in W_1$

(ii) $\mathbf{u} + \mathbf{v} \in W_1$ per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in W_1$,

(iii) $\alpha\mathbf{u} \in W_1$ per ogni $\mathbf{u} \in W_1$ ed ogni scalare α.

(i) $\mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in W_1$ perchè $0 - 2 \cdot 0 = 0$.

(ii) Se $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \in W_1$, allora

$$\begin{cases} x_1 - 2y_1 = 0 \\ x_2 - 2y_2 = 0 \end{cases}$$

Di conseguenza

$$(x_1 + x_2) - 2(y_1 + y_2) = (x_1 - 2y_1) + (x_2 - 2y_2) = 0 + 0 = 0,$$

e quindi $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \end{pmatrix} \in W_1$.

(iii) Se $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in W_1$, allora $x - 2y = 0$. Ne segue che per ogni scalare $\alpha \in \mathbb{R}$ si ha

$$\alpha x - 2\alpha y = \alpha(x - 2y) = \alpha \cdot 0 = 0,$$

e quindi $\alpha\mathbf{u} = \alpha \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha x \\ \alpha y \end{pmatrix} \in W_1$.

Dunque W_1 è un sottospazio di $\mathbb{R}^2$.

• Per vedere se W_2 è o non è un sottospazio di $\mathbb{R}^2$ occorre stabilire se le seguenti condizioni sono soddisfatte:

(i) $\mathbf{0} \in W_2$

(ii) $\mathbf{u} + \mathbf{v} \in W_2$ per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in W_2$,

(iii) $\alpha\mathbf{u} \in W_2$ per ogni $\mathbf{u} \in W_2$ ed ogni scalare α.

(i) $\mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in W_2$ perchè $0^2 - 2 \cdot 0 = 0$.

(ii) Se $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \in W_2$, allora

$$(*) \qquad \begin{cases} x_1^2 - 2y_1 = 0 \\ x_2^2 - 2y_2 = 0 \end{cases}$$

Perchè $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \end{pmatrix}$ appartenga a W_2 occorre che sia soddisfatta la condizione:

$$(**) \qquad (x_1 + x_2)^2 - 2(y_1 + y_2) = 0.$$

Da $(*)$ segue

$$\begin{aligned} (x_1 + x_2)^2 - 2(y_1 + y_2) &= x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_2 - 2(y_1 + y_2) = \\ &= (x_1^2 - 2y_1) + (x_2^2 - 2y_2) + 2x_1x_2 \quad \overset{(*)}{=} 2x_1x_2, \end{aligned}$$

per cui prendendo

$$\begin{cases} x_1 \neq 0 \\ x_2 \neq 0 \\ y_1 = \frac{x_1^2}{2} \\ y_2 = \frac{x_2^2}{2} \end{cases}$$

si ha che $(*)$ è soddisfatta, ma $(**)$ no, ossia $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \in W_2$, ma $\mathbf{u}+\mathbf{v} = \begin{pmatrix} x_1+x_2 \\ y_1+y_2 \end{pmatrix} \notin W_2$ (ad esempio, con $\mathbf{u} = \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \in W_2$ si ha che $2\mathbf{u} = \mathbf{u}+\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \notin W_2$). Quindi W_2, non soddisfacendo la condizione (ii), non è un sottospazio di $\mathbb{R}^2$.

• Per vedere se W_3 è o non è un sottospazio di $\mathbb{R}^2$ occorre stabilire se le seguenti condizioni sono soddisfatte:
(i) $\mathbf{0} \in W_3$
(ii) $\mathbf{u}+\mathbf{v} \in W_3$ per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in W_3$,
(iii) $\alpha\mathbf{u} \in W_3$ per ogni $\mathbf{u} \in W_3$ ed ogni scalare α.

(i) $\mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \notin W_3$ perchè $0 - 2 \cdot 0 = 0 \neq 1$.

Dunque W_3, non soddisfacendo la condizione (i), non è un sottospazio di $\mathbb{R}^2$.

$\boxed{4}$ Sia $\mathbf{A} \in M_n(\mathbb{C})$. Si provi che i tre seguenti sottoinsiemi di $M_n(\mathbb{C})$ sono sottospazi vettoriali di $M_n(\mathbb{C})$: $W_1 = \{\mathbf{B} \in M_n(\mathbb{C}) | \mathbf{AB} = \mathbf{BA}\}$, $W_2 = \{\mathbf{B} \in M_n(\mathbb{C}) | \mathbf{AB}$ è scalare$\}$ e $W_3 = \{\mathbf{B} \in M_n(\mathbb{C}) | \mathbf{AB} = \mathbf{B}^T\}$.

W_1 è un sottospazio di $M_n(\mathbb{C})$:
(i) $\mathbf{O}_{n\times n} \in W_1$: $\mathbf{O}_{n\times n} \in M_n(\mathbb{C})$ e $\mathbf{AO} = \mathbf{O} = \mathbf{OA}$.
(ii) $\mathbf{B}, \mathbf{C} \in W_1 \overset{?}{\Longrightarrow} \mathbf{B}+\mathbf{C} \in W_1$

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{r}\mathbf{B} \in W_1 \Longrightarrow \mathbf{B} \in M_n(\mathbb{C}) \\ \mathbf{C} \in W_1 \Longrightarrow \mathbf{C} \in M_n(\mathbb{C})\end{array}\right\} \Longrightarrow \mathbf{B}+\mathbf{C} \in M_n(\mathbb{C}) \\ \left.\begin{array}{l}\mathbf{B} \in W_1 \Longrightarrow \mathbf{AB} = \mathbf{BA} \\ \mathbf{C} \in W_1 \Longrightarrow \mathbf{AC} = \mathbf{CA}\end{array}\right\} \Longrightarrow \mathbf{A}(\mathbf{B}+\mathbf{C}) = \mathbf{AB}+\mathbf{AC} = \mathbf{BA}+\mathbf{CA} = (\mathbf{B}+\mathbf{C})\mathbf{A}\end{array}\right\} \Longrightarrow \mathbf{B}+\mathbf{C} \in W_1$$

(iii) $\alpha \in \mathbb{C}, \mathbf{B} \in W_1 \overset{?}{\Longrightarrow} \alpha\mathbf{B} \in W_1$

$$\left.\begin{array}{r}\mathbf{B} \in W_1 \Longrightarrow \mathbf{B} \in M_n(\mathbb{C}) \Longrightarrow \alpha\mathbf{B} \in M_n(\mathbb{C}) \\ \mathbf{B} \in W_1 \Longrightarrow \mathbf{AB} = \mathbf{BA} \Longrightarrow \mathbf{A}(\alpha\mathbf{B}) = \alpha(\mathbf{AB}) = \alpha(\mathbf{BA}) = (\alpha\mathbf{B})\mathbf{A}\end{array}\right\} \Longrightarrow \alpha\mathbf{B} \in W_1$$

W_2 è un sottospazio di $M_n(\mathbb{C})$: poichè

$$\mathbf{B} \in W_2 \iff \mathbf{B} \in M_n(\mathbb{C}) \text{ ed } \exists \delta_{\mathbf{B}} \in \mathbb{C} | \mathbf{AB} = \delta_{\mathbf{B}}\mathbf{I_n},$$

e poichè $M_n(\mathbb{C})$ è uno spazio vettoriale (per cui la somma di due matrici di ordine n ed il prodotto di una matrice di ordine n per uno scalare sono matrici di ordine n) è sufficiente verificare che

(i) $\mathbf{A}\mathbf{O}_{n\times n} = \mathbf{O} = 0\mathbf{I_n}$ per cui esiste $\delta_{\mathbf{O}} \in \mathbb{C}$ tale che $\mathbf{A}\mathbf{O} = \delta_{\mathbf{O}}\mathbf{I_n}$ (si prenda $\delta_{\mathbf{O}} = 0$).

(ii) Se $\mathbf{B}$ e $\mathbf{C}$ sono matrici di ordine n tali che esistano $\delta_{\mathbf{B}}, \delta_{\mathbf{C}} \in \mathbb{C}$ per cui $\mathbf{AB} = \delta_{\mathbf{B}}\mathbf{I_n}$ e $\mathbf{AC} = \delta_{\mathbf{C}}\mathbf{I_n}$, allora

$$\mathbf{A}(\mathbf{B}+\mathbf{C}) = \mathbf{AB} + \mathbf{AC} = \delta_{\mathbf{B}}\mathbf{I_n} + \delta_{\mathbf{C}}\mathbf{I_n} = (\delta_{\mathbf{B}} + \delta_{\mathbf{C}})\mathbf{I_n}.$$

Quindi esiste $\delta_{\mathbf{B}+\mathbf{C}} \in \mathbb{C}$ tale che $\mathbf{A}(\mathbf{B}+\mathbf{C}) = \delta_{\mathbf{B}+\mathbf{C}}\mathbf{I_n}$: si prenda $\delta_{\mathbf{B}+\mathbf{C}} = \delta_{\mathbf{B}} + \delta_{\mathbf{C}}$.

(iii) Se $\alpha \in \mathbb{C}$ e $\mathbf{B}$ è una matrice di ordine n per cui esista $\delta_{\mathbf{B}} \in \mathbb{C}$ tale che $\mathbf{AB} = \delta_{\mathbf{B}}\mathbf{I_n}$, allora

$$\mathbf{A}(\alpha\mathbf{B}) = \alpha(\mathbf{AB}) = \alpha(\delta_{\mathbf{B}}\mathbf{I_n}) = (\alpha\delta_{\mathbf{B}})\mathbf{I_n}.$$

Quindi esiste $\delta_{\alpha\mathbf{B}} \in \mathbb{C}$ tale che $\mathbf{A}(\alpha\mathbf{B}) = \delta_{\alpha\mathbf{B}}\mathbf{I_n}$: si prenda $\delta_{\alpha\mathbf{B}} = \alpha\delta_{\mathbf{B}}$.

W_3 è un sottospazio di $M_n(\mathbb{C})$:

(i) $\mathbf{O}_{n\times n} \in W_3$: $\mathbf{O}_{n\times n} \in M_n(\mathbb{C})$ e $\mathbf{AO} = \mathbf{O} = \mathbf{O}^T$.

(ii) $\mathbf{B}, \mathbf{C} \in W_3 \overset{?}{\Longrightarrow} \mathbf{B}+\mathbf{C} \in W_3$

$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} \mathbf{B} \in W_3 \Longrightarrow \mathbf{B} \in M_n(\mathbb{C}) \\ \mathbf{C} \in W_3 \Longrightarrow \mathbf{C} \in M_n(\mathbb{C}) \end{array}\right\} \Longrightarrow \mathbf{B}+\mathbf{C} \in M_n(\mathbb{C}) \\ \left.\begin{array}{l} \mathbf{B} \in W_3 \Longrightarrow \mathbf{AB} = \mathbf{B}^T \\ \mathbf{C} \in W_3 \Longrightarrow \mathbf{AC} = \mathbf{C}^T \end{array}\right\} \Longrightarrow \mathbf{A}(\mathbf{B}+\mathbf{C}) = \mathbf{AB} + \mathbf{AC} = \mathbf{B}^T + \mathbf{C}^T = (\mathbf{B}+\mathbf{C})^T \end{array}\right\} \Longrightarrow \mathbf{B}+\mathbf{C} \in W_3$$

(iii) $\alpha \in \mathbb{C}, \mathbf{B} \in W_3 \overset{?}{\Longrightarrow} \alpha\mathbf{B} \in W_3$

$$\left.\begin{array}{r} \mathbf{B} \in W_3 \Longrightarrow \mathbf{B} \in M_n(\mathbb{C}) \Longrightarrow \alpha\mathbf{B} \in M_n(\mathbb{C}) \\ \mathbf{B} \in W_3 \Longrightarrow \mathbf{AB} = \mathbf{B}^T \Longrightarrow \mathbf{A}(\alpha\mathbf{B}) = \alpha(\mathbf{AB}) = \alpha\mathbf{B}^T = (\alpha\mathbf{B})^T \end{array}\right\} \Longrightarrow \alpha\mathbf{B} \in W_3$$

$\boxed{5}$ Sia $V = \mathbb{R}^2$ (sp. vett. reale). Si dica quale dei seguenti sottoinsiemi di V è un sottospazio vettoriale di V:

$$\mathrm{S}_1 = \left\{\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\right\}; \mathrm{S}_2 = \left\{\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}; \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right\}; \mathrm{S}_3 = \left\{\begin{pmatrix}a-2\\b\end{pmatrix} | a, b \in \mathbb{R}\right\}; \mathrm{S}_4 = \left\{\begin{pmatrix}a-2\\a+1\end{pmatrix} | a \in \mathbb{R}\right\}.$$

• S_1 è un sottospazio vettoriale di V: l'unico elemento di S_1 è il vettore $\mathbf{0} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$, e $\mathbf{0}+\mathbf{0} = \mathbf{0} \in \mathrm{S}_1$ e $\alpha\mathbf{0} = \mathbf{0} \in \mathrm{S}_1$ per ogni scalare α (S_1 è il sottospazio nullo di $\mathbb{R}^2$).

• S_2 non è un sottospazio di V: contiene $\mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ ma non contiene $\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_2 = 2\mathbf{e}_2$ (d'altra parte nessun sottoinsieme **finito** di uno spazio vettoriale W che contenga un elemento non nullo $\mathbf{w} \neq \mathbf{0}$ può essere un sottospazio di W: se U è un sottospazio di W che contiene $\mathbf{w} \neq \mathbf{0}$, allora U deve contenere l'insieme **infinito** di vettori $\{\alpha\mathbf{w} | \alpha \text{ scalare }\}$, per cui U stesso deve essere infinito).

• Per vedere se S_3 è o non è un sottospazio di V occorre stabilire se le seguenti condizioni sono soddisfatte:

(i) $\mathbf{0} \in \mathrm{S}_3$

(ii) $\mathbf{u} + \mathbf{v} \in \mathrm{S}_3$ per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathrm{S}_3$,

(iii) $\alpha\mathbf{u} \in \mathrm{S}_3$ per ogni $\mathbf{u} \in \mathrm{S}_3$ ed ogni scalare α.

(i) esistono $a, b \in \mathbb{R}$ tali che $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-2 \\ b \end{pmatrix}$: si prenda $a = 2$ e $b = 0$, quindi $\mathbf{0} \in \mathrm{S}_3$

(ii) Se $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathrm{S}_3$ esistono $a_1, b_1, a_2, b_2 \in \mathbb{R}$ tali che

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} a_1 - 2 \\ b_1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} a_2 - 2 \\ b_2 \end{pmatrix},$$

inoltre

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} \in \mathrm{S}_3 \quad \Longleftrightarrow \quad \exists \;\; a_3, b_3 \in \mathbb{R} | \mathbf{u} + \mathbf{v} = \begin{pmatrix} a_3 - 2 \\ b_3 \end{pmatrix}.$$

Poichè $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \begin{pmatrix} a_1 - 2 \\ b_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2 - 2 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + a_2 - 4 \\ b_1 + b_2 \end{pmatrix}$, basta prendere $a_3 = a_1 + a_2 - 2$ e $b_3 = b_1 + b_2$.

(iii) Se $\mathbf{u} \in \mathrm{S}_3$ esistono $a, b \in \mathbb{R}$ tali che $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} a-2 \\ b \end{pmatrix}$, inoltre per ogni scalare $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\alpha\mathbf{u} \in \mathrm{S}_4 \quad \Longleftrightarrow \quad \exists \;\; c, d \in \mathbb{R} | \alpha\mathbf{u} = \begin{pmatrix} c-2 \\ d \end{pmatrix}.$$

Poichè $\alpha\mathbf{u} = \alpha \begin{pmatrix} a-2 \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha a - 2\alpha \\ \alpha b \end{pmatrix}$, basta prendere $c = \alpha a - 2\alpha + 2$ e $d = \alpha b$.

Dunque S_3 è un sottospazio di V.

• Per vedere se S_4 è o non è un sottospazio di V occorre stabilire se le seguenti condizioni sono soddisfatte:

(i) $\mathbf{0} \in \mathrm{S}_4$

(ii) $\mathbf{u} + \mathbf{v} \in \mathrm{S}_4$ per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathrm{S}_4$,

(iii) $\alpha\mathbf{u} \in \mathrm{S}_4$ per ogni $\mathbf{u} \in \mathrm{S}_4$ ed ogni scalare α.

(i) Perchè $\mathbf{0}$ appartenga a S_4 occorre che esista $a \in \mathbb{R}$ tale che $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-2 \\ a+1 \end{pmatrix}$. Poichè il sistema

$$\begin{cases} a - 2 = 0 \\ \\ a + 1 = 0 \end{cases}$$

nell'incognita a non ha soluzioni, allora S_4 non è un sottospazio di V.

$\boxed{6}$ Si dica se $W_1 = \{i \cdot \mathbf{v} | \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n\}$ e $W_2 = \{2 \cdot \mathbf{v} | \mathbf{v} \in \mathbb{C}^n\}$ sono sottospazi di $\mathbb{C}^n$.

Per vedere se W_1 è o non è un sottospazio di V occorre stabilire se le seguenti condizioni sono soddisfatte:

(i) $\mathbf{0} \in W_1$

(ii) $\mathbf{u_1} + \mathbf{u_2} \in W_1$ per ogni $\mathbf{u_1}, \mathbf{u_2} \in W_1$,

(iii) $\alpha\mathbf{u} \in W_1$ per ogni $\mathbf{u} \in W_1$ ed ogni $\alpha \in \mathbb{C}$.

(i) esiste $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ tale che $\mathbf{0} = i \cdot \mathbf{v}$: si prenda $\mathbf{v} = \mathbf{0}$. Quindi $\mathbf{0} \in W_1$

(ii) Se $\mathbf{u_1}, \mathbf{u_2} \in W_1$ esistono $\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2} \in \mathbb{R}^n$ tali che $\mathbf{u_1} = i \cdot \mathbf{v_1}$ ed $\mathbf{u_2} = i \cdot \mathbf{v_2}$. inoltre

$$\mathbf{u_1} + \mathbf{u_2} \in W_1 \quad \iff \quad \exists \quad \mathbf{v_3} \in \mathbb{R}^n | \mathbf{u_1} + \mathbf{u_2} = i \cdot \mathbf{v_3}.$$

Poichè $\mathbf{u_1} + \mathbf{u_2} = i \cdot \mathbf{v_1} + i \cdot \mathbf{v_2} = i \cdot (\mathbf{v_1} + \mathbf{v_2})$, basta prendere $\mathbf{v_3} = \mathbf{v_1} + \mathbf{v_2}$.

(iii) Se $\mathbf{u} \in W_1$, esiste $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ tale che $\mathbf{u} = i \cdot \mathbf{v}$, inoltre per ogni scalare $\alpha \in \mathbb{C}$

$$\alpha\mathbf{u} \in W_1 \quad \iff \quad \exists \mathbf{w} \in \mathbb{R}^n | \alpha\mathbf{u} = i \cdot \mathbf{w}.$$

Poichè $\alpha\mathbf{u} = \alpha \cdot (i \cdot \mathbf{v}) = i \cdot (\alpha \cdot \mathbf{v})$,

$$\alpha\mathbf{u} \in W_1 \quad \forall \mathbf{u} \in W_1, \alpha \in \mathbb{C} \quad \iff \mathbf{w} = \alpha \cdot \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n, \alpha \in \mathbb{C}.$$

Prendendo ad esempio $\mathbf{v} = \mathbf{e_1} \in \mathbb{R}^n$ ed $\alpha = i \in \mathbb{C}$, si ha che $\alpha\mathbf{v} = i \cdot \mathbf{e_1} \notin \mathbb{R}^n$ (quindi $\mathbf{u} = i \cdot \mathbf{e_1} \in W_1$ mentre $\alpha\mathbf{u} = i^2 \cdot \mathbf{e_1} = -\mathbf{e_1} \notin W_1$, non esistendo $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$ tale che $-\mathbf{e_1} = i \cdot \mathbf{z}$).

Concludendo, W_1 non è un sottospazio vettoriale di V.

Per vedere se W_2 è o non è un sottospazio di V occorre stabilire se le seguenti condizioni sono soddisfatte:

(i) $\mathbf{0} \in W_2$

(ii) $\mathbf{u_1} + \mathbf{u_2} \in W_2$ per ogni $\mathbf{u_1}, \mathbf{u_2} \in W_2$,

(iii) $\alpha\mathbf{u} \in W_2$ per ogni $\mathbf{u} \in W_2$ ed ogni $\alpha \in \mathbb{C}$.

(i) esiste $\mathbf{v} \in \mathbb{C}^n$ tale che $\mathbf{0} = 2 \cdot \mathbf{v}$: si prenda $\mathbf{v} = \mathbf{0}$. Quindi $\mathbf{0} \in W_2$

(ii) Se $\mathbf{u_1}, \mathbf{u_2} \in W_2$ esistono $\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2} \in \mathbb{C}^n$ tali che $\mathbf{u_1} = 2 \cdot \mathbf{v_1}$ ed $\mathbf{u_2} = 2 \cdot \mathbf{v_2}$. inoltre

$$\mathbf{u_1} + \mathbf{u_2} \in W_2 \quad \iff \quad \exists \quad \mathbf{v_3} \in \mathbb{C}^n | \mathbf{u_1} + \mathbf{u_2} = 2 \cdot \mathbf{v_3}.$$

Poichè $\mathbf{u_1} + \mathbf{u_2} = 2 \cdot \mathbf{v_1} + 2 \cdot \mathbf{v_2} = 2 \cdot (\mathbf{v_1} + \mathbf{v_2})$, basta prendere $\mathbf{v_3} = \mathbf{v_1} + \mathbf{v_2}$.

