ALGEBRA LINEARE I (A) per Scienze Statistiche, SGI, a.a. 2014/2015

Gemma Parmeggiani
Università degli Studi di Padova
Dipartimento di Matematica
via Trieste 63
35131 Padova

- Programma del corso.
- Nota 1: Osservazioni sul rango di una matrice.
- Nota 2: Basi dello spazio delle colonne di una matrice: applicazioni.
- Nota 3: Calcolo di determinanti.
- Esercizi Tipo.
- Testi degli esercizi per casa.
- Svolgimenti degli esercizi per casa.

PROGRAMMA SVOLTO

Programma svolto nella prima settimana:

2/3/15 Presentazione del corso. La forma algebrica, il coniugato ed il modulo di un numero complesso. Proprietà del coniugato e del modulo di un numero complesso. La forma algebrica dell'inverso di un numero complesso non nullo. Enunciato del Teorema fondamentale dell'Algebra. Matrici. Esempi.

Dal libro: Appendice A: da pag. 267 a pag. 271. Pag. 273. Da pag. 1 a pag. 3.

Esercizi per casa: Esercizi 1 e 2 degli "Esercizi 1".

4 /3/15 Prodotto di una matrice per uno scalare. Somma di due matrici. Prodotto righe per colonne di matrici. Esempi. Proprietà del prodotto per uno scalare, della somma di matrici, del prodotto righe per colonne. Il prodotto righe per colonne non è commutativo. Trasposta, coniugata ed H-trasposta di una matrice.

Dal libro: Da pag. 4 a pag. 7. Pag. 9. Da pag. 12 a pag. 13.

Esercizi per casa: Esercizi 3, 4 e 5 degli "Esercizi 1".

Programma svolto nella seconda settimana:

9/3/15 Tipi di matrici. Sottomatrici. Matrici a blocchi. Operazioni a blocchi. Casi particolari di decomposizioni a blocchi.

Dal libro: Pag. 14. Da pag. 17 a pag. 21.

11 /3/15 Scrittura matriciale di un sistema lineare. Eliminazione di Gauss (EG). Forma ridotta di Gauss di una matrice, colonne dominanti, colonne libere. Esempi. Risoluzione di sistemi lineari. Domanda (a) dell'Esercizio Tipo 1.

Dal libro: Pag. 8. Da pag. 21 a pag. 30.

Esercizi per casa: Esercizio 1 e domanda (b) dell'esercizio 3 degli "Esercizi 2".

Programma svolto nella terza settimana:

16/3/15 Domande (b) e (c) dell'Esercizio Tipo 1. Esercizio Tipo 2. Rango di una matrice. Imverse destre e sinistre. Esempi.

Dal libro: Da pag. 30 a pag. 31. Nota 1 (file sulla pagina web).

Esercizi per casa: Finire gli "Esercizi 2".

18 /3/15 Inverse bilatere. Esistenza e costruzione delle inverse destre e delle inverse sinistre. Esercizio Tipo 3 e 3 bis. Algoritmo di Gauss-Jordan per il calcolo dell'inversa. Esercizio Tipo 4. Inverse di matrici 2×2.

Dal libro: Da pag 31 a pag. 35. Da pag. 41 a pag. 46.

Esercizi per casa: Tutti gli "Esercizi 3".

Programma svolto nella quarta settimana:

23/3/15 Matrici elementari, loro inverse e trasposte. Decomposizione $\mathbf{LU}$. Esercizio Tipo 5.

Dal libro: Da pag. 47 a pag. 51.

Esercizi per casa: Esercizi 1, 2, 3 e 4 degli "Esercizi 4".

25 /3/15 Decomposizione $\mathbf{P}^T\mathbf{LU}$. Esercizio Tipo 6. Spazi vettoriali. Esempi.

Dal libro: Da pag 51 a pag. 57. Da pag. 63 a pag. 64.

Esercizi per casa: Finire gli "Esercizi 4".

Programma svolto nella quinta settimana:

30/3/15 Sottospazi di spazi vettoriali. Esempi. Insiemi di vettori. Sottoinsiemi ed unioni di insiemi di vettori. Combinazioni lineari.

Dal libro: Da pag. 65 a pag. 70.

Esercizi per casa: Esercizi 1, 2, 3, 4 e 5 degli "Esercizi 5".

1/4/15 Sottospazi generati da insiemi di vettori. Insiemi di generatori. Esempi. Esercizio Tipo 7. Insiemi linearmente indipendenti ed insiemi linearmente dipendenti. Esercizio Tipo 8.

Dal libro: Da pag 71 a pag. 78.

Esercizi per casa: Finire gli "Esercizi 5".

Programma svolto nella sesta settimana:

13/4/15 Proprietà degli insiemi di generatori, degli insiemi linearmente indipendenti e degli insiemi linearmente dipendenti. Basi. Esempi di basi. Come estrarre una base da un insieme di generatori. Esercizio Tipo 9.

Dal libro: Da pag. 78 a pag. 83.

Esercizi per casa: Esercizi 1, 2 e 3 degli "Esercizi 6".

15/4/15 Equipotenza delle basi di uno spazio vettoriale. Dimensione di uno spazio vettoriale. Definizione di somma e di somma diretta di sottospazi. I 4 sottospazi fondamentali di una matrice; calcolo di loro basi. Esercizio Tipo 10.

Dal libro: Da pag. 83 a pag. 89. Da pag. 98 a pag. 104.

Esercizi per casa: Esercizi 4, 5 e 6 degli "Esercizi 6".

Programma svolto nella settima settimana:

20/4/15 Basi dello spazio delle colonne di una matrice: applicazioni. Basi ordinate e mappe delle coordinate.

Dal libro: Nota 2 (file sulla pagina web). Da pag. 105 a pag. 107.

Esercizi per casa: Finire gli "Esercizi 6".

22/4/15 Applicazioni lineari. Esempi. L'applicazione lineare indotta da una matrice. Spazio nullo e spazio immagine di un'applicazione lineare. Matrice associata ad un'applicazione lineare rispetto a fissate basi ordinate su dominio e codominio. Esercizio Tipo 11. Matrice di passaggio da una base ordinata ad un'altra. Esercizio Tipo 12.

Dal libro: Da pag. 108 a pag. 110.

Esercizi per casa: Esercizi 1, 2, 3 e 4 degli "Esercizi 7".

Programma svolto nella ottava settimana:

27/4/15 Come cambia la matrice associata ad un'applicazione lineare rispetto a fissate basi ordinate su dominio e codominio cambiando le basi. Esercizio Tipo 13. Interpretazione geometrica di $\mathbb{R}^2$ ed $\mathbb{R}^3$. Regola del paralelogramma.

Dal libro: Da pag. 111 a pag. 113. Appendice C: da pag. 285 a pag. 290.

Esercizi per casa: Finire gli "Esercizi 7".

29/4/15 Definizione di norma. Le norme $\|\cdot\|_2$, $\|\cdot\|_1$ e $\|\cdot\|_\infty$. Il coseno dell'angolo tra due vettori in $\mathbb{R}^2$. Prodotti interni. Il prodotto interno standard. La norma indotta da un prodotto interno. Il coseno dell'angolo tra due vettori in uno spazio vettoriale euclideo.

Dal libro: Da pag. 119 a pag. 133.

Esercizi per casa: Tutti gli "Esercizi 8".

Programma svolto nella nona settimana:

4/5/15 Vettori ortogonali in uno spazio euclideo. Insiemi ortogonali e basi ortogonali. Basi ortonormali. L'algoritmo di Gram-Schmidt. Prima parte dell'Esercizio Tipo 14.

Dal libro: Pag. 133. Da pag 140 a pag. 150.

Esercizi per casa: Esercizi 1 e 2 degli "Esercizi 9".

6/5/15 Seconda parte dell'Esercizio Tipo 14. Il complemento ortogonale di un sottospazio di uno spazio euclideo. La proiezione ortogonale di un vettore di uno spazio euclideo su di un sottospazio, ed il suo calcolo. Esercizio Tipo 15.

Dal libro: Da pag. 133 a pag. 140.

Esercizi per casa: Finire gli "Esercizi 9".

Programma svolto nella decima settimana:

11/5/15 Decomposizione $\mathbf{Q}_0\mathbf{R}_0$-non-normalizzata di una matrice. Decomposizione $\mathbf{QR}$ -normalizzata di una matrice. Matrice di proiezione sullo spazio delle colonne di una matrice. Esercizio Tipo 16.

Dal libro: Pag. 152. Da pag 154 a pag. 157.

Esercizi per casa: Esercizi 1 e 2 degli "Esercizi 10".

13/5/15 Approssimazione ai minimi quadrati e sistema delle equazioni normali. Esercizio Tipo 17.

Dal libro: Da pag. 157 a pag. 158. Da pag. 160 a pag. 161.

Esercizi per casa: Esercizi 3 e 4 degli "Esercizi 10".

Programma svolto nella undicesima settimana:

18/5/15 Calcolo di determinanti.

Dal libro: Prima parte della Nota 3 (file sula pagina web).

Esercizi per casa: Finire gli "Esercizi 10".

20/5/15 Poprietà dei determinanti. Esercizio Tipo 18. Definizione di autovalori, autovettori ed autospazi.

Dal libro: Da pag. 192 a pag. 194.

Esercizi per casa: Esercizi 1, 2 e 3 degli "Esercizi 11".

Programma svolto nella dodicesima settimana:

25/5/15 Proprietà del polinomio caratteristico. Molteplicità algebrica e molteplicità geometrica di un autovalore. Esercizio Tipo 19.

Dal libro: Da pag. 194 a pag. 199.

Esercizi per casa: Finire gli "Esercizi 11" ed esercizio 1 degli "Esercizi 12".

27/5/15 Esercizio Tipo 20. Traccia e determinante come somma e prodotto degli autovalori. Esercizio Tipo 21. Indipendenza di autospazi distinti.

Dal libro: Da pag. 200 a pag. 203.

Esercizi per casa: Esercizi 2 e 3 degli "Esercizi 12".

Programma svolto nella tredicesima settimana:

3/6/15 Caratterizzazione delle matrici diagonalizzabili. Esercizio Tipo 22.

Dal libro: Da pag. 203 a pag. 204.

Esercizi per casa: Finire gli "Esercizi 12".

Programma svolto nella quattordicesima settimana:

8/6/15 Matrici unitariamente triangolarizzabili e teorema di Schur. Matrici unitariamente diagonalizzabili e teorema spettrale. Esercizio Tipo 23.

Dal libro: Pag. 206. Pag. 213. Da pag. 219 a pag. 221.

Esercizi per casa: Esercizi 1, 3 e 4 "Esercizi 13".

10/6/15 Esercizi.

Esercizi per casa: Finire gli "Esercizi 13".

Nota 1: Osservazioni sul rango di una matrice

$\boxed{1}$ Sia $\mathbf{A}$ una matrice $m \times n$. Se $\mathbf{U}_1$ ed $\mathbf{U}_2$ sono due forme ridotte di Gauss per $\mathbf{A}$, allora il numero delle righe non nulle di $\mathbf{U}_1$ è uguale al numero delle righe non nulle di $\mathbf{U}_2$. Ció dipende dal fatto che l'esistenza di diverse forme ridotte di Gauss per una matrice dipende esclusivamente dalla eventuale possibilità di fare delle scelte negli scambi di righe in una EG su $\mathbf{A}$, e gli scambi di righe non decrescono il numero delle righe non nulle.

Il numero delle righe non nulle di una forma ridotta di Gauss di $\mathbf{A}$ dipende quindi esclusivamente da $\mathbf{A}$ (e non dalle operazioni elementari che si fanno in una EG su $\mathbf{A}$) e si chiama **il rango di A** (piú avanti nel corso daremo un'altra definizione di rango di una matrice, equivalente a questa). Si indica con il simbolo $\mathrm{rk}(\mathbf{A})$.

$\boxed{2}$ Siano $\mathbf{A}$ una matrice $m \times n$ di rango k ed $\mathbf{U}$ una forma ridotta di Gauss per $\mathbf{A}$. Poichè ogni "scalino" di $\mathbf{U}$ è "alto" una riga, allora

$$k = \text{numero delle righe non nulle di } \mathbf{U} = \text{numero delle colonne dominanti di } \mathbf{U}.$$

$\boxed{3}$ Se $\mathbf{A}$ una matrice $m \times n$ di rango k allora

$$k \leq m \quad \text{e} \quad k \leq n.$$

Infatti se $\mathbf{U}$ è ua forma ridotta di Gauss per $\mathbf{A}$ allora $\mathbf{U}$ è $m \times n$ e

$$\begin{aligned} k &= \text{numero delle righe non nulle di } \mathbf{U} \leq \text{numero delle righe di } \mathbf{U} = m \\ k &= \text{numero delle colonne dominanti di } \mathbf{U} \leq \text{numero delle colonne di } \mathbf{U} = n \end{aligned}$$

Nota 2: Basi dello spazio delle colonne di una matrice: applicazioni.

$\boxed{1}$ Siano

$$\mathbf{v_1}; \mathbf{v_2}; \dots; \mathbf{v_n} \in K^m \text{ con } K \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\},$$

$$\boldsymbol{\mathcal{S}} = \{\mathbf{v_1}; \mathbf{v_2}; \dots; \mathbf{v_n}\} \text{ e}$$

$$W = \langle\ \boldsymbol{\mathcal{S}}\ \rangle \text{ il sottospazio di } K^m \text{ generato da } \boldsymbol{\mathcal{S}}\ .$$

Per trovare una base $\boldsymbol{\mathcal{B}}$ di W contenuta in $\boldsymbol{\mathcal{S}}$, piuttosto che procedere come nell'Esercizio Tipo 9, conviene:

(1) costruire una matrice $m \times n$ $\mathbf{A}$ le cui colonne siano gli elementi di $\boldsymbol{\mathcal{S}}$. Ad esempio:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{v_1} & \mathbf{v_2} & \dots & \mathbf{v_n} \end{pmatrix};$$

(2) fare una EG su $\mathbf{A}$, trovando una forma ridotta di Gauss $\mathbf{U}$ per $\mathbf{A}$;

(3) se $\mathbf{u}_{i_1}, \mathbf{u}_{i_2}, \dots, \mathbf{u}_{i_k}$ sono le colonne dominanti di $\mathbf{U}$, allora $\boldsymbol{\mathcal{B}} = \{\mathbf{v}_{i_1}; \mathbf{v}_{i_2}; \dots; \mathbf{v}_{i_k}\}$, ossia l'insieme delle colonne di $\mathbf{A}$ corrispondenti alle colonne dominanti di $\mathbf{U}$, è una base di $C(\mathbf{A}) = \langle \mathbf{v_1}; \mathbf{v_2}; \dots; \mathbf{v_n} \rangle = W$ contenuta in $\boldsymbol{\mathcal{S}}$.

$\boxed{2}$ Siano

$$\mathbf{v_1}; \mathbf{v_2}; \dots; \mathbf{v_n} \in K^n, \text{ con } K \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}, \text{ e}$$

$$\boldsymbol{\mathcal{B}} = \{\mathbf{v_1}; \mathbf{v_2}; \dots; \mathbf{v_n}\}.$$

Per verificare se $\boldsymbol{\mathcal{B}}$ è o meno una base di K^n, piuttosto che verificare se $\boldsymbol{\mathcal{B}}$ è un insieme di generatori linearmente indipendente di K^n, conviene considerare la matrice $n \times n$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{v_1} & \mathbf{v_2} & \dots & \mathbf{v_n} \end{pmatrix}$$

(ossia una matrice le cui colonne siano gli elementi di $\boldsymbol{\mathcal{B}}$).

Da $C(\mathbf{A}) \leq K^n$ segue che

$$\dim \mathrm{C}(\mathbf{A}) = rk(\mathbf{A}) = n \iff \mathrm{C}(\mathbf{A}) = K^n;$$

inoltre, dal momento che $\boldsymbol{\mathcal{B}}$ ha n elementi e contiene una base di $C(\mathbf{A})$,

$$\dim \mathrm{C}(\mathbf{A}) = rk(\mathbf{A}) = n \iff \text{ogni base di C}(\mathbf{A}) \text{ ha n elementi} \iff \boldsymbol{\mathcal{B}} \text{ è una base di C}(\mathbf{A}).$$

Quindi

$$\dim \mathrm{C}(\mathbf{A}) = rk(\mathbf{A}) = n \iff \boldsymbol{\mathcal{B}} \text{ è una base di } K^n.$$

Nota 3: Calcolo di determinanti

Sia $\mathbf{A}$ una matrice **quadrata** di ordine n.
Il **determinante di A** è un numero che dipende da $\mathbf{A}$. Esso si indica con il simbolo $\det(\mathbf{A})$, oppure $\mathrm{Det}(\mathbf{A})$. Impariamo a calcolarlo, cominciando con i casi $n = 1, 2, 3$.

Il caso n=1. Se $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} \end{pmatrix}$, è $\mathrm{Det}(\mathbf{A}) = a_{11}$.

Il caso n=2. Se $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, è $\mathrm{Det}(\mathbf{A}) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$.

Esempio 1. Il determinante di $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$ è $\mathrm{Det}(\mathbf{A}) = 2\times 5 - 3\times 4 = 10 - 12 = -2$.