(iii) Se $\mathbf{u} \in W_2$, esiste $\mathbf{v} \in \mathbb{C}^n$ tale che $\mathbf{u} = 2 \cdot \mathbf{v}$, inoltre per ogni scalare $\alpha \in \mathbb{C}$

$$\alpha\mathbf{u} \in W_2 \quad \iff \quad \exists \mathbf{w} \in \mathbb{C}^n | \alpha\mathbf{u} = 2 \cdot \mathbf{w}.$$

Poichè $\alpha\mathbf{u} = \alpha \cdot (2 \cdot \mathbf{v}) = 2 \cdot (\alpha \cdot \mathbf{v})$,

$$\alpha\mathbf{u} \in W_2 \quad \forall \mathbf{u} \in W_2, \alpha \in \mathbb{C} \quad \iff \mathbf{w} = \alpha \cdot \mathbf{v} \in \mathbb{C}^n \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbb{C}^n, \alpha \in \mathbb{C}.$$

Dal momento che $\mathbb{C}^n$ è uno spazio vettoriale, allora $\alpha\mathbf{v} \in \mathbb{C}^n$ per ogni $\mathbf{v} \in \mathbb{C}^n$ ed ogni $\alpha \in \mathbb{C}$.

Concludendo, W_2 è un sottospazio vettoriale di V.

$\boxed{7}$ Sia $W = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix} | a \in \mathbb{R} \right\}$ l'insieme delle matrici reali anti-simmetriche di ordine 2. Si provi che W è un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale reale $M_2(\mathbb{R})$ e si dica quali dei seguenti sottoinsiemi di $M_2(\mathbb{R})$ è un insieme di generatori per W:

(a) $\left\{ \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \right\}$ **(b)** $\left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$ **(c)** $\left\{ \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} \right\}$

Proviamo prima che W è un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale reale $M_2(\mathbb{R})$.

$\boxed{1^0 \text{ MODO}}$

(i) $\mathbf{O}_{2\times 2} \in W$: $\mathbf{O}_{2\times 2} \in M_2(\mathbb{R})$ e $\mathbf{O}_{2\times 2}^T = \mathbf{O}_{2\times 2} = -\mathbf{O}_{2\times 2}$

(ii)

$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{r} \mathbf{A} \in W \Longrightarrow \mathbf{A} \in M_2(\mathbb{R}) \\ \mathbf{B} \in W \Longrightarrow \mathbf{B} \in M_2(\mathbb{R}) \end{array}\right\} \Longrightarrow \mathbf{A}+\mathbf{B} \in M_2(\mathbb{R}) \\ \left.\begin{array}{r} \mathbf{A} \in W \Longrightarrow \mathbf{A} = -\mathbf{A}^T \\ \mathbf{B} \in W \Longrightarrow \mathbf{B} = -\mathbf{B}^T \end{array}\right\} \Longrightarrow (\mathbf{A}+\mathbf{B})^T = \mathbf{A}^T + \mathbf{B}^T = -\mathbf{A} - \mathbf{B} = -(\mathbf{A}+\mathbf{B}) \end{array}\right\} \Longrightarrow \mathbf{A}+\mathbf{B} \in W$$

(iii) $\alpha \in \mathbb{C}, \mathbf{A} \in W \quad \overset{?}{\Longrightarrow} \quad \alpha\mathbf{A} \in W$

$$\left.\begin{array}{r} \mathbf{A} \in W \Longrightarrow \mathbf{A} \in M_2(\mathbb{R}) \Longrightarrow \alpha\mathbf{A} \in M_2(\mathbb{R}) \\ \mathbf{A} \in W \Longrightarrow \mathbf{A} = -\mathbf{A}^T \Longrightarrow (\alpha\mathbf{A})^T = \alpha\mathbf{A}^T = \alpha(-\mathbf{A}) = -\alpha\mathbf{A} \end{array}\right\} \Longrightarrow \alpha\mathbf{A} \in W$$

$\boxed{2^0 \text{ MODO}}$

(i) esiste $a \in \mathbb{R}$ tale che $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix}$: si prenda $a = 0$.

(ii) Se $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in W$ esistono $a, b \in \mathbb{R}$ tali che

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix},$$

inoltre

$$\mathbf{A}+\mathbf{B} \in W \quad \Longleftrightarrow \quad \exists \quad c \in \mathbb{R} | \mathbf{A}+\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & c \\ -c & 0 \end{pmatrix}.$$

Poichè $\mathbf{A}+\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & a+b \\ -(a+b) & 0 \end{pmatrix}$, basta prendere $c = a + b$.

(iii) Se $\mathbf{A} \in W$ esiste $a \in \mathbb{R}$ tale che $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix}$, inoltre per ogni scalare $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\alpha\mathbf{A} \in W \quad \Longleftrightarrow \quad \exists \quad b \in \mathbb{R}^3 | \alpha\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix}.$$

Poichè $\alpha\mathbf{A} = \alpha\begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \alpha a \\ -\alpha a & 0 \end{pmatrix}$, basta prendere $b = \alpha a$.

Dunque W è un sottospazio di $M_2(\mathbb{R})$.

Vediamo ora quale tra (a), (b) e (c) è un insieme di generatori di W.

(a) Dal momento che ogni elemento di $\left\{\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}\right\}$ è un elemento di W, per stabilire se $\left\{\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}\right\}$ è o non è un insieme di generatori di W, spazio vettoriale **reale**, occorre stabilire se **per ogni $\mathbf{A} \in W$ esistono** α_1 ed α_2 numeri **reali** tali che

$$\mathbf{A} = \alpha_1\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \alpha_2\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha_1 + 2\alpha_2 \\ \alpha_1 - 2\alpha_2 & 0 \end{pmatrix}$$

Poichè per ogni $A \in W$ esiste $a \in \mathbb{R}$ tale che $A = \begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix}$, il problema diventa stabilire se per ogni $a \in \mathbb{R}$ il sistema

$$(*) \qquad \begin{cases} -\alpha_1 + 2\alpha_2 = a \\ \alpha_1 - 2\alpha_2 = -a \end{cases}$$

nelle incognite **reali** α_1, α_2 ha soluzione. $(*)$ è equivalente all'unica equazione

$$\alpha_1 - 2\alpha_2 = -a$$

che ha soluzioni per ogni $a \in \mathbb{R}$ (si prendano ad esempio $\alpha_2 = 0$ ed $\alpha_1 = -a$), allora l'insieme di vettori $\left\{\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}\right\}$ è un insieme di generatori per W come spazio vettoriale reale.

(b) Poichè $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \notin W$, allora $\left\{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right\}$ non è un insieme di generatori per W.

(c) Dal momento che $\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} \in W$, per stabilire se $\left\{\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}\right\}$ è o non è un insieme di generatori per W come spazio vettoriale **reale** occorre stabilire se **per ogni $\mathbf{A} \in W$ esiste** $\alpha \in \mathbb{R}$ tale che

$$\mathbf{A} = \alpha\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3\alpha \\ -3\alpha & 0 \end{pmatrix}$$

Poichè per ogni $A \in W$ esiste $a \in \mathbb{R}$ tale che $A = \begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix}$, il problema diventa stabilire se per ogni $a \in \mathbb{R}$ il sistema

$$(**) \qquad \begin{cases} 3\alpha = a \\ -3\alpha = -a \end{cases}$$

nell' incognita **reale** α ha soluzione. Poichè $(**)$ ha soluzione per ogni $a \in \mathbb{R}$ ($\alpha = a/3$), allora $\left\{\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}\right\}$ è un insieme di generatori per W come spazio vettoriale reale.

$\boxed{8}$ Si dica se $\mathcal{S} = \left\{\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}; \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 8 \end{pmatrix}; \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}\right\}$ è un insieme di generatori di $\mathbb{R}^3$.

Per stabilire se $\mathcal{S}$ è o non è un insieme di generatori di $\mathbb{R}^3$ occorre stabilire se per ogni $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ esistono $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ tali che

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \alpha_1 \mathbf{v_1} + \alpha_2 \mathbf{v_2} + \alpha_3 \mathbf{v_3} == \alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 8 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 + 3\alpha_2 + \alpha_3 \\ -\alpha_1 - 4\alpha_2 + 2\alpha_3 \\ 2\alpha_1 + 8\alpha_2 - 4\alpha_3 \end{pmatrix}$$

ossia che il sistema lineare

$$(*) \qquad \begin{cases} \alpha_1 + 3\alpha_2 + \alpha_3 = a \\ -\alpha_1 - 4\alpha_2 + 2\alpha_3 = b \\ 2\alpha_1 + 8\alpha_2 - 4\alpha_3 = c \end{cases}$$

nelle incognite $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ ha soluzione **qualunque** siano $a, b, c \in \mathbb{R}$.

Facendo una eliminazione di Gauss sulla matrice aumentata del sistema si ottiene

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & a \\ -1 & -4 & 2 & b \\ 2 & 8 & -4 & c \end{array}\right) \xrightarrow[E_{31}(-2)E_{21}(1)]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & a \\ 0 & -1 & 3 & a+b \\ 0 & 2 & -6 & c-2a \end{array}\right) \xrightarrow[E_{32}(-2)E_{2}(-1)]{}$$
$$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & a \\ 0 & 1 & -3 & -a-b \\ 0 & 0 & 0 & 2b+c \end{array}\right).$$

Poichè esistono $a, b, c \in \mathbb{R}$ tali che $2b + c \neq 0$ (si prendano ad esempio $a = b = 0$ e $c = 1$), allora $(*)$ non ha soluzione qualunque siano $a, b, c \in \mathbb{R}$, per cui $\mathcal{S}$ non è un insieme di generatori di $\mathbb{R}^3$.

$\boxed{9}$ Siano $\mathbf{v_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$; $\mathbf{v_2} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $\mathbf{v_3} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ ed $\mathbf{e_3} \in \mathbb{R}^3$. Si dica per quali $x \in \mathbb{R}$ l'insieme di vettori $\mathcal{S}(x) = \{\mathbf{v_1}; \mathbf{v_2}; \mathbf{v_3}; x \cdot \mathbf{e_3}\}$ è un insieme di generatori di $\mathbb{R}^3$.

$\mathcal{S}(x) = \{\mathbf{v_1}; \mathbf{v_2}; \mathbf{v_3}; x \cdot \mathbf{e_3}\}$ è un insieme di generatori di $\mathbb{R}^3$ se e solo se per ogni $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ esistono $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 \in \mathbb{R}$ tali che

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \alpha_1 \mathbf{v_1} + \alpha_2 \mathbf{v_2} + \alpha_3 \mathbf{v_3} + \alpha_4 \cdot x \cdot \mathbf{e_3} =$$
$$= \alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + \alpha_4 \cdot x \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 + 3\alpha_2 + \alpha_3 \\ 2\alpha_1 + 6\alpha_2 + 3\alpha_3 \\ 4\alpha_3 + \alpha_4 x \end{pmatrix}$$

ossia se e solo se il sistema lineare

$$(*) \qquad \begin{cases} \alpha_1 + 3\alpha_2 + \alpha_3 = a \\ 2\alpha_1 + 6\alpha_2 + 3\alpha_3 = b \\ 4\alpha_3 + \alpha_4 x = c \end{cases}$$

nelle incognite $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ ha soluzione **per ogni** $a, b, c \in \mathbb{R}$.

Facendo una eliminazione di Gauss sulla matrice aumentata del sistema si ottiene

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 0 & | & a \\ 2 & 6 & 3 & 0 & | & b \\ 0 & 0 & 4 & x & | & c \end{pmatrix} \xrightarrow[E_{21}(-2)]{} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 0 & | & a \\ 0 & 0 & 1 & 0 & | & b-2a \\ 0 & 0 & 4 & x & | & c \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\xrightarrow[E_{32}(-4)]{} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 0 & | & a \\ 0 & 0 & 1 & 0 & | & b-2a \\ 0 & 0 & 0 & x & | & c-4b+2a \end{pmatrix} = (\,\mathbf{B}(x) \quad | \quad \mathbf{c}(x)\,)$$

Se $x \neq 0$

$$(\,\mathbf{B}(x) \quad | \quad \mathbf{c}(x)\,) \xrightarrow[E_3(\frac{1}{x})]{} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 0 & | & a \\ 0 & 0 & 1 & 0 & | & b-2a \\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & \frac{c-4b+8a}{x} \end{pmatrix} = (\,\mathbf{U}(x) \quad | \quad \mathbf{d}(x)\,)$$

Poichè $\mathbf{d}(x)$ è libera **per ogni** $a, b, c \in \mathbb{R}$, allora $\mathcal{S}(x)$ è un insieme di generatori di $\mathbb{R}^3$.

Se $x = 0$

$$(\,\mathbf{B}(0) \quad | \quad \mathbf{c}(0)\,) = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 0 & | & a \\ 0 & 0 & 1 & 0 & | & b-2a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & c-4b+8a \end{pmatrix} = (\,\mathbf{U}(0) \quad | \quad \mathbf{d}(0)\,)$$

Poichè esistono $a, b, c \in \mathbb{R}$ per cui $\mathbf{d}(0)$ è dominante (ad esempio si prendano $a = b = 0$ e $c = 1$), allora $\mathcal{S}(0)$ non è un insieme di generatori di $\mathbb{R}^3$.

Concludendo, $\mathcal{S}(x)$ è un insieme di generatori di $\mathbb{R}^3$ se e solo se $x \neq 0$.

Algebra Lineare 1 A, Svolgimento degli Esercizi per casa 6

$\boxed{1}$ Si dica quale dei seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{R}^3$ è linearmente indipendente:

$$\left\{\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}; \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}; \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}, \quad \left\{\mathbf{w}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}; \mathbf{w}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}; \mathbf{w}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix};\right\}.$$

(1) Il problema è stabilire se gli unici numeri reali α_1, α_2, α_3 per cui $\alpha_1\mathbf{v}_1 + \alpha_2\mathbf{v}_2 + \alpha_3\mathbf{v}_3 = \mathbf{0}$ siano $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$, oppure no. Poichè, dati α_1, α_2, $\alpha_3 \in \mathbb{R}$, si ha

$$\alpha_1\mathbf{v}_1 + \alpha_2\mathbf{v}_2 + \alpha_3\mathbf{v}_3 = \alpha_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4\alpha_2 + 2\alpha_3 \\ 4\alpha_1 + 6\alpha_2 - \alpha_3 \\ 2\alpha_2 + \alpha_3 \end{pmatrix},$$

allora $\alpha_1\mathbf{v}_1 + \alpha_2\mathbf{v}_2 + \alpha_3\mathbf{v}_3 = \mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ se e solo se

$$(*) \qquad \begin{cases} 4\alpha_2 + 2\alpha_3 = 0 \\ 4\alpha_1 + 6\alpha_2 - \alpha_3 = 0 \\ 2\alpha_2 + \alpha_3 = 0 \end{cases}$$

Il problema diventa quindi stabilire se il sistema $(*)$ (nelle incognite $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$) abbia un'unica soluzione (e quindi la soluzione nulla $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$), oppure no. La matrice aumentata di $(*)$ è: $\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 4 & 2 & 0 \\ 4 & 6 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right)$.

Facendo un'eliminazione di Gauss si ottiene:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 4 & 2 & 0 \\ 4 & 6 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{E_1(\frac{1}{4})E_{12}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3/2 & -1/4 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right) \rightarrow$$

$$\xrightarrow{E_{32}(-2)E_2(\frac{1}{4})} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3/2 & -1/4 & 0 \\ 0 & 1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) = (\mathbf{U} \mid \mathbf{0}).$$

Poichè **non tutte** le colonne di $\mathbf{U}$ sono **dominanti**, allora $(*)$ ha ∞ soluzioni. In particolare $(*)$ ha una soluzione non nulla, e quindi $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ è **linearmente dipendente** (ad esempio, poichè $(*)$ è equivalente a

$$\begin{cases} \alpha_1 + \frac{3}{2}\alpha_2 - \frac{1}{4}\alpha_3 = 0 \\ \alpha_2 + \frac{1}{2}\alpha_3 = 0 \end{cases}$$

prendendo $\alpha_3 = 1$ con la sostituzione all'indietro si ottiene $\alpha_2 = -\frac{1}{2}$ ed $\alpha_1 = -\frac{3}{2}\alpha_2 - \frac{1}{4}\alpha_3 = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} = 1$, ossia $\begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$ è una soluzione non nulla di $(*)$ e $\mathbf{v}_1 - \frac{1}{2}\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3 = \mathbf{0}$ è una combinazione lineare nulla di $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ con coefficienti non tutti nulli).

$$(2)\quad \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} = \alpha_1\mathbf{w}_1+\alpha_2\mathbf{w}_2+\alpha_3\mathbf{w}_3 = \alpha_1\begin{pmatrix}0\\4\\0\end{pmatrix}+\alpha_2\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}+\alpha_3\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\alpha_2+\alpha_3\\4\alpha_1-\alpha_3\\2\alpha_2+\alpha_3\end{pmatrix}$$

$$\iff \qquad (*)\qquad \begin{cases}\alpha_2+\alpha_3=0\\4\alpha_1-\alpha_3=0\\2\alpha_2+\alpha_3=0\end{cases}$$

Facendo un'eliminazione di Gauss sulla matrice aumentata di $(*)$ si ottiene:

$$\left(\begin{array}{ccc|c}0&1&1&0\\4&0&-1&0\\0&2&1&0\end{array}\right)\xrightarrow{E_1(\frac{1}{4})E_{12}}\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&-1/4&0\\0&1&1&0\\0&2&1&0\end{array}\right)\to$$

$$\xrightarrow{E_{32}(-2)}\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&-1/4&0\\0&1&1&0\\0&0&-1&0\end{array}\right)\xrightarrow{E_3(-1)}\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&-1/4&0\\0&1&1&0\\0&0&1&0\end{array}\right)=(\mathbf{U}\mid\mathbf{0}).$$

Poichè **tutte** le colonne di $\mathbf{U}$ sono **dominanti**, allora $(*)$ ha come unica soluzione la soluzione nulla $\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$, ossia

$$\alpha_1\mathbf{w}_1+\alpha_2\mathbf{w}_2+\alpha_3\mathbf{w}_3=\mathbf{0}\quad\Longrightarrow\quad\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=0.$$

Quindi $\{\mathbf{w}_1,\mathbf{w}_2,\mathbf{w}_3\}$ è **linearmente indipendente**.

$\boxed{2}$ Siano V uno spazio vettoriale ed $\mathcal{S}=\{\mathbf{v}_1;\mathbf{v}_2;\mathbf{v}_3\}$ un insieme linearmente indipendente di vettori di V.

Si dica quale dei seguenti insiemi di vettori di V è linearmente indipendente:

$$(1)\quad \mathcal{S}_1=\{\mathbf{v}_2+\mathbf{v}_3;\mathbf{v}_1+\mathbf{v}_3;\mathbf{v}_1+\mathbf{v}_2+\mathbf{v}_3\},$$
$$(2)\quad \mathcal{S}_2=\{\mathbf{v}_1-2\mathbf{v}_3;\mathbf{v}_1+\mathbf{v}_2;\mathbf{v}_2+2\mathbf{v}_3\}.$$

(1)

$$\underline{0}=\alpha(\mathbf{v}_2+\mathbf{v}_3)+\beta(\mathbf{v}_1+\mathbf{v}_3)+\delta(\mathbf{v}_1+\mathbf{v}_2+\mathbf{v}_3)=(\beta+\delta)\mathbf{v}_1+(\alpha+\delta)\mathbf{v}_2+(\alpha+\beta+\delta)\mathbf{v}_3$$

$$\underset{\uparrow}{\iff}\qquad (*)\qquad\begin{cases}\beta+\delta=0\\\alpha+\delta=0\\\alpha+\beta+\delta=0\end{cases}$$

$\boxed{\text{poichè } \mathcal{S} \text{ è L.I.}}$

Facendo un'eliminazione di Gauss sulla matrice aumentata di $(*)$ si ottiene:

$$\left(\begin{array}{ccc|c}0&1&1&0\\1&0&1&0\\1&1&1&0\end{array}\right)\xrightarrow{E_{12}}\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&1&0\\0&1&1&0\\1&1&1&0\end{array}\right)\xrightarrow{E_{31}(-1)}\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&1&0\\0&1&1&0\\0&1&0&0\end{array}\right)\to$$

$$\xrightarrow{E_{32}(-1)}\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&1&0\\0&1&1&0\\0&0&-1&0\end{array}\right)\xrightarrow{E_3(-1)}\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&1&0\\0&1&1&0\\0&0&1&0\end{array}\right)=(\mathbf{U}\mid\mathbf{0}).$$

Poichè **tutte** le colonne di $\mathbf{U}$ sono **dominanti**, l'unica soluzione di $(*)$ è $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, quindi $\mathcal{S}_1$ è **linearmente indipendente**.

(2) $\underline{0} = \alpha(\mathbf{v}_1 - 2\mathbf{v}_3) + \beta(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) + \delta(\mathbf{v}_2 + 2\mathbf{v}_3) = (\alpha+\beta)\mathbf{v}_1 + (\beta+\delta)\mathbf{v}_2 + (-2\alpha + 2\delta)\mathbf{v}_3$

$$\underset{\boxed{\text{poichè } \mathcal{S} \text{ è L.I.}}}{\Longleftrightarrow} \qquad (*) \quad \begin{cases} \alpha+\beta = 0 \\ \beta+\delta = 0 \\ -2\alpha + 2\delta = 0 \end{cases}$$

Facendo un'eliminazione di Gauss sulla matrice aumentata di $(*)$ si ottiene:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{E_{31}(2)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{E_{32}(-2)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) = (\,\mathbf{U} \quad | \quad \mathbf{0}\,).$$

Poichè $\mathbf{U}$ ha una colonna non dominante, $(*)$ ha ∞ soluzioni, in particolare $(*)$ ha una soluzione non nulla, quindi $\mathcal{S}_2$ è **linearmente dipendente**.

$\boxed{3}$ Sia $V = \{a + bx + cx^2 \mid a,b,c \in \mathbb{C}\}$ lo spazio dei polinomi a coefficienti complessi di grado minore od uguale a 2. Si provi che $\mathcal{B} = \{2 + x^2; x - x^2; 1 + x\}$ è una base di V.

Per provare che $\mathcal{B}$ è una base di V occorre provare che $\mathcal{B}$ è un insieme di generatori di V e che $\mathcal{B}$ è linearmente indipendente (L.I.).

Per provare che $\mathcal{B} \subseteq V$ è un insieme di generatori di V occorre provare che per ogni $a + bx + cx^2 \in V$ esistono scalari $\alpha, \beta, \delta \in \mathbb{C}$ tali che

$$a + bx + cx^2 = \alpha(2 + x^2) + \beta(x - x^2) + \delta(1 + x),$$

ossia che il sistema lineare

$$(*) \quad \begin{cases} 2\alpha + \delta = a \\ \beta + \delta = b \\ \alpha - \beta = c \end{cases}$$

nelle incognite α, β e δ ha soluzione **qualunque** siano $a, b, c \in \mathbb{C}$. Facendo una eliminazione di Gauss sulla matrice aumentata del sistema si ottiene

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 1 & a \\ 0 & 1 & 1 & b \\ 1 & -1 & 0 & c \end{array}\right) \xrightarrow[E_{31}(-1)E_1(\frac{1}{2})]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{a}{2} \\ 0 & 1 & 1 & b \\ 0 & -1 & -\frac{1}{2} & c - \frac{a}{2} \end{array}\right) \xrightarrow[E_{32}(1)]{}$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{a}{2} \\ 0 & 1 & 1 & b \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & c - \frac{a}{2} + b \end{array}\right) \xrightarrow[E_3(2)]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{a}{2} \\ 0 & 1 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 & 2c - a + 2b \end{array}\right) = (\,\mathbf{U} \quad | \quad \mathbf{d}\,).$$

Poichè $\mathbf{d}$ è libera qualunque siano $a, b, c \in \mathbb{C}$, allora $(*)$ ha soluzione per ogni $a, b, c \in \mathbb{C}$, e quindi $\mathcal{B}$ è un insieme di generatori di V.

Per provare che $\mathcal{B}$ è L.I. occorre provare che l'unica combinazione lineare nulla di suoi elementi ha tutti i coefficienti nulli, ossia che

$$\alpha(2+x^2)+\beta(x-x^2)+\delta(1+x)=0 \quad \Longrightarrow \quad \alpha=\beta=\delta=0.$$

Da

$$0=\alpha(2+x^2)+\beta(x-x^2)+\delta(1+x)=(2\alpha+\delta)+(\beta+\delta)x+(\alpha-\beta)x^2$$

si ottiene il sistema lineare nelle incognite α, β e δ

$$(**) \quad \begin{cases} 2\alpha+\delta=0 \\ \beta+\delta=0 \\ \alpha-\beta=0 \end{cases}$$

Dal momento che $(**)$ si ottiene da $(*)$ ponendo $a=b=c=0$, una forma ridotta di Gauss della matrice aumentata di $(**)$ si ottiene da quella trovata per $(*)$ ponendo $a=b=c=0$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{a}{2} \\ 0 & 1 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 & 2c-a+2b \end{array}\right) \underset{\boxed{\text{ponendo } a=b=c=0}}{\overset{}{\underset{\uparrow}{=}}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) = (\mathbf{U} \mid \mathbf{0}).$$

Poichè l'ultima colonna di $(\mathbf{U} \mid \mathbf{0})$ è libera, $(**)$ ha soluzioni, e poichè l'ultima colonna di $(\mathbf{U} \mid \mathbf{0})$ è nulla, tra le soluzioni di $(**)$ c'è quella nulla (ossia $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$). Inoltre, dal momento che tutte le colonne di $\mathbf{U}$ sono dominanti, $(**)$ ha un'unica soluzione.

Dunque l'unica soluzione di $(**)$ è quella nulla, per cui $\mathcal{B}$ è L.I.

$\boxed{4}$ Si provi che

$$\mathcal{B}=\left\{\mathbf{B}_1=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}; \mathbf{B}_2=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}; \mathbf{B}_3=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right\}$$

è una base dello spazio vettoriale V delle matrici complesse triangolari inferiori 2×2.

Per provare che $\mathcal{B}$ è una base di V occorre provare che $\mathcal{B}$ è un insieme di generatori di V e che $\mathcal{B}$ è linearmente indipendente (L.I.).

Per provare che $\mathcal{B} \subseteq V$ è un insieme di generatori di V occorre provare che per ogni $\mathbf{A}=\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix} \in V$ esistono scalari $\alpha, \beta, \delta \in \mathbb{C}$ tali che

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix}=\alpha\mathbf{B}_1+\beta\mathbf{B}_2+\delta\mathbf{B}_3=\alpha\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}+\delta\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \alpha+2\beta & 0 \\ \alpha+\beta+\delta & \alpha+\beta \end{pmatrix},$$

ossia che il sistema lineare

$$(*) \quad \begin{cases} \alpha+2\beta=a \\ \alpha+\beta+\delta=b \\ \alpha+\beta=c \end{cases}$$

nelle incognite α, β e δ ha soluzione **qualunque** siano $a, b, c \in \mathbb{C}$. Facendo una eliminazione di Gauss sulla matrice aumentata del sistema si ottiene

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & \mid & a \\ 1 & 1 & 1 & \mid & b \\ 1 & 1 & 0 & \mid & c \end{pmatrix} \xrightarrow[E_{31}(-1)E_{21}(-1)]{} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & \mid & a \\ 0 & -1 & 1 & \mid & b-a \\ 0 & -1 & 0 & \mid & c-a \end{pmatrix} \xrightarrow[E_{32}(1)E_{2}(-1)]{}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & \mid & a \\ 0 & 1 & -1 & \mid & a-b \\ 0 & 0 & -1 & \mid & c-b \end{pmatrix} \xrightarrow[E_{3}(-1)]{} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & \mid & a \\ 0 & 1 & -1 & \mid & a-b \\ 0 & 0 & 1 & \mid & b-c \end{pmatrix} = (\mathbf{U} \mid \mathbf{d}).$$

Poichè $\mathbf{d}$ è libera qualunque siano $a, b, c \in \mathbb{C}$, allora $(*)$ ha soluzione per ogni $a, b, c \in \mathbb{C}$, e quindi $\mathcal{B}$ è un insieme di generatori di V.

Per provare che $\mathcal{B}$ è L.I. occorre provare che l'unica combinazione lineare nulla di suoi elementi ha tutti i coefficienti nulli, ossia che

$$\alpha\mathbf{B}_1 + \beta\mathbf{B}_2 + \delta\mathbf{B}_3 = \mathbf{O} \quad \Longrightarrow \quad \alpha = \beta = \delta = 0.$$

Da

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \alpha\mathbf{B}_1 + \beta\mathbf{B}_2 + \delta\mathbf{B}_3 = \alpha \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \delta \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha+2\beta & 0 \\ \alpha+\beta+\delta & \alpha+\beta \end{pmatrix},$$

si ottiene il sistema lineare nelle incognite α, β e δ

$$(**) \qquad \begin{cases} \alpha + 2\beta = 0 \\ \alpha + \beta + \delta = 0 \\ \alpha + \beta = 0 \end{cases}$$

Dal momento che $(**)$ si ottiene da $(*)$ ponendo $a = b = c = 0$, una forma ridotta di Gauss della matrice aumentata di $(**)$ si ottiene da quella trovata per $(*)$ ponendo $a = b = c = 0$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & \mid & a \\ 0 & 1 & -1 & \mid & a-b \\ 0 & 0 & 1 & \mid & b-c \end{pmatrix} \underset{\boxed{\text{ponendo } a=b=c=0}}{\overset{}{\underset{\uparrow}{=}}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & \mid & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \mid & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \mid & 0 \end{pmatrix} = (\mathbf{U} \mid \mathbf{0}).$$

Poichè l'ultima colonna di $(\mathbf{U} \mid \mathbf{0})$ è libera, $(**)$ ha soluzioni, e poichè l'ultima colonna di $(\mathbf{U} \mid \mathbf{0})$ è nulla, tra le soluzioni di $(**)$ c'è quella nulla (ossia $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$). Inoltre, dal momento che tutte le colonne di $\mathbf{U}$ sono dominanti, $(**)$ ha un'unica soluzione.

Dunque l'unica soluzione di $(**)$ è quella nulla, per cui $\mathcal{B}$ è L.I.

$\boxed{5}$ Sia W l'insieme delle matrici 2×2 reali simmetriche. L'insieme

$$\mathcal{S} = \left\{ \mathbf{C}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}; \mathbf{C}_2 = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}; \mathbf{C}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \mathbf{C}_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \mathbf{C}_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \mathbf{C}_6 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

è un insieme di generatori di W. Si trovi una base di W contenuta in $\mathcal{S}$.

"Restringiamo" un insieme di generatori di W.

1^0 **passaggio**. Esistono in $\mathcal{S}$ vettori che siano combinazioni lineari degli altri vettori di $\mathcal{S}$?

$\mathbf{C}_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ è senz'altro combinazione degli altri:

$$\mathbf{C}_5 = \mathbf{O} = 0\mathbf{C}_1 + 0\mathbf{C}_2 + 0\mathbf{C}_3 + 0\mathbf{C}_4 + 0\mathbf{C}_6,$$

per cui togliamo subito $\mathbf{C}_5$ (**togliamo** comunque subito **tutti gli eventuali vettori di $\mathcal{S}$ che siano nulli**), **e poniamo**

$$\mathcal{S}_1 = \left\{ \mathbf{C}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}; \mathbf{C}_2 = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}; \mathbf{C}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \mathbf{C}_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \mathbf{C}_6 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

2^0 **passaggio**. $\mathcal{S}_1$ è ancora un insieme di generatori di W. Esistono in $\mathcal{S}_1$ vettori che siano combinazioni lineari degli altri vettori di $\mathcal{S}_1$? Poichè

$$\mathbf{C}_1 = 2\mathbf{C}_6 = 0\mathbf{C}_2 + 0\mathbf{C}_3 + 0\mathbf{C}_4 + 2\mathbf{C}_6$$

ma anche

$$\mathbf{C}_6 = \frac{1}{2}\mathbf{C}_1 = \frac{1}{2}\mathbf{C}_1 + 0\mathbf{C}_2 + 0\mathbf{C}_3 + 0\mathbf{C}_4$$

possiamo togliere da $\mathcal{S}_1$ il vettore $\mathbf{C}_1$, oppure possiamo togliere da $\mathcal{S}_1$ il vettore $\mathbf{C}_6$, ottenendo ancora un insieme di generatori di W. Dunque, **guardiamo se tra i vettori di $\mathcal{S}_1$ ci siano coppie di vettori di cui l'uno è multiplo dell'altro, e per ciascuna di queste eventuali coppie togliamo uno dei due vettori**. In questo caso abbiamo individuato la coppia $\mathbf{C}_1, \mathbf{C}_6$ e scegliamo di togliere $\mathbf{C}_1$.

Poniamo

$$\mathcal{S}_2 = \left\{ \mathbf{C}_2 = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}; \mathbf{C}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \mathbf{C}_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \mathbf{C}_6 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

3^0 **passaggio**. $\mathcal{S}_2$ è ancora un insieme di generatori di W. Esistono in $\mathcal{S}_2$ vettori che siano combinazioni lineari degli altri vettori di $\mathcal{S}_2$?

Sia $\alpha_1\mathbf{C}_2 + \alpha_2\mathbf{C}_3 + \alpha_3\mathbf{C}_4 + \alpha_4\mathbf{C}_6 = \mathbf{O}$ una combinazione lineare nulla dei vettori di $\mathcal{S}_2$. Allora da

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \alpha_1 \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \alpha_4 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 & 3\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_4 \\ 3\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_4 & \alpha_3 + \alpha_4 \end{pmatrix}$$

si ottiene il sistema lineare, nelle incognite $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$

$$\begin{cases} 2\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \\ 3\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_4 = 0 \\ \alpha_3 + \alpha_4 = 0 \end{cases}$$

Facendo una E.G. sulla sua matrice aumentata si ha:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{E_{21}(-3)E_1(\frac{1}{2})} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{E_2(-2)} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right),$$

per cui il sistema è equivalente al sistema

$$(*) \qquad \begin{cases} \alpha_1 + \frac{1}{2}\alpha_2 + \frac{1}{2}\alpha_3 = 0 \\ \alpha_2 + 3\alpha_3 - 2\alpha_4 = 0 \\ \alpha_3 + \alpha_4 = 0 \end{cases}$$

il cui insieme delle soluzioni è

$$\left\{ \begin{pmatrix} -2h \\ 5h \\ -h \\ h \end{pmatrix} | h \in \mathbb{R} \right\}$$

Prendendo una sua soluzione non nulla, ad esempio $\begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ (si ponga $h = 1$), si ottiene

$$-2\mathbf{C}_2 + 5\mathbf{C}_3 - \mathbf{C}_4 + \mathbf{C}_6 = \mathbf{O},$$

per cui $\mathbf{C}_2$,$\mathbf{C}_3$, $\mathbf{C}_4$ e $\mathbf{C}_6$ sono combinazioni lineari degli altri elementi di $\mathcal{S}_2$ e ciascuno di loro puó essere scelto come elemento da eliminare da $\mathcal{S}_2$.

Scegliamo di togliere da $\mathcal{S}_2$ la matrice $\mathbf{C}_2$ (combinazione lineare degli altri elementi di $\mathcal{S}_2$) e poniamo

$$\mathcal{S}_3 = \left\{ \mathbf{C}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \mathbf{C}_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \mathbf{C}_6 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

4^0 **passaggio**. $\mathcal{S}_3$ è ancora un insieme di generatori di W. Esistono in $\mathcal{S}_3$ vettori che siano combinazioni lineari degli altri vettori di $\mathcal{S}_3$?

Sia $\alpha_1\mathbf{C}_3 + \alpha_2\mathbf{C}_4 + \alpha_3\mathbf{C}_6 = \mathbf{O}$ una combinazione lineare nulla dei vettori di $\mathcal{S}_3$. Allora da

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \alpha_1 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 + \alpha_2 & \alpha_1 + \alpha_3 \\ \alpha_1 + \alpha_3 & \alpha_2 + \alpha_3 \end{pmatrix}$$

si ottiene il sistema lineare, nelle incognite $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 = 0 \\ \alpha_1 + \alpha_3 = 0 \\ \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \end{cases}$$

Facendo una E.G. sulla sua matrice aumentata si ottiene:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{E_{21}(-1)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{E_{32}(-1)E_2(-1)}$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{E_3(\frac{1}{2})} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

L'unica soluzione del sistema è quella nulla, per cui $\mathcal{S}_3$ è linearmente indipendente, ed è una base di W contenuta in $\mathcal{S}$.

$\boxed{6}$ Qual è la dimensione dello spazio vettoriale delle matrici 2×2 reali simmetriche ?

Poichè dall'esercizio precedente sappiamo che

$$\mathcal{S}_3 = \left\{ \mathbf{C}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \mathbf{C}_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \mathbf{C}_6 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\},$$

è una base dello spazio vettoriale delle matrici 2×2 reali simmetriche, allora la dimensione dello spazio vettoriale delle matrici 2×2 reali simmetriche è 3 (ossia il numero di elementi di una sua qualsiasi base).

$\boxed{7}$ Si dica quale delle seguenti posizioni, al variare di $\mathbf{A} \in M_n(\mathbb{C})$, definisce un'applicazione lineare da $M_n(\mathbb{C})$ in $M_n(\mathbb{C})$: $f_1(\mathbf{A}) = \overline{\mathbf{A}}$, $f_2(\mathbf{A}) = \mathbf{A}^T$, $f_3(\mathbf{A}) = \mathbf{A}^2$.

Fissato $i \in \{1, 2, 3\}$, per vedere che $f_i : M_n(\mathbb{C}) \to M_n(\mathbb{C})$ è un'applicazione lineare occorre verificare che siano soddisfatte le seguenti condizioni:

(1) $f_i(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = f_i(\mathbf{A}) + f_i(\mathbf{B})$ per ogni $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in M_n(\mathbb{C})$;

(2) $f_i(\alpha\mathbf{A}) = \alpha f_i(\mathbf{A})$ per ogni $\mathbf{A} \in M_n(\mathbb{C})$ ed ogni $\alpha \in \mathbb{C}$.

• f_1 verifica la condizione (1) ? Poichè la coniugata della somma di matrici è la somma delle coniugate, si ha:

$$f_1(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \overline{\mathbf{A} + \mathbf{B}} = \overline{\mathbf{A}} + \overline{\mathbf{B}} = f_1(\mathbf{A}) + f_1(\mathbf{B}) \quad \forall \mathbf{A}, \mathbf{B} \in M_n(\mathbb{C}).$$

Dunque f_1 verifica la condizione (1).

f_1 verifica la condizione (2) ? Poichè la coniugata del prodotto di una matrice per uno scalare è il prodotto della coniugata della matrice per il coniugato dello scalare, si ha:

$$f_1(\alpha\mathbf{A}) = \overline{\alpha\mathbf{A}} = \overline{\alpha}\overline{\mathbf{A}} \quad \forall \mathbf{A} \in M_n(\mathbb{C}), \forall \alpha \in \mathbb{C}.$$

Invece,

$$\alpha f_1(\mathbf{A}) = \alpha\overline{\mathbf{A}} \quad \forall \mathbf{A} \in M_n(\mathbb{C}), \forall \alpha \in \mathbb{C}.$$

Prendendo, ad esempio, $\mathbf{A} = \mathbf{I_n}$ ed $\alpha = i$, dal momento che $\overline{\mathbf{I_n}} = \mathbf{I_n}$ ed $\overline{i} = -i$, si ha:

$$f_1(i\mathbf{I_n}) = -i\mathbf{I_n} \neq i\mathbf{I_n} = if_1(\mathbf{I_n}).$$

Dunque f_1 non verifica la condizione (2), e quindi non è un'applicazione lineare.

• f_2 verifica la condizione (1) ? Poichè la trasposta della somma di matrici è la somma delle trasposte, si ha:

$$f_2(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = (\mathbf{A} + \mathbf{B})^T = \mathbf{A}^T + \mathbf{B}^T = f_2(\mathbf{A}) + f_2(\mathbf{B}) \quad \forall \mathbf{A}, \mathbf{B} \in M_n(\mathbb{C}).$$

Dunque f_2 verifica la condizione (1).

f_2 verifica la condizione (2) ? Poichè la trasposta del prodotto di una matrice per uno scalare è il prodotto della trasposta della matrice per lo scalare, si ha:

$$f_2(\alpha\mathbf{A}) = (\alpha\mathbf{A})^T = \alpha\mathbf{A}^T = \alpha f_2(\mathbf{A}) \quad \forall \mathbf{A} \in M_n(\mathbb{C}), \forall \alpha \in \mathbb{C}.$$

Dunque f_2 verifica la condizione (2). Verificando entrambe le condizioni (1) e (2), f_2 è un'applicazione lineare.

• f_3 verifica la condizione (1) ? Essendo

$$f_3(\mathbf{A}+\mathbf{B}) = (\mathbf{A}+\mathbf{B})^2 = (\mathbf{A}+\mathbf{B})(\mathbf{A}+\mathbf{B}) = \mathbf{A}^2 + \mathbf{BA} + \mathbf{AB} + \mathbf{B}^2,$$

$f_3(\mathbf{A}) = \mathbf{A}^2$ e $f_3(\mathbf{B}) = \mathbf{B}^2$, se fosse $f_3(\mathbf{A}+\mathbf{B}) = f_3(\mathbf{A}) + f_3(\mathbf{B})$ per ogni $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in M_n(\mathbb{C})$, sarebbe

$$(*) \quad \mathbf{BA} + \mathbf{AB} = \mathbf{O} \quad \forall \mathbf{A}, \mathbf{B} \in M_n(\mathbb{C})$$

Ma $(*)$ è falsa: si prenda, ad esempio, $\mathbf{A} = \mathbf{B} = \mathbf{I_n}$. Dunque f_3 non verifica la condizione (1) e quindi non è un'applicazione lineare.