Abbiamo detto che $\mathrm{Det}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$. Osserviamo che

$$\begin{aligned} a_{11}a_{22} &= a_{11}(-1)^{1+1}\mathrm{Det}\begin{pmatrix} a_{22} \end{pmatrix} = \\ &= a_{11}(-1)^{(\text{la somma degli indici di } a_{11})}\mathrm{Det}\begin{pmatrix} a_{22} \end{pmatrix} = \\ &= a_{11}(-1)^{(\text{la somma degli indici di } a_{11})}\begin{pmatrix} \text{il determinante della matrice che} \\ \text{si ottiene da A sopprimendo} \\ \text{la } 1^a \text{ riga e la } 1^a \text{colonna di A} \end{pmatrix} = \\ &= a_{11}(-1)^{(\text{la somma degli indici di } a_{11})}\begin{pmatrix} \text{il determinante della matrice che si ottiene da A} \\ \text{sopprimendo la riga e la colonna in cui si trova } a_{11} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} -a_{12}a_{21} &= a_{12}(-1)^{1+2}\mathrm{Det}\begin{pmatrix} a_{21} \end{pmatrix} = \\ &= a_{12}(-1)^{(\text{la somma degli indici di } a_{12})}\mathrm{Det}\begin{pmatrix} a_{21} \end{pmatrix} = \\ &= a_{12}(-1)^{(\text{la somma degli indici di } a_{12})}\begin{pmatrix} \text{il determinante della matrice che} \\ \text{si ottiene da } \mathbf{A} \text{ sopprimendo} \\ \text{la } 1^a \text{ riga e la } 2^a \text{colonna di } \mathbf{A} \end{pmatrix} = \\ &= a_{12}(-1)^{(\text{la somma degli indici di } a_{12})}\begin{pmatrix} \text{il determinante della matrice che si ottiene da } \mathbf{A} \\ \text{sopprimendo la riga e la colonna in cui si trova } a_{12} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Indicando con i simboli

$\mathbf{C}_{11}$ la matrice che si ottiene da $\mathbf{A}$ sopprimendo la 1^a riga e la 1^a colonna,
$\mathbf{C}_{12}$ la matrice che si ottiene da $\mathbf{A}$ sopprimendo la 1^a riga e la 2^a colonna,

ed inoltre

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{11} &= (-1)^{1+1}\mathrm{Det}\mathbf{C}_{11}, \\ \mathbf{A}_{12} &= (-1)^{1+2}\mathrm{Det}\mathbf{C}_{12}, \end{aligned}$$

abbiamo:

$$\mathrm{Det}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11}\mathbf{A}_{11} + a_{12}\mathbf{A}_{12}.$$

Si tenga a mente che a_{11} ed a_{12} sono gli elementi della 1^a riga di $\mathbf{A}$.
Quindi se $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, quello che abbiamo fatto per calcolare $\mathrm{Det}(\mathbf{A})$ è stato:

(1) mettere in evidenza gli elementi della 1^a riga di $\mathbf{A}$: $\begin{pmatrix} \boxed{a_{11}} & \boxed{a_{12}} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$,

(2) per ciascuna posizione $(1, j)$ della 1^a riga di $\mathbf{A}$ (posto $(1, 1)$ e posto $(1, 2)$)

– costruire la matrice $\mathbf{C}_{1j}$ (ottenuta sopprimendo da A la 1^a riga e la $j-$esima colonna di $\mathbf{A}$),
– calcolare $\mathrm{Det}(\mathbf{C}_{1j})$,
– calcolare $(-1)^{1+j}$,
– calcolare $\mathbf{A}_{1j} = (-1)^{1+j}\mathrm{Det}(\mathbf{C}_{1j})$,

(3) calcolare il prodotto $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11} \\ \mathbf{A}_{12} \end{pmatrix}$.

Il caso n=3. Sia $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$. Per calcolare $\mathrm{Det}(\mathbf{A})$ procediamo come nel caso $n = 2$.

(1) Mettiamo in evidenza gli elementi della 1^a riga di $\mathbf{A}$: $\begin{pmatrix} \boxed{a_{11}} & \boxed{a_{12}} & \boxed{a_{13}} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$.

(2) per ciascuna posizione $(1, j)$ della 1^a riga di $\mathbf{A}$ (posto $(1, 1)$, posto $(1, 2)$ e posto $(1, 3)$)

– costruiamo la matrice C_{1j} (ottenuta sopprimendo da A la 1^a riga e la $j-$esima colonna di A):

$$\mathbf{C}_{11} = \begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{C}_{12} = \begin{pmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{C}_{13} = \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}.$$

– calcoliamo $\mathrm{Det}(\mathbf{C}_{1j})$, usando il caso $n = 2$, ossia il caso precedente a quello che stiamo analizzando ora (che è $n = 3$):

$$\begin{aligned} \mathrm{Det}\mathbf{C}_{11} &= \mathrm{Det}\begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}, \\ \mathrm{Det}\mathbf{C}_{12} &= \mathrm{Det}\begin{pmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{pmatrix} = a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}, \\ \mathrm{Det}\mathbf{C}_{13} &= \mathrm{Det}\begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} = a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}, \end{aligned}$$

– calcoliamo $(-1)^{1+j}$: $(-1)^{1+1} = 1, (-1)^{1+2} = -1, (-1)^{1+3} = 1$,
– calcoliamo $\mathbf{A}_{1j} = (-1)^{1+j}\mathrm{Det}(\mathbf{C}_{1j})$:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{11} &= (-1)^{1+1}\mathrm{Det}\mathbf{C}_{11} = a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}, \\ \mathbf{A}_{12} &= (-1)^{1+2}\mathrm{Det}\mathbf{C}_{12} = -(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}), \\ \mathbf{A}_{13} &= (-1)^{1+3}\mathrm{Det}\mathbf{C}_{13} = a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}. \end{aligned}$$

(3) Il determinante di $\mathbf{A}$ è il prodotto

$$\begin{aligned}\mathrm{Det}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{A}_{11} \\ \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{13}\end{pmatrix} = a_{11}\mathbf{A}_{11} + a_{12}\mathbf{A}_{12} + a_{13}\mathbf{A}_{13} = \\ &= a_{11}(-1)^{1+1}\mathrm{Det}\mathbf{C}_{11} + a_{12}(-1)^{1+2}\mathrm{Det}\mathbf{C}_{12} + a_{13}(-1)^{1+3}\mathrm{Det}\mathbf{C}_{13}\end{aligned}$$

Esempio 2. Calcoliamo il determinante della matrice $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \\ 2 & 6 & 3\end{pmatrix}$.

In questo caso abbiamo

$$a_{11} = 3, \qquad a_{12} = -2, \qquad a_{13} = 1,$$

$$\mathbf{C}_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 6 & 3\end{pmatrix}, \qquad \mathbf{C}_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 2 & 3\end{pmatrix}, \qquad \mathbf{C}_{13} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 6\end{pmatrix},$$

per cui

$$\begin{aligned}\mathrm{Det}A &= 3(-1)^{1+1}\mathrm{Det}\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 6 & 3\end{pmatrix} + (-2)(-1)^{1+2}\mathrm{Det}\begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 2 & 3\end{pmatrix} + 1(-1)^{1+3}\mathrm{Det}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 6\end{pmatrix} = \\ &= 3(3-24) + (-2)(-1)(0-8) + (0-2) = 3(-21) - 16 - 2 = \\ &= -81.\end{aligned}$$

Quello che abbiamo fatto è quindi:

(a) per le matrici 1×1 porre $\mathrm{Det}\big(a_{11}\big) = a_{11}$,

(b) dare una formula che permetta di calcolare il determinante delle matrici 2×2 sapendo come calcolare il determinante delle matrici 1×1, ossia dare una formula che permetta di calcolare il determinante delle matrici nel caso $n = 2$ sapendo come calcolare il determinante delle matrici nel caso precedente, cioè il caso $n = 1$ (si veda il punto (a)),

(c) dare una formula che permetta di calcolare il determinante delle matrici 3×3 sapendo come calcolare il determinante delle matrici 2×2, ossia dare una formula che permetta di calcolare il determinante delle matrici nel caso $n = 3$ sapendo come calcolare il determinante delle matrici nel caso precedente, cioè il caso $n = 2$ (si veda il punto (b)).

Procediamo quindi allo stesso modo, dando una formula che permetta di calcolare il determinante delle matrici $n \times n$ sapendo come calcolare il determinante delle matrici $(n-1) \times (n-1)$, ossia dare una formula che permetta di calcolare il determinante delle matrici nel caso n sapendo come calcolare il determinante delle matrici nel caso precedente, cioè il caso $n - 1$.

Sia dunque $\mathbf{A} = \big(a_{ij}\big)$ una matrice $n \times n$. Cominciamo con il dare la seguente definizione:

Def. 1. Per ogni $1 \leq i \leq n$ e $1 \leq j \leq n$ si chiama **matrice complementare dell'elemento** a_{ij} od anche **matrice complementare di posto (i,j) in A**, e si indica con il simbolo $\mathbf{C}_{ij}$, la matrice che si ottiene da $\mathbf{A}$ sopprimendo la i-esima riga e la j-esima colonna. Dunque $\mathbf{C}_{ij}$ è una matrice $(n-1) \times (n-1)$.

Esempio 3. Se $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & i & 3 & 4 & 11 \\ 0 & 2 & 7 & -3 & 8 \\ 1+i & 2 & 5 & -5 & 17 \\ -1 & 6i & 0 & 5i & 1-4i \\ 12 & 7+2i & 34 & 4-6i & 14i \end{pmatrix}$, allora

$$\begin{pmatrix} 1 & i & 3 & \boxed{4} & 11 \\ \boxed{0} & \boxed{2} & \boxed{7} & \boxed{-3} & \boxed{8} \\ 1+i & 2 & 5 & \boxed{-5} & 17 \\ -1 & 6i & 0 & \boxed{5i} & 1-4i \\ 12 & 7+2i & 34 & \boxed{4-6i} & 14i \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{togliendo la } 2^a \text{ riga e la } 4^a \text{ colonna}}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & i & 3 & 11 \\ 1+i & 2 & 5 & 17 \\ -1 & 6i & 0 & 1-4i \\ 12 & 7+2i & 34 & 14i \end{pmatrix} = \mathbf{C}_{24};$$

$$\begin{pmatrix} 1 & i & 3 & 4 & \boxed{11} \\ 0 & 2 & 7 & -3 & \boxed{8} \\ 1+i & 2 & 5 & -5 & \boxed{17} \\ \boxed{-1} & \boxed{6i} & \boxed{0} & \boxed{5i} & \boxed{1-4i} \\ 12 & 7+2i & 34 & 4-6i & \boxed{14i} \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{togliendo la } 3^a \text{ riga e la } 5^a \text{ colonna}}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & i & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 7 & -3 \\ 1+i & 2 & 5 & -5 \\ 12 & 7+2i & 34 & 4-6i \end{pmatrix} = \mathbf{C}_{35}.$$

Def. 2. Per ogni $1 \leq i \leq n$ e $1 \leq j \leq n$ si chiama **cofattore di posto (i,j) di A**, e si indica con il simbolo $\mathbf{A}_{ij}$, il numero

$$\mathbf{A}_{ij} = (-1)^{i+j} \text{Det } (\mathbf{C}_{ij}),$$

dove $\mathbf{C}_{ij}$ è la matrice complementare di posto (i,j) in $\mathbf{A}$.

Si ha:

$$\boxed{\textbf{Formula del determinante di una matrice sviluppato rispetto alla } 1^a\textbf{riga}}$$

se $\mathbf{A} = \left(a_{ij}\right)$ è una matrice $n \times n$ allora

$$\text{Det}\mathbf{A} = a_{11}\mathbf{A}_{11} + a_{12}\mathbf{A}_{12} + \ldots + a_{1,n-1}\mathbf{A}_{1,n-1} + a_{1n}\mathbf{A}_{1n}$$

dove $\mathbf{A}_{11}$, $\mathbf{A}_{12}$, $\ldots$, $\mathbf{A}_{1,n-1}$, $\mathbf{A}_{1n}$ sono i cofattori di $\mathbf{A}$ di posti $(1,1)$, $(1,2)$, $\ldots$, $(1,n-1)$, $(1,n)$ (ossia i posti della 1^a riga) rispettivamente.

Esempio 4. Calcoliamo il determinante della matrice $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -5 & 0 & 3 \\ 6 & 2 & 0 & 4 \\ -2 & 0 & 0 & 2 \\ -1 & 7 & 5 & 1 \end{pmatrix}$.
Usando la formula dello sviluppo del determinante rispetto alla 1^a riga di $\mathbf{A}$ abbiamo:

$$\text{Det}\mathbf{A} = 1 \times \mathbf{A}_{11} + (-5) \times \mathbf{A}_{12} + 0 \times \mathbf{A}_{13} + 3 \times \mathbf{A}_{14} = \mathbf{A}_{11} - 5\mathbf{A}_{12} + 3\mathbf{A}_{14}.$$

Dobbiamo quindi calcolare $\mathbf{A}_{11}, \mathbf{A}_{12}$ ed $\mathbf{A}_{14}$.

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}_{11} \quad &= (-1)^{1+1}\text{Det}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \\ 7 & 5 & 1 \end{pmatrix} = \\
&= \text{Det}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \\ 7 & 5 & 1 \end{pmatrix} = \\
&= 2(-1)^{1+1}\text{Det}\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} + 0(-1)^{1+2}\text{Det}\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 7 & 1 \end{pmatrix} + 4(-1)^{1+3}\text{Det}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 7 & 5 \end{pmatrix} = \\
&= 2(0-10) + 4(0-0) = -20, \\
\mathbf{A}_{12} \quad &= (-1)^{1+2}\text{Det}\begin{pmatrix} 6 & 0 & 4 \\ -2 & 0 & 2 \\ -1 & 5 & 1 \end{pmatrix} = \\
&= -\text{Det}\begin{pmatrix} 6 & 0 & 4 \\ -2 & 0 & 2 \\ -1 & 5 & 1 \end{pmatrix} = \\
&= -(6(-1)^{1+1}\text{Det}\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} + 0(-1)^{1+2}\text{Det}\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} + 4(-1)^{1+3}\text{Det}\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}) = \\
&= -(6(0-10) + 4(-10-0)) = -(-60-40) = 100,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{A}_{14} &= (-1)^{1+4}\text{Det}\begin{pmatrix} 6 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ -1 & 7 & 5 \end{pmatrix} = \\ &= -\text{Det}\begin{pmatrix} 6 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ -1 & 7 & 5 \end{pmatrix} = \\ &= -(6(-1)^{1+1}\text{Det}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 7 & 5 \end{pmatrix} + 2(-1)^{1+2}\text{Det}\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} + 0(-1)^{1+3}\text{Det}\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ -1 & 7 \end{pmatrix}) = \\ &= -(6(0-0) - 2(-10-0)) = 2(-10) = -20.\end{aligned}$$

Dunque otteniamo:

$$\text{Det}\mathbf{A} = \mathbf{A}_{11} - 5\mathbf{A}_{12} + 3\mathbf{A}_{14} = -20 - 5 \times 100 + 3(-20) = -580.$$

Si puó dimostrare il seguente

Teorema. Sia $\mathbf{A}$ una matrice $n \times n$. Allora, fissato $i \in \{1, \dots, n\}$ si ha che

$$a_{i1}\mathbf{A}_{i1} + a_{i2}\mathbf{A}_{i2} + \ldots + a_{i,n-1}\mathbf{A}_{i,n-1} + a_{in}\mathbf{A}_{in} = a_{11}\mathbf{A}_{11} + a_{12}\mathbf{A}_{12} + \ldots + a_{1,n-1}\mathbf{A}_{1,n-1} + a_{1n}\mathbf{A}_{1n},$$

ossia che

$$(*) \quad \text{Det}\mathbf{A} = a_{i1}\mathbf{A}_{i1} + a_{i2}\mathbf{A}_{i2} + \ldots + a_{i,n-1}\mathbf{A}_{i,n-1} + a_{in}\mathbf{A}_{in}.$$

$(*)$ si chiama **lo sviluppo di Laplace del determinante di A rispetto alla i-esima riga di A**.

Quindi, per calcolare il determinante di una matrice $\mathbf{A}$, si puó partire mettendo in evidenza gli elementi di una riga qualunque, e non necessariamente la 1^a, come abbiamo fatto fino ad ora.

Esempio 5. Sia $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ una matrice 2×2. Sviluppiamo il determinante di $\mathbf{A}$ rispetto alla 2^a riga di $\mathbf{A}$:

– mettiamo in evidenza gli elementi della 2^a riga di $\mathbf{A}$: $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ \boxed{a_{21}} & \boxed{a_{22}} \end{pmatrix}$,

– $\mathbf{C}_{21}$ è la matrice che si ottiene da $\mathbf{A}$ togliendo la 2^a riga e la 1^a colonna, quindi $\mathbf{C}_{21} = \begin{pmatrix} a_{12} \end{pmatrix}$; $\mathbf{C}_{22}$ è la matrice che si ottiene da $\mathbf{A}$ togliendo la 2^a riga e la 2^a colonna, quindi $\mathbf{C}_{22} = \begin{pmatrix} a_{11} \end{pmatrix}$.

Allora

$$\begin{aligned}
&a_{21}\mathbf{A}_{21} + a_{22}\mathbf{A}_{22} = a_{21}(-1)^{2+1}\mathrm{Det}\mathbf{C}_{21} + a_{22}(-1)^{2+2}\mathrm{Det}\mathbf{C}_{22} = \\
&= -a_{21}\mathrm{Det}\begin{pmatrix} a_{12} \end{pmatrix} + a_{22}\mathrm{Det}\begin{pmatrix} a_{11} \end{pmatrix} = -a_{21}a_{12} + a_{22}a_{11} = \\
&= a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}
\end{aligned}$$

dà lo stesso risultato che abbiamo ottenuto partendo dalla 1^a riga.

Conviene quindi sviluppare il determinante rispetto alla riga che contiene piú zeri.

Esempio 6. Riconsideriamo la matrice dell'Esempio 4, $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -5 & 0 & 3 \\ 6 & 2 & 0 & 4 \\ -2 & 0 & 0 & 2 \\ -1 & 7 & 5 & 1 \end{pmatrix}$,

e calcoliamo il suo determinante rispetto alla 3^a riga (che contiene due zeri). Allora

$$\mathrm{Det}\mathbf{A} = (-2)(-1)^{3+1}\mathrm{Det}\begin{pmatrix} -5 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 4 \\ 7 & 5 & 1 \end{pmatrix} + 2(-1)^{3+4}\mathrm{Det}\begin{pmatrix} 1 & -5 & 0 \\ 6 & 2 & 0 \\ -1 & 7 & 5 \end{pmatrix}.$$

Calcoliamo separatamente $\mathrm{Det}\begin{pmatrix} -5 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 4 \\ 7 & 5 & 1 \end{pmatrix}$ e $\mathrm{Det}\begin{pmatrix} 1 & -5 & 0 \\ 6 & 2 & 0 \\ -1 & 7 & 5 \end{pmatrix}$.

Per entrambe queste matrici 3×3 non è conveniente calcolare il determinante rispetto alla 3^a riga, ma è indifferente scegliere la 1^a o la 2^a. Per fare esercizio scegliamo in entrambi i casi la 2^a riga:

$$\mathrm{Det}\begin{pmatrix} -5 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 4 \\ 7 & 5 & 1 \end{pmatrix} = 2(-1)^{2+1}\mathrm{Det}\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} + 4(-1)^{2+3}\mathrm{Det}\begin{pmatrix} -5 & 0 \\ 7 & 5 \end{pmatrix} =$$

$$= -2(0-15) - 4(-25-0) = 30 + 100 = 130$$

$$\mathrm{Det}\begin{pmatrix} 1 & -5 & 0 \\ 6 & 2 & 0 \\ -1 & 7 & 5 \end{pmatrix} = 6(-1)^{2+1}\mathrm{Det}\begin{pmatrix} -5 & 0 \\ 7 & 5 \end{pmatrix} + 2(-1)^{2+2}\mathrm{Det}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} =$$

$$= -6(-25-0) + 2(5-0) = 150 + 10 = 160$$

Quindi $\mathrm{Det}(\mathbf{A}) = (-2) \times 130 + (-2) \times 160 = -580$ (lo stesso numero che avevamo ottenuto sviluppando il determinante rispetto alla 1^a riga).