$\boxed{8}$ Sia $g : M_2(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}^2$ definita da $g(\mathbf{A}) = \mathbf{Ae_1}$.

(a) Si provi che g è un'applicazione lineare.

(b) Si trovino lo spazio nullo $N(g)$ e lo spazio immagine $Im(g)$ di g.

(a) Verificare che g è un'applicazione lineare significa verificare che sono soddisfatte le seguenti condizioni:

(1) $g(\mathbf{A}+\mathbf{B}) = g(\mathbf{A}) + g(\mathbf{B})$ per ogni $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in M_2(\mathbb{C})$;

(2) $g(\alpha\mathbf{A}) = \alpha g(\mathbf{A})$ per ogni $\mathbf{A} \in M_2(\mathbb{C})$ ed ogni $\alpha \in \mathbb{C}$.

(1): $g(\mathbf{A}+\mathbf{B}) = (\mathbf{A}+\mathbf{B})\mathbf{e_1} = \mathbf{Ae_1} + \mathbf{Be_1} = g(\mathbf{A}) + g(\mathbf{B}) \quad \forall \mathbf{A}, \mathbf{B} \in M_2(\mathbb{C})$;

(2): $g(\alpha\mathbf{A}) = (\alpha\mathbf{A})\mathbf{e_1} = \alpha(\mathbf{Ae_1}) = \alpha g(\mathbf{A}) \quad \forall \mathbf{A} \in M_2(\mathbb{C}), \quad \forall \alpha \in \mathbb{C}$.

(b) Poichè $g(\mathbf{A}) = \mathbf{Ae_1}$ è la 1^a colonna di $\mathbf{A}$, allora

• $N(g) = \{\mathbf{A} \in M_2(\mathbb{C}) | g(\mathbf{A}) = \mathbf{0}\}$ è l'insieme delle matrici complesse 2×2 con la prima colonna nulla, ossia

$$N(g) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & b \end{pmatrix} \middle| a, b \in \mathbb{C} \right\},$$

• $Im(g) = \{g(\mathbf{A}) | \mathbf{A} \in M_2(\mathbb{C})\}$ è l'insieme dei vettori di $\mathbb{C}^2$ che siano prime colonne di matrici complesse 2×2. Poichè per ogni $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2$ esiste $\mathbf{A} \in M_2(\mathbb{C})$ tale che $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ sia la prima colonna di $\mathbf{A}$ (si prenda, ad esempio $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix}$), allora $Im(g) = \mathbb{C}^2$.

Algebra Lineare 1 A, Svolgimento degli Esercizi per casa 7

$\boxed{1}$ Sia $\mathbf{A}_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 1 & \alpha+2 & \alpha & \alpha+2 \\ 2 & 4 & 0 & \alpha+6 \end{pmatrix}$. Per ogni $\alpha \in \mathbb{C}$ si trovi una base dello spazio nullo $N(\mathbf{A}_\alpha)$ di $\mathbf{A}_\alpha$.

Poichè $N(\mathbf{A}_\alpha) = N(\mathbf{U}_\alpha)$ per ogni forma ridotta di Gauss $\mathbf{U}_\alpha$ di $\mathbf{A}_\alpha$, troviamo una base dello spazio nullo di una forma ridotta di Gauss per $\mathbf{A}_\alpha$.

$$\mathbf{A}_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 1 & \alpha+2 & \alpha & \alpha+2 \\ 2 & 4 & 0 & \alpha+6 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{31}(-2)E_{21}(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & \alpha & \alpha & \alpha-1 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix} = \mathbf{B}_\alpha$$

$\boxed{1^0 \text{ CASO}}$ $\qquad \alpha = 0$

$$\mathbf{B}_0 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_2(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{U}_0$$

Per il Teorema nullità+rango,

$$\dim N(\mathbf{U}_0) = \text{ (numero delle colonne di } \mathbf{U})_0 - \text{ rk } (\mathbf{U}_0) = 4 - 2 = 2.$$

Da

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in N(\mathbf{U}_0) \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_4 & = 0 \\ \qquad\quad x_4 & = 0 \end{cases}$$

prendendo come parametri le variabili corrispondenti alle colonne libere di $\mathbf{U}_0$, ossia la 2^a e la 3^a, con la sostituzione all'indietro si ottiene

$$\begin{cases} x_2 & = & h \\ x_3 & = & k \\ x_4 & = & 0 \\ x_1 & = & -2x_2 - 3x_4 & = & -2h \end{cases}$$

Quindi $N(\mathbf{A}_0) = N(\mathbf{U}_0) = \left\{ \begin{pmatrix} -2h \\ h \\ k \\ 0 \end{pmatrix} | h, k \in \mathbb{C} \right\}$. Ponendo:

$$\mathbf{v}_1 \underset{\boxed{\substack{h=1 \\ k=0}}}{\underset{\uparrow}{=}} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{v}_2 \underset{\boxed{\substack{h=0 \\ k=1}}}{\underset{\uparrow}{=}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

si ottiene che una base di $N(\mathbf{A}_0)$ è

$$\left\{ \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

$\boxed{2^0 \text{ CASO}}$ $\alpha \neq 0$

$$\mathbf{B}_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & \alpha & \alpha & \alpha-1 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix} \xrightarrow{E_3(\frac{1}{\alpha})E_2(\frac{1}{\alpha})} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & \frac{\alpha-1}{\alpha} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{U}_\alpha$$

Per il Teorema nullità+rango,

$$\dim N(\mathbf{U}_\alpha) = \text{ (numero delle colonne di } \mathbf{U})_\alpha - \text{ rk } (\mathbf{U}_\alpha) = 4 - 3 = 1.$$

Da

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in N(\mathbf{U}_\alpha) \iff \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_4 & = 0 \\ x_2 + x_3 + \frac{\alpha-1}{\alpha}x_4 & = 0 \\ x_4 & = 0 \end{cases}$$

prendendo come parametro la variabile corrispondente all'unica colonna libera di $\mathbf{U}_\alpha$, ossia la 3^a, con la sostituzione all'indietro si ottiene

$$\begin{cases} x_3 & = & h \\ x_4 & = & 0 \\ x_2 & = & -x_3 - \frac{\alpha-1}{\alpha}x_4 & = & -h \\ x_1 & = & -2x_2 - 3x_4 & = & 2h \end{cases}$$

Quindi $N(\mathbf{A}_\alpha) = N(\mathbf{U}_\alpha) = \left\{ \begin{pmatrix} 2h \\ -h \\ h \\ 0 \end{pmatrix} | h \in \mathbb{C} \right\}$. Ponendo: $\mathbf{v}_1 \underset{\boxed{h=1}}{\underset{\uparrow}{=}} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, si ottiene che una base di $N(\mathbf{A}_\alpha)$ è

$$\left\{ \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

$\boxed{2}$ Sia $\mathbf{A}_\alpha = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 2i \\ 0 & \alpha & 0 & 2i \\ 4 & \alpha-1 & 0 & 4i \\ 0 & 2 & 4\alpha-6 & 0 \end{pmatrix}$, dove $\alpha \in \mathbb{C}$.

Per ogni $\alpha \in \mathbb{C}$ si dica qual è $rk(\mathbf{A}_\alpha)$ e si trovino una base $\mathcal{B}_\alpha$ di $C(\mathbf{A}_\alpha)$ ed una base $\mathcal{D}_\alpha$ di $R(\mathbf{A}_\alpha)$.

$$\mathbf{A}_\alpha = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 2i \\ 0 & \alpha & 0 & 2i \\ 4 & \alpha-1 & 0 & 4i \\ 0 & 2 & 4\alpha-6 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{31}(-4)E_1(\frac{1}{2})} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & i \\ 0 & \alpha & 0 & 2i \\ 0 & \alpha-1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4\alpha-6 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{24}}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & i \\ 0 & 2 & 4\alpha-6 & 0 \\ 0 & \alpha-1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 & 2i \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{42}(-\alpha)E_{32}(-\alpha+1)E_2(\frac{1}{2})} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & i \\ 0 & 1 & 2\alpha-3 & 0 \\ 0 & 0 & -(2\alpha-3)(\alpha-1) & 0 \\ 0 & 0 & -(2\alpha-3)\alpha & 2i \end{pmatrix} = \mathbf{B}_\alpha$$

$\boxed{1^0 \text{ CASO}}$ $\quad \alpha = 1$

$$\mathbf{B}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & i \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2i \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{34}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & i \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{U}_1$$

$\text{rk}(A_1) = 3$

Una base $\mathcal{B}_1$ di $C(\mathbf{A}_1)$ è $\mathcal{B}_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}$.

Una base $\mathcal{D}_1$ di $R(\mathbf{A}_1)$ è $\mathcal{D}_\alpha = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -i \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -2i \end{pmatrix} \right\}$.

$\boxed{2^0 \text{ CASO}}$ $\quad \alpha = \frac{3}{2}$

$$\mathbf{B}_{\frac{3}{2}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & i \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2i \end{pmatrix} \xrightarrow{E_3(\frac{1}{2i})E_{34}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & i \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{U}_{\frac{3}{2}}$$

$\text{rk}(\mathbf{A}_{\frac{3}{2}}) = 3$

Una base $\mathcal{B}_{\frac{3}{2}}$ di $C(\mathbf{A}_{\frac{3}{2}})$ è $\mathcal{B}_{\frac{3}{2}} = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 2 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 2i \\ 2i \\ 4i \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$.

Una base $\mathcal{D}_{\frac{3}{2}}$ di $R(\mathbf{A}_{\frac{3}{2}})$ è $\mathcal{D}_{\frac{3}{2}} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -i \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

$\boxed{3^0 \text{ CASO}}$ $\quad \alpha \notin \{1, \frac{3}{2}\}$

$$\mathbf{B}_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & i \\ 0 & 1 & 2\alpha - 3 & 0 \\ 0 & 0 & -(2\alpha-3)(\alpha-1) & 0 \\ 0 & 0 & -(2\alpha-3)\alpha & 2i \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{43}((2\alpha-3)\alpha)E_3(\frac{1}{-(2\alpha-3)(\alpha-1)})} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & i \\ 0 & 1 & 2\alpha-3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2i \end{pmatrix} \xrightarrow{E_4(\frac{1}{2i})}$$
$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & i \\ 0 & 1 & 2\alpha-3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{U}_\alpha$$

$\text{rk}(A_\alpha) = 4$

Una base $\mathcal{B}_\alpha$ di $C(\mathbf{A}_\alpha)$ è $\mathcal{B}_\alpha = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ \alpha-1 \\ 2 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 4\alpha-6 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 2i \\ 2i \\ 4i \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$.

Una base $\mathcal{D}_\alpha$ di $R(\mathbf{A}_\alpha)$ è $\mathcal{D}_\alpha = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -i \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2\overline{\alpha}-3 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

$\boxed{3}$ Siano $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} i \\ -1 \\ 2i \\ 0 \\ i \end{pmatrix}$, $\mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2i \\ 2 \\ -i \\ 1 \end{pmatrix}$ ed $\mathcal{S} = \{\mathbf{v}_1; \mathbf{v}_2; \mathbf{v}_3; \mathbf{v}_4\}$. Sia W il sottospazio di $\mathbb{C}^5$ generato da $\mathcal{S}$. Si trovi una base $\mathcal{B}$ di W contenuta in $\mathcal{S}$ (si usi la Nota 3).

Sia $\mathbf{A} = (\mathbf{v}_1 \quad \mathbf{v}_2 \quad \mathbf{v}_3 \quad \mathbf{v}_4)$ una matrice che ha come colonne gli elementi di $\mathcal{S}$. Allora $W = C(\mathbf{A})$. Facendo una E.G. su $\mathbf{A}$ otteniamo:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & i & 0 & 1 \\ i & -1 & -1 & 2i \\ 2 & 2i & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -i \\ 1 & i & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[E_{41}(-1)E_{31}(-2)E_{21}(-i)]{} \begin{pmatrix} 1 & i & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[E_{42}(-1)E_2(-1)]{} \begin{pmatrix} 1 & i & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{U}$$

Poichè le colonne dominanti di $\mathbf{U}$ sono la 1^a e la 3^a, $\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_1; \mathbf{v}_3\}$ è una base di $C(\mathbf{A}) = W$ contenuta in $\mathcal{S}$.

$\boxed{4}$ Si dica per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ l'insieme $\mathcal{B}_\alpha = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha+1 \\ \alpha+1 \end{pmatrix} \right\}$ è una base di $\mathbb{R}^3$ (si usi la Nota 3).

Costruiamo una matrice le cui colonne siano gli elementi di $\mathcal{B}_\alpha$: $\mathbf{A}_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ \alpha & 0 & \alpha+1 \\ 1 & 2 & \alpha+1 \end{pmatrix}$. Il problema diventa stabilire per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ si ha che rk$\mathbf{A}_\alpha = 3$. Facciamo un'eliminazione di Gauss su $\mathbf{A}_\alpha$.

$$\mathbf{A}_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ \alpha & 0 & \alpha+1 \\ 1 & 2 & \alpha+1 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{31}(-1)E_{21}(-\alpha)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2\alpha & 1 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix} = \mathbf{B}_\alpha$$

1^0 CASO: $\alpha = 0 \quad \mathbf{B}_0 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{U}_0$, $\quad rk(\mathbf{A}_0) = rk(\mathbf{U}_0) = 2 \neq 3 \Longrightarrow \mathcal{B}_0$ **NON E'** una base di $\mathbb{R}^3$.

2^0 CASO: $\alpha \neq 0$ $\quad \mathbf{B}_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2\alpha & 1 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix} \xrightarrow{E_3(1/\alpha)E_2(-1/2\alpha)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1/2\alpha \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{U}_\alpha$

$$rk(\mathbf{A}_\alpha) = rk(\mathbf{U}_\alpha) = 3 \quad \Longrightarrow \quad \mathcal{B}_\alpha \quad \textbf{E'} \text{ una base di } \quad \mathbb{R}^3.$$

$\boxed{5}$ Sia $f : \mathbb{R}^2 \to M_2(\mathbb{R})$ definita da $f(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} a & a+b \\ a-b & b \end{pmatrix}$. Dopo aver provato che f è un'applicazione lineare, si determini la matrice $\mathbf{A}$ associata ad f rispetto alle basi ordinate

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\} \quad \text{e} \quad \mathcal{D} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

su dominio e codominio rispettivamente.

($\bullet$) Per provare che f è un'applicazione lineare occorre provare :

1. $f(\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix}) \underset{?}{=} f(\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix}) + f(\begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix})$
   per ogni $a_1, b_1, a_2, b_2 \in \mathbb{R}$
2. $f(\alpha \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}) \underset{?}{=} \alpha f(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix})$ per ogni $\alpha, a, b \in \mathbb{R}$

1.
$$f(\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix}) \underset{\boxed{\substack{\text{def. somma} \\ \text{vettori colonna}}}}{\underset{\uparrow}{=}} f(\begin{pmatrix} a_1 + a_2 \\ b_1 + b_2 \end{pmatrix}) \underset{\boxed{\text{def. f}}}{\underset{\uparrow}{=}}$$

$$= \begin{pmatrix} a_1 + a_2 & (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2) \\ (a_1 + a_2) - (b_1 + b_2) & b_1 + b_2 \end{pmatrix} \underset{\boxed{\substack{\text{propr. assoc. e} \\ \text{commut. di + in } \mathbb{R}}}}{\underset{\uparrow}{=}}$$

$$= \begin{pmatrix} a_1 + a_2 & (a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) \\ (a_1 - b_1) + (a_2 - b_2) & b_1 + b_2 \end{pmatrix} =$$

$$\underset{\boxed{\text{def. somma matrici}}}{\underset{\uparrow}{=}} \begin{pmatrix} a_1 & a_1 + b_1 \\ a_1 - b_1 & b_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2 & a_2 + b_2 \\ a_2 - b_2 & b_2 \end{pmatrix} \underset{\boxed{\text{def. f}}}{\underset{\uparrow}{=}} f(\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix}) + f(\begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix})$$

2.
$$f(\alpha \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}) \underset{\boxed{\substack{\text{def. prod. di uno scal.} \\ \text{per un vett.}}}}{\underset{\uparrow}{=}} f(\begin{pmatrix} \alpha a \\ \alpha b \end{pmatrix}) \underset{\boxed{\text{def. f}}}{\underset{\uparrow}{=}} \begin{pmatrix} \alpha a & \alpha a + \alpha b \\ \alpha a - \alpha b & \alpha b \end{pmatrix} \underset{\boxed{\substack{\text{propr. distr.} \\ \text{in } \mathbb{R}}}}{\underset{\uparrow}{=}}$$

$$= \begin{pmatrix} \alpha a & \alpha(a+b) \\ \alpha(a-b) & \alpha b \end{pmatrix} \underset{\boxed{\substack{\text{def. prod. di uno scal.} \\ \text{per una matrice}}}}{\underset{\uparrow}{=}} \alpha \begin{pmatrix} a & a+b \\ a-b & b \end{pmatrix} \underset{\boxed{\text{def. f}}}{\underset{\uparrow}{=}} \alpha f(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix})$$

($\bullet\bullet$) La matrice $\mathbf{A}$ associata ad f rispetto alle basi ordinate $\mathcal{B}$ e $\mathcal{D}$ su dominio e codominio rispettivamente è la matrice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} C_{\mathcal{D}}(f(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix})) & C_{\mathcal{D}}(f(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix})) \end{pmatrix}.$$

Dalla definizione di f si ottiene:

$$f(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad f(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix},$$

quindi $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} C_{\mathcal{D}}(\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}) & C_{\mathcal{D}}(\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}) \end{pmatrix}$.

Calcoliamo le coordinate rispetto alla base ordinata $\mathcal{D}$ di un generico elemento $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$.

$$C_{\mathcal{D}}(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \delta \\ \gamma \end{pmatrix} \quad | \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \delta \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\gamma & \alpha+\beta \\ \beta+\delta & \beta \end{pmatrix}$$

Risolvendo il sistema $\begin{cases} 2\gamma & = a \\ \alpha+\beta & = b \\ \beta+\delta & = c \\ \beta & = d \end{cases}$ otteniamo $\begin{cases} \beta & = d \\ \gamma & = a/2 \\ \alpha = b-\beta = b-d \\ \delta = c-\beta = c-d \end{cases}$, quindi

$$C_{\mathcal{D}}(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} b-d \\ d \\ c-d \\ a/2 \end{pmatrix}.$$

In particolare, specializzando a $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, otteniamo

$$C_{\mathcal{D}}(\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 1/2 \end{pmatrix}, \quad C_{\mathcal{D}}(\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 1/2 \end{pmatrix}.$$

La matrice $\mathbf{A}$ associata ad f rispetto alle basi ordinate $\mathcal{B}$ e $\mathcal{D}$ su dominio e codominio rispettivamente è quindi la matrice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ -1 & -3 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

$\boxed{6}$ Siano

$$\mathcal{B} = \left\{ \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \quad \text{e} \quad \mathcal{B}' = \left\{ \mathbf{v}_1' = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \mathbf{v}_2' = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \mathbf{v}_3' = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Dopo aver provato che $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$ sono due basi ordinate di $\mathbb{R}^3$, si calcolino le matrici di passaggio $\mathbf{M}_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{B}'}$ da $\mathcal{B}'$ a $\mathcal{B}$ e $\mathbf{M}_{\mathcal{B}'\leftarrow\mathcal{B}}$ da $\mathcal{B}$ a $\mathcal{B}'$.

Siano $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ ed $\mathbf{A}' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ le matrici che hanno come colonne gli elementi di $\mathcal{B}$ e di $\mathcal{B}'$ rispettivamente. Per provare che $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$ sono due basi ordinate di $\mathbb{R}^3$, occorre provare che $\mathbf{A}$ ed $\mathbf{A}'$ hanno entrambe rango uguale a 3.

Facendo una E.G. su $\mathbf{A}$ si ottiene:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{21}(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{32}(-1)E_2(-1)} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{U}$$

per cui rk($\mathbf{A}$)=rk($\mathbf{U}$) = 3, ed, analogamente, facendo una E.G. su $\mathbf{A}'$ si ottiene:

$$\mathbf{A}' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{31}(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{32}(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_3(-\frac{1}{2})} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{U}'$$

per cui rk($\mathbf{A}'$)=rk($\mathbf{U}'$) = 3.

La matrice di passaggio $\mathbf{M}_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{B}'}$ da $\mathcal{B}'$ a $\mathcal{B}$ è

$$\mathbf{M}_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{B}'} = (\, C_{\mathcal{B}}(\mathbf{v}'_1) \quad C_{\mathcal{B}}(\mathbf{v}'_2) \quad C_{\mathcal{B}}(\mathbf{v}'_3)\,) = \begin{pmatrix} C_{\mathcal{B}}(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}) & C_{\mathcal{B}}(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}) & C_{\mathcal{B}}(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}) \end{pmatrix}.$$

Per calcolarla, piuttosto che calcolare separatamente $C_{\mathcal{B}}(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix})$, $C_{\mathcal{B}}(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix})$ e $C_{\mathcal{B}}(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix})$, calcoliamo $C_{\mathcal{B}}(\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix})$ per un generico vettore $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$, e specializziamo la formula ottenuta ai tre diversi vettori $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Poichè

$$C_{\mathcal{B}}(\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \delta \end{pmatrix} \quad | \quad \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \delta \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

allora

$$C_{\mathcal{B}}(\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \delta \end{pmatrix} \quad | \quad \begin{pmatrix} \alpha + 2\beta + \delta \\ \alpha + \beta + \delta \\ \beta + \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

ossia α, β e δ sono soluzioni del sistema lineare

$$(*) \qquad \begin{cases} \alpha + 2\beta + \delta = a \\ \alpha + \beta + \delta = b \\ \beta + \delta = c \end{cases}$$

Facendo una E.G. sulla matrice aumentata di $(*)$ otteniamo

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & | & a \\ 1 & 1 & 1 & | & b \\ 0 & 1 & 1 & | & c \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{21}(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & | & a \\ 0 & -1 & 0 & | & b-a \\ 0 & 1 & 1 & | & c \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{32}(-1)E_2(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & | & a \\ 0 & 1 & 0 & | & a-b \\ 0 & 0 & 1 & | & c-a+b \end{pmatrix}$$

da cui, con la sostituzione all'indietro,

$$\begin{cases} \delta = c-a+b \\ \beta = a-b \\ \alpha = -2\beta-\delta+a = -2a+2b-c+a-b+a = b-c \end{cases}$$

Dunque $C_{\mathcal{B}}(\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} b-c \\ a-b \\ c-a+b \end{pmatrix}$, per cui $C_{\mathcal{B}}(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $C_{\mathcal{B}}(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $C_{\mathcal{B}}(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, e quindi

$$\mathbf{M}_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{M}_{\mathcal{B}'\leftarrow\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} C_{\mathcal{B}'}(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}) & C_{\mathcal{B}'}(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}) & C_{\mathcal{B}'}(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}) \end{pmatrix},$$

ma dal momento che $\mathbf{M}_{\mathcal{B}'\leftarrow\mathcal{B}} = \mathbf{M}^{-1}_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{B}'}$, calcoliamo $\mathbf{M}_{\mathcal{B}'\leftarrow\mathcal{B}}$ usando l'algoritmo di Gauss-Jordan:

$$(\,\mathbf{M}_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{B}'} \quad | \quad \mathbf{I}_3\,) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & | & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & | & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{21}(-1)E_1(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & | & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\xrightarrow{E_{32}(-2)E_2(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & | & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & | & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_3(1/2)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & | & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & 1 & 1 & 1/2 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\xrightarrow{E_{23}(1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & | & 1 & 1 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

Dunque $\mathbf{M}_{\mathcal{B}'\leftarrow\mathcal{B}} = \mathbf{M}^{-1}_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

$\boxed{7}$ Sia $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 6 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$ la matrice associata ad un'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ rispetto alle basi ordinate $\mathcal{B} = \left\{ \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} ; \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ e $\mathcal{D} = \left\{ \mathbf{w}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} ; \mathbf{w}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} ; \mathbf{w}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ su dominio e codominio rispettivamente. Si determini la matrice $\mathbf{A}'$ associata ad f rispetto alle basi ordinate $\mathcal{B}' = \left\{ \mathbf{v}'_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} ; \mathbf{v}'_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} \right\}$ e $\mathcal{D}' = \left\{ \mathbf{w}'_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} ; \mathbf{w}'_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} ; \mathbf{w}'_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ su dominio e codominio risp.

La matrice $\mathbf{A}'$ associata ad f rispetto alle basi ordinate $\mathcal{B}'$ e $\mathcal{D}'$ su dominio e codominio rispettivamente è la matrice

$$\mathbf{A}' = \mathbf{M}^{-1}_{\mathcal{D}\leftarrow\mathcal{D}'}\mathbf{A}\mathbf{M}_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{B}'} \quad \text{dove } \mathbf{M}_{\mathcal{D}\leftarrow\mathcal{D}'} \quad \text{è la matrice di passaggio da } \mathcal{D}' \quad \text{a } \mathcal{D} \quad \text{e}$$
$$\mathbf{M}_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{B}'} \quad \text{è la matrice di passaggio da } \mathcal{B}' \quad \text{a } \mathcal{B}.$$

Per calcolare $\mathbf{M}^{-1}_{\mathcal{D}\leftarrow\mathcal{D}'} = \mathbf{M}_{\mathcal{D}'\leftarrow\mathcal{D}} = \begin{pmatrix} C_{\mathcal{D}'}(\mathbf{w}_1) & C_{\mathcal{D}'}(\mathbf{w}_2) & C_{\mathcal{D}'}(\mathbf{w}_3) \end{pmatrix}$, calcoliamo per prima cosa le coordinate rispetto a $\mathcal{D}'$ di un generico $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$.

$$C_{\mathcal{D}'}(\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \delta \end{pmatrix} \quad \text{t.c.} \quad \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \delta \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha+\beta \\ -\beta \\ \delta \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \alpha+\beta & = & a \\ -\beta & = & b \\ \delta & = & c \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \delta & = & c \\ \beta & = & -b \\ \alpha & = & a-\beta & = & a+b \end{cases}$$

Dunque $C_{\mathcal{D}'}(\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} a+b \\ -b \\ c \end{pmatrix}$.

In particolare, specializzando a $\mathbf{w}_1$, $\mathbf{w}_2$ e $\mathbf{w}_3$ otteniamo

$$C_{\mathcal{D}'}(\mathbf{w}_1) = C_{\mathcal{D}'}(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}) \underset{\boxed{\substack{a=b=1 \\ c=0}}}{\overset{}{\underset{\uparrow}{=}}} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad C_{\mathcal{D}'}(\mathbf{w}_2) = C_{\mathcal{D}'}(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}) \underset{\boxed{\substack{a=c=1 \\ b=0}}}{\underset{\uparrow}{=}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$C_{\mathcal{D}'}(\mathbf{w}_3) = C_{\mathcal{D}'}(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}) \underset{\boxed{\substack{a=c=0 \\ b=1}}}{\underset{\uparrow}{=}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

per cui

$$\mathbf{M}^{-1}_{\mathcal{D}\leftarrow\mathcal{D}'} = \mathbf{M}_{\mathcal{D}'\leftarrow\mathcal{D}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Per calcolare $\mathbf{M}_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} C_{\mathcal{B}}(\mathbf{v}'_1) & C_{\mathcal{B}}(\mathbf{v}'_2) \end{pmatrix}$, calcoliamo per prima cosa le coordinate rispetto a $\mathcal{B}$ di un generico $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$.

$$C_{\mathcal{B}}(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \qquad \text{t.c.} \qquad \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha - \beta \\ \alpha + \beta \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \alpha - \beta & = & a \\ \alpha + \beta & = & b \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 2\alpha = a + b \\ 2\beta = b - a \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \alpha = (a+b)/2 \\ \beta = (b-a)/2 \end{cases}$$

Dunque $C_{\mathcal{B}}(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} (a+b)/2 \\ (b-a)/2 \end{pmatrix}$.

In particolare, specializzando a $\mathbf{v}'_1$ e $\mathbf{v}'_2$ otteniamo

$$C_{\mathcal{B}}(\mathbf{v}'_1) = C_{\mathcal{B}}(\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}) \underset{\substack{\uparrow \\ \boxed{\begin{matrix} a=4 \\ b=0 \end{matrix}}}}{=} \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \qquad C_{\mathcal{B}}(\mathbf{v}'_2) = C_{\mathcal{B}}(\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}) \underset{\substack{\uparrow \\ \boxed{\begin{matrix} a=3 \\ b=5 \end{matrix}}}}{=} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix},$$

per cui $\mathbf{M}_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$.

La matrice $\mathbf{A}'$ che cerchiamo è quindi

$$\mathbf{A}' = \mathbf{M}^{-1}_{\mathcal{D}\leftarrow\mathcal{D}'}\mathbf{A}\mathbf{M}_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 6 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ -1 & 1 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & 18 \\ -4 & -3 \\ -12 & 6 \end{pmatrix}.$$

Algebra Lineare 1 A, Svolgimento degli Esercizi per casa 8

$\boxed{1}$ Sia $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$. Si provi che $\|\mathbf{v}\|_\infty = \|\mathbf{v}\|_1$ se e solo se $\mathbf{v}$ è un multiplo di una colonna di $\mathbf{I}_n$.

Sia $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$. Allora

$$\begin{aligned} &\|\mathbf{v}\|_1 = |v_1| + |v_2| + \cdots + |v_n| \quad \text{e} \\ &\|\mathbf{v}\|_\infty = |v_i| \text{ dove } i \in \{1, \dots, n\} \text{ è tale che } |v_i| \geq |v_j| \quad \forall j \neq i. \end{aligned}$$

Si ha:

$$\|\mathbf{v}\|_\infty = \|\mathbf{v}\|_1 \iff |v_i| = |v_1| + |v_2| + \cdots + |v_n| \iff |v_j| = 0 \quad \forall j \neq i \iff v_j = 0 \quad \forall j \neq i \iff \mathbf{v} = v_i\mathbf{e_i}.$$

$\boxed{2}$ Sia $\mathbf{A} = (a_{ij})$ una matrice complessa quadrata di ordine n tale che $\mathbf{A} = \mathbf{A}^H = \mathbf{A}^2$ e siano $\mathbf{b_1}$, $\mathbf{b_2}$, ..., $\mathbf{b_n} \in \mathbb{C}^n$ le colonne di $\mathbf{A}$. Si provi che $\|\mathbf{b_i}\|_2^2 = a_{ii}$ per ogni $i = 1, \dots, n$.

Poiché $\mathbf{b_i} = \mathbf{Ae_i}$, allora

$$\|\mathbf{b_i}\|_2^2 = \|\mathbf{Ae_i}\|_2^2 = (\mathbf{Ae_i})^H\mathbf{Ae_i} = \mathbf{e_i}^H\mathbf{A}^H\mathbf{Ae_i} \underset{\uparrow\atop\boxed{\mathbf{A}^H = \mathbf{A}}}{=} \mathbf{e_i}^H\mathbf{AAe_i} \underset{\uparrow\atop\boxed{\mathbf{A}^2 = \mathbf{A}}}{=} \mathbf{e_i}^H\mathbf{Ae_i} = \mathbf{e_i}^H \begin{pmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ \vdots \\ a_{ni} \end{pmatrix} = a_{ii}.$$

$\boxed{3}$ Si verifichi che $\phi : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ definita da $\phi(\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}) = |2a - b| + |a + c| + |ib|$ è una norma.

(1) $\phi(\mathbf{0}) = \phi(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}) = |2 \times 0 - 0| + |0 + 0| + |i0| = 0.$

Poichè $\phi(\mathbf{x}) \geq 0$ per ogni $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^3$, per provare che

$$\mathbf{x} \neq \mathbf{0} \quad \Longrightarrow \quad \phi(\mathbf{x}) > 0$$

basta provare che

$$\mathbf{x} \neq \mathbf{0} \quad \Longrightarrow \quad \phi(\mathbf{x}) \neq 0,$$

ossia basta provare che

$$\phi(\mathbf{x}) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \mathbf{x} = \mathbf{0}.$$

Dalla definizione di ϕ si ottiene:

$$\left.\begin{array}{rcl} \phi(\mathbf{x}) & = & 0 \\ \mathbf{x} & = & \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \end{array}\right\} \Longrightarrow \begin{cases} |2a-b| & = & 0 \\ |a+c| & = & 0 \\ |ib| & = & 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a & = & b/2 \\ c & = & -a & = & -b/2 \\ ib & = & 0 \end{cases} \Longrightarrow a=b=c=0 \Longrightarrow \mathbf{x}=\mathbf{0}.$$

$$\textbf{(2)} \qquad \phi(\alpha \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}) = \phi(\begin{pmatrix} \alpha a \\ \alpha b \\ \alpha c \end{pmatrix}) = |2\alpha a - \alpha b| + |\alpha a + \alpha c| + |i\alpha b| =$$

$$= |\alpha||2a-b| + |\alpha||a+c| + |\alpha||ib| = |\alpha|(|2a-b| + |a+c| + |ib|) = |\alpha|\phi(\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}).$$

$$\textbf{(3)} \qquad \phi(\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{pmatrix}) = \phi(\begin{pmatrix} a_1+a_2 \\ b_1+b_2 \\ c_1+c_2 \end{pmatrix}) =$$

$$= |2(a_1+a_2) - (b_1+b_2)| + |(a_1+a_2) + (c_1+c_2)| + |i(b_1+b_2)| =$$

$$= |(2a_1-b_1) + (2a_2-b_2)| + |(a_1+c_1) + (a_2+c_2)| + |ib_1 + ib_2| \leq$$

$$\leq |2a_1-b_1| + |2a_2-b_2| + |a_1+c_1| + |a_2+c_2| + |ib_1| + |ib_2| = \phi(\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix}) + \phi(\begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{pmatrix}).$$

$\boxed{4}$ Siano V uno spazio vettoriale, $\mathcal{B} = \{\mathbf{v_1}; \dots; \mathbf{v_n}\}$ una sua base ordinata e $C_{\mathcal{B}} : V \to \mathbb{C}^n$ l'applicazione delle coordinate rispetto a $\mathcal{B}$. Si provi che la funzione $\|\cdot\|_{\mathcal{B}} : V \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ definita da $\|\mathbf{w}\|_{\mathcal{B}} = \|C_{\mathcal{B}}(\mathbf{w})\|_\infty$ per ogni $\mathbf{w} \in V$ è una norma.

(i) Per ogni $\mathbf{w} \in V$

$$\|\mathbf{w}\|_{\mathcal{B}} \underset{\uparrow \atop \boxed{\text{def. di } \|\cdot\|_{\mathcal{B}}}}{=} \|C_{\mathcal{B}}(\mathbf{w})\|_\infty \underset{\uparrow \atop \boxed{\|\mathbf{z}\|_\infty \geq 0 \quad \forall \mathbf{z} \in \mathbb{C}^n}}{\geq} 0$$

$$\|\mathbf{w}\|_{\mathcal{B}} = 0 \underset{\uparrow \atop \boxed{\text{def. di } \|\cdot\|_{\mathcal{B}}}}{\iff} \|C_{\mathcal{B}}(\mathbf{w})\|_\infty = 0 \underset{\uparrow \atop \boxed{\|\mathbf{z}\|_\infty = 0 \iff \mathbf{z} = \mathbf{0}}}{\iff} C_{\mathcal{B}}(\mathbf{w}) = \mathbf{0} \underset{\uparrow \atop \boxed{\begin{array}{c} C_{\mathcal{B}} \text{ appl. lin.} \\ \text{iniettiva} \end{array}}}{\iff} \mathbf{w} = \mathbf{0}$$

(ii) Per ogni $\mathbf{w} \in V$ ed ogni $\alpha \in \mathbb{C}$

$$\|\alpha\mathbf{w}\|_{\mathcal{B}} \underset{\uparrow\atop\boxed{\text{def. di } \|\cdot\|_{\mathcal{B}}}}{=} \|C_{\mathcal{B}}(\alpha\mathbf{w})\|_\infty \underset{\uparrow\atop\boxed{C_{\mathcal{B}} \text{ appl. lin.}}}{=} \|\alpha C_{\mathcal{B}}(\mathbf{w})\|_\infty \underset{\uparrow\atop\boxed{\begin{array}{c}\|\alpha\mathbf{z}\|_\infty = |\alpha|\|\mathbf{z}\|_\infty\\ \forall \mathbf{z}\in\mathbb{C}^n, \alpha\in\mathbb{C}\end{array}}}{=}$$

$$= |\alpha|\|C_{\mathcal{B}}(\mathbf{w})\|_\infty \underset{\uparrow\atop\boxed{\text{def. di } \|\cdot\|_{\mathcal{B}}}}{=} |\alpha|\|\mathbf{w}\|_{\mathcal{B}}$$

(iii) Per ogni $\mathbf{w_1}, \mathbf{w_2} \in V$

$$\|\mathbf{w_1}+\mathbf{w_2}\|_{\mathcal{B}} \underset{\uparrow\atop\boxed{\text{def. di } \|\cdot\|_{\mathcal{B}}}}{=} \|C_{\mathcal{B}}(\mathbf{w_1}+\mathbf{w_2})\|_\infty \underset{\uparrow\atop\boxed{C_{\mathcal{B}} \text{ appl. lin.}}}{=} \|C_{\mathcal{B}}(\mathbf{w_1})+C_{\mathcal{B}}(\mathbf{w_2})\|_\infty \le$$

$$\underset{\uparrow\atop\boxed{\begin{array}{c}\|\mathbf{z_1}+\mathbf{z_2}\|_\infty \le \|\mathbf{z_1}\|_\infty + \|\mathbf{z_2}\|_\infty\\ \forall \mathbf{z_1}, \mathbf{z_2}\in\mathbb{C}^n\end{array}}}{\le} \|C_{\mathcal{B}}(\mathbf{w_1})\|_\infty + \|C_{\mathcal{B}}(\mathbf{w_2})\|_\infty \underset{\uparrow\atop\boxed{\text{def. di } \|\cdot\|_{\mathcal{B}}}}{=} \|\mathbf{w_1}\|_{\mathcal{B}} + \|\mathbf{w_2}\|_{\mathcal{B}}$$

$\boxed{5}$ Si verifichi che la posizione $(\cdot|\cdot) : M_2(\mathbb{C}) \times M_2(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$

$$\left(\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} | \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{pmatrix}\right) = \sum_{i=1}^{4} \overline{a_i} b_i.$$

definisce un prodotto interno.

Perchè $(\cdot|\cdot) : M_2(\mathbb{C}) \times M_2(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ definito da

$$\left(\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} | \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{pmatrix}\right) = \sum_{i=1}^{4} \overline{a_i} b_i$$

sia un prodotto interno occorre che soddisfi le tre seguenti condizioni:

(1) $\overline{(\mathbf{v}|\mathbf{u})} = (\mathbf{u}|\mathbf{v})$ per ogni $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix}, \mathbf{v} = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{C})$.

(2) $(\mathbf{u}|\alpha\mathbf{v}+\beta\mathbf{z}) = \alpha(\mathbf{u}|\mathbf{v}) + \beta(\mathbf{u}|\mathbf{z})$ per ogni $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{pmatrix}$, $\mathbf{z} = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 \\ c_3 & c_4 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{C})$, ed ogni $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$

(3) $(\bullet)$ $(\mathbf{0}|\mathbf{0}) = 0$

$(\bullet\bullet)$ $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} \neq \mathbf{0} \implies \left(\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix}\right) \in \mathbb{R}_{>0}$

Per la verifica di **(1)** :

$\overline{\left(\begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{pmatrix} \Big| \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix}\right)} \underset{\text{def. di } (\cdot|\cdot)}{\underset{\uparrow}{=}} \overline{\sum_{i=1}^4 \overline{b_i} a_i} = \sum_{i=1}^4 \overline{a_i} b_i \underset{\text{def. di } (\cdot|\cdot)}{\underset{\uparrow}{=}} \left(\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} \Big| \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{pmatrix}\right).$

Per la verifica di **(2)**:

$(\mathbf{u}|\alpha\mathbf{v} + \beta\mathbf{z}) = \left(\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} \Big| \alpha \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} c_1 & c_2 \\ c_3 & c_4 \end{pmatrix}\right) = \left(\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} \Big| \begin{pmatrix} \alpha b_1 + \beta c_1 & \alpha b_2 + \beta c_2 \\ \alpha b_3 + \beta c_3 & \alpha b_4 + \beta c_4 \end{pmatrix}\right) =$

$= \sum_{i=1}^4 \overline{a_i}(\alpha b_i + \beta c_i) = \alpha(\sum_{i=1}^4 \overline{a_i} b_i) + \beta(\sum_{i=1}^4 \overline{a_i} c_i) =$

$= \alpha\left(\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} \Big| \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{pmatrix}\right) + \beta\left(\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} \Big| \begin{pmatrix} c_1 & c_2 \\ c_3 & c_4 \end{pmatrix}\right) = \alpha(\mathbf{u}|\mathbf{v}) + \beta(\mathbf{u}|\mathbf{z})$

Per la verifica di **(3)** :

$(\bullet)$ $(\mathbf{0}|\mathbf{0}) = \left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Big| \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = 4 \times \overline{0} \times 0 = 0$

$(\bullet\bullet)$ $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} \neq \mathbf{0} \Longrightarrow \left(\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} \Big| \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix}\right) = \sum_{i=1}^4 \overline{a_i} a_i = \sum_{i=1}^4 |a_i|^2 \in \mathbb{R}_{>0}$

Infatti: $|a_i|^2 \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ per ogni $i = 1, \dots, 4$, per cui $\sum_{i=1}^4 |a_i|^2 \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, ed è $\sum_{i=1}^4 |a_i|^2 \neq 0$ dal momento che almeno uno degli a_i è non nullo, essendo $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} \neq \mathbf{0}$.

Poichè che tutte e tre le condizioni sono soddisfatte,

$$\left(\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} | \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{pmatrix}\right) = \sum_{i=1}^4 \overline{a_i} b_i.$$

definisce un prodotto interno su $M_2(\mathbb{C})$.