Cosí come si puó sviluppare il determinante di una matrice rispetto ad una qualunque sua riga, lo si puó sviluppare rispetto ad una qualunque sua colonna, dal momento che vale il seguente

Teorema. Sia $\mathbf{A}$ una matrice $n \times n$. Allora, fissati $j \in \{1, \ldots, n\}$ e si ha che

$$(**) \quad \mathrm{Det}\mathbf{A} = a_{1j}\mathbf{A}_{1j} + a_{2j}\mathbf{A}_{2j} + \ldots + a_{n-1,j}\mathbf{A}_{n-1,j} + a_{nj}\mathbf{A}_{nj}.$$

$(**)$ si chiama **lo sviluppo di Laplace del determinante di A rispetto alla j-esima colonna di A**.

Conviene quindi sviluppare il determinante rispetto alla riga oppure alla colonna che contiene piú zeri.

Esempio 7. Riconsideriamo la matrice degli Esempi 4 e 6, $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -5 & 0 & 3 \\ 6 & 2 & 0 & 4 \\ -2 & 0 & 0 & 2 \\ -1 & 7 & 5 & 1 \end{pmatrix}$,

e calcoliamo il suo determinante rispetto alla 3^a colonna (che contiene tre zeri). Allora

$$\begin{aligned} \mathrm{Det}\mathbf{A} \quad &= 0 \times (-1)^{1+3}\mathrm{Det}\begin{pmatrix} 6 & 2 & 4 \\ -2 & 0 & 2 \\ -1 & 7 & 1 \end{pmatrix} + 0 \times (-1)^{2+3}\mathrm{Det}\begin{pmatrix} 1 & -5 & 3 \\ -2 & 0 & 2 \\ -1 & 7 & 1 \end{pmatrix} + \\ &+ 0 \times (-1)^{3+3}\mathrm{Det}\begin{pmatrix} 1 & -5 & 3 \\ 6 & 2 & 4 \\ -1 & 7 & 1 \end{pmatrix} + 5(-1)^{4+3}\mathrm{Det}\begin{pmatrix} 1 & -5 & 3 \\ 6 & 2 & 4 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \\ &= -5\mathrm{Det}\begin{pmatrix} 1 & -5 & 3 \\ 6 & 2 & 4 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Calcoliamo $\mathrm{Det}\begin{pmatrix} 1 & -5 & 3 \\ 6 & 2 & 4 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, ad esempio rispetto alla 2^a colonna:

$$\mathrm{Det}\begin{pmatrix} 1 & -5 & 3 \\ 6 & 2 & 4 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$= (-5)(-1)^{1+2}\mathrm{Det}\begin{pmatrix} 6 & 4 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} + 2(-1)^{2+2}\mathrm{Det}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} + 0 \times (-1)^{3+2}\mathrm{Det}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 6 & 4 \end{pmatrix} =$$

$$= (-5)(-1)(12 + 8) + 2(2 + 6) = 100 + 16 = 116$$

quindi $\mathrm{Det}(\mathbf{A}) = (-5) \times 116 = -580$ (si noti che è lo stesso numero che abbiamo ottenuto sviluppando il determinante rispetto alla 1^a oppure alla 3^a riga).

Proprietà del determinante.

Sia $\mathbf{A}$ una matrice $n \times n$.

(1) Se $\mathbf{A}$ ha una riga (risp. una colonna) nulla, oppure se $\mathbf{A}$ ha due righe (risp. due colonne) uguali, allora $\mathrm{Det}(\mathbf{A}) = 0$.

(2) Se $\mathbf{A}'$ è la matrice che si ottiene da $\mathbf{A}$ mediante lo scambio di due righe (risp. due colonne) allora $\mathrm{Det}(\mathbf{A}') = -\mathrm{Det}(\mathbf{A})$.

(3) Se $\mathbf{A}'$ è la matrice che si ottiene da $\mathbf{A}$ sommando ad una riga (risp. ad una colonna) di $\mathbf{A}$ un'altra riga (risp. un'altra colonna) di $\mathbf{A}$ moltiplicata per un numero c, allora $\mathrm{Det}(\mathbf{A}') = \mathrm{Det}(\mathbf{A})$.

(4) Se $\mathbf{A}'$ è la matrice che si ottiene da $\mathbf{A}$ moltiplicando una riga (risp. una colonna) di $\mathbf{A}$ per un numero c, allora $\mathrm{Det}(\mathbf{A}') = c\mathrm{Det}(\mathbf{A})$.

(5) $\mathrm{Det}(\mathbf{A}^T) = \mathrm{Det}(\mathbf{A})$.

(6) Se $\mathbf{B}$ è un'altra matrice $n \times n$ allora **$\mathbf{Det(AB)=Det(A)\ Det(B)}$**.

(7) **$\mathbf{A}$ è non singolare se e solo se $\mathbf{Det(A)}$**$\neq 0$, e se $\mathbf{A}$ è non singolare si ha

$$\mathrm{Det}(\mathbf{A}^{-1}) = \frac{1}{\mathrm{Det}(\mathbf{A})}.$$

$\boxed{N.B.}$ Per quanto riguarda la proprietà (7), si ricordi che avevamo già osservato che una matrice 2×2 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ è non singolare se e solo se il numero $ad - bc \neq 0$, e tale numero è proprio $\mathrm{Det}(\mathbf{A})$.

Esercizio. Si provi che **il determinante di una matrice triangolare superiore (risp. inferiore) è il prodotto degli elementi diagonali**.

Sia $\mathbf{T}$ una matrice $n \times n$ triangolare superiore (la dimostrazione è simile per le matrici triangolari inferiori):

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} t_{11} & & & & & & \\ 0 & t_{22} & & & & & \\ 0 & 0 & t_{33} & & & * & \\ 0 & 0 & 0 & t_{44} & & & \\ \vdots & & & & \ddots & & \\ & & \mathbb{O} & & & \ddots & \\ 0 & & & & \dots & \dots & t_{nn} \end{pmatrix}.$$

Chiamiamo:

$\mathbf{T}_1$ la matrice che si ottiene da $\mathbf{T}$ sopprimendo la 1^a riga e la 1^a colonna ($\mathbf{T}_1$ è triangolare superiore $(n-1)\times(n-1)$):

$$\mathbf{T}_1 = \begin{pmatrix} t_{22} & & & & \\ 0 & t_{33} & & * & \\ 0 & 0 & t_{44} & & \\ \vdots & & & \ddots & \\ & & \mathbb{O} & & \\ 0 & & & \dots & t_{nn} \end{pmatrix},$$

$\mathbf{T}_2$ la matrice che si ottiene da $\mathbf{T}_1$ sopprimendo la 1^a riga e la 1^a colonna ($\mathbf{T}_2$ è triangolare superiore $(n-2)\times(n-2)$):

$$\mathbf{T}_2 = \begin{pmatrix} t_{33} & & & & \\ 0 & t_{44} & & * & \\ \vdots & & \ddots & & \\ & \mathbb{O} & & & \\ & & & \dots & t_{nn} \end{pmatrix},$$

e cosí via per ogni $k = 2, \dots, n-1$ chiamiamo $\mathbf{T}_k$ la matrice che si ottiene da $\mathbf{T}_{k-1}$ sopprimendo la 1^a riga e la 1^a colonna. $\mathbf{T}_k$ è una matrice triangolare superiore $(n-k)\times(n-k)$.

Sviluppiamo il determinante di $\mathbf{T}$ ripetto alla 1^a colonna di $\mathbf{T}$:

$$\mathrm{Det}\mathbf{T} = t_{11}(-1)^{1+1}\mathrm{Det}\mathbf{T}_1 = t_{11}\mathrm{Det}\mathbf{T}_1.$$

Sviluppiamo il determinante di T_1 ripetto alla 1^a colonna di T_1:

$$\mathrm{Det}\mathbf{T} = t_{11}\mathrm{Det}\mathbf{T}_1 = t_{11}(t_{22}(-1)^{1+1}\mathrm{Det}\mathbf{T}_2) = t_{11}t_{22}\mathrm{Det}\mathbf{T}_2.$$

Cosí procedendo otteniamo:

$$\begin{aligned} \mathrm{Det}\mathbf{T} \quad &= t_{11}t_{22}\mathrm{Det}\mathbf{T}_2 = \\ &= t_{11}t_{22}t_{33}\mathrm{Det}\mathbf{T}_3 = \\ &= t_{11}t_{22}t_{33}t_{44}\mathrm{Det}\mathbf{T}_4 = \\ &= \qquad \dots \qquad = \\ &= t_{11}t_{22} \quad \dots \quad t_{n-1,n-1}\mathrm{Det}\mathbf{T}_{n-1} = \\ &= t_{11}t_{22} \quad \dots \quad t_{n-1,n-1}\mathrm{Det}\left(t_{nn}\right) = \\ &= t_{11}t_{22} \quad \dots \quad t_{n-1,n-1}t_{nn}. \end{aligned}$$

In particolare da ció segue:

Il determinante di una matrice diagonale è il prodotto degli elementi diagonali, poichè le matrici diagonali sono particolari matrici triangolari superiori.

Esercizio. Sia $\mathbf{A}$ una matrice $n \times n$. Si provi che per ogni scalare c si ha:

$$\mathrm{Det}(c\mathbf{A}) = c^n \mathrm{Det}(\mathbf{A}).$$

Si ha:

$$\mathrm{Det}(c\mathbf{A}) = \mathrm{Det}((c\mathbf{I}_n)\mathbf{A}) = \mathrm{Det}(c\mathbf{I}_n)\mathrm{Det}(\mathbf{A}).$$

Poichè $c\mathbf{I}_n$ è una matrice scalare $n \times n$, in particolare una matrice diagonale, per l'esercizio precedente si ha che

$$\mathrm{Det}(c\mathbf{I}_n) = \text{ prodotto degli elementi diagonali di } c\mathbf{I}_n.$$

Tali elementi sono tutti uguali a c, ed il loro prodotto ha n fattori (perchè $c\mathbf{I}_n$ è $n \times n$), dunque $\mathrm{Det}(c\mathbf{I}_n) = c^n$, per cui

$$\mathrm{Det}(c\mathbf{A}) = c^n \mathrm{Det}(\mathbf{A}).$$

ESERCIZIO TIPO 1

Risolvere il sistema lineare $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ nei tre seguenti casi:

$(a) : \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 7 \end{pmatrix}$ e $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$;

$(b) : \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 2 & 6 & -3 & 4 \end{pmatrix}$ e $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$;

$(c) : \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & 8 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ e $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

(a) Troviamo una forma ridotta di Gauss della matrice aumentata del sistema:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A} & | & \mathbf{b} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 & | & 0 \\ 1 & 1 & 3 & | & -1 \\ 3 & 3 & 7 & | & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{31}(-3)E_{21}(-1)E_1(\frac{1}{2})} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & -1 \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\xrightarrow{E_{32}(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & -1 \\ 0 & 0 & 0 & | & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{U} & | & \mathbf{d} \end{pmatrix}$$

Poichè $\mathbf{d}$ è dominante, allora $\mathbf{Ux} = \mathbf{d}$, e quindi anche $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, non ha soluzioni. (Infatti: il sistema $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ è equivalente al sistema $\mathbf{Ux} = \mathbf{d}$, che è una scrittura compatta per

$$(*) \qquad \begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 & = 0 \\ x_3 & = -1 \\ 0 & = 1 \end{cases} ,$$

e poichè l'ultima equazione di $(*)$ non ha soluzioni, $(*)$ non ha soluzioni).

(b) Troviamo una forma ridotta di Gauss della matrice aumentata del sistema:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A} & | & \mathbf{b} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 1 & | & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & | & 2 \\ 2 & 6 & -3 & 4 & | & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{31}(-2)} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 1 & | & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & | & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & | & 1 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\xrightarrow{E_{32}(-1)E_2(\frac{1}{2})} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 1 & | & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{U} & | & \mathbf{d} \end{pmatrix} .$$

Il sistema $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ è equivalente al sistema $\mathbf{Ux} = \mathbf{d}$, che è una scrittura compatta per

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 2x_3 + x_4 & = -1 \\ x_3 + 2x_4 & = 1 \end{cases} .$$

Poichè $\mathbf{d}$ è libera, $\mathbf{Ux} = \mathbf{d}$ ammette soluzioni.
Poichè $\mathbf{U}$ ha esattamente due colonne libere (la 2^a e la 4^a), $\mathbf{Ux} = \mathbf{d}$ ha ∞^2 soluzioni. Scegliamo come parametri le variabili corrispondenti alle colonne libere di $\mathbf{U}$ e con la sostituzione all'indietro otteniamo:

$$\begin{cases} x_2 = h \\ x_4 = k \\ x_3 = -2x_4 + 1 = -2k + 1 \\ x_1 = -3x_2 + 2x_3 - x_4 - 1 = -3h + 2 \times (-2k+1) - k - 1 = -3h - 5k + 1 \end{cases}$$

Dunque l'insieme delle soluzioni di $\mathbf{Ux} = \mathbf{d}$, e quindi anche $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ è

$$\left\{ \begin{pmatrix} -3h - 5k + 1 \\ h \\ -2k + 1 \\ k \end{pmatrix} | h, k \in \mathbb{C} \right\}.$$

(c) Troviamo una forma ridotta di Gauss della matrice aumentata del sistema:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A} & | & \mathbf{b} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 8 & 4 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & 2 \\ 1 & 3 & 2 & | & 0 \\ 1 & 2 & 1 & | & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{41}(-1)E_{31}(-1)E_1(\frac{1}{4})} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & 2 \\ 0 & 1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\xrightarrow{E_{23}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & | & 0 \\ 0 & 1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & 2 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{U} & | & \mathbf{d} \end{pmatrix}$$

Il sistema $\mathbf{Ax} =\mathbf{b}$ è equivalente al sistema $\mathbf{Ux} =\mathbf{d}$, che è una scrittura compatta per

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 & = 0 \\ \quad\quad x_2 + x_3 & = 0 \\ \quad\quad\quad\quad x_3 & = 2 \end{cases}$$

Poichè $\mathbf{d}$ è libera, $\mathbf{Ux} =\mathbf{d}$ ammette soluzioni.
Poichè $\mathbf{U}$ non ha colonne libere, $\mathbf{Ux} =\mathbf{d}$ ha esattamente una soluzione.
Con la sostituzione all'indietro otteniamo:

$$\begin{cases} x_3 = 2 \\ x_2 = -x_3 = -2 \\ x_1 = -2x_2 - x_3 = -2 \times (-2) - 2 = 4 - 2 = 2 \end{cases}$$

Dunque l'unica soluzione di $\mathbf{Ux} =\mathbf{d}$, e quindi anche di $\mathbf{Ax} =\mathbf{b}$, è il vettore $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$.

ESERCIZIO TIPO 2

Si risolva il sistema lineare $\mathbf{A}(\alpha)\mathbf{x} = \mathbf{b}(\alpha)$ dipendente dal parametro complesso α dove

$$\mathbf{A}(\alpha) = \begin{pmatrix} 3 & 3\alpha & 3 \\ 1 & \alpha+1 & \alpha+1 \\ 1 & \alpha & \alpha+1-i \\ 0 & 2 & 2\alpha \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{b}(\alpha) = \begin{pmatrix} 3\alpha \\ \alpha+1 \\ \alpha \\ \alpha^2+3 \end{pmatrix}.$$

Troviamo una forma ridotta di Gauss della matrice aumentata del sistema.

$$\begin{pmatrix}\mathbf{A}(\alpha) & | & \mathbf{b}(\alpha)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3\alpha & 3 & | & 3\alpha \\ 1 & \alpha+1 & \alpha+1 & | & \alpha+1 \\ 1 & \alpha & \alpha+1-i & | & \alpha \\ 0 & 2 & 2\alpha & | & \alpha^2+3 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{31}(-1)E_{21}(-1)E_1(\frac{1}{3})}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & \alpha & 1 & | & \alpha \\ 0 & 1 & \alpha & | & 1 \\ 0 & 0 & \alpha-i & | & 0 \\ 0 & 2 & 2\alpha & | & \alpha^2+3 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{42}(-2)} \begin{pmatrix} 1 & \alpha & 1 & | & \alpha \\ 0 & 1 & \alpha & | & 1 \\ 0 & 0 & \alpha-i & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & \alpha^2+1 \end{pmatrix} =$$

$$= \quad \begin{pmatrix}\mathbf{B}(\alpha) & | & \mathbf{c}(\alpha)\end{pmatrix}.$$

$\boxed{1^0 \text{ CASO}}$ $\quad \alpha = i \quad \begin{pmatrix}\mathbf{B}(i) & | & \mathbf{c}(i)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & i & 1 & | & i \\ 0 & 1 & i & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$ è una forma ridotta di Gauss per $\begin{pmatrix}\mathbf{A}(i) & | & \mathbf{b}(i)\end{pmatrix}$, quindi $\mathbf{A}(i)\mathbf{x} = \mathbf{b}(i)$ è equivalente a $\mathbf{B}(i)\mathbf{x} = \mathbf{c}(i)$ che è una forma compatta per

$$(*) \qquad \begin{cases} x_1 + ix_2 + x_3 & = i \\ \qquad x_2 + ix_3 & = 1 \end{cases}$$

Poichè $\mathbf{c}(i)$ è libera, $\mathbf{B}(i)\mathbf{x} = \mathbf{c}(i)$ ammette soluzioni.
Poichè $\underline{B}(i)$ ha esattamente una colonna libera, $\mathbf{B}(i)\mathbf{x} = \underline{c}(i)$ ha ∞^1 soluzioni.
Scegliamo come parametro la variabile corrispondente alla colonna libera di $\mathbf{B}(i)$ (la 3^a) e con la sostituzione all'indietro da $(*)$ otteniamo

$$\begin{cases} x_3 = h \\ x_2 = -ix_3 + 1 = -ih + 1 \\ x_1 = -ix_2 - x_3 + i = -i(-ih+1) - h + i = -h - i - h + i = -2h \end{cases}$$

L'insieme delle soluzioni del sistema $\mathbf{B}(i)\mathbf{x} = \mathbf{c}(i)$ (quindi di quelle del sistema $\mathbf{A}(i)\mathbf{x} = \mathbf{b}(i)$) è

$$\left\{ \begin{pmatrix} -2h \\ -ih+1 \\ h \end{pmatrix} | h \in \mathbb{C} \right\}.$$