$\boxed{6}$ Sia $V = \mathbb{C}^2$. Si dica quali delle seguenti posizioni definisce un prodotto interno:

(a) $(\cdot|\cdot) : \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$ definita da $\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \Big| \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) = \overline{x}_1 y_1 - 3\overline{x}_2 y_2$

(b) $(\cdot|\cdot) : \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$ definita da $\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \Big| \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) = \overline{x}_1 y_1 + 3\overline{x}_2 y_2$

(a) Perchè $(\cdot|\cdot) : \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$ definito da $\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \Big| \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) = \overline{x}_1 y_1 - 3\overline{x}_2 y_2$ sia un prodotto interno occorre che soddisfi le tre seguenti condizioni:

(1) $\overline{(\mathbf{y}|\mathbf{x})} = (\mathbf{x}|\mathbf{y})$ per ogni $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2$.

(2) $(\mathbf{x}|\alpha\mathbf{y} + \beta\mathbf{w}) = \alpha(\mathbf{x}|\mathbf{y}) + \beta(\mathbf{x}|\mathbf{w})\ \forall\ \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, \mathbf{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2, \forall\ \alpha, \beta \in \mathbb{C}$

(3) $(\bullet)$ $(\mathbf{0}|\mathbf{0}) = 0$

$(\bullet\bullet)$ $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \neq \mathbf{0} \implies (\mathbf{x}|\mathbf{x}) \in \mathbb{R}_{>0}$

Per la verifica di **(1)** :

$$\overline{(\mathbf{y}|\mathbf{x})} \quad = \quad \overline{\overline{y}_1 x_1 - 3\overline{y}_2 x_2} \quad = \quad y_1 \overline{x}_1 - 3 y_2 \overline{x}_2 \quad = \quad (\mathbf{x}|\mathbf{y}).$$

Per la verifica di **(2)**:

$$(\mathbf{x}|\alpha\mathbf{y}+\beta\mathbf{w}) = \overline{x_1}(\alpha y_1 + \beta w_1) - 3\overline{x_2}(\alpha y_2 + \beta w_2) = \alpha \overline{x_1} y_1 + \beta \overline{x_1} w_1 - 3\alpha \overline{x_2} y_2 - 3\beta \overline{x_2} w_2 =$$
$$= \alpha(\overline{x_1} y_1 - 3\overline{x_2} y_2) + \beta(\overline{x_1} w_1 - 3\overline{x_2} w_2) = \alpha(\mathbf{x}|\mathbf{y}) + \beta(\mathbf{x}|\mathbf{w}).$$

Per la verifica di **(3)** :

$$\bullet \quad (\mathbf{0}|\mathbf{0}) \quad = \quad 0 - 3\times 0 \quad = \quad 0$$

$$\bullet\bullet \quad (\mathbf{x}|\mathbf{x}) \quad = \quad \overline{x}_1 x_1 - 3\overline{x}_2 x_2 \quad = \quad |x_1|^2 - 3|x_2|^2$$

Prendendo, ad esempio, $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, si ha $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ e $(\mathbf{x}|\mathbf{x}) = 0^2 - 3\times 1^2 = -3 \notin \mathbb{R}_{>0}$.

Dunque la condizione (3) non è soddisfatta, per cui

$$(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \Big| \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}) = \overline{x}_1 y_1 - 3\overline{x}_2 y_2$$

NON definisce un prodotto interno su $\mathbb{C}^2$.

(*b*) Perchè $(\cdot|\cdot) : \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$ definito da $(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \Big| \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}) = \overline{x}_1 y_1 + 3\overline{x}_2 y_2$ sia un prodotto interno occorre che soddisfi le tre seguenti condizioni:

(1) $\overline{(\mathbf{y}|\mathbf{x})} = (\mathbf{x}|\mathbf{y})$ per ogni $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2$.

(2) $(\mathbf{x}|\alpha\mathbf{y}+\beta\mathbf{w}) = \alpha(\mathbf{x}|\mathbf{y}) + \beta(\mathbf{x}|\mathbf{w}) \ \forall\ \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2$, $\forall\ \alpha, \beta \in \mathbb{C}$

(3) $(\bullet)$ $(\mathbf{0}|\mathbf{0}) = 0$

$(\bullet\bullet)$ $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \neq \mathbf{0} \quad \Longrightarrow \quad (\mathbf{x}|\mathbf{x}) \in \mathbb{R}_{>0}$

Per la verifica di **(1)** :

$$\overline{(\mathbf{y}|\mathbf{x})} \quad = \quad \overline{\overline{y}_1 x_1 + 3\overline{y}_2 x_2} \quad = \quad y_1 \overline{x}_1 + 3 y_2 \overline{x}_2 \quad = \quad (\mathbf{x}|\mathbf{y}).$$

Per la verifica di **(2)**:

$$(\mathbf{x}|\alpha\mathbf{y}+\beta\mathbf{w}) = \overline{x_1}(\alpha y_1 + \beta w_1) + 3\overline{x_2}(\alpha y_2 + \beta w_2) = \alpha \overline{x_1} y_1 + \beta \overline{x_1} w_1 + 3\alpha \overline{x_2} y_2 + 3\beta \overline{x_2} w_2 =$$
$$= \alpha(\overline{x_1} y_1 + 3\overline{x_2} y_2) + \beta(\overline{x_1} w_1 + 3\overline{x_2} w_2) = \alpha(\mathbf{x}|\mathbf{y}) + \beta(\mathbf{x}|\mathbf{w}).$$

Per la verifica di **(3)** :

$$\bullet \quad (\mathbf{0}|\mathbf{0}) \quad = \quad 0 + 3\times 0 \quad = \quad 0$$

$$\bullet\bullet \quad (\mathbf{x}|\mathbf{x}) \quad = \quad \overline{x}_1 x_1 + 3\overline{x}_2 x_2 \quad = \quad |x_1|^2 + 3|x_2|^2$$

Essendo $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$, si ha che $x_1 \neq 0$ oppure $x_2 \neq 0$, per cui $|x_1|^2 \in \mathbb{R}_{>0}$ oppure $|x_2|^2 \in \mathbb{R}_{>0}$. Quindi $|x_1|^2+3|x_2|^2 \in \mathbb{R}_{>0}$. Dal momento che tutte e tre le condizioni sono soddisfatte,

$$(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \Big| \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}) = \overline{x}_1 y_1 + 3\overline{x}_2 y_2$$

definisce un prodotto interno su $\mathbb{C}^2$.

$\boxed{7}$ Sia $\|\cdot\| : M_2(\mathbb{C}) \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ la norma indotta dal prodotto interno definito nell'esercizio $\boxed{5}$. Si trovino tutte le matrici complesse scalari $\mathbf{A}$ di ordine 2 tali che $\|\mathbf{A}\| = 2\sqrt{2}$.

$\|\cdot\| : M_2(\mathbb{C}) \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ è definita da

$$\Big\| \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} \Big\| = \sqrt{\Big(\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} \Big| \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} \Big)} = \sqrt{\sum_{i=1}^{4} \overline{a}_i \cdot a_i} = \sqrt{\sum_{i=1}^{4} |a_i|^2} \qquad \forall \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{C}).$$

Una matrice $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{C})$ è scalare se $a_2 = a_3 = 0$ ed $a_1 = a_3 = \alpha$ per un opportuno $\alpha \in \mathbb{C}$.

$$\Big\| \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} \Big\| = 2\sqrt{2} \quad \iff \quad \sqrt{|\alpha|^2 + |0|^2 + |0|^2 + |\alpha|^2} = 2\sqrt{2} \quad \iff \quad |\alpha|\sqrt{2} = 2\sqrt{2} \quad \iff \quad |\alpha| = 2.$$

Dunque le matrici complesse scalari $\mathbf{A}$ di ordine 2 tali che $\|\mathbf{A}\| = 2\sqrt{2}$ sono tutte e sole le matrici del tipo

$$\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} \qquad \text{con } \alpha \in \mathbb{C} \text{ tale che } |\alpha| = 2.$$

N.B. I numeri complessi α tali che $|\alpha| = 2$ sono tutti e soli quei numeri complessi che corrispondono ai punti nel piano di Gauss che stanno sulla circonferenza di centro 0 e raggio 2. In particolare, ci sono infiniti numeri complessi α tali che $|\alpha| = 2$, per cui ci sono infinite matrici complesse scalari $\mathbf{A}$ di ordine 2 tali che $\|\mathbf{A}\| = 2\sqrt{2}$.

$\boxed{8}$ Siano $\mathbf{u} = \mathbf{e_1} + \mathbf{e_2}$ e $\|\cdot\| : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ la norma indotta dal prodotto interno definito nell'Esercizio Tipo 17.

(a) Si trovino tutti i vettori $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ tali che $\|\mathbf{x}\| = \|\mathbf{x}\|_2$.

(b) Si calcolino $\cos(\widehat{\mathbf{e_1 u}})$ e $\cos(\widehat{\mathbf{e_2 u}})$.

Poichè $(\cdot|\cdot) : \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$ è definito da

$$(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \Big| \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}) = \overline{x}_1 y_1 + 2\overline{x}_2 y_2,$$

la norma $\|\cdot\| : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ indotta da $(\cdot|\cdot)$ è definita da

$$\Big\| \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \Big\| = \sqrt{\Big(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \Big| \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \Big)} = \sqrt{\overline{x}_1 x_1 + 2\overline{x}_2 x_2} = \sqrt{|x_1|^2 + 2|x_2|^2}.$$

(a) Sia $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$. Essendo $\|\mathbf{x}\| = \sqrt{|x_1|^2 + 2|x_2|^2}$ e

$$\|\mathbf{x}\|_2 = \sqrt{\mathbf{x}^H\mathbf{x}} = \sqrt{\begin{pmatrix} \overline{x}_1 & \overline{x}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}} = \sqrt{\overline{x}_1 x_1 + \overline{x}_2 x_2} = \sqrt{|x_1|^2 + |x_2|^2},$$

allora

$$\|\mathbf{x}\| = \|\mathbf{x}\|_2 \iff \sqrt{|x_1|^2 + 2|x_2|^2} = \sqrt{|x_1|^2 + |x_2|^2} \iff |x_1|^2 + 2|x_2|^2 = |x_1|^2 + |x_2|^2 \iff$$
$$\iff |x_2|^2 = 0 \iff x_2 = 0.$$

Dunque $\{\mathbf{x} | \|\mathbf{x}\| = \|\mathbf{x}\|_2\} = \{\alpha \mathbf{e_1} | \alpha \in \mathbb{C}\} = \langle \mathbf{e_1} \rangle$.

(b) Essendo

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{e_1}\| &= \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{|1|^2 + 2|0|^2} = 1, \\
\|\mathbf{e_2}\| &= \left\| \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{|0|^2 + 2|1|^2} = \sqrt{2}, \\
\|\mathbf{u}\| &= \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{|1|^2 + 2|1|^2} = \sqrt{3}, \\
(\mathbf{e_1}|\mathbf{u}) &= (\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Big| \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}) = \overline{1} \cdot 1 + 2 \cdot \overline{0} \cdot 1 = 1, \\
(\mathbf{e_2}|\mathbf{u}) &= (\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Big| \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}) = \overline{0} \cdot 1 + 2 \cdot \overline{1} \cdot 1 = 2,
\end{aligned}$$

allora

$$\begin{aligned}
\cos(\widehat{\mathbf{e_1}\mathbf{u}}) &= \frac{(\mathbf{e_1}|\mathbf{u})}{\|\mathbf{e_1}\|\|\mathbf{u}\|} = \frac{1}{\sqrt{3}} \\
\cos(\widehat{\mathbf{e_2}\mathbf{u}}) &= \frac{(\mathbf{e_2}|\mathbf{u})}{\|\mathbf{e_2}\|\|\mathbf{u}\|} = \frac{2}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{3}} = \sqrt{\frac{2}{3}}.
\end{aligned}$$

$\boxed{9}$ Si trovi una base ortonormale del sottospazio $V = \langle \begin{pmatrix} i \\ -1 \\ i \\ -1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} -1 \\ -i \\ -1 \\ -i \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2i \\ 0 \end{pmatrix} \rangle$ di $\mathbb{C}^4$.

$\boxed{I}$ Costruiamo dapprima **una base di V**: poniamo

$$\mathbf{w}_1 = \begin{pmatrix} i \\ -1 \\ i \\ -1 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{w}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -i \\ -1 \\ -i \end{pmatrix}; \quad \mathbf{w}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{w}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2i \\ 0 \end{pmatrix}$$

e calcoliamo una base di $C(\mathbf{A})$ dove $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{w}_1 & \mathbf{w}_2 & \mathbf{w}_3 & \mathbf{w}_4 \end{pmatrix}$.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{w}_1 & \mathbf{w}_2 & \mathbf{w}_3 & \mathbf{w}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i & -1 & 1 & 0 \\ -1 & -i & 0 & 0 \\ i & -1 & 1 & 2i \\ -1 & -i & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[E_{41}(1)E_{31}(-i)E_{21}(1)E_1(-i)]{}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & i & -i & 0 \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2i \\ 0 & 0 & -i & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[E_3(-\frac{1}{2}i)E_{42}(i)E_2(i)]{} \begin{pmatrix} 1 & i & -i & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{U}$$

Poichè $\mathbf{U}$ ha come colonne dominanti la 1^a, la 3^a e la 4^a, allora una base di $C(\mathbf{A}) = V$ è $\{\mathbf{w}_1; \mathbf{w}_3; \mathbf{w}_4\}$.

$\boxed{II}$ Troviamo **una base ortogonale di V** applicando l'algoritmo di Gram-Schmidt a

$$\left\{ \mathbf{v}_1 = \mathbf{w}_1 = \begin{pmatrix} i \\ -1 \\ i \\ -1 \end{pmatrix}; \mathbf{v}_2 = \mathbf{w}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \mathbf{v}_3 = \mathbf{w}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2i \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

$$\mathbf{u}_1 = \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} i \\ -1 \\ i \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{u}_2 = \mathbf{v}_2 - \alpha_{12}\mathbf{u}_1, \qquad \mathbf{u}_1 \neq \mathbf{0} \quad \Longrightarrow \quad \alpha_{12} = \frac{(\mathbf{u}_1|\mathbf{v}_2)}{(\mathbf{u}_1|\mathbf{u}_1)}$$

$$(\mathbf{u}_1|\mathbf{v}_2) = \mathbf{u}_1^H\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} -i & -1 & -i & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = -2i$$

$$(\mathbf{u}_1|\mathbf{u}_1) = \mathbf{u}_1^H\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} -i & -1 & -i & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i \\ -1 \\ i \\ -1 \end{pmatrix} = 4$$

$$\Longrightarrow \quad \alpha_{12} = -\frac{2i}{4} = -\frac{1}{2}i$$

$$\mathbf{u}_2 = \mathbf{v}_2 - \alpha_{12}\mathbf{u}_1 = \mathbf{v}_2 + \frac{1}{2}i\mathbf{u}_1 =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}i \begin{pmatrix} i \\ -1 \\ i \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ 1 \\ -i \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{u}_3 = \mathbf{v}_3 - \alpha_{13}\mathbf{u}_1 - \alpha_{23}\mathbf{u}_2, \qquad \mathbf{u}_1 \neq \mathbf{0} \quad \Longrightarrow \quad \alpha_{13} = \frac{(\mathbf{u}_1|\mathbf{v}_3)}{(\mathbf{u}_1|\mathbf{u}_1)}$$

$$(\mathbf{u}_1|\mathbf{v}_3) = \mathbf{u}_1^H\mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} -i & -1 & -i & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2i \\ 0 \end{pmatrix} = 2$$

$$(\mathbf{u}_1|\mathbf{u}_1) = \mathbf{u}_1^H\mathbf{u}_1 = 4$$

$$\Longrightarrow \quad \alpha_{13} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$\mathbf{u}_2 \neq \mathbf{0} \quad \Longrightarrow \quad \alpha_{23} = \frac{(\mathbf{u}_2|\mathbf{v}_3)}{(\mathbf{u}_2|\mathbf{u}_2)}$$

$$(\mathbf{u}_2|\mathbf{v}_3) = \mathbf{u}_2^H \mathbf{v}_3 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & i & 1 & i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2i \\ 0 \end{pmatrix} = i$$

$$(\mathbf{u}_2|\mathbf{u}_2) = \mathbf{u}_2^H \mathbf{u}_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & i & 1 & i \end{pmatrix}\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ 1 \\ -i \end{pmatrix} = 1$$

$$\Longrightarrow \quad \alpha_{23} = i$$

$$\mathbf{u}_3 = \mathbf{v}_3 - \alpha_{13}\mathbf{u}_1 - \alpha_{23}\mathbf{u}_2 = \mathbf{v}_3 - \frac{1}{2}\mathbf{u}_1 - \frac{1}{2}i\mathbf{u}_2 =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2i \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix} i \\ -1 \\ i \\ -1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2}i\begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ 1 \\ -i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -i \\ 0 \\ i \\ 0 \end{pmatrix}$$

Dunque $\left\{ \mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} i \\ -1 \\ i \\ -1 \end{pmatrix}; \mathbf{u}_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ 1 \\ -i \end{pmatrix}; \mathbf{u}_3 = \begin{pmatrix} -i \\ 0 \\ i \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ è una base ortogonale di V.

$\boxed{III}$ Costruiamo **base ortonormale di V** normalizzando la base ortogonale trovata al punto $\boxed{II}$, ossia dividendo ciascun elemento della base ortogonale trovata in $\boxed{II}$ per la propria norma euclidea.

Cominciamo con il calcolare la norma euclidea di $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$ ed $\mathbf{u}_3$:

$$\|\mathbf{u}_1\|_2 = \sqrt{(\mathbf{u}_1|\mathbf{u}_1)} = \sqrt{4} = 2$$

$$\|\mathbf{u}_2\|_2 = \sqrt{(\mathbf{u}_2|\mathbf{u}_2)} = \sqrt{1} = 1$$

$$\|\mathbf{u}_3\|_2 = \sqrt{(\mathbf{u}_3|\mathbf{u}_3)} = \sqrt{\begin{pmatrix} i & 0 & -i & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -i \\ 0 \\ i \\ 0 \end{pmatrix}} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

Allora

$$\mathcal{B} = \{\frac{\mathbf{u}_1}{\|\mathbf{u}_1\|_2}; \frac{\mathbf{u}_2}{\|\mathbf{u}_2\|_2}; \frac{\mathbf{u}_3}{\|\mathbf{u}_3\|_2}\} = \left\{ \frac{1}{2}\begin{pmatrix} i \\ -1 \\ i \\ -1 \end{pmatrix}; \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ 1 \\ -i \end{pmatrix}; \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -i \\ 0 \\ i \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

è una base ortonormale di V.

$\boxed{10}$ Si consideri il sottospazio $W = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 2i \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1+2i \end{pmatrix} \right\rangle$ di $M_2(\mathbb{C})$. Si trovi una base ortonormale di W rispetto al prodotto interno $(\cdot|\cdot) : M_2(\mathbb{C}) \times M_2(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ definito nell'esercizio $\boxed{5}$.

Il prodotto interno su $M_2(\mathbb{C})$ definito nell'esercizio $\boxed{5}$ è: $(\cdot|\cdot) : M_2(\mathbb{C}) \times M_2(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ con

$$(\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} | \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{pmatrix}) = \sum_{i=1}^{4} \overline{a_i} b_i.$$

La norma indotta da $(\cdot|\cdot)$ (si veda l'esercizio $\boxed{3}$) è: $\|\cdot\| : M_2(\mathbb{C}) \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ con

$$\left|\left| \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} \right|\right| = \sqrt{\left(\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} \Big| \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} \right)} = \sqrt{\sum_{i=1}^{4} \overline{a}_i \cdot a_i} = \sqrt{\sum_{i=1}^{4} |a_i|^2} \qquad \forall \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{C}).$$

Siano $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2i \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ e $\mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1+2i \end{pmatrix}$. Poichè $\mathcal{S} = \{\mathbf{v}_1; \mathbf{v}_2; \mathbf{v}_3\}$ è un insieme di generatori di W,

$\boxed{I}$ troviamo **una base** $\mathcal{B}$ **di W** contenuta in $\mathcal{S}$.

Esistono elementi di $\mathcal{S}$ che siano combinazioni lineari dei rimanenti ?

Sia $\alpha_1\mathbf{v}_1 + \alpha_2\mathbf{v}_2 + \alpha_3\mathbf{v}_3 = \mathbf{0}$ una combinazione lineare nulla dei vettori di $\mathcal{S}$. Allora da

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \alpha_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 1 & 2i \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1+2i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 + \alpha_2 & 2i\alpha_2 + \alpha_3 \\ 0 & (1+2i)\alpha_3 \end{pmatrix}$$

si ottiene il sistema lineare, nelle incognite $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$,

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 = 0 \\ 2i\alpha_2 + \alpha_3 = 0 \\ (1+2i)\alpha_3 = 0 \end{cases}$$

che ha come unica soluzione quella nulla (ossia $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$).

Dunque $\mathcal{S}$ è L.I., per cui $\mathcal{B} = \mathcal{S}$ è una base di W.

$\boxed{II}$ troviamo **una base ortogonale di W** applicando a $\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_1; \mathbf{v}_2; \mathbf{v}_3\}$ l'algoritmo di Gram-Schmidt (dove il prodotto interno $(\cdot|\cdot) : M_2(\mathbb{C}) \times M_2(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ è definito sopra).

$\mathbf{u}_1 = \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

$\mathbf{u}_2 = \mathbf{v}_2 - \alpha_{12}\mathbf{u}_1$

$\mathbf{u}_1 \neq \mathbf{0} \quad \Longrightarrow \quad \alpha_{12} = \frac{(\mathbf{u}_1|\mathbf{v}_2)}{(\mathbf{u}_1|\mathbf{u}_1)}$

$(\mathbf{u}_1|\mathbf{v}_2) = (\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} | \begin{pmatrix} 1 & 2i \\ 0 & 0 \end{pmatrix}) = \overline{1} \cdot 1 + \overline{0} \cdot 2i + \overline{0} \cdot 0 + \overline{0} \cdot 0 = 1 \cdot 1 + 0 \cdot 2i + 0 + 0 = 1$

$(\mathbf{u}_1|\mathbf{u}_1) = (\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} | \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}) = \overline{1} \cdot 1 + \overline{0} \cdot 0 + \overline{0} \cdot 0 + \overline{0} \cdot 0 = 1 \cdot 1 + 0 + 0 + 0 = 1$

$\alpha_{12} = \frac{1}{1} = 1$

$\mathbf{u}_2 = \mathbf{v}_2 - \alpha_{12}\mathbf{u}_1 = \mathbf{v}_2 - \mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2i \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2i \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\mathbf{u}_3 = \mathbf{v}_3 - \alpha_{13}\mathbf{u}_1 - \alpha_{23}\mathbf{u}_2$

$\mathbf{u}_1 \neq \mathbf{0} \quad \Longrightarrow \quad \alpha_{13} = \frac{(\mathbf{u}_1|\mathbf{v}_3)}{(\mathbf{u}_1|\mathbf{u}_1)}$

$(\mathbf{u}_1|\mathbf{v}_3) = (\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} | \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1+2i \end{pmatrix}) = \overline{1}\cdot 0 + \overline{0}\cdot 1 + \overline{0}\cdot 0 + \overline{0}\cdot(1+2i) = 1\cdot 0 + 0\cdot 1 + 0 + 0\cdot(1+2i) = 0$

$\alpha_{13} = \frac{0}{(\mathbf{u}_1|\mathbf{u}_1)} = 0$

$\mathbf{u}_2 \neq \mathbf{0} \quad \Longrightarrow \quad \alpha_{23} = \frac{(\mathbf{u}_2|\mathbf{v}_3)}{(\mathbf{u}_2|\mathbf{u}_2)}$

$(\mathbf{u}_2|\mathbf{v}_3) = (\begin{pmatrix} 0 & 2i \\ 0 & 0 \end{pmatrix} | \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1+2i \end{pmatrix}) = \overline{0}\cdot 0 + \overline{2i}\cdot 1 + \overline{0}\cdot 0 + \overline{0}\cdot(1+2i) = 0 - 2i\cdot 1 + 0 + 0\cdot(1+2i) = -2i$

$(\mathbf{u}_2|\mathbf{u}_2) = (\begin{pmatrix} 0 & 2i \\ 0 & 0 \end{pmatrix} | \begin{pmatrix} 0 & 2i \\ 0 & 0 \end{pmatrix}) = \overline{0}\cdot 0 + \overline{2i}\cdot 2i + \overline{0}\cdot 0 + \overline{0}\cdot 0 = 0 - 4i^2 + 0 + 0 = -4i^2 = -4(-1) = 4$

$\alpha_{23} = \frac{-2i}{4} = -\frac{i}{2}$

$\mathbf{u}_3 = \mathbf{v}_3 - \alpha_{13}\mathbf{u}_1 - \alpha_{23}\mathbf{u}_2 = \mathbf{v}_3 + i\mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1+2i \end{pmatrix} + \frac{i}{2}\begin{pmatrix} 0 & 2i \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1+2i \end{pmatrix}$

Dunque $\mathcal{B}_1 \left\{ \mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \mathbf{u}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1+2i \end{pmatrix} \right\}$ è una base ortogonale di W.

$\boxed{III}$ Costruiamo **base ortonormale di W** normalizzando la base ortogonale $\mathcal{B}_1$ trovata al punto $\boxed{II}$, ossia dividendo ciascun elemento di $\mathcal{B}_1$ per la propria norma (dove la norma è quella indotta dal prodotto interno).

Cominciamo con il calcolare la norma di $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$ ed $\mathbf{u}_3$:

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{u}_1\| &= \sqrt{(\mathbf{u}_1|\mathbf{u}_1)} = \sqrt{1} = 1 \\
\|\mathbf{u}_2\| &= \sqrt{(\mathbf{u}_2|\mathbf{u}_2)} = \sqrt{4} = 2 \\
\|\mathbf{u}_3\| &= \sqrt{(\mathbf{u}_3|\mathbf{u}_3)} = \sqrt{(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1+2i \end{pmatrix} | \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1+2i \end{pmatrix})} = \sqrt{\overline{0}\cdot 0 + \overline{0}\cdot 0 + \overline{0}\cdot 0 + \overline{(1+2i)}\cdot(1+2i)} = \\
&= \sqrt{0+0+0+(1-2i)(1+2i)} = \sqrt{1-(2i)^2} = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}
\end{aligned}$$

Allora

$$\mathcal{B}^* = \{\mathbf{u}_1^* = \frac{\mathbf{u}_1}{\|\mathbf{u}_1\|}; \mathbf{u}_2^* = \frac{\mathbf{u}_2}{\|\mathbf{u}_2\|}; \mathbf{u}_3^* = \frac{\mathbf{u}_3}{\|\mathbf{u}_3\|}\} = \left\{ \mathbf{u}_1^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \mathbf{u}_2^* = \begin{pmatrix} 0 & i \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \mathbf{u}_3^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{1+2i}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \right\}$$

è una base ortonormale di W.

Algebra Lineare 1 A, Svolgimento degli Esercizi per casa 9

$\boxed{1}$ Si calcoli la proiezione ortogonale di $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 2i \\ -6 \\ 8i \\ 10 \end{pmatrix}$ sul sottospazio $U = \langle \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 8i \\ 0 \\ -i \\ 1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 7i \\ -1 \\ -i \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$ di $\mathbb{C}^3$.

$\boxed{I}$ Troviamo una base ortonormale di U.

Poniamo $\mathbf{w}_1 = \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{w}_2 = \begin{pmatrix} 8i \\ 0 \\ -i \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{w}_3 = \begin{pmatrix} 7i \\ -1 \\ -i \\ 1 \end{pmatrix}$ e calcoliamo una base di $C(\mathbf{A})$ dove $\mathbf{A} = (\, \mathbf{w}_1 \quad \mathbf{w}_2 \quad \mathbf{w}_3 \,)$.

$$\mathbf{A} = (\, \underline{w}_1 \quad \underline{w}_2 \quad \underline{w}_3 \,) = \begin{pmatrix} i & 8i & 7i \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -i & -i \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[E_{21}(-1)E_1(-i)]{} \begin{pmatrix} 1 & 8 & 7 \\ 0 & -8 & -8 \\ 0 & -i & -i \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[E_{42}(-1)E_{32}(i)E_2(-\frac{1}{8})]{} \begin{pmatrix} 1 & 8 & 7 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{U}$$

Poichè $\mathbf{U}$ ha come colonne dominanti la 1^a e la 2^a, allora una base di $C(\mathbf{A}) = U$ è $\{\mathbf{w}_1; \mathbf{w}_2\}$.

Applichiamo ora l'algoritmo di Gram-Schmidt a $\left\{ \mathbf{v}_1 = \mathbf{w}_1 = \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} ; \mathbf{v}_2 = \mathbf{w}_2 = \begin{pmatrix} 8i \\ 0 \\ -i \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ per trovare una base ortogonale di U.

$$\mathbf{u}_1 = \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{u}_2 = \mathbf{v}_2 - \alpha_{12}\mathbf{u}_1, \qquad \mathbf{u}_1 \neq \mathbf{0} \quad \Longrightarrow \quad \alpha_{12} = \frac{(\mathbf{u}_1|\mathbf{v}_2)}{(\mathbf{u}_1|\mathbf{u}_1)}$$

$$(\mathbf{u}_1|\mathbf{v}_2) = \mathbf{u}_1^H\mathbf{v}_2 = (\, -i \quad 1 \quad 0 \quad 0 \,) \begin{pmatrix} 8i \\ 0 \\ -i \\ 1 \end{pmatrix} = (-i)8i = 8$$

$$(\mathbf{u}_1|\mathbf{u}_1) = \mathbf{u}_1^H\mathbf{u}_1 = (\, -i \quad 1 \quad 0 \quad 0 \,) \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = (-i)i + 1 = 2$$

$$\Longrightarrow \quad \alpha_{12} = \frac{8}{2} = 4$$

$$\mathbf{u}_2 = \mathbf{v}_2 - \alpha_{12}\mathbf{u}_1 = \mathbf{v}_2 - 4\mathbf{u}_1 =$$
$$= \begin{pmatrix} 8i \\ 0 \\ -i \\ 1 \end{pmatrix} - 4 \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4i \\ -4 \\ -i \\ 1 \end{pmatrix}$$

Dunque $\left\{ \mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 4i \\ -4 \\ -i \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ è una base ortogonale di U.

Costruiamo base ortonormale di U normalizzando la base ortogonale $\{\mathbf{u}_1; \mathbf{u}_2\}$, ossia dividendo ciascun suo elemento per la sua norma euclidea.

Cominciamo con il calcolare la norma euclidea di $\mathbf{u}_1$ ed $\mathbf{u}_2$:

$$\|\mathbf{u}_1\|_2 = \sqrt{(\mathbf{u}_1|\mathbf{u}_1)} = \sqrt{2}$$
$$\|\mathbf{u}_2\|_2 = \sqrt{(\mathbf{u}_2|\mathbf{u}_2)} = \sqrt{\begin{pmatrix} -4i & -4 & i & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4i \\ -4 \\ -i \\ 1 \end{pmatrix}} = \sqrt{16+16+1+1} = \sqrt{34}$$

Allora

$$\mathcal{B} = \{\mathbf{u}_1^* = \frac{\mathbf{u}_1}{\|\mathbf{u}_1\|_2}; \mathbf{u}_2^* = \frac{\mathbf{u}_2}{\|\mathbf{u}_2\|_2}\} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \frac{1}{\sqrt{34}} \begin{pmatrix} 4i \\ -4 \\ -i \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

è una base ortonormale di U.

La proiezione ortogonale di $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 2i \\ -6 \\ 8i \\ 10 \end{pmatrix}$ su U è

$$P_U(\mathbf{v}) = (\mathbf{u}_1^*|\mathbf{v})\mathbf{u}_1^* + (\mathbf{u}_2^*|\mathbf{v})\mathbf{u}_2^*$$

dove

$$(\mathbf{u}_1^*|\mathbf{v}) = (\mathbf{u}_1^*)^H\mathbf{v} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -i & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2i \\ -6 \\ 8i \\ 10 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}((-i)2i - 6) = -\frac{4}{\sqrt{2}}$$

$$(\mathbf{u}_2^*|\mathbf{v}) = (\mathbf{u}_2^*)^H\mathbf{v} = \frac{1}{\sqrt{34}} \begin{pmatrix} -4i & -4 & i & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2i \\ -6 \\ 8i \\ 10 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{34}}(-4i2i - 4(-6) + i8i + 10) = \sqrt{34}$$

Quindi

$$P_U(\mathbf{v}) = -\frac{4}{\sqrt{2}}\mathbf{u}_1^* + \sqrt{34}\mathbf{u}_2^* = -\frac{4}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \sqrt{34}\frac{1}{\sqrt{34}} \begin{pmatrix} 4i \\ -4 \\ -i \\ 1 \end{pmatrix} = -2 \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4i \\ -4 \\ -i \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2i \\ -6 \\ -i \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$\boxed{2}$ Siano W e $(\cdot|\cdot) : M_2(\mathbb{C}) \times M_2(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ come nell'esercizio $\boxed{5}$ degli "Esercizi per casa 8". Si calcoli la proiezione ortogonale $P_W(\mathbf{v})$ di $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 & i \\ 2i & 3\sqrt{5} \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{C})$ su W rispetto al prodotto interno $(\cdot|\cdot)$.

Nell'esercizio $\boxed{5}$ degli "esercizi per casa 8"abbiamo trovato che

$$\left\{ \mathbf{u}_1^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \mathbf{u}_2^* = \begin{pmatrix} 0 & i \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \mathbf{u}_3^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{1+2i}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \right\}$$

è una base ortonormale di W (rispetto al prodotto interno $(\cdot|\cdot)$ ed alla norma da esso indotta su $M_2(\mathbb{C})$).

La proiezione ortogonale di $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 & i \\ 2i & 3\sqrt{5} \end{pmatrix}$ su W è

$$P_W(\mathbf{v}) = (\mathbf{u}_1^*|\mathbf{v})\mathbf{u}_1^* + (\mathbf{u}_2^*|\mathbf{v})\mathbf{u}_2^* + (\mathbf{u}_3^*|\mathbf{v})\mathbf{u}_3^*$$

dove

$(\mathbf{u}_1^*|\mathbf{v}) = (\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} | \begin{pmatrix} 1 & i \\ 2i & 3\sqrt{5} \end{pmatrix}) = \overline{1} \cdot 1 + \overline{0} \cdot i + \overline{0} \cdot 2i + \overline{0} \cdot 3\sqrt{5} = 1 \cdot 1 + 0 \cdot i + 0 \cdot 2i + 0 \cdot 3\sqrt{5} = 1$

$(\mathbf{u}_2^*|\mathbf{v}) = (\begin{pmatrix} 0 & i \\ 0 & 0 \end{pmatrix} | \begin{pmatrix} 1 & i \\ 2i & 3\sqrt{5} \end{pmatrix}) = \overline{0} \cdot 1 + \overline{i} \cdot i + \overline{0} \cdot 2i + \overline{0} \cdot 3\sqrt{5} = 0 \cdot 1 - i \cdot i + 0 \cdot 2i + 0 \cdot 3\sqrt{5} = -i^2 = 1$

$(\mathbf{u}_3^*|\mathbf{v}) = (\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{1+2i}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} | \begin{pmatrix} 1 & i \\ 2i & 3\sqrt{5} \end{pmatrix}) = \overline{0} \cdot 1 + \overline{0} \cdot i + \overline{0} \cdot 2i + \overline{\frac{1+2i}{\sqrt{5}}} \cdot 3\sqrt{5} = 0 \cdot 1 + 0 \cdot i + 0 \cdot 2i + \frac{1-2i}{\sqrt{5}} \cdot 3\sqrt{5} = 3(1-2i)$

Quindi

$$P_W(\mathbf{v}) = \mathbf{u}_1^* + \mathbf{u}_2^* + 3(1-2i)\mathbf{u}_3^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & i \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 3(1-2i) \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{1+2i}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & i \\ 0 & \frac{3(1-2i)(1+2i)}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & i \\ 0 & \frac{3 \cdot 5}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & i \\ 0 & 3\sqrt{5} \end{pmatrix}$$

$\boxed{3}$ Siano $V_1 = \langle \begin{pmatrix} 0 \\ i \\ 2 \end{pmatrix} \rangle$ e $V_2 = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 1 \\ i \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} i \\ -1 \\ i \\ -1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$. Si trovino basi di $V_1^\perp$ e $V_2^\perp$.

(*a*) Se $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 \\ i \\ 2 \end{pmatrix}$ allora $C(\mathbf{A}) = V_1$ e $V_1^\perp = C(\mathbf{A})^\perp = N(\mathbf{A}^H)$.

Facendo un'eliminazione di Gauss su $\mathbf{A}^H$ otteniamo:

$\mathbf{A}^H = \begin{pmatrix} 0 & -i & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[E_1(i)]{} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2i \end{pmatrix} = \mathbf{U}$

Poichè $N(\mathbf{A}^H) = N(\mathbf{U})$ e

$$\dim(N(\mathbf{U})) = \text{numero delle colonne di } \mathbf{U} - \text{rango di } \mathbf{U} = 3 - 1 = 2,$$

una base di $V_1^{\perp}$ ha 2 elementi (d'altra parte dimV_1=1 e dim$\mathbb{C}^3$=3, per cui a priori potevamo dedurre che dim$V_1^{\perp}$ = dim$\mathbb{C}^3$ − dim$V_1 = 3 - 1 = 2$).

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in N(\mathbf{A}^H) = N(\mathbf{U}) \iff x_2 + 2ix_3 = 0$$

quindi $N(\mathbf{U}) = \left\{ \begin{pmatrix} h \\ -2ik \\ k \end{pmatrix} | h, k \in \mathbb{C} \right\}$.

Una base di $V_1^{\perp}$ è

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 \\ -2i \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

(b) Se $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & i & 1 & 0 \\ i & -1 & 0 & 1 \\ 1 & i & 1 & 0 \\ i & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, allora $C(\mathbf{A}) = V_2$ e $V_2^{\perp} = C(\mathbf{A})^{\perp} = N(\mathbf{A}^H)$.

Facendo un'eliminazione di Gauss su $\mathbf{A}^H$ otteniamo:

$$\mathbf{A}^H = \begin{pmatrix} 1 & -i & 1 & -i \\ -i & -1 & -i & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[E_{31}(-1)E_{21}(i)]{} \begin{pmatrix} 1 & -i & 1 & -i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & i \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[E_{23}]{}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -i & 1 & -i \\ 0 & i & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[E_{42}(-1)E_2(-i)]{} \begin{pmatrix} 1 & -i & 1 & -i \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{U}$$

Poichè $N(\mathbf{A}^H) = N(\mathbf{U})$ e

$$\dim(N(\mathbf{A})) = \text{numero delle colonne di } \mathbf{U} - \text{rango di } \mathbf{U} = 4 - 2 = 2,$$

una base di $V_2^{\perp}$ ha 2 elementi.

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in N(\mathbf{A}^H) = N(\mathbf{U}) \iff \begin{cases} x_1 - ix_2 + x_3 - ix_4 = 0 \\ x_2 + x_4 = 0 \end{cases}$$

Quindi $V_2^{\perp} = N(\mathbf{A}^H) = \left\{ \begin{pmatrix} -h \\ -k \\ h \\ k \end{pmatrix} | h, k \in \mathbb{C} \right\}$ ed una sua base è $\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

$\boxed{4}$ Siano W e $(\cdot|\cdot) : M_2(\mathbb{C}) \times M_2(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ come nell'esercizio $\boxed{5}$ degli "esercizi per casa 8". Si trovi il complemento ortogonale $W^{\perp}$ di W in $M_2(\mathbb{C})$ rispetto al prodotto interno $(\cdot|\cdot)$.

Il complemento ortogonale di W in $M_2(\mathbb{C})$ è $W^\perp = \{\mathbf{v} \in M_2(\mathbb{C}) | (\mathbf{w}|\mathbf{v}) = 0 \quad \forall \mathbf{w} \in W\}$. Dal momento che

$$\left\{ \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2i \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1+2i \end{pmatrix} \right\}$$

è un insieme di generatori di W, allora

$$W^\perp = \{\mathbf{v} \in M_2(\mathbb{C}) | (\mathbf{v_i}|\mathbf{v}) = 0 \quad \text{per } i = 1,2,3\}.$$

Se $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{C})$,

$$(\mathbf{v}_1|\mathbf{v}) = (\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} | \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix}) = \overline{1} \cdot a_1 + \overline{0} \cdot a_2 + \overline{0} \cdot a_3 + \overline{0} \cdot a_4 = 1 \cdot a_1 + 0 \cdot a_2 + 0 \cdot a_3 + 0 \cdot a_4 =$$

$$= a_1$$

$$(\mathbf{v}_2|\mathbf{v}) = (\begin{pmatrix} 1 & 2i \\ 0 & 0 \end{pmatrix} | \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix}) = \overline{1} \cdot a_1 + \overline{2i} \cdot a_2 + \overline{0} \cdot a_3 + \overline{0} \cdot a_4 = 1 \cdot a_1 - 2i \cdot a_2 + 0 \cdot a_3 + 0 \cdot a_4 =$$

$$= a_1 - 2ia_2$$

$$(\mathbf{v}_3|\mathbf{v}) = (\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1+2i \end{pmatrix} | \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix}) = \overline{0} \cdot a_1 + \overline{1} \cdot a_2 + \overline{0} \cdot a_3 + \overline{1+2i} \cdot a_4 =$$

$$= 0 \cdot a_1 + 1 \cdot a_2 + 0 \cdot a_3 + (1-2i) \cdot a_4 =$$

$$= a_2 + (1-2i)a_4$$

Dunque

$$W^\perp = \left\{ \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{C}) \middle| a_1 = a_1 - 2ia_2 = a_2 + (1-2i)a_4 = 0 \right\} =$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{C}) \middle| a_1 = a_2 = a_4 = 0 \right\} =$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a & 0 \end{pmatrix} \middle| a \in \mathbb{C} \right\}.$$

$\boxed{5}$ Sia $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & i & -2 & 9i \\ i & -1 & -2i & 0 \\ -1 & -i & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

(a) Si trovino una decomposizione $\mathbf{Q_0R_0}$-non-normalizzata ed una decomposizione $\mathbf{QR}$-normalizzata per $\mathbf{A}$.

(b) Si calcoli la matrice di proiezione sullo spazio delle colonne $C(\mathbf{A})$ di $\mathbf{A}$.