$\boxed{2^0 \text{ CASO}}$ $\quad \alpha \neq i$

$$\left(\mathbf{B}(\alpha) \mid \mathbf{c}(\alpha)\right) = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & 1 & \mid & \alpha \\ 0 & 1 & \alpha & \mid & 1 \\ 0 & 0 & \alpha - i & \mid & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mid & \alpha^2+1 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_3(\frac{1}{\alpha - i})}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & \alpha & 1 & \mid & \alpha \\ 0 & 1 & \alpha & \mid & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \mid & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mid & \alpha^2+1 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_4(\frac{1}{\alpha - i})} \begin{pmatrix} 1 & \alpha & 1 & \mid & \alpha \\ 0 & 1 & \alpha & \mid & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \mid & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mid & \alpha+i \end{pmatrix} = (\mathbf{C}(\alpha)|\mathbf{d}(\alpha)).$$

$\boxed{1^0 \text{ Sottocaso}}$ $\quad \alpha = -i \quad \left(\mathbf{C}(-i) \mid \mathbf{d}(-i)\right) = \begin{pmatrix} 1 & -i & 1 & \mid & -i \\ 0 & 1 & -i & \mid & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \mid & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mid & 0 \end{pmatrix}$ è una forma ridotta di Gauss per $\left(\mathbf{A}(-i) \mid \mathbf{b}(-i)\right)$, quindi $\underline{A}(-i)\mathbf{x} = \mathbf{b}(-i)$ è equivalente a $\mathbf{C}(-i)\mathbf{x} = \mathbf{d}(-i)$ che è una forma compatta per

$$(*) \qquad \begin{cases} x_1 - ix_2 + x_3 & = -i \\ \qquad x_2 - ix_3 & = 1 \\ \qquad\qquad x_3 & = 0 \end{cases}$$

Poichè $\mathbf{d}(-i)$ è libera, $\mathbf{C}(-i)\mathbf{x} = \mathbf{d}(-i)$ ammette soluzioni.
Poichè tutte le colonne di $\mathbf{C}(-i)$ sono dominanti, $\mathbf{C}(-i)\mathbf{x} = \mathbf{d}(-i)$ ammette un'unica soluzione. Con la sostituzione all'indietro da $(*)$ otteniamo

$$\begin{cases} x_3 = 0 \\ x_2 = ix_3 + 1 = 1 \\ x_1 = ix_2 - x_3 - i = i - i = 0 \end{cases}$$

L'unica soluzione di $\mathbf{C}(-i)\mathbf{x} = \mathbf{d}(-i)$ (e quindi di $\mathbf{A}(-i)\mathbf{x} = \mathbf{b}(-i)$) è

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$\boxed{2^0 \text{ Sottocaso}}$ $\quad \alpha \notin \{i, -i\}$

$$(\mathbf{C}(\alpha)|\mathbf{d}(\alpha)) = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & 1 & \mid & \alpha \\ 0 & 1 & \alpha & \mid & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \mid & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mid & \alpha+i \end{pmatrix} \xrightarrow{E_4(\frac{1}{\alpha + i})} \begin{pmatrix} 1 & \alpha & 1 & \mid & \alpha \\ 0 & 1 & \alpha & \mid & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \mid & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mid & 1 \end{pmatrix} = (\mathbf{D}(\alpha)|\mathbf{e}(\alpha))$$

è una forma ridotta di Gauss per $\left(\mathbf{A}(\alpha) \mid \mathbf{b}(\alpha)\right)$. Poichè $\mathbf{e}(\alpha)$ è dominante, $\mathbf{D}(\alpha)\mathbf{x} = \mathbf{e}(\alpha)$ (e quindi di $\mathbf{A}(\alpha)\mathbf{x} = \mathbf{b}(\alpha)$) non ammette soluzioni.

ESERCIZIO TIPO 3

Si trovino tutte le inverse destre della matrice $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Un'inversa destra di $\mathbf{A}$ è una matrice 3×2 $\mathbf{R}$ tale che se $\mathbf{R} = \begin{pmatrix} \mathbf{c}_1 & | & \mathbf{c}_2 \end{pmatrix}$, allora

$\mathbf{c}_1$ è soluzione di (1) $\mathbf{Ax} = \mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e

$\mathbf{c}_2$ è soluzione di (2) $\mathbf{Ax} = \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Cerchiamo tutte le soluzioni di (1) e (2).

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A} & | & \mathbf{I}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & | & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & | & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{21}(-2)}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & | & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & | & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{U} & | & \mathbf{b}_1 & \mathbf{b}_2 \end{pmatrix}.$$

(1) è equivalente a (1') $\mathbf{Ux} = \mathbf{b}_1$ che è una forma compatta per

$$\begin{cases} x_1 - x_3 = 1 \\ x_2 + x_3 = -2 \end{cases}$$

Scegliamo come parametro la variabile corrispondente all'unica colonna libera di U (la 3^a) e con la sostituzione all'indietro otteniamo

$$\begin{cases} x_3 = h \\ x_2 = -2 - h \\ x_1 = 1 + h \end{cases}$$

L'insieme delle soluzioni di (1) è

$$\left\{ \begin{pmatrix} h+1 \\ -h-2 \\ h \end{pmatrix} | h \in \mathbb{C} \right\}.$$

(2) è equivalente a (2') $\mathbf{Ux} = \mathbf{b}_2$ che è una forma compatta per

$$\begin{cases} x_1 - x_3 = 0 \\ x_2 + x_3 = 1 \end{cases}$$

Scegliamo come parametro la variabile corrispondente all'unica colonna libera di U (la 3^a) e con la sostituzione all'indietro otteniamo

$$\begin{cases} x_3 = k \\ x_2 = 1 - k \\ x_1 = k \end{cases}$$

L'insieme delle soluzioni di (2) è

$$\left\{ \begin{pmatrix} k \\ -k+1 \\ k \end{pmatrix} |k \in \mathbb{C} \right\}.$$

Le inverse destre di $\mathbf{A}$ sono esattamente tutte le matrici del tipo

$$\mathbf{R}(h,k) = \begin{pmatrix} h+1 & k \\ -h-2 & -k+1 \\ h & k \end{pmatrix}, \quad \text{al variare di} \quad h,k \in \mathbb{C}.$$

ESERCIZIO TIPO 3 bis

Si trovino tutte le inverse sinistre della matrice $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$.

1. Poniamo $\mathbf{b} = \mathbf{A}^T$.

2. Cerchiamo tutte le inverse destre di $\mathbf{B}$. Dall'ESERCIZIO TIPO 3 sappiamo che sono tutte e sole le matrici del tipo $\begin{pmatrix} h+1 & k \\ -h-2 & -k+1 \\ h & k \end{pmatrix}$ con $h,k \in \mathbb{C}$.

3. Una matrice è inversa sinistra di $\mathbf{A}$ se e solo se è la trasposta di una inversa destra di $\mathbf{B}$.

Quindi le inverse sinistre di $\mathbf{A}$ sono esattamente tutte le matrici del tipo

$$\begin{pmatrix} h+1 & -h-2 & h \\ k & -k+1 & k \end{pmatrix} \quad \text{al variare di} \quad h,k \in \mathbb{C}.$$

ESERCIZIO TIPO 4

Sia $\quad \mathbf{A}(\alpha)=\begin{pmatrix}\alpha-1 & 1 & \alpha-1\\ \alpha-1 & 1 & -1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}, \quad$ dove $\alpha\in\mathbb{R}$. Per quegli $\alpha\in\mathbb{R}$ per cui $\mathbf{A}(\alpha)$ è non singolare, si calcoli $\mathbf{A}(\alpha)^{-1}$.

$$\big(\mathbf{A}(\alpha)\quad|\quad \mathbf{I}_3\big)=\begin{pmatrix}\alpha-1 & 1 & \alpha-1 & | & 1 & 0 & 0\\ \alpha-1 & 1 & -1 & | & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & | & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\xrightarrow{\boxed{\alpha\neq 1:\mathbf{A}(1)\text{ non ha inversa}}}$$

$$\xrightarrow{E_{21}(-\alpha+1)E_1(\frac{1}{\alpha-1})}\begin{pmatrix}1 & \frac{1}{\alpha-1} & 1 & | & \frac{1}{\alpha-1} & 0 & 0\\ 0 & 0 & -\alpha & | & -1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & | & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\xrightarrow{E_{23}}$$

$$\to\begin{pmatrix}1 & \frac{1}{\alpha-1} & 1 & | & \frac{1}{\alpha-1} & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & | & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & -\alpha & | & -1 & 1 & 0\end{pmatrix}\xrightarrow{\boxed{\alpha\neq 0:\mathbf{A}(0)\text{ non ha inversa}}\quad E_3(-\frac{1}{\alpha})}$$

$$\to\begin{pmatrix}1 & \frac{1}{\alpha-1} & 1 & | & \frac{1}{\alpha-1} & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & | & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1 & | & \frac{1}{\alpha} & -\frac{1}{\alpha} & 0\end{pmatrix}\xrightarrow{E_{13}(-1)}\begin{pmatrix}1 & \frac{1}{\alpha-1} & 0 & | & \frac{1}{\alpha(1-\alpha)} & \frac{1}{\alpha} & 0\\ 0 & 1 & 0 & | & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1 & | & \frac{1}{\alpha} & -\frac{1}{\alpha} & 0\end{pmatrix}\to$$

$$\xrightarrow{E_{12}(-\frac{1}{\alpha-1})}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & | & \frac{1}{\alpha(\alpha-1)} & \frac{1}{\alpha} & -\frac{1}{\alpha-1}\\ 0 & 1 & 0 & | & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1 & | & \frac{1}{\alpha} & -\frac{1}{\alpha} & 0\end{pmatrix}=\big(\mathbf{I}_3|\mathbf{A}(\alpha)^{-1}\big).$$

Se $\boxed{\alpha\notin\{0,1\}}$ $\qquad \mathbf{A}(\alpha)^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\alpha(\alpha-1)} & \frac{1}{\alpha} & -\frac{1}{\alpha-1}\\ 0 & 0 & 1\\ \frac{1}{\alpha} & -\frac{1}{\alpha} & 0\end{pmatrix}.$

ESERCIZIO TIPO 5

Sia $\mathbf{A}(\alpha) = \begin{pmatrix} \alpha-1 & 3\alpha-3 & 2\alpha-2 \\ 0 & \alpha^2+4 & 0 \\ 2 & 6 & 2\alpha-6 \\ \alpha & 3\alpha+2 & \alpha+5 \end{pmatrix}$, dove $\alpha \in \mathbb{C}$.

Per ogni $\alpha \notin \{1, 2i, -2i\}$ si trovi una decomposizione $\mathbf{A}(\alpha) = \mathbf{L}(\alpha)\mathbf{U}(\alpha)$, scrivendo anche $\mathbf{L}(\alpha)$ come prodotto di matrici elementari.

$$\mathbf{A}(\alpha) = \begin{pmatrix} \boxed{\alpha-1} & 3\alpha-3 & 2\alpha-2 \\ \boxed{0} & \alpha^2+4 & 0 \\ \boxed{2} & 6 & 2\alpha-6 \\ \boxed{\alpha} & 3\alpha+2 & \alpha+5 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{41}(-\alpha)E_{31}(-2)E_1(\frac{1}{\alpha-1}) \quad \boxed{\alpha \neq 1}}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & \boxed{\alpha^2+4} & 0 \\ 0 & \boxed{0} & 2\alpha-10 \\ 0 & \boxed{2} & 5-\alpha \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{42}(-2)E_2(\frac{1}{\alpha^2+4}) \quad \boxed{\alpha \notin \{2i, -2i\}}}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2\alpha-10 \\ 0 & 0 & 5-\alpha \end{pmatrix} = \mathbf{B}(\alpha)$$

$\boxed{1^o CASO}$ $\quad \alpha \neq 5$ (nonchè $\alpha \neq 1, 2i, -2i$)

$$\mathbf{B}(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{2\alpha-10} \\ 0 & 0 & \boxed{5-\alpha} \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{43}(-5+\alpha)E_3(\frac{1}{2\alpha-10})} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{U}(\alpha)$$

$$\mathbf{L}(\alpha) = \begin{pmatrix} \boxed{\alpha-1} & 0 & 0 & 0 \\ \boxed{0} & \boxed{\alpha^2+4} & 0 & 0 \\ \boxed{2} & \boxed{0} & \boxed{2\alpha-10} & 0 \\ \boxed{\alpha} & \boxed{2} & \boxed{5-\alpha} & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \mathbf{E}_1(\alpha-1)\mathbf{E}_{31}(2)\mathbf{E}_{41}(\alpha)\mathbf{E}_2(\alpha^2+4)\mathbf{E}_{42}(2)\mathbf{E}_3(2\alpha-10)\mathbf{E}_{43}(5-\alpha)$$

$\boxed{2^o CASO}$ $\quad \alpha = 5$

$$\mathbf{B}(5) = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{U}(5)$$

$$\mathbf{L}(5) = \begin{pmatrix} \boxed{4} & 0 & 0 & 0 \\ \boxed{0} & \boxed{29} & 0 & 0 \\ \boxed{2} & \boxed{0} & 1 & 0 \\ \boxed{5} & \boxed{2} & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{E}_1(4)\mathbf{E}_{31}(2)\mathbf{E}_{41}(5)\mathbf{E}_2(29)\mathbf{E}_{42}(2)$$

$\boxed{N.B.}$ Se $\alpha \in \{1, 2i, -2i\}$ non è possibile trovare una forma ridotta di Gauss di $\mathbf{A}(\alpha)$ senza fare scambi di righe, quindi $\mathbf{A}(\alpha)$ **NON** ha una decomposizione $\mathbf{L}(\alpha)\mathbf{U}(\alpha)$.

ESERCIZIO TIPO 6

Sia $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -4 \\ -2 & -6 & -10 \\ 1 & 3 & 6 \\ 1 & -4 & 10 \end{pmatrix}$.

Si trovi una decomposizione $\mathbf{A} = \mathbf{P}^T\mathbf{LU}$ per $\mathbf{A}$.

Applicando l'algoritmo di Gauss ad A si ottiene:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -4 \\ -2 & -6 & -10 \\ 1 & 3 & 6 \\ 1 & -4 & 10 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{13}} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 \\ -2 & -6 & -10 \\ 0 & 2 & -4 \\ 1 & -4 & 10 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{41}(1)E_{21}(2)} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & -7 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\xrightarrow{E_{23}} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & -7 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{42}(7)E_2(\frac{1}{2})} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -10 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{43}(10)E_3(\frac{1}{2})} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Sia

$$\mathbf{P} = \mathbf{E}_{23}\mathbf{E}_{13} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Allora

$$\mathbf{PA} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 & -4 \\ -2 & -6 & -10 \\ 1 & 3 & 6 \\ 1 & -4 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 0 & 2 & -4 \\ -2 & -6 & -10 \\ 1 & -4 & 10 \end{pmatrix}.$$

Applicando l'algoritmo di Gauss senza scambi di righe a $\mathbf{PA}$ otteniamo una decomposizione $\mathbf{LU}$ per $\mathbf{PA}$:

$$\mathbf{PA} = \begin{pmatrix} \boxed{1} & 3 & 6 \\ \boxed{0} & 2 & -4 \\ \boxed{-2} & -6 & -10 \\ \boxed{1} & -4 & 10 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{41}(-1)E_{31}(2)} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 0 & \boxed{2} & -4 \\ 0 & \boxed{0} & 2 \\ 0 & \boxed{-7} & 4 \end{pmatrix} \longrightarrow$$

$$\xrightarrow{E_{42}(7)E_2(\frac{1}{2})} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & \boxed{2} \\ 0 & 0 & \boxed{-10} \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{43}(-10)E_3(\frac{1}{2})} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{U},$$

ed $\mathbf{L} = \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 & 0 \\ \boxed{0} & \boxed{2} & 0 & 0 \\ \boxed{-2} & \boxed{0} & \boxed{2} & 0 \\ \boxed{1} & \boxed{-7} & \boxed{-10} & 1 \end{pmatrix}$.

Dunque $\mathbf{A} = \mathbf{P}^T\mathbf{LU}$ dove

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{L} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & -7 & -10 & 1 \end{pmatrix} \text{ ed } \mathbf{U} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

SI NOTI:

$\boxed{1}$ $\mathbf{P}$ ha

la 3^a riga di $\mathbf{I_4}$	in	1^a posizione (procedendo dall'alto verso il basso)
la 1^a riga di $\mathbf{I_4}$	in	2^a posizione
la 2^a riga di $\mathbf{I_4}$	in	3^a posizione
la 4^a riga di $\mathbf{I_4}$	in	4^a posizione.

Invertendo le righe con le posizioni, la matrice che ha

la 1^a riga di $\mathbf{I_4}$	in	3^a posizione
la 2^a riga di $\mathbf{I_4}$	in	1^a posizione
la 3^a riga di $\mathbf{I_4}$	in	2^a posizione
la 4^a riga di $\mathbf{I_4}$	in	4^a posizione

è quindi

$$\mathbf{P}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (= \mathbf{P}^T).$$

(d'altronde da $\mathbf{P} = \mathbf{E}_{23}\mathbf{E}_{13}$ segue

$$\mathbf{P}^{-1} = (\mathbf{E}_{23}\mathbf{E}_{13})^{-1} = \mathbf{E}_{13}^{-1}\mathbf{E}_{23}^{-1} = \mathbf{E}_{13}\mathbf{E}_{23} = \mathbf{E}_{13}^T\mathbf{E}_{23}^T = (\mathbf{E}_{23}\mathbf{E}_{13})^T = \mathbf{P}^T.)$$

$\boxed{2}$

$$\mathbf{H} = \mathbf{E}_{13}\mathbf{E}_{23} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \neq \mathbf{P}$$

e facendo un'eliminazione di Gauss su $\mathbf{HA}$ si ottiene:

$$\mathbf{HA} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 & -4 \\ -2 & -6 & -10 \\ 1 & 3 & 6 \\ 1 & -4 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -6 & -10 \\ 1 & 3 & 6 \\ 0 & 2 & -4 \\ 1 & -4 & 10 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\xrightarrow{E_{41}(-1)E_{21}(-1)E_{1}(-\frac{1}{2})} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & -7 & 5 \end{pmatrix}.$$

Dunque $\mathbf{HA}$ non ha una decomposizione $\mathbf{LU}$.

Quindi è fondamentale, per costruire $\mathbf{P}$, l'ordine in cui si moltiplicano le matrici corrispondenti agli scambi di righe effettuati (si parte dall'ultimo procedendo a ritroso).