(a) $\boxed{I}$ Poniamo

$$\mathbf{v_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v_2} = \begin{pmatrix} i \\ -1 \\ -i \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v_3} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2i \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v_4} = \begin{pmatrix} 9i \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

e applichiamo l'algoritmo di Gram-Schimdt a $\{\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \mathbf{v_3}, \mathbf{v_4}\}$.

Otterremo 4 vettori, $\mathbf{u_1}, \mathbf{u_2}, \mathbf{u_3}, \mathbf{u_4}$. Per sapere se alcuni degli $\mathbf{u_i}$ saranno nulli, e in tal caso quali, troviamo innanzitutto una forma ridotta di Gauss $\mathbf{U}$ di $\mathbf{A}$: le eventuali colonne libere di $\mathbf{U}$ corrisponderanno agli $\mathbf{u_i}$ nulli.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & i & -2 & 9i \\ i & -1 & -2i & 0 \\ -1 & -i & 2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{31}(1)E_{21}(-i)} \begin{pmatrix} 1 & i & -2 & 9i \\ 0 & 0 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 9i \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{32}(-9i)E_2(1/9)} \begin{pmatrix} 1 & i & -2 & 9i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{U}$$

Poichè $\mathbf{U}$ ha come colonne libere la 2^a e la 3^a, allora applicando l'algoritmo di Gram-Schimdt a $\{\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \mathbf{v_3}, \mathbf{v_4}\}$ otterremo $\mathbf{u_2} = \mathbf{0} = \mathbf{u_3}$.

$$\boxed{\mathbf{u_1} = \mathbf{v_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ -1 \end{pmatrix}}$$

$\mathbf{u_2} = \mathbf{v_2} - \alpha_{12}\mathbf{u_1}$,

$$\mathbf{u_1} \neq \mathbf{0} \quad \Longrightarrow \quad \alpha_{12} = \frac{(\mathbf{u_1}|\mathbf{v_2})}{(\mathbf{u_1}|\mathbf{u_1})}$$

$$(\mathbf{u_1}|\mathbf{v_2}) = \mathbf{u_1}^H\mathbf{v_2} = \begin{pmatrix} 1 & -i & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i \\ -1 \\ -i \end{pmatrix} = i + i + i = 3i$$

$$(\mathbf{u_1}|\mathbf{u_1}) = \mathbf{u_1}^H\mathbf{u_1} = \begin{pmatrix} 1 & -i & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ -1 \end{pmatrix} = 1 + 1 + 1 = 3$$

$$\Longrightarrow \quad \boxed{\alpha_{12} = 3i/3 = i}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{u_2} &= \mathbf{v_2} - \alpha_{12}\mathbf{u_1} = \\ &= \mathbf{v_2} - i\mathbf{u_1} = \\ &= \begin{pmatrix} i \\ -1 \\ -i \end{pmatrix} - i \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ -1 \end{pmatrix} = \boxed{\mathbf{0} = \mathbf{u_2}} \end{aligned}$$

$\mathbf{u_3} = \mathbf{v_3} - \alpha_{13}\mathbf{u_1} - \alpha_{23}\mathbf{u_2}$,

$$\mathbf{u_1} \neq \mathbf{0} \quad \Longrightarrow \quad \alpha_{13} = \frac{(\mathbf{u_1}|\mathbf{v_3})}{(\mathbf{u_1}|\mathbf{u_1})}$$

$$(\mathbf{u_1}|\mathbf{v_3}) = \mathbf{u_1}^H\mathbf{v_3} = \begin{pmatrix} 1 & -i & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ -2i \\ 2 \end{pmatrix} = -2 - 2 - 2 = -6$$

$$\Longrightarrow \quad \boxed{\alpha_{13} = -6/3 = -2}$$

$$\mathbf{u_2} = \mathbf{0} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{\alpha_{23} = 0}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{u_3} &= \mathbf{v_3} - \alpha_{13}\mathbf{u_1} - \alpha_{23}\mathbf{u_2} = \\ &= \mathbf{v_3} + 2\mathbf{u_1} = \\ &= \begin{pmatrix} -2 \\ -2i \\ 2 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ -1 \end{pmatrix} = \boxed{\mathbf{0} = \mathbf{u_3}} \end{aligned}$$

$\mathbf{u_4} = \mathbf{v_4} - \alpha_{14}\mathbf{u_1} - \alpha_{24}\mathbf{u_2} - \alpha_{34}\mathbf{u_3}$,

$$\mathbf{u_1} \neq \mathbf{0} \quad \Longrightarrow \quad \alpha_{14} = \frac{(\mathbf{u_1}|\mathbf{v_4})}{(\mathbf{u_1}|\mathbf{u_1})}$$

$$(\mathbf{u_1}|\mathbf{v_4}) = \mathbf{u_1}^H\mathbf{v_4} = \begin{pmatrix} 1 & -i & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 9i \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 9i$$

$$\Longrightarrow \quad \boxed{\alpha_{14} = 9i/3 = 3i}$$

$$\mathbf{u_2} = \mathbf{0} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{\alpha_{24} = 0}$$

$$\mathbf{u_3} = \mathbf{0} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{\alpha_{34} = 0}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{u_4} &= \mathbf{v_4} - 3i\mathbf{u_1} = \\ &= \begin{pmatrix} 9i \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - 3i \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ -1 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 6i \\ 3 \\ 3i \end{pmatrix} = \mathbf{u_4}} \end{aligned}$$

$\boxed{II}$ Poniamo

$$\mathbf{Q_0} = (\,\mathbf{u_1} \quad \mathbf{u_2} \quad \mathbf{u_3} \quad \mathbf{u_4}\,) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 6i \\ i & 0 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 0 & 3i \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{R_0} = \begin{pmatrix} 1 & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \alpha_{14} \\ 0 & 1 & \alpha_{23} & \alpha_{24} \\ 0 & 0 & 1 & \alpha_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & i & -2 & 3i \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$\mathbf{A} = \mathbf{Q_0}\mathbf{R_0}$ è una decomposizione $\mathbf{Q_0}\mathbf{R_0}$-non-normalizzata per $\mathbf{A}$.

$\boxed{III}$ Sia $\mathbf{Q_1}$ la matrice che si ottiene dalla matrice $\mathbf{Q_0}$, ottenuta al punto (2), togliendo tutte le (eventuali) colonne nulle di $\mathbf{Q_0}$. In questo caso $\mathbf{Q_0}$ ha due colonne nulle, la 2^a e la 3^a, quindi

$$\mathbf{Q_1} = (\,\mathbf{u_1} \quad \mathbf{u_4}\,) = \begin{pmatrix} 1 & 6i \\ i & 3 \\ -1 & 3i \end{pmatrix}.$$

Sia $\mathbf{R_1}$ la matrice che si ottiene dalla matrice $\mathbf{R_0}$, ottenuta al punto (2), togliendo le righe di $\mathbf{R_0}$ che corrispondono alle colonne che sono state tolte da $\mathbf{Q_0}$ per ottenere $\mathbf{Q_1}$. In questo caso, poichè per ottenere $\mathbf{Q_1}$ sono state tolte da $\mathbf{Q_0}$ la 2^a e la 3^a colonna, allora per ottenere $\mathbf{R_1}$ si toglie da $\mathbf{R_0}$ la 2^a e la 3^a riga. Dunque

$$\mathbf{R_1} = \begin{pmatrix} 1 & i & -2 & 3i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$\boxed{IV}$ Costruiamo la matrice diagonale $\mathbf{D}$ che ha sulla diagonale la norma euclidea delle colonne di $\mathbf{Q_1}$ (ossia delle colonne non nulle di $\mathbf{Q_0}$), e calcoliamo $\mathbf{D}^{-1}$.

Poichè

$||\mathbf{u_1}||_2 = \sqrt{(\mathbf{u_1}|\mathbf{u_1})} = \sqrt{3}$,

$||\mathbf{u_4}||_2 = \sqrt{(\mathbf{u_4}|\mathbf{u_4})} = \sqrt{\mathbf{u_4}^H\mathbf{u_4}} = \sqrt{(\,-6i \quad 3 \quad -3i\,)\begin{pmatrix} 6i \\ 3 \\ 3i \end{pmatrix}} = \sqrt{36+9+9} = \sqrt{54}$,

allora

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} ||\mathbf{u_1}||_2 & 0 \\ 0 & ||\mathbf{u_4}||_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 0 \\ 0 & \sqrt{54} \end{pmatrix}.$$

Quindi

$$\mathbf{D}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{54}} \end{pmatrix}.$$

$\boxed{V}$ Poniamo

$$\mathbf{Q} = \mathbf{Q_1}\mathbf{D}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 6i \\ i & 3 \\ -1 & 3i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{54}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{6}{\sqrt{54}}\,i \\ \frac{1}{\sqrt{3}}\,i & \frac{3}{\sqrt{54}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{3}{\sqrt{54}}\,i \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{R} = \mathbf{D}\mathbf{R_1} = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 0 \\ 0 & \sqrt{54} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & i & -2 & 3i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & \sqrt{3}\,i & -2\sqrt{3} & 3\sqrt{3}\,i \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{54} \end{pmatrix}.$$

Allora $\mathbf{A} = \mathbf{QR}$ è una decomposizione $\mathbf{QR}$-normalizzata di $\mathbf{A}$.

(b) La matrice di proiezione sullo spazio delle colonne $C(\mathbf{A})$ di $\mathbf{A}$ è $\mathbf{P} = \mathbf{QQ}^H$:

$$\mathbf{P} = \mathbf{QQ}^H = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{6}{\sqrt{54}}i \\ \frac{1}{\sqrt{3}}i & \frac{3}{\sqrt{54}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{3}{\sqrt{54}}i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}}i & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{6}{\sqrt{54}}i & \frac{3}{\sqrt{54}} & -\frac{3}{\sqrt{54}}i \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{3} + \frac{36}{54} & -\frac{1}{3}i + \frac{18}{54}i & -\frac{1}{3} + \frac{18}{54} \\ \frac{1}{3}i - \frac{18}{54}i & \frac{1}{3} + \frac{9}{54} & -\frac{1}{3}i - \frac{9}{54}i \\ -\frac{1}{3} + \frac{18}{54} & \frac{1}{3}i + \frac{9}{54}i & \frac{1}{3} + \frac{9}{54} \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -i \\ 0 & i & 1 \end{pmatrix}.$$

$\boxed{6}$ Siano $\mathbf{0} \neq \mathbf{v} \in \mathbb{R}^m$, $\alpha \in \mathbb{R}$ ed $\mathbf{A}(\alpha) = (\mathbf{v} \quad \alpha\mathbf{v})$. Si trovino:

(a) una decomposizione $\mathbf{Q_0R_0}$-non-normalizzata per $\mathbf{A}(\alpha)$;

(b) una decomposizione $\mathbf{QR}$-normalizzata per $\mathbf{A}(\alpha)$;

(c) la matrice di proiezione sullo spazio delle colonne $C(\mathbf{A}(\alpha))$ di $\mathbf{A}(\alpha)$.

(a) $\boxed{I}$ Poniamo $\mathbf{v_1} = \mathbf{v}$ e $\mathbf{v_2} = \alpha\mathbf{v}$ e applichiamo l'algoritmo di Gram-Schimdt a $\{\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}\}$.

$$\mathbf{u_1} = \mathbf{v_1} = \mathbf{v}$$

$$\mathbf{u_2} = \mathbf{v_2} - \alpha_{12}\mathbf{u_1},$$

$$\mathbf{u_1} \neq \mathbf{0} \quad \Longrightarrow \quad \alpha_{12} = \frac{(\mathbf{u_1}|\mathbf{v_2})}{(\mathbf{u_1}|\mathbf{u_1})} = \frac{(\mathbf{v}|\alpha\ \mathbf{v})}{(\mathbf{v}|\mathbf{v})} = \alpha\frac{(\mathbf{v}|\mathbf{v})}{(\mathbf{v}|\mathbf{v})} = \alpha$$

$$\mathbf{u_2} = \mathbf{v_2} - \alpha_{12}\mathbf{u_1} = \alpha\ \mathbf{v} - \alpha\mathbf{v} = \mathbf{0}$$

$\boxed{II}$ Poniamo $\mathbf{Q_0} = (\mathbf{u_1} \quad \mathbf{u_2}) = (\mathbf{v} \quad \mathbf{0})$ ed $\mathbf{R_0} = \begin{pmatrix} 1 & \alpha_{12} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

$\mathbf{A} = \mathbf{Q_0R_0} = (\mathbf{v} \quad \mathbf{0})\begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ è una decomposizione $\mathbf{Q_0R_0}$-non-normalizzata per $\mathbf{A}$.

(b) $\boxed{III}$ Sia $\mathbf{Q_1}$ la matrice che si ottiene dalla matrice $\mathbf{Q_0}$, ottenuta al punto (2), togliendo tutte le (eventuali) colonne nulle di $\mathbf{Q_0}$. In questo caso $\mathbf{Q_0}$ ha un'unica colonna nulla, la 2^a, quindi $\mathbf{Q_1} = \mathbf{v}$. Sia $\mathbf{R_1}$ la matrice che si ottiene dalla matrice $\mathbf{R_0}$, ottenuta al punto (2), togliendo le righe di $\mathbf{R_0}$ che corrispondono alle colonne che sono state tolte da $\mathbf{Q_0}$ per ottenere $\mathbf{Q_1}$. In questo caso, poichè per ottenere $\mathbf{Q_1}$ è stata tolta da $\mathbf{Q_0}$ la 2^a colonna, allora per ottenere $\mathbf{R_1}$ si toglie da $\mathbf{R_0}$ la 2^a riga. Dunque $\mathbf{R_1} = (1 \quad \alpha)$. $\mathbf{Q}$ si ottiene da $\mathbf{Q_1}$ normalizzando $\mathbf{v}$, per cui $\mathbf{Q} = \frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|_2}$ ed $\mathbf{R} = \|\mathbf{v}\|_2\mathbf{R_1} = (\|\mathbf{v}\|_2 \quad \alpha\|\mathbf{v}\|_2)$.

$\mathbf{A} = \mathbf{QR} = \frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|_2} \cdot \begin{pmatrix} \|\mathbf{v}\|_2 & \alpha\|\mathbf{v}\|_2 \end{pmatrix}$ è una decomposizione $\mathbf{QR}$-normalizzata per $\mathbf{A}$.

(c) La matrice di proiezione sullo spazio delle colonne $C(\mathbf{A}(\alpha))$ di $\mathbf{A}(\alpha)$ è

$$\mathbf{P} = \mathbf{QQ}^H = \frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|_2} \cdot \left(\frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|_2}\right)^H = \frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|_2} \cdot \frac{\mathbf{v}^H}{\overline{\|\mathbf{v}\|_2}} = \frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|_2} \cdot \frac{\mathbf{v}^H}{\|\mathbf{v}\|_2} = \frac{\mathbf{v}\mathbf{v}^H}{\|\mathbf{v}\|_2^2} = \frac{\mathbf{v}\mathbf{v}^H}{\mathbf{v}^H\mathbf{v}}.$$

$\boxed{7}$ Si calcoli il determinante delle seguenti matrici:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2-i & 1 & 0 \\ 2 & 1+i & 3 \\ i & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} i & 1 & 1+i \\ -1 & 1 & 2 \\ i & i & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1+i \end{pmatrix}.$$

Conviene sviluppare Det($\mathbf{A}$) rispetto alla riga o alla colonna che contengono piú zeri. In questo caso conviene svilupparlo ripetto alla 1^a riga oppure alla 3^a colonna. Facciamolo in entrambi i modi, per esercizio.

Rispetto alla 1^a riga:

$$\begin{aligned} \text{Det}\mathbf{A} &= (1-i)(-1)^{1+1}\text{Det}\begin{pmatrix} 1+i & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + (-1)^{1+2}\text{Det}\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ i & 1 \end{pmatrix} = \\ &= (1-i)(1+i-3) - (2-3i) = (1-i)(-2+i) - 2 + 3i = \\ &= -2 + 2i + i - i^2 - 2 + 3i = -3 + 6i \end{aligned}$$

Rispetto alla 3^a colonna:

$$\begin{aligned} \text{Det}\mathbf{A} &= 3(-1)^{2+3}\text{Det}\begin{pmatrix} 1-i & 1 \\ i & 1 \end{pmatrix} + (-1)^{3+3}\text{Det}\begin{pmatrix} 1-i & 1 \\ 2 & 1+i \end{pmatrix} = \\ &= -3(1-i-i) + ((1-i)(1+i) - 2) = \\ &= -3(1-2i) + 1^2 - i^2 - 2 = -3 + 6i \end{aligned}$$

Sviluppiamo Det($\mathbf{B}$), ad esempio rispetto alla 1^a colonna:

$$\text{Det}\begin{pmatrix} 1 & 1+i & 1 \\ i & 2 & 1 \\ 1 & 1 & i \end{pmatrix} = (-1)^{1+1}\text{Det}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & i \end{pmatrix} + i(-1)^{2+1}\text{Det}\begin{pmatrix} 1+i & 1 \\ 1 & i \end{pmatrix} + (-1)^{3+1}\text{Det}\begin{pmatrix} 1+i & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} =$$
$$= 2i - 1 - i((1+i)i - 1) + 1 + i - 2 = 2i - 1 - i(i-2) + i - 1 = -1 + 5i$$

Infine sviluppiamo Det($\mathbf{C}$) ad esempio rispetto alla 3^a riga:

$$\begin{aligned}\mathrm{Det}\mathbf{C} &= \mathrm{Det}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1+i \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \\ &= (-1)^{3+1}\mathrm{Det}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1+i \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} + (-1)^{3+2}\mathrm{Det}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1+i \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} + (-1)^{3+3}\mathrm{Det}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+i \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Sviluppiamo il primo addendo rispetto alla 2^a colonna, mentre il secondo ed il terzo addendo rispetto alla 1^a riga.

$$\begin{aligned}&\mathrm{Det}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1+i \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = (-1)^{1+2}\mathrm{Det}\begin{pmatrix} 1 & 1+i \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + 2(-1)^{3+2}\mathrm{Det}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1+i \end{pmatrix} = \\ &= -(1-1-i) - 2(1+i-1) = -i \\ &\mathrm{Det}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1+i \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} = (-1)^{1+2}\mathrm{Det}\begin{pmatrix} 1 & 1+i \\ 2 & 1 \end{pmatrix} + (-1)^{1+3}\mathrm{Det}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \\ &= -(1-2(1+i)) + 2 = -(1-2-2i) + 2 = 1+2i+2 = 3+2i \\ &\mathrm{Det}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+i \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} = (-1)^{1+2}\mathrm{Det}\begin{pmatrix} 1 & 1+i \\ 2 & 1 \end{pmatrix} + (-1)^{1+3}\mathrm{Det}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \\ &= -(1-2(1+i)) + (1-2)+ = -(1-2-2i) - 1 = 2i\end{aligned}$$

Quindi

$$\mathrm{Det}(\mathbf{C}) = -i - (3+2i) + 2i = -i - 3 - 2i + 2i = -3 - i.$$

$\boxed{8}$ Sia $\mathbf{A}(\alpha) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \alpha & 0 & 1 \\ 4 & \alpha-1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 3\alpha-1 & 1 \end{pmatrix}$, dove $\alpha \in \mathbb{R}$. Si dica per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ si ha che $\mathbf{A}(\alpha)$ è non singolare (sugg.: si calcoli il determinante Det($\mathbf{A}(\alpha)$) di $\mathbf{A}(\alpha)$).

$$\text{(1)} \qquad \text{Det}(\mathbf{A}(\alpha)) = \text{Det}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \alpha & 0 & 1 \\ 4 & \alpha-1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 3\alpha-1 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= (-1)^{3+4}(3\alpha-1)\text{Det}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & \alpha & 1 \\ 4 & \alpha-1 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= -(3\alpha-1)\Big[(-1)^{1+1}2\text{Det}\begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ \alpha-1 & 1 \end{pmatrix} + (-1)^{1+3}\text{Det}\begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ 4 & \alpha-1 \end{pmatrix}\Big] =$$

$$= -(3\alpha-1)\Big[2(\alpha-\alpha+1)-4\alpha\Big] = -2(3\alpha-1)(1-2\alpha)$$

Poichè $\mathbf{A}(\alpha)$ è non singolare se e solo se $\text{Det}(\mathbf{A}(\alpha)) \neq 0$, dal punto (1) otteniamo che

$$\mathbf{A}(\alpha) \text{ è non singolare} \iff -2(3\alpha-1)(1-2\alpha) \neq 0 \iff \alpha \neq \frac{1}{3}, \frac{1}{2}.$$

$\boxed{9}$ Sia $\mathbf{A}$ una matrice quadrata non singolare e sia $\mathbf{P}$ la matrice di proiezione sullo spazio delle colonne $C(\mathbf{A})$ di $\mathbf{A}$. Si provi che $\text{Det}(\mathbf{P}) \in \{0,1\}$.

Se $\mathbf{A} = \mathbf{QR}$ è una decomposizione $\mathbf{QR}$-normalizzata di $\mathbf{A}$, allora $\mathbf{P} = \mathbf{QQ}^H$. Essendo $\mathbf{P} = \mathbf{P}^2$, si ha $\text{Det}(\mathbf{P}) = \text{Det}(\mathbf{P}^2) = (\text{Det}(\mathbf{P}))^2$, per cui $\text{Det}(\mathbf{P}) \in \{0,1\}$.