$\boxed{3}$ Dall'eliminazione di Gauss fatta su $\mathbf{A}$ si ottiene che

$$\mathbf{E}_{43}(10) \cdot \mathbf{E}_3(\frac{1}{2}) \cdot \mathbf{E}_{42}(7) \cdot \mathbf{E}_2(\frac{1}{2}) \cdot \mathbf{E}_{23} \cdot \mathbf{E}_{41}(1) \cdot \mathbf{E}_{21}(2) \cdot \mathbf{E}_{13} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{U}.$$

Quindi la tentazione di intuire $\mathbf{L}$ direttamente da questa eliminazione di Gauss è fuorviante: posto

$$\mathbf{B} = \mathbf{E}_{43}(10) \cdot \mathbf{E}_3(\frac{1}{2}) \cdot \mathbf{E}_{42}(7) \cdot \mathbf{E}_2(\frac{1}{2}) \cdot \mathbf{E}_{41}(1) \cdot \mathbf{E}_{21}(2)$$

il prodotto delle matrici elementari diverse da quelle corrispondenti agli scambi di righe, si ha che $\mathbf{BPA} \neq \mathbf{U}$, e quindi $\mathbf{PA} \neq \mathbf{B}^{-1}\mathbf{U}$, ossia $\mathbf{B}^{-1}$ non è un buon candidato per bm L.

$\boxed{4}$ Mostriamo che esistono una forma ridotta di Gauss $\mathbf{U}^*$ per $\mathbf{A}$, una matrice di permutazione $\mathbf{P}^*$ ed una matrice triangolare inferiore non singolare $\mathbf{L}^*$ tali che

$$\mathbf{U}^* \neq \mathbf{U}, \qquad \mathbf{P}^* \neq \mathbf{P}, \qquad \mathbf{L}^* \neq \mathbf{L}, \qquad \text{ma } \mathbf{A} = (\mathbf{P}^*)^T\mathbf{L}^*\mathbf{U}^* = \mathbf{P}^T\mathbf{LU},$$

ossia la decomposizione $\mathbf{A} = \mathbf{P}^T\mathbf{LU}$ non è unica.

Facciamo una eliminazione di Gauss su $\mathbf{A}$ scegliendo degli scambi di riga diverse da quelli scelti nell'eliminazione che abbiamo fatto precedentemente.

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}0&2&-4\\-2&-6&-10\\1&3&6\\1&-4&10\end{pmatrix}\xrightarrow{E_{14}}\begin{pmatrix}1&-4&10\\-2&-6&-10\\1&3&6\\0&2&-4\end{pmatrix}\xrightarrow{E_{31}(-1)E_{21}(2)}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&-4&10\\0&-14&10\\0&7&-4\\0&2&-4\end{pmatrix}\xrightarrow{E_{32}(-7)E_2(-\frac{1}{14})}\begin{pmatrix}1&-4&10\\0&1&-\frac{5}{7}\\0&0&1\\0&2&-4\end{pmatrix}\xrightarrow{E_{42}(-2)}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&-4&10\\0&1&-\frac{5}{7}\\0&0&1\\0&0&-\frac{18}{7}\end{pmatrix}\xrightarrow{E_{43}(\frac{18}{7})}\begin{pmatrix}1&-4&10\\0&1&-\frac{5}{7}\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}.$$

Sia $\mathbf{P}^*=\mathbf{E}_{14}=\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}$. Allora

$$\mathbf{P}^*\mathbf{A}=\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&2&-4\\-2&-6&-10\\1&3&6\\1&-4&10\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boxed{1}&-4&10\\\boxed{-2}&-6&-10\\\boxed{1}&3&6\\\boxed{0}&2&-4\end{pmatrix}\xrightarrow{E_{31}(-1)E_{21}(2)}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&-4&10\\0&\boxed{-14}&10\\0&\boxed{7}&-4\\0&\boxed{2}&-4\end{pmatrix}\xrightarrow{E_{42}(-2)E_{32}(-7)E_2(-\frac{1}{14})}\begin{pmatrix}1&-4&10\\0&1&-\frac{5}{7}\\0&0&\boxed{1}\\0&0&\boxed{-\dfrac{18}{7}}\end{pmatrix}\xrightarrow{E_{43}(\frac{18}{7})}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&-4&10\\0&1&-\frac{5}{7}\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}=\mathbf{U}^*.$$

Quindi $\mathbf{A} = (\mathbf{P}^*)^T \mathbf{L}^* \mathbf{U}^*$ con

$$\mathbf{P}^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \neq \mathbf{P},$$

$$\mathbf{U}^* = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 10 \\ 0 & 1 & -\frac{5}{7} \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \neq \mathbf{U},$$

$$\mathbf{L}^* = \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 & 0 \\ \boxed{-2} & \boxed{-14} & 0 & 0 \\ \boxed{1} & \boxed{7} & \boxed{1} & 0 \\ \boxed{0} & \boxed{2} & \boxed{-\dfrac{18}{7}} & 1 \end{pmatrix} \neq \mathbf{L}.$$

ESERCIZIO TIPO 7

Si dica se $\boldsymbol{\mathcal{S}} = \left\{ \mathbf{A_1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} ; \mathbf{A_2} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} ; \mathbf{A_3} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} ; \mathbf{A_4} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ è un insieme di generatori di $M_2(\mathbb{R})$.

Per sapere se $\boldsymbol{\mathcal{S}}$ è o meno un insieme di generatori di $M_2(\mathbb{R})$ dobbiamo verificare se per ogni $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$ esistano o meno $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 \in \mathbb{R}$ tali che

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} &= \alpha_1 \mathbf{A_1} + \alpha_2 \mathbf{A_2} + \alpha_3 \mathbf{A_3} + \alpha_4 \mathbf{A_4} = \\ &= \alpha_1 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} + \alpha_4 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3 & \alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 \\ 2\alpha_2 + 2\alpha_3 & \alpha_4 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

ossia se il sistema lineare

$$(*) \qquad \begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3 = a \\ \alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 = b \\ 2\alpha_2 + 2\alpha_3 = c \\ \alpha_4 = d \end{cases}$$

nelle incognite $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ abbia o meno soluzione **per ogni** $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

Se $(*)$ avesse soluzione **per ogni** $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ allora $\boldsymbol{\mathcal{S}}$ sarebbe un insieme di generatori di $M_2(\mathbb{R})$, in caso contrario (ossia se esistono $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ per cui $(*)$ non ha soluzione), no.

Facendo una eliminazione di Gauss sulla matrice aumentata del sistema si ottiene

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 & a \\ 1 & 2 & 3 & 0 & b \\ 0 & 2 & 2 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 & 1 & d \end{array}\right) \xrightarrow{E_{21}(-1)} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 & a \\ 0 & 1 & 1 & 0 & b-a \\ 0 & 2 & 2 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 & 1 & d \end{array}\right) \to$$

$$\xrightarrow{E_{32}(-2)} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 & a \\ 0 & 1 & 1 & 0 & b-a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c-2b+2a \\ 0 & 0 & 0 & 1 & d \end{array}\right) \xrightarrow{E_{43}}$$

$$\to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 & a \\ 0 & 1 & 1 & 0 & b-a \\ 0 & 0 & 0 & 1 & d \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c-2b+2a \end{array}\right) = \left(\mathbf{U} \mid \mathbf{d}\right).$$

Poichè esistono $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ per cui $\mathbf{d}$ è dominante (ad esempio si prendano $a = b = d = 0$ e $c = 1$), allora $\boldsymbol{\mathcal{S}}$ non è un insieme di generatori di $M_2(\mathbb{R})$
(in altre parole: poichè esistono delle matrici di $M_2(\mathbb{R})$ che **NON** si possono esprimere come combinazione lineare degli elementi di $\boldsymbol{\mathcal{S}}$, ad esempio la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, allora $\boldsymbol{\mathcal{S}}$ **NON** è un insieme di generatori di $M_2(\mathbb{R})$).

ESERCIZIO TIPO 8

Siano $\mathbf{v_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v_2} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v_3} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Si dica se $\boldsymbol{\mathcal{S}} = \{\mathbf{v_1}; \mathbf{v_2}; \mathbf{v_3}\} \subset \mathbb{C}^3$ è linearmente dipendente o linearmente indipendente.

Siano $\alpha, \beta, \delta \in \mathbb{C}$ tali che

$$(*) \qquad \mathbf{0} = \alpha\mathbf{v_1} + \beta\mathbf{v_2} + \delta\mathbf{v_3} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + \delta \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha + 2\beta + \delta \\ \beta + \delta \\ 3\alpha + 4\beta + \delta \end{pmatrix}.$$

Allora $(*)$ equivale a $(1) \begin{cases} \alpha + 2\beta + \delta &= 0 \\ \beta + \delta &= 0 \\ 3\alpha + 4\beta + \delta &= 0 \end{cases}$.

(1) è un sistema lineare nelle incognite α, β, δ.

(1) ha sempre la soluzione nulla $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ (ossia $\alpha = \beta = \delta = 0$).

Se essa dovesse essere l'unica soluzione di (1) (quindi se (1) avesse un'unica soluzione) allora $\boldsymbol{\mathcal{S}}$ sarebbe L.I., altrimenti, se (1) ha anche una soluzione non nulla (quindi se (1) ha piú di una soluzione) allora $\boldsymbol{\mathcal{S}}$ è L.D.

Vediamo allora quante soluzioni ha (1). Facendo una eliminazione di Gauss sulla sua matrice aumentata si ottiene

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{E_{31}(-3)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{E_{32}(2)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) = \left(\mathbf{U} \mid \mathbf{0}\right)$$

L'ultima colonna di $\left(\mathbf{U} \mid \mathbf{0}\right)$, ossia $\mathbf{0}$, è libera, per cui (1) ha, come avevamo già osservato, soluzioni.

Poichè non tutte le colonne di $\mathbf{U}$ sono dominanti, il sistema (1) non ha un'unica soluzione, quindi $\boldsymbol{\mathcal{S}}$ è L.D.

Volendo risolvere (1), si ha che (1) è equivalente ad $(1') \begin{cases} \alpha + 2\beta + \delta &= 0 \\ \beta + \delta &= 0 \end{cases}$

Scegliendo come parametro la variabile corrispondente alla colonna libera di $\mathbf{U}$ (la 3^a), con la sostituzione all'indietro si ottiene $\begin{cases} \delta = k \\ \beta = -\delta = -k \\ \alpha = -2\beta - \delta = -2(-k) - k = k \end{cases}$

Il sistema $(1')$ ha ∞^1 soluzioni: tutti gli elementi dell'insieme $\left\{ \begin{pmatrix} k \\ -k \\ k \end{pmatrix} | k \in \mathbb{C} \right\}$.

Prendendo ad esempio $k = 1$ si ottiene $\alpha = 1 = \delta$ e $\beta = -1$:

$$\mathbf{v_1} - \mathbf{v_2} + \mathbf{v_3} = \mathbf{0}$$

è una combinazione lineare nulla di $\{\mathbf{v_1}; \mathbf{v_2}; \mathbf{v_3}\}$ con coefficienti non tutti nulli.

ESERCIZIO TIPO 9

Sia W lo spazio vettoriale reale delle matrici 2×2 reali triangolari superiori. L'insieme

$$\boldsymbol{\mathcal{S}} = \left\{ \quad \mathbf{C_1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{C_2} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{C_3} = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \right.$$

$$\left. \mathbf{C_4} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{C_5} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{C_6} = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

è un insieme di generatori di W (non ne è richiesta la verifica). Si trovi una base di W contenuta in $\boldsymbol{\mathcal{S}}$.

"Restringiamo" un insieme di generatori di W.

1^0 **passaggio**. Esistono in $\boldsymbol{\mathcal{S}}$ vettori che siano combinazioni lineari degli altri vettori di $\boldsymbol{\mathcal{S}}$?

$\mathbf{C_4} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ è senz'altro combinazione degli altri:

$$\mathbf{C_4} = \mathbf{O} = 0\mathbf{C_1} + 0\mathbf{C_2} + 0\mathbf{C_3} + 0\mathbf{C_5} + 0\mathbf{C_6},$$

per cui togliamo subito $\mathbf{C_4}$ (**togliamo** comunque subito **tutti gli eventuali vettori di $\boldsymbol{\mathcal{S}}$ che siano nulli**), **e poniamo**

$$\boldsymbol{\mathcal{S}}_1 = \left\{ \quad \mathbf{C_1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{C_2} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{C_3} = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \right.$$

$$\left. \mathbf{C_5} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{C_6} = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

2^0 **passaggio**. $\boldsymbol{\mathcal{S}}_1$ è ancora un insieme di generatori di W. Esistono in $\boldsymbol{\mathcal{S}}_1$ vettori che siano combinazioni lineari degli altri vettori di $\boldsymbol{\mathcal{S}}_1$?

Poichè

$$\mathbf{C_1} = -\frac{1}{2}\mathbf{C_6} = 0\mathbf{C_2} + 0\mathbf{C_3} + 0\mathbf{C_5} - \frac{1}{2}\mathbf{C_6}$$

ma anche

$$\mathbf{C_6} = -2\mathbf{C_1} = -2\mathbf{C_1} + 0\mathbf{C_2} + 0\mathbf{C_3} + 0\mathbf{C_5}$$

possiamo togliere da $\boldsymbol{\mathcal{S}}_1$ il vettore $\mathbf{C_1}$, oppure possiamo togliere da $\boldsymbol{\mathcal{S}}_1$ il vettore $\mathbf{C_6}$, ottenendo ancora un insieme di generatori di W. Dunque, **guardiamo se tra i vettori di $\boldsymbol{\mathcal{S}}_1$ ci siano coppie di vettori di cui l'uno è multiplo dell'altro, e per ciascuna di queste eventuali coppie togliamo uno dei due vettori**. In questo caso abbiamo individuato la coppia $\mathbf{C_1}, \mathbf{C_6}$ e scegliamo di togliere $\mathbf{C_6}$.

Poniamo

$$\boldsymbol{\mathcal{S}}_2 = \left\{ \mathbf{C_1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \mathbf{C_2} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \mathbf{C_3} = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \mathbf{C_5} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

3^0 **passaggio**. $\boldsymbol{\mathcal{S}}_2$ è ancora un insieme di generatori di W. Esistono in $\boldsymbol{\mathcal{S}}_2$ vettori che siano combinazioni lineari degli altri vettori di $\boldsymbol{\mathcal{S}}_2$?

Sia $\alpha_1\mathbf{C_1} + \alpha_2\mathbf{C_2} + \alpha_3\mathbf{C_3} + \alpha_4\mathbf{C_5} = \mathbf{O}$ una combinazione lineare nulla dei vettori di $\boldsymbol{\mathcal{S}}_2$. Allora da

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} &= \alpha_1 \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \alpha_4 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 2\alpha_1 + 2\alpha_2 + 2\alpha_3 + \alpha_4 & 3\alpha_2 + 6\alpha_3 \\ 0 & \alpha_4 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

si ottiene il sistema lineare, nelle incognite $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$

$$\begin{cases} 2\alpha_1 + 2\alpha_2 + 2\alpha_3 + \alpha_4 = 0 \\ 3\alpha_2 + 6\alpha_3 = 0 \\ \alpha_4 = 0 \end{cases}$$

Facendo una E.G. sulla sua matrice aumentata si ha:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{E_2(\frac{1}{3})E_1(\frac{1}{2})} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

per cui il sistema è equivalente al sistema

$$(*) \qquad \begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \frac{1}{2}\alpha_4 = 0 \\ \alpha_2 + 2\alpha_3 = 0 \\ \alpha_4 = 0 \end{cases}$$

il cui insieme delle soluzioni è

$$\left\{ \begin{pmatrix} h \\ -2h \\ h \\ 0 \end{pmatrix} | h \in \mathbb{R} \right\}$$

Prendendo una sua soluzione non nulla, ad esempio $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ (si ponga $h = 1$), si ottiene

$$\mathbf{C_1} - 2\mathbf{C_2} + \mathbf{C_3} = \mathbf{O},$$

per cui $\mathbf{C_1}$,$\mathbf{C_2}$ e $\mathbf{C_3}$ sono combinazioni lineari degli altri elementi di $\mathcal{S}_2$ e ciascuno di loro puó essere scelto come elemento da eliminare da $\mathcal{S}_2$.

N.B.: invece $\mathbf{C_5}$, non essendo combinazione lineare degli altri elementi di $\mathcal{S}_2$, non puó essere eliminato da $\mathcal{S}_2$.

Scegliamo di togliere da $\mathcal{S}_2$ la matrice $\mathbf{C_3}$ (combinazione lineare degli altri elementi di $\mathcal{S}_2$) e poniamo

$$\mathcal{S}_3 = \left\{ \mathbf{C_1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \mathbf{C_2} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \mathbf{C_5} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

4^0 **passaggio**. $\mathcal{S}_3$ è ancora un insieme di generatori di W. Esistono in $\mathcal{S}_3$ vettori che siano combinazioni lineari degli altri vettori di $\mathcal{S}_3$?

Sia $\alpha_1\mathbf{C_1} + \alpha_2\mathbf{C_2} + \alpha_3\mathbf{C_5} = \mathbf{O}$ una combinazione lineare nulla dei vettori di $\mathcal{S}_3$. Allora da

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \alpha_1 \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3 & 3\alpha_2 \\ 0 & \alpha_3 \end{pmatrix}$$

si ottiene il sistema lineare, nelle incognite $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$

$$\begin{cases} 2\alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3 = 0 \\ 3\alpha_2 = 0 \\ \alpha_3 = 0 \end{cases}$$

Si può vedere direttamente oppure facendo una E.G. sulla sua matrice aumentata:

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & | & 0 \\ 0 & 3 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_2(\frac{1}{3})E_1(\frac{1}{2})} \begin{pmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{2} & | & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 \end{pmatrix}$$

che l'unica soluzione del sistema è quella nulla. Dunque $\mathcal{S}_3$ è linearmente indipendente, ed è una base di W contenuta in $\mathcal{S}$.

ESERCIZIO TIPO 10

Sia $\quad \mathbf{A}_{\boldsymbol{\alpha}} = \begin{pmatrix} 1 & i & 0 \\ 1 & \alpha + 2i & 0 \\ 2 & 2i & \alpha^2 + 1 \end{pmatrix}, \quad$ dove $\alpha \in \mathbb{C}$.

Per ogni $\alpha \in \mathbb{C}$ si dica qual è $rk(\mathbf{A}_{\boldsymbol{\alpha}})$ e si trovino una base $\boldsymbol{\mathcal{B}}_{\alpha}$ di $C(\mathbf{A}_{\boldsymbol{\alpha}})$, una base $\boldsymbol{\mathcal{D}}_{\alpha}$ di $R(\mathbf{A}_{\boldsymbol{\alpha}})$ ed una base $\boldsymbol{\mathcal{C}}_{\alpha}$ di $N(\mathbf{A}_{\boldsymbol{\alpha}})$.

$$\mathbf{A}_{\boldsymbol{\alpha}} = \begin{pmatrix} 1 & i & 0 \\ 1 & \alpha + 2i & 0 \\ 2 & 2i & \alpha^2 + 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{31}(-2)E_{21}(-1)} \begin{pmatrix} 1 & i & 0 \\ 0 & \alpha + i & 0 \\ 0 & 0 & \alpha^2 + 1 \end{pmatrix} = \mathbf{B}_{\boldsymbol{\alpha}}$$

$\boxed{1^o CASO}$ $\quad \alpha = -i$:

$$\mathbf{B}_{-\boldsymbol{i}} = \begin{pmatrix} 1 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{U}_{-\boldsymbol{i}}$$

$$rk(\mathbf{A}_{-\boldsymbol{i}}) = 1, \ \boldsymbol{\mathcal{D}}_{-i} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ 0 \end{pmatrix} \right\}, \ \boldsymbol{\mathcal{B}}_{-i} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

Per il teorema "nullità + rango"si ha

$$\text{dim N}(\mathbf{U}_{-\boldsymbol{i}}) = (\text{numero delle colonne di } \mathbf{U}_{-\boldsymbol{i}}) - \text{rk}(\mathbf{U}_{-\boldsymbol{i}}) = 3 - 1 = 2.$$

Poichè

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in N(\mathbf{U}_{-\boldsymbol{i}}) \quad \Longleftrightarrow \quad x_1 + ix_2 = 0$$

scegliendo come parametri le variabili corrispondenti alle colonne libere di $\mathbf{U}_{-\boldsymbol{i}}$ (la 2^a e la 3^a) con la sostituzione all'indietro si ottiene

$$\begin{cases} x_2 = h \\ x_3 = k \\ x_1 = -ix_2 = -ih \end{cases}$$

Quindi

$$N(\mathbf{A}_{-\boldsymbol{i}}) = N(\mathbf{U}_{-\boldsymbol{i}}) = \left\{ \begin{pmatrix} -ih \\ h \\ k \end{pmatrix} | h, k \in \mathbb{C} \right\}$$

e chiamando $\mathbf{v_1}$ l'elemento di $N(\mathbf{A_{-i}})$ che si ottiene ponendo $h = 1$ e $k = 0$ e $\mathbf{v_2}$ l'elemento di $N(\mathbf{A_{-i}})$ che si ottiene ponendo $h = 0$ e $k = 1$, si ha che una base di $N(\mathbf{A_{-i}})$ è

$$\boldsymbol{\mathcal{C}}_{-i} = \left\{ \mathbf{v_1} = \begin{pmatrix} -i \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \mathbf{v_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

$\boxed{2^o CASO}$ $\quad \alpha \neq -i$

$$\mathbf{B_\alpha} = \begin{pmatrix} 1 & i & 0 \\ 0 & \alpha + i & 0 \\ 0 & 0 & \alpha^2 + 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_3(\frac{1}{\alpha+i})E_2(\frac{1}{\alpha+i})} \begin{pmatrix} 1 & i & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha - i \end{pmatrix} = \mathbf{C_\alpha}$$

$\boxed{1^o \textit{Sottocaso}}$ $\quad \alpha = i :$

$$\mathbf{C_i} = \begin{pmatrix} 1 & i & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{U_i}$$

$$rk(\mathbf{A_i}) = 2, \quad \boldsymbol{\mathcal{D}}_i = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}, \quad \boldsymbol{\mathcal{B}}_i = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} i \\ 3i \\ 2i \end{pmatrix} \right\}$$

Per il teorema "nullità + rango"si ha

$$\text{dim N}(\mathbf{U_i})) = (\text{numero delle colonne di } \mathbf{U_i})\text{- rk}(\mathbf{U_i}) = 3 - 2 = 1.$$

Poichè

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in N(\mathbf{U}_i) \Longleftrightarrow \begin{cases} x_1 + ix_2 = 0 \\ \qquad x_2 = 0 \end{cases}$$

scegliendo come parametro la variabile corrispondente alla colonna libera di $\mathbf{U_i}$ (la 3^a), con la sostituzione all'indietro si ottiene

$$\begin{cases} x_3 & = & h \\ x_2 & = & 0 \\ x_1 & = & -ix_2 & = & 0 \end{cases}$$

Quindi

$$N(\mathbf{A_i}) = N(\mathbf{U_i}) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ h \end{pmatrix} | h \in \mathbb{C} \right\}$$

e chiamando $\mathbf{v_1}$ l'elemento di $N(\mathbf{A_{\boldsymbol{i}}})$ che si ottiene ponendo $h = 1$ si ha che una base di $N(\mathbf{A_{\boldsymbol{i}}})$ è

$$\boldsymbol{\mathcal{C}}_{\ i} = \left\{ \mathbf{v_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

$\boxed{2^o Sottocaso}$ $\quad \alpha \neq -i, i:$

$$\mathbf{C_{\boldsymbol{\alpha}}} = \begin{pmatrix} 1 & i & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha - i \end{pmatrix} \xrightarrow{E_3(\frac{1}{\alpha - i})} \begin{pmatrix} 1 & i & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{U_{\boldsymbol{\alpha}}}$$

$$rk(\mathbf{A_{\boldsymbol{\alpha}}}) = 3, \quad \boldsymbol{\mathcal{D}}_{\ \alpha} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, \quad \boldsymbol{\mathcal{B}}_{\ \alpha} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} i \\ \alpha + 2i \\ 2i \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \alpha^2 + 1 \end{pmatrix} \right\}$$

inoltre per il teorema "nullità + rango"si ha

$$\text{dim N}(\mathbf{U_{\boldsymbol{\alpha}}})) = (\text{numero delle colonne di } \mathbf{U_{\boldsymbol{\alpha}}})\text{- rk}(\mathbf{U_{\boldsymbol{\alpha}}}) = 3 - 3 = 0,$$

per cui $N(\mathbf{A_{\boldsymbol{\alpha}}}) = N(\mathbf{U_{\boldsymbol{\alpha}}}) = \{\mathbf{0}\}$, e quindi $\boldsymbol{\mathcal{C}}_{\ \alpha} = \emptyset$.

N.B.: Essendo in questo caso $C(\mathbf{A_{\boldsymbol{\alpha}}}) \leq \mathbb{C}^3$ e $\dim(C(\mathbf{A_{\boldsymbol{\alpha}}})) = 3 = \dim(\mathbb{C}^3)$, allora $C(\mathbf{A_{\boldsymbol{\alpha}}}) = \mathbb{C}^3$ e si sarebbe potuto prendere $\boldsymbol{\mathcal{B}}_{\ \alpha} = \{\mathbf{e_1}; \mathbf{e_2}; \mathbf{e_3}\}$.

N.B.: Essendo in questo caso $R(\mathbf{A_{\boldsymbol{\alpha}}}) \leq \mathbb{C}^3$ e $\dim(R(\mathbf{A_{\boldsymbol{\alpha}}})) = 3 = \dim(\mathbb{C}^3)$, allora $R(\mathbf{A_{\boldsymbol{\alpha}}}) = \mathbb{C}^3$ e si sarebbe potuto prendere $\boldsymbol{\mathcal{D}}_{\ \alpha} = \{\mathbf{e_1}; \mathbf{e_2}; \mathbf{e_3}\}$.

ESERCIZIO TIPO 11

Si consideri l'applicazione lineare $f : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^3$ definita da

$$f(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 4a+b \\ 3a \\ a-2b \end{pmatrix}.$$

Si determini la matrice $\mathbf{A}$ associata ad f rispetto alle basi ordinate

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix} \right\} \quad \text{e} \quad \mathcal{D} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

su dominio e codominio rispettivamente.

La matrice che cerchiamo è

$$\mathbf{A} = \left(C_{\mathcal{D}}\,(f(\begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix})) \quad C_{\mathcal{D}}\,(f(\begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix})) \right).$$

Poichè

$$f(\begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 14 \\ 6 \\ -10 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad f(\begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 10 \end{pmatrix},$$

allora

$$\mathbf{A} = \left(C_{\mathcal{D}}\,(\begin{pmatrix} 14 \\ 6 \\ -10 \end{pmatrix}) \qquad C_{\mathcal{D}}\,(\begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 10 \end{pmatrix}) \right).$$

Piuttosto che calcolare separatamente $C_{\mathcal{D}}\,(\begin{pmatrix} 8 \\ 3 \\ -13 \end{pmatrix})$ e $C_{\mathcal{D}}\,(\begin{pmatrix} -1 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix})$, e calcoliamo $C_{\mathcal{D}}\,(\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix})$ per un generico vettore $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$, e specializziamo la formula ottenuta ai due diversi vettori $\begin{pmatrix} 14 \\ 6 \\ -10 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 10 \end{pmatrix}$. Poichè

$$C_{\mathcal{D}}\,(\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \delta \end{pmatrix} \Big| \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \delta \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha+\delta \\ 3\beta \\ \alpha-\delta \end{pmatrix}$$

allora

$$\begin{cases} \alpha + \delta = a \\ 3\beta = b \\ \alpha - \delta = c \end{cases} \implies \begin{cases} \alpha = (a+c)/2 \\ \beta = b/3 \\ \delta = (a-c)/2 \end{cases} \implies C_{\boldsymbol{\mathcal{D}}}\left(\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} (a+c)/2 \\ b/3 \\ (a-c)/2 \end{pmatrix}.$$

Ponendo $a = 14$, $b = 6$ e $c = -10$ otteniamo $C_{\boldsymbol{\mathcal{D}}}\left(\begin{pmatrix} 14 \\ 6 \\ -10 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 12 \end{pmatrix}$; ponendo $a = 4$, $b = 6$ e $c = 10$ otteniamo $C_{\boldsymbol{\mathcal{D}}}\left(\begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 10 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$. Quindi

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 2 & 2 \\ 12 & -3 \end{pmatrix}.$$

ESERCIZIO TIPO 12

Si calcoli la matrice di passaggio $\mathbf{M}_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{B}'}$ da $\mathcal{B}'$ a $\mathcal{B}$, dove $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$ sono le seguenti basi ordinate di $\mathbb{R}^3$:

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}, \qquad \mathcal{B}' = \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

La matrice di passaggio $M_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{B}'}$ da $\mathcal{B}'$ a $\mathcal{B}$ è

$$\mathbf{M}_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{B}'} = \left(C_{\mathcal{B}} \left(\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \quad C_{\mathcal{B}} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \quad C_{\mathcal{B}} \left(\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \right).$$

Nell'ESERCIZIO TIPO 11 abbiamo calcolato

$$C_{\mathcal{B}} \left(\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} (a+c)/2 \\ b/3 \\ (a-c)/2 \end{pmatrix}.$$

Specializzando la formula ottenuta ai tre diversi vettori $\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ otteniamo

$$C_{\mathcal{B}} \left(\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad C_{\mathcal{B}} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad C_{\mathcal{B}} \left(\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Dunque

$$\mathbf{M}_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

ESERCIZIO TIPO 13

Sia $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 2 & 2 \\ 12 & -3 \end{pmatrix}$ la matrice associata ad un'applicazione lineare $f : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^3$ rispetto alle basi ordinate

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix} \right\} \quad \text{e} \quad \mathcal{D} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

su dominio e codominio rispettivamente. Si determini la matrice $\mathbf{A}'$ associata ad f rispetto alle basi ordinate

$$\mathcal{B}' = \left\{ \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix} \right\} \quad \text{e} \quad \mathcal{D}' = \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

su dominio e codominio rispettivamente.

La matrice che cerchiamo è

$$\mathbf{A}' = \mathbf{M}^{-1}_{\mathcal{D} \leftarrow \mathcal{D}'} \mathbf{A} \mathbf{M}_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{B}'}$$

dove $\mathbf{M}_{\mathcal{D} \leftarrow \mathcal{D}'}$ è la matrice di passaggio da $\mathcal{D}'$ a $\mathcal{D}$, e $\mathbf{M}_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{B}'}$ è la matrice di passaggio da $\mathcal{B}'$ a $\mathcal{B}$.

Nell'ESERCIZIO TIPO 12 abbiamo calcolato $\mathbf{M}_{\mathcal{D} \leftarrow \mathcal{D}'} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Calcoliamo la sua inversa:

$$\left(\mathbf{M}_{\mathcal{D} \leftarrow \mathcal{D}'} \mid \mathbf{I_3} \right) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{E_{13}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right) \to$$

$$\xrightarrow{E_{31}(-2)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & -2 \end{array} \right) \xrightarrow{E_{32}(-1)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & -2 \end{array} \right) \to$$

$$\xrightarrow{E_{3}(-1)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 2 \end{array} \right) \xrightarrow{E_{13}(-2)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 2 \end{array} \right) =$$

$$= \left(\mathbf{I_3} \mid \mathbf{M}_{\mathcal{D} \leftarrow \mathcal{D}'}{}^{-1} \right)$$

Dunque

$$\mathbf{M}_{\mathcal{D}' \leftarrow \mathcal{D}} = \mathbf{M}^{-1}_{\mathcal{D} \leftarrow \mathcal{D}'} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Calcoliamo

$$\mathbf{M}_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} C_{\mathcal{B}}(\begin{pmatrix}6\\8\end{pmatrix}) & C_{\mathcal{B}}(\begin{pmatrix}2\\-4\end{pmatrix}) \end{pmatrix}.$$

Calcoliamo $C_{\mathcal{B}}(\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix})$ per un generico vettore $\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2$, e specializziamo la formula ottenuta ai due diversi vettori $\begin{pmatrix}6\\8\end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix}2\\-4\end{pmatrix}$. Poichè

$$C_{\mathcal{B}}(\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}) = \begin{pmatrix}\alpha\\\beta\end{pmatrix} \quad \Big| \quad \begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix}2\\6\end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix}2\\-4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\alpha+2\beta\\6\alpha-4\beta\end{pmatrix}$$

risolvendo il sistema lineare $\begin{cases}2\alpha+2\beta = a\\6\alpha-4\beta = b\end{cases}$ (nelle incognite α e β)si ottiene

$$C_{\mathcal{B}}(\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}) = \begin{pmatrix}\frac{2a+b}{10}\\\frac{3a-b}{10}\end{pmatrix}.$$

Ponendo $a = 6$ e $b = 8$ otteniamo $C_{\mathcal{B}}(\begin{pmatrix}6\\8\end{pmatrix}) = \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$; ponendo $a = 2$ e $b = -4$ otteniamo $C_{\mathcal{B}}(\begin{pmatrix}2\\-4\end{pmatrix}) = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$. Quindi

$$\mathbf{M}_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} C_{\mathcal{B}}(\begin{pmatrix}6\\8\end{pmatrix}) & C_{\mathcal{B}}(\begin{pmatrix}2\\-4\end{pmatrix}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2 & 0\\1 & 1\end{pmatrix}.$$

Dunque

$$\mathbf{A}' = \mathbf{M}^{-1}_{\mathcal{D} \leftarrow \mathcal{D}'}\mathbf{A}\mathbf{M}_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{B}'} = \begin{pmatrix}2 & -2 & -3\\0 & 1 & 0\\-1 & 1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 7\\2 & 2\\12 & -3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 0\\1 & 1\end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix}-36 & 19\\2 & 2\\24 & -11\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 0\\1 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-53 & 19\\6 & 2\\37 & -11\end{pmatrix}.$$

ESERCIZIO TIPO 14

Si trovi una base ortonormale del sottospazio di $\mathbb{C}^4$

$$V = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ i \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ i \end{pmatrix} \right\rangle.$$

$\boxed{1^0\textbf{MODO}}$

$\boxed{1}$ Troviamo una base $\mathcal{B}_1$ di V.

Poniamo

$$\mathbf{w_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ i \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{w_2} = \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{w_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{w_4} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ i \end{pmatrix}$$

e costruiamo la matrice $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{w_1} & \mathbf{w_2} & \mathbf{w_3} & \mathbf{w_4} \end{pmatrix}$, ossia una matrice tale che $C(\mathbf{A}) = V$.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & i & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ i & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & i \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{31}(-i)} \begin{pmatrix} 1 & i & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & i \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{42}(1)E_{32}(-1)}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & i & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{34}} \begin{pmatrix} 1 & i & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_3(-i)} \begin{pmatrix} 1 & i & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{U}$$

Dunque $\mathcal{B}_1 = \{\mathbf{w_1}, \mathbf{w_2}, \mathbf{w_4}\}$ è una base di $C(\mathbf{A}) = V$.

$\boxed{2}$ Troviamo una base ortogonale $\mathcal{B}_2$ di V: poniamo $\mathbf{v_1} = \mathbf{w_1}, \mathbf{v_2} = \mathbf{w_2}$ e $\mathbf{v_3} = \mathbf{w_4}$, e applichiamo l'algoritmo di Gram-Schmidt a $\{\mathbf{v_1}; \mathbf{v_2}; \mathbf{v_3}\}$.

$$\mathbf{u_1} = \mathbf{v_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ i \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{u_2} = \mathbf{v_2} - \alpha_{12}\mathbf{u_1}, \qquad \mathbf{u_1} \neq \mathbf{0} \quad \Longrightarrow \quad \alpha_{12} = \frac{(\mathbf{u_1}|\mathbf{v_2})}{(\mathbf{u_1}|\mathbf{u_1})}$$

$$(\mathbf{u_1}|\mathbf{v_2}) = \mathbf{u_1}^H\mathbf{v_2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = i$$

$$(\mathbf{u_1}|\mathbf{u_1}) = \mathbf{u_1}^H\mathbf{u_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ i \\ 0 \end{pmatrix} = 2$$

$$\Longrightarrow \quad \alpha_{12} = i/2$$

$$\mathbf{u_2} = \mathbf{v_2} - \alpha_{12}\mathbf{u_1} = \\ = \mathbf{v_2} - \tfrac{i}{2}\mathbf{u_1} =$$

$$= \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} - \tfrac{i}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ i \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{i}{2} \\ 1 \\ \frac{1}{2} \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{u_3} = \mathbf{v_3} - \alpha_{13}\mathbf{u_1} - \alpha_{23}\mathbf{u_2},$$

$$\mathbf{u_1} \neq \mathbf{0} \quad \Longrightarrow \quad \alpha_{13} = \frac{(\mathbf{u_1}|\mathbf{v_3})}{(\mathbf{u_1}|\mathbf{u_1})}$$

$$(\mathbf{u_1}|\mathbf{v_3}) = \mathbf{u_1}^H\mathbf{v_3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ i \end{pmatrix} = 0$$

$$\Longrightarrow \quad \alpha_{13} = 0$$

$$\mathbf{u_2} \neq \mathbf{0} \quad \Longrightarrow \quad \alpha_{23} = \frac{(\mathbf{u_2}|\mathbf{v_3})}{(\mathbf{u_2}|\mathbf{u_2})}$$

$$(\mathbf{u_2}|\mathbf{v_3}) = \mathbf{u_2}^H\mathbf{v_3} = \begin{pmatrix} -\frac{i}{2} & 1 & \frac{1}{2} & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ i \end{pmatrix} = -i$$

$$(\mathbf{u_2}|\mathbf{u_2}) = \mathbf{u_2}^H\mathbf{u_2} = \begin{pmatrix} -\frac{i}{2} & 1 & \frac{1}{2} & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{i}{2} \\ 1 \\ \frac{1}{2} \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{5}{2}$$

$$\Longrightarrow \quad \alpha_{23} = -\frac{2}{5}i$$

$$\mathbf{u_3} = \mathbf{v_3} - \alpha_{13}\mathbf{u_1} - \alpha_{23}\mathbf{u_2} =$$
$$= \mathbf{v_3} + \tfrac{2i}{5}\mathbf{u_2} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ i \end{pmatrix} + \tfrac{2i}{5} \begin{pmatrix} \frac{i}{2} \\ 1 \\ \frac{1}{2} \\ -1 \end{pmatrix} = \tfrac{1}{5} \begin{pmatrix} -1 \\ 2i \\ i \\ 3i \end{pmatrix}$$

$\boldsymbol{\mathcal{B}}_2 = \{\mathbf{u_1}; \mathbf{u_2}; \mathbf{u_3}\}$, dove

$$\mathbf{u_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ i \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u_2} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} i \\ 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u_3} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -1 \\ 2i \\ i \\ 3i \end{pmatrix},$$

è una base ortogonale di V.

$\boxed{3}$ Troviamo una base ortonormale $\boldsymbol{\mathcal{B}}$ di V, normalizzando gli elementi di $\boldsymbol{\mathcal{B}}_2$.

$$\|\mathbf{u_1}\|_2 = \sqrt{(\mathbf{u_1}|\mathbf{u_1})} = \sqrt{2}$$

$$\|\mathbf{u_2}\|_2 = \sqrt{(\mathbf{u_2}|\mathbf{u_2})} = \sqrt{5/2}$$

$$\|\mathbf{u_3}\|_2 = \sqrt{(\mathbf{u_3}|\mathbf{u_3})} = \sqrt{\mathbf{u_3}^H\mathbf{u_3}} = \sqrt{\tfrac{1}{5}\begin{pmatrix} -1 & -2i & -i & -3i \end{pmatrix} \tfrac{1}{5} \begin{pmatrix} -1 \\ 2i \\ i \\ 3i \end{pmatrix}} = \tfrac{\sqrt{15}}{5}$$

Concludendo: $\boldsymbol{\mathcal{B}} = \{\frac{\mathbf{u_1}}{\|\mathbf{u_1}\|_2}; \frac{\mathbf{u_2}}{\|\mathbf{u_2}\|_2}; \frac{\mathbf{u_3}}{\|\mathbf{u_3}\|_2}\}$, dove

$$\frac{\mathbf{u_1}}{\|\mathbf{u_1}\|_2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ i \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \frac{\mathbf{u_2}}{\|\mathbf{u_2}\|_2} = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} i \\ 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \frac{\mathbf{u_3}}{\|\mathbf{u_3}\|_2} = \frac{1}{\sqrt{15}} \begin{pmatrix} -1 \\ 2i \\ i \\ 3i \end{pmatrix},$$

è una base ortonormale di V.

$\boxed{2^0\textbf{MODO}}$

$\boxed{1}$ Prima costruiamo **un insieme di generatori ortogonale di V**: poniamo

$$\mathbf{v_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ i \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v_2} = \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v_4} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ i \end{pmatrix}$$

e applichiamo l'algoritmo di Gram-Schimdt a $\{\mathbf{v_1}; \mathbf{v_2}; \mathbf{v_3}; \mathbf{v_4}\}$. Otterremo 4 vettori, $\mathbf{u_1}, \mathbf{u_2}, \mathbf{u_3}, \mathbf{u_4}$, e l'insieme $\{\mathbf{u_1}; \mathbf{u_2}; \mathbf{u_3}; \mathbf{u_4}\}$ sarà un insieme di generatori ortogonale di V.

Per sapere se alcuni degli $\mathbf{u_i}$ saranno nulli, e in tal caso quali, troviamo innanzitutto una forma ridotta di Gauss $\mathbf{U}$ della matrice $\mathbf{A}$ che ha come colnne $\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \mathbf{v_3}, \mathbf{v_4}$: le eventuali colonne libere di U corrisponderanno agli $\mathbf{u_i}$ nulli.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{v_1} & \mathbf{v_2} & \mathbf{v_3} & \mathbf{v_4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & i & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ i & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & i \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{31}(-i)} \begin{pmatrix} 1 & i & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & i \end{pmatrix} \to$$

$$\xrightarrow{E_{42}(1)E_{32}(-1)} \begin{pmatrix} 1 & i & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{34}} \begin{pmatrix} 1 & i & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_3(-i)}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & i & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{U}$$

Poichè $\mathbf{U}$ ha come unica colonna libera la 3^a, allora applicando l'algoritmo di Gram-Schimdt a $\{\mathbf{v_1}; \mathbf{v_2}; \mathbf{v_3}; \mathbf{v_4}\}$ otterremo $\mathbf{u_3} = \mathbf{0}$.

$$\mathbf{u_1} = \mathbf{v_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ i \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{u_2} = \mathbf{v_2} - \alpha_{12}\mathbf{u_1}, \qquad \mathbf{u_1} \neq \mathbf{0} \quad \Longrightarrow \quad \alpha_{12} = \frac{(\mathbf{u_1}|\mathbf{v_2})}{(\mathbf{u_1}|\mathbf{u_1})}$$

$$(\mathbf{u_1}|\mathbf{v_2}) = \mathbf{u_1}^H \mathbf{v_2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = i$$

$$(\mathbf{u_1}|\mathbf{u_1}) = \mathbf{u_1}^H \mathbf{u_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ i \\ 0 \end{pmatrix} = 2$$

$$\Longrightarrow \quad \alpha_{12} = i/2$$

$$\mathbf{u_2} = \mathbf{v_2} - \alpha_{12}\mathbf{u_1} = \\ = \mathbf{v_2} - \tfrac{i}{2}\mathbf{u_1} =$$

$$= \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} - \tfrac{i}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ i \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{i}{2} \\ 1 \\ \frac{1}{2} \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{u_3} = \mathbf{v_3} - \alpha_{13}\mathbf{u_1} - \alpha_{23}\mathbf{u_2},$$

$$\mathbf{u_1} \neq \mathbf{0} \quad \Longrightarrow \quad \alpha_{13} = \frac{(\mathbf{u_1}|\mathbf{v_3})}{(\mathbf{u_1}|\mathbf{u_1})}$$

$$(\mathbf{u_1}|\mathbf{v_3}) = \mathbf{u_1}^H\mathbf{v_3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -i & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = i$$

$$(\mathbf{u_1}|\mathbf{u_1}) = 2$$

$$\Longrightarrow \quad \alpha_{13} = \frac{i}{2}$$

$$\mathbf{u_2} \neq \mathbf{0} \quad \Longrightarrow \quad \alpha_{23} = \frac{(\mathbf{u_2}|\mathbf{v_3})}{(\mathbf{u_2}|\mathbf{u_2})}$$

$$(\mathbf{u_2}|\mathbf{v_3}) = \mathbf{u_2}^H\mathbf{v_3} = \begin{pmatrix} -\frac{i}{2} & 1 & \frac{1}{2} & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$= -1 - \frac{1}{2} - 1 = -\frac{5}{2}$$

$$(\mathbf{u_2}|\mathbf{u_2}) = \mathbf{u_2}^H\mathbf{u_2} = \begin{pmatrix} -\frac{i}{2} & 1 & \frac{1}{2} & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{i}{2} \\ 1 \\ \frac{1}{2} \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{5}{2}$$

$$\Longrightarrow \quad \alpha_{23} = -1$$

$$\mathbf{u_3} = \mathbf{v_3} - \alpha_{13}\mathbf{u_1} - \alpha_{23}\mathbf{u_2} = \\ = \mathbf{v_3} - \tfrac{i}{2}\mathbf{u_1} + \mathbf{u_2} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} - \tfrac{i}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ i \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{i}{2} \\ 1 \\ \frac{1}{2} \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\mathbf{u_4} = \mathbf{v_4} - \alpha_{14}\mathbf{u_1} - \alpha_{24}\mathbf{u_2} - \alpha_{34}\mathbf{u_3}$

$$\mathbf{u_1} \neq \mathbf{0} \quad \Longrightarrow \quad \alpha_{14} = \frac{(\mathbf{u_1}|\mathbf{v_4})}{(\mathbf{u_1}|\mathbf{u_1})}$$

$$(\mathbf{u_1}|\mathbf{v_4}) = \mathbf{u_1}^H\mathbf{v_4} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ i \end{pmatrix} = 0$$

$$\Longrightarrow \quad \alpha_{14} = 0$$

$$\mathbf{u_2} \neq \mathbf{0} \quad \Longrightarrow \quad \alpha_{24} = \frac{(\mathbf{u_2}|\mathbf{v_4})}{(\mathbf{u_2}|\mathbf{u_2})}$$

$$(\mathbf{u_2}|\mathbf{v_4}) = \mathbf{u_2}^H\mathbf{v_4} = \begin{pmatrix} -\frac{i}{2} & 1 & \frac{1}{2} & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ i \end{pmatrix} = -i$$

$$(\mathbf{u_2}|\mathbf{u_2}) = \mathbf{u_2}^H\mathbf{u_2} = \begin{pmatrix} -\frac{i}{2} & 1 & \frac{1}{2} & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{i}{2} \\ 1 \\ \frac{1}{2} \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{5}{2}$$

$$\Longrightarrow \quad \alpha_{24} = -\frac{2}{5}i$$

$$\mathbf{u_3} = \mathbf{0} \quad \Longrightarrow \quad \alpha_{34} = 0 \quad \text{per def.}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{u_4} &= \mathbf{v_4} - \alpha_{24}\mathbf{u_2} = \\ &= \mathbf{v_4} + \tfrac{2i}{5}\mathbf{u_2} = \end{aligned}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ i \end{pmatrix} + \tfrac{2i}{5} \begin{pmatrix} \frac{i}{2} \\ 1 \\ \frac{1}{2} \\ -1 \end{pmatrix} = \tfrac{1}{5} \begin{pmatrix} -1 \\ 2i \\ i \\ 3i \end{pmatrix}$$

Dunque

$$\left\{ \mathbf{u_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ i \\ 0 \end{pmatrix}; \mathbf{u_2} = \begin{pmatrix} \frac{i}{2} \\ 1 \\ \frac{1}{2} \\ -1 \end{pmatrix}; \mathbf{u_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \mathbf{u_4} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -1 \\ 2i \\ i \\ 3i \end{pmatrix} \right\}$$

è un insieme di generatori ortogonale di V.

$\boxed{2}$ Costruiamo **una base ortogonale di V** togliendo dall'insieme di generatori ortogonale di V trovato al punto $\boxed{1}$ gli eventuali $\mathbf{u_i}$ nulli. In questo caso poniamo:

$$\mathbf{w_1} = \mathbf{u_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ i \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{w_2} = \mathbf{u_2} = \begin{pmatrix} \frac{i}{2} \\ 1 \\ \frac{1}{2} \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{w_3} = \mathbf{u_4} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -1 \\ 2i \\ i \\ 3i \end{pmatrix}.$$

L'insieme

$$\left\{ \mathbf{w_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ i \\ 0 \end{pmatrix}; \mathbf{w_2} = \begin{pmatrix} \frac{i}{2} \\ 1 \\ \frac{1}{2} \\ -1 \end{pmatrix}; \mathbf{w_3} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -1 \\ 2i \\ i \\ 3i \end{pmatrix} \right\}$$

è una base ortogonale di V.

$\boxed{3}$ Costruiamo **base ortonormale di V** normalizzando la base ortogonale trovata al punto $\boxed{2}$, ossia dividendo ciascun elemento della base ortogonale trovata in $\boxed{2}$ per la propria norma euclidea.

Cominciamo con il calcolare la norma euclidea di $\mathbf{w_1}, \mathbf{w_2}, \mathbf{w_3}$:

$$\|\mathbf{w_1}\|_2 = \sqrt{(\mathbf{u_1}|\mathbf{u_1})} = \sqrt{2}$$

$$\|\mathbf{w_2}\|_2 = \sqrt{(\mathbf{u_2}|\mathbf{u_2})} = \sqrt{5/2}$$

$$\|\mathbf{w_3}\|_2 = \sqrt{(\mathbf{u_4}|\mathbf{u_4})} = \sqrt{\mathbf{u_4}^H \mathbf{u_4}} = \sqrt{\tfrac{1}{5} \begin{pmatrix} -1 & -2i & -i & -3i \end{pmatrix} \tfrac{1}{5} \begin{pmatrix} -1 \\ 2i \\ i \\ 3i \end{pmatrix}} = \tfrac{\sqrt{15}}{5}$$

Allora

$$\mathcal{B} = \{ \frac{\mathbf{w_1}}{\|\mathbf{w_1}\|_2}; \frac{\mathbf{w_2}}{\|\mathbf{w_2}\|_2}; \frac{\mathbf{w_3}}{\|\mathbf{w_3}\|_2} \},$$

dove

$$\frac{\mathbf{w_1}}{\|\mathbf{w_1}\|_2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ i \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \frac{\mathbf{w_2}}{\|\mathbf{w_2}\|_2} = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} i \\ 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \frac{\mathbf{w_3}}{\|\mathbf{w_3}\|_2} = \frac{1}{\sqrt{15}} \begin{pmatrix} -1 \\ 2i \\ i \\ 3i \end{pmatrix},$$

è una base ortonormale di V.

ESERCIZIO TIPO 15

Si consideri il sottospazio $W = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ i \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} -i \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \rangle$ di $\mathbb{C}^3$.

(a) Si trovi il complemento ortogonale $W^\perp$ di W in $\mathbb{C}^3$.

(b) Si calcoli la proiezione ortogonale $P_W(\mathbf{v})$ del vettore $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 5i \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ su W.

Posto $\mathbf{w_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ i \end{pmatrix}$, $\mathbf{w_2} = \begin{pmatrix} -i \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{w_3} = \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, sia

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{w_1} & \mathbf{w_2} & \mathbf{w_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -i & i \\ 0 & 0 & 1 \\ i & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

una matrice tale che $C(\mathbf{A}) = \langle \mathbf{w_1}; \mathbf{w_2}; \mathbf{w_3} \rangle = W$.

(a) Da $W = C(\mathbf{A})$ segue $W^\perp = C(\mathbf{A})^\perp = N(\mathbf{A}^H)$. Facendo una EG su

$$\mathbf{A}^H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -i \\ i & 0 & 1 \\ -i & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

si ottiene:

$$\mathbf{A}^H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -i \\ i & 1 & 1 \\ -i & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{31}(i)E_{21}(-i)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{23}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -i \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{U}$$

Poichè

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in N(\mathbf{U}) \iff \begin{cases} x_1 - ix_3 & = 0 \\ \quad x_2 & = 0 \end{cases}$$

allora

$$N(\mathbf{A}^H) = N(\mathbf{U}) = \left\{ \begin{pmatrix} ih \\ 0 \\ h \end{pmatrix} | h \in \mathbb{C} \right\}.$$

(b) Troviamo una base ortonormale di W. Facendo una EG su $\mathbf{A}$ si ottiene:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -i & i \\ 0 & 0 & 1 \\ i & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{31}(-i)} \begin{pmatrix} 1 & -i & i \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Poichè le colonne dominanti di una forma ridotta di Gauss per $\mathbf{A}$ sono la 1^a e la 3^a, $\mathcal{B}_1 = \{\mathbf{w_1}, \mathbf{w_3}\}$ è una base di $C(\mathbf{A}) = W$. Posto

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{w_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ i \end{pmatrix} \text{ e } \mathbf{v}_2 = \mathbf{w_3} = \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

applichiamo l'algoritmo di GS a $\{\mathbf{v}_1; \mathbf{v}_2\}$ per trovare una base ortogonale $\{\mathbf{u_1}; \mathbf{u_2}\}$ di W.

$$\mathbf{u_1} = \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ i \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{u_2} = \mathbf{v}_2 - \alpha_{12}\mathbf{u_1}, \qquad \mathbf{u_1} \neq \mathbf{0} \quad \Longrightarrow \quad \alpha_{12} = \frac{(\mathbf{u_1}|\mathbf{v}_2)}{(\mathbf{u_1}|\mathbf{u_1})}$$

$$(\mathbf{u_1}|\mathbf{v}_2) = \mathbf{u_1}^H \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 2i$$

$$(\mathbf{u_1}|\mathbf{u_1}) = \mathbf{u_1}^H \mathbf{u_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ i \end{pmatrix} = 2$$

$$\Longrightarrow \quad \alpha_{12} = 2i/2 = i$$

$$\begin{aligned} \mathbf{u_2} &= \mathbf{v}_2 - \alpha_{12}\mathbf{u_1} = \\ &= \mathbf{v}_2 - i\mathbf{u_1} = \end{aligned}$$

$$= \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} - i \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Dunque

$$\mathcal{B}_2 = \left\{ \mathbf{u_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ i \end{pmatrix}; \mathbf{u_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

è una base ortogonale di W.
Troviamo una base ortonormale $\mathcal{B}$ di W, normalizzando gli elementi di $\mathcal{B}_2$. Essendo

$$\|\mathbf{u_1}\|_2 = \sqrt{(\mathbf{u_1}|\mathbf{u_1})} = \sqrt{2} \quad \text{e} \quad \|\mathbf{u_2}\|_2 = \sqrt{(\mathbf{u_2}|\mathbf{u_2})} = \sqrt{1} = 1,$$

$$\mathcal{B} = \left\{ \mathbf{u_1}^* = \frac{\mathbf{u_1}}{\|\mathbf{u_1}\|_2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ i \end{pmatrix}; \mathbf{u_2}^* = \frac{\mathbf{u_2}}{\|\mathbf{u_2}\|_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

è una base ortonormale di W.

La proiezione ortogonale $P_W(\mathbf{v})$ di $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 5i \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ su W è

$$\begin{aligned}
P_W(\mathbf{v}) &= (\mathbf{u_1}^*|\mathbf{v})\mathbf{u_1}^* + (\mathbf{u_2}^*|\mathbf{v})\mathbf{u_2}^* = \\
&= (\mathbf{u_1}^*)^H\mathbf{v} \cdot \mathbf{u_1}^* + (\mathbf{u_2}^*)^H\mathbf{v} \cdot \mathbf{u_2}^* = \\
&= \tfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5i \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5i \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \\
&= \tfrac{1}{2}(5i - i) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ i \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \\
&= 2i \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ i \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2i \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

ESERCIZIO TIPO 16

Sia $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -5 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 5 & -1 & -2 \end{pmatrix}$.

(a) Si trovi una decomposizione $\mathbf{Q_0R_0}$-non-normalizzata per $\mathbf{A}$.
(b) Si trovi una decomposizione $\mathbf{QR}$-normalizzata per $\mathbf{A}$.
(c) Si calcoli la matrice di proiezione sullo spazio delle colonne $C(\mathbf{A})$ di $\mathbf{A}$.

(a) $\boxed{I}$ Poniamo

$$\mathbf{v_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v_2} = \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v_3} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v_4} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

e applichiamo l'algoritmo di Gram-Schimdt a $\{\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \mathbf{v_3}, \mathbf{v_4}\}$.

Otterremo 4 vettori, $\mathbf{u_1}, \mathbf{u_2}, \mathbf{u_3}, \mathbf{u_4}$. Per sapere se alcuni degli $\mathbf{u_i}$ saranno nulli, e in tal caso quali, troviamo innanzitutto una forma ridotta di Gauss $\mathbf{U}$ di $\mathbf{A}$: le eventuali colonne libere di $\mathbf{U}$ corrisponderanno agli $\mathbf{u_i}$ nulli.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -5 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 5 & -1 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{31}(1)} \begin{pmatrix} 1 & -5 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{32}(-2)}$$

$$\rightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & -5 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{U}$$

Poichè $\mathbf{U}$ ha come colonne libere la 2^a e la 4^a, applicando l'algoritmo di Gram-Schimdt a $\{\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \mathbf{v_3}, \mathbf{v_4}\}$ otterremo $\mathbf{u_2} = \mathbf{0} = \mathbf{u_4}$.

$$\boxed{\mathbf{u_1} = \mathbf{v_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}}$$

$$\mathbf{u_2} = \mathbf{v_2} - \alpha_{12}\mathbf{u_1}, \qquad \mathbf{u_1} \neq \mathbf{0} \quad \Longrightarrow \quad \alpha_{12} = \frac{(\mathbf{u_1}|\mathbf{v_2})}{(\mathbf{u_1}|\mathbf{u_1})}$$

$$(\mathbf{u_1}|\mathbf{v_2}) = \mathbf{u_1}^H\mathbf{v_2} = \begin{pmatrix}1 & 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-5\\0\\5\end{pmatrix} = -10$$

$$(\mathbf{u_1}|\mathbf{u_1}) = \mathbf{u_1}^H\mathbf{u_1} = \begin{pmatrix}1 & 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} = 2$$

$$\implies \boxed{\alpha_{12} = -10/2 = -5}$$

$$\mathbf{u_2} = \mathbf{v_2} - \alpha_{12}\mathbf{u_1} =$$
$$= \mathbf{v_2} + 5\mathbf{u_1} =$$

$$= \begin{pmatrix}-5\\0\\5\end{pmatrix} + 5\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} = \boxed{\mathbf{0} = \mathbf{u_2}}$$

$$\mathbf{u_3} = \mathbf{v_3} - \alpha_{13}\mathbf{u_1} - \alpha_{23}\mathbf{u_2},$$

$$\mathbf{u_1} \neq \mathbf{0} \quad \implies \quad \alpha_{13} = \frac{(\mathbf{u_1}|\mathbf{v_3})}{(\mathbf{u_1}|\mathbf{u_1})}$$

$$(\mathbf{u_1}|\mathbf{v_3}) = \mathbf{u_1}^H\mathbf{v_3} = \begin{pmatrix}1 & 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\1\\-1\end{pmatrix} = 4$$

$$\implies \boxed{\alpha_{13} = 4/2 = 2}$$

$$\mathbf{u_2} = \mathbf{0} \quad \implies \quad \boxed{\alpha_{23} = 0}$$

$$\mathbf{u_3} = \mathbf{v_3} - \alpha_{13}\mathbf{u_1} - \alpha_{23}\mathbf{u_2} =$$
$$= \mathbf{v_3} - 2\mathbf{u_1} =$$

$$= \begin{pmatrix}3\\1\\-1\end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \mathbf{u_3}}$$

$$\mathbf{u_4} = \mathbf{v_4} - \alpha_{14}\mathbf{u_1} - \alpha_{24}\mathbf{u_2} - \alpha_{34}\mathbf{u_3},$$

$$\mathbf{u_1} \neq \mathbf{0} \quad \implies \quad \alpha_{14} = \frac{(\mathbf{u_1}|\mathbf{v_4})}{(\mathbf{u_1}|\mathbf{u_1})}$$

$$(\mathbf{u_1}|\mathbf{v_4}) = \mathbf{u_1}^H\mathbf{v_4} = \begin{pmatrix}1 & 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4\\1\\-2\end{pmatrix} = 6$$

$$\implies \boxed{\alpha_{14} = 6/2 = 3}$$

$$\mathbf{u_2} = \mathbf{0} \quad \implies \quad \boxed{\alpha_{24} = 0}$$

$$\mathbf{u_3} \neq \mathbf{0} \quad \Longrightarrow \quad \alpha_{34} = \frac{(\mathbf{u_3}|\mathbf{v_4})}{(\mathbf{u_3}|\mathbf{u_3})}$$

$$(\mathbf{u_3}|\mathbf{v_4}) = \mathbf{u_3}^H \mathbf{v_4} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = 3$$

$$(\mathbf{u_3}|\mathbf{u_3}) = \mathbf{u_3}^H \mathbf{u_3} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 3$$

$$\Longrightarrow \quad \boxed{\alpha_{34} = 3/3 = 1}$$

$$\mathbf{u_4} = \mathbf{v_4} - \alpha_{14}\mathbf{u_1} - \alpha_{24}\mathbf{u_2} - \alpha_{34}\mathbf{u_3} =$$
$$= \mathbf{v_4} - 3\mathbf{u_1} - \mathbf{u_3} =$$

$$= \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \boxed{\mathbf{0} = \mathbf{u_4}}$$

$\boxed{II}$ Poniamo

$$\mathbf{Q_0} = \begin{pmatrix} \mathbf{u_1} & \mathbf{u_2} & \mathbf{u_3} & \mathbf{u_4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{R_0} = \begin{pmatrix} 1 & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \alpha_{14} \\ 0 & 1 & \alpha_{23} & \alpha_{24} \\ 0 & 0 & 1 & \alpha_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -5 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$\mathbf{A} = \mathbf{Q_0}\mathbf{R_0}$ è una decomposizione $\mathbf{Q_0}\mathbf{R_0}$-non-normalizzata per $\mathbf{A}$.

(b) $\boxed{III}$ Sia $\mathbf{Q_1}$ la matrice che si ottiene dalla matrice $\mathbf{Q_0}$, ottenuta al punto $\boxed{II}$, togliendo tutte le (eventuali) colonne nulle di $\mathbf{Q_0}$. In questo caso $\mathbf{Q_0}$ ha due colonne nulle, la 2^a e la 4^a, quindi

$$\mathbf{Q_1} = \begin{pmatrix} \mathbf{u_1} & \mathbf{u_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Sia $\mathbf{R_1}$ la matrice che si ottiene dalla matrice $\mathbf{R_0}$, ottenuta al punto $\boxed{II}$, togliendo le righe di $\mathbf{R_0}$ che corrispondono alle colonne che sono state tolte da $\mathbf{Q_0}$ per ottenere $\mathbf{Q_1}$.

In questo caso, poichè per ottenere $\mathbf{Q_1}$ sono state tolte da $\mathbf{Q_0}$ la 2^a e la 4^a colonna, allora per ottenere $\mathbf{R_1}$ si toglie da $\mathbf{R_0}$ la 2^a riga e la 4^a riga. Dunque

$$\mathbf{R_1} = \begin{pmatrix} 1 & -5 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$\boxed{IV}$ Costruiamo la matrice diagonale $\mathbf{D}$ che ha sulla diagonale la norma euclidea delle colonne di $\mathbf{Q_1}$ (ossia delle colonne non nulle di $\mathbf{Q_0}$), e calcoliamo $\mathbf{D}^{-1}$.

Poichè

$$||\mathbf{u_1}||_2 = \sqrt{(\mathbf{u_1}|\mathbf{u_1})} = \sqrt{2} \quad \text{e} \quad ||\mathbf{u_3}||_2 = \sqrt{(\mathbf{u_3}|\mathbf{u_3})} = \sqrt{3},$$

allora

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} ||\mathbf{u_1}||_2 & 0 \\ 0 & ||\mathbf{u_3}||_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & \sqrt{3} \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{D}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}.$$

$\boxed{V}$ Poniamo

$$\mathbf{Q} = \mathbf{Q_1}\mathbf{D}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{R} = \mathbf{D}\mathbf{R_1} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & \sqrt{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -5 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & -5\sqrt{2} & 2\sqrt{2} & 3\sqrt{2} \\ 0 & 0 & \sqrt{3} & \sqrt{3} \end{pmatrix}.$$

Allora $\mathbf{A} = \mathbf{QR}$ è una decomposizione $\mathbf{QR}$-normalizzata di $\mathbf{A}$.

(c) La matrice di proiezione sullo spazio delle colonne $C(\mathbf{A})$ di $\mathbf{A}$ è $\mathbf{P} = \mathbf{Q}\mathbf{Q}^H$:

$$\mathbf{P} = \mathbf{Q}\mathbf{Q}^H = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{2}+\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{2}+\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{2}+\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2}+\frac{1}{3} \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

ESERCIZIO TIPO 17

Si trovi l'equazione della parabola che meglio approssima i cinque punti di $\mathbb{R}^2$:

$$P_1(-3,-8), \quad P_2(-1,-2), \quad P_3(0,-1), \quad P_4(1,-3), \quad P_5(3,-6).$$

Cerchiamo l'equazione della parabola che approssima a minimi quadrati i cinque punti. Siano

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 1 & x_N & x_N^2 & \dots & x_N^n \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_N \end{pmatrix}$$

dove

$N = 5$	è il numero dei punti P_i da approssimare,
$n = 2$	è il grado del polinomio con cui si vuol fare l'approssimazione (rendendo minima la somma dei quadrati degli errori)
(x_i, y_i)	sono le coordinate del punto P_i, per $i = 1, \dots, N$.

Nel nostro caso

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 9 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{y} = \begin{pmatrix} -8 \\ -2 \\ -1 \\ -3 \\ -6 \end{pmatrix}.$$

Dopo aver calcolato

$$\mathbf{A}^H = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -3 & -1 & 0 & 1 & 3 \\ 9 & 1 & 0 & 1 & 9 \end{pmatrix},$$

calcoliamo

$$\mathbf{B} = \mathbf{A}^H\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -3 & -1 & 0 & 1 & 3 \\ 9 & 1 & 0 & 1 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 9 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 20 \\ 0 & 20 & 0 \\ 20 & 0 & 164 \end{pmatrix} \text{ e}$$

$$\mathbf{b} = \mathbf{A}^H\mathbf{y} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -3 & -1 & 0 & 1 & 3 \\ 9 & 1 & 0 & 1 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -8 \\ -2 \\ -1 \\ -3 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -20 \\ 5 \\ -131 \end{pmatrix}.$$

Poichè

$$\left.\begin{array}{c} \textbf{gli } \mathbf{x_i} \textbf{ sono tutti distinti, per } \mathbf{i = 1, \ldots, 5} \\ \\ N = 5 \geq 3 = 2 + 1 = n + 1, \end{array}\right\} \Longrightarrow \operatorname{rk}(\mathbf{A}) = n + 1 = 3$$

allora

$$\operatorname{rk}(\mathbf{A}^H) = \operatorname{rk}(\mathbf{A}) = \operatorname{rk}(\mathbf{B}) = n + 1 = 3,$$

per cui $\mathbf{B}$ è non singolare. Quindi il sistema

$$\mathbf{Bz} = \mathbf{b} \left(\text{ nell'incognita } \mathbf{z} = \begin{pmatrix} z_0 \\ z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \right)$$

(ossia il sistema delle equazioni normali $\mathbf{A}^H\mathbf{Az} = \mathbf{A}^H\mathbf{y}$
associato al sistema $\mathbf{Az} = \mathbf{y}$),

ha un'unica soluzione (che quindi è la soluzione ai minimi quadrati del sistema $\mathbf{Az}$=$\mathbf{y}$).
Facendo una E.G. sulla matrice aumentata del sistema otteniamo:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{B} & | & \mathbf{b} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 20 & | & -20 \\ 0 & 20 & 0 & | & 5 \\ 20 & 0 & 164 & | & -131 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{31}(-20)E_1(\frac{1}{5})}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & | & -4 \\ 0 & 20 & 0 & | & 5 \\ 0 & 0 & 84 & | & -51 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_3(\frac{1}{84})E_2(\frac{1}{20})}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & | & -4 \\ 0 & 1 & 0 & | & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & | & -\frac{17}{28} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{U} & | & \mathbf{d} \end{pmatrix}$$

Il sistema **Bz**=**b** è equivalente al sistema **Uz**=**d**, che è una forma compatta per

$$\begin{cases} z_0 + 4z_2 = -4 \\ z_1 = \frac{1}{4} \\ z_2 = -\frac{17}{28} \end{cases}$$

Con la sostituzione all'indietro otteniamo

$$\begin{cases} z_2 &= & -\frac{17}{28} \\ z_1 &= & \frac{1}{4} \\ z_0 &= & -4z_2 - 4 & = & -4 \cdot \Big(-\frac{17}{28} \Big) - 4 & = & -\frac{11}{7} \end{cases}$$

Dunque l'unica soluzione del sistema delle equazioni normali è

$$\mathbf{z_0} = \begin{pmatrix} z_0 \\ z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{11}{7} \\ \frac{1}{4} \\ -\frac{17}{28} \end{pmatrix}$$

e la parabola che approssima ai minimi quadrati i cinque punti ha equazione:

$$\begin{aligned} y &= z_0 + z_1 x + z_2 x^2 = \\ &= -\frac{11}{7} + \frac{1}{4}x - \frac{17}{28}x^2. \end{aligned}$$

ESERCIZIO TIPO 18

Sia $\mathbf{A}(z) = \begin{pmatrix} z & \overline{z} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & z-i \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, dove $z \in \mathbb{C}$.
Si dica per quali $z \in \mathbb{C}$ la matrice $\mathbf{A}(z)$ è non singolare.

$\mathbf{A}(z)$ è non singolare se e solo se $\mathrm{Det}(\mathbf{A}(z)) \neq 0$. Calcoliamo dunque $\mathrm{Det}(\mathbf{A}(z))$.

$$\mathrm{Det}(\mathbf{A}(z)) \overset{\text{sviluppato rispetto alla } 2^a \text{riga}}{=} (-1)^{2+3}\mathrm{Det}\begin{pmatrix} z & \overline{z} & 0 \\ 1 & 1 & z-i \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$\overset{\text{sviluppato rispetto alla } 3^a \text{ colonna}}{=} -(z-i)(-1)^{2+3}\mathrm{Det}\begin{pmatrix} z & \overline{z} \\ 1 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= (z-i)(z-\overline{z})$$

Quindi $\mathbf{A}(z)$ è non singolare se e solo se $(z-i)(z-\overline{z}) \neq 0$.

Si osservi che $(z-i)(z-\overline{z}) = 0$ se e solo se o $z-i=0$, e quindi $z=i$, oppure $z-\overline{z}=0$, e quindi $z=\overline{z}$. Poichè

$$z = \overline{z} \iff z \in \mathbb{R},$$

allora

$$\mathrm{Det}(\mathbf{A}(z)) = 0 \iff z \in \mathbb{R} \cup \{i\}$$

e quindi

$$\mathrm{Det}(\mathbf{A}(z)) \neq 0 \iff z \notin \mathbb{R} \cup \{i\}.$$

Concludendo

$$\mathbf{A}(z) \text{ è non singolare} \iff z \notin \mathbb{R} \cup \{i\}.$$

ESERCIZIO TIPO 19

Siano $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -3i \\ 0 & 3 & 0 \\ 3i & 0 & 0 \end{pmatrix}$ e $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -3i \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Si trovino:
– i loro autovalori,
– le loro molteplicità algebriche,
– le loro molteplicità geometriche,
– basi dei loro autospazi.

Il polinomio caratteristico di $\mathbf{A}$ è:

$$
\begin{aligned}
p_{\mathbf{A}}(x) \quad &= \mathrm{Det}(\mathbf{A} - x\mathbf{I}_3) = \mathrm{Det}\begin{pmatrix} -x & 0 & -3i \\ 0 & 3-x & 0 \\ 3i & 0 & -x \end{pmatrix} = \\
&= (-1)^{2+2}(3-x)\mathrm{Det}\begin{pmatrix} -x & -3i \\ 3i & -x \end{pmatrix} = \\
&= (3-x)[(-x)^2 - (-3i)\cdot 3i] = (3-x)(x^2+9i^2) = (3-x)(x^2-9) = \\
&= (-3-x)(3-x)^2.
\end{aligned}
$$

Gli autovalori di $\mathbf{A}$ sono gli zeri del polinomio caratteristico $p_{\mathbf{A}}(x)$ di $\mathbf{A}$, ossia le soluzioni dell'equazione $p_{\mathbf{A}}(x) = 0$. Dal momento che le soluzioni dell'equazione

$$(-3-x)(3-x)^2 = 0$$

sono -3 e 3, gli autovalori di $\mathbf{A}$ sono:

$$\lambda_1 = -3 \quad \text{e} \quad \lambda_2 = 3.$$

Siano m_1 ed m_2 le molteplicità algebriche e d_1 e d_2 le molteplicità geometriche di λ_1 e λ_2 rispettivamente. Da

$$p_{\mathbf{A}}(x) = (-3-x)(3-x)^2 = (\lambda_1 - x)^{m_1}(\lambda_2 - x)^{m_2}$$

otteniamo:

$$m_1 = 1 \quad \text{e} \quad m_2 = 2.$$

Infine, da $1 \leq d_i \leq m_i = 1$ per $i = 1, 2$, otteniamo:

$$d_1 = 1 \quad \text{e} \quad 1 \leq d_2 \leq 2.$$

$$E_{\mathbf{A}}(\lambda_1) = E_{\mathbf{A}}(-3) = N(\mathbf{A} - (-3)\mathbf{I}_3) = N(\mathbf{A} + 3\mathbf{I}_3) = N\Big(\begin{pmatrix} 3 & 0 & -3i \\ 0 & 6 & 0 \\ 3i & 0 & 3 \end{pmatrix} \Big)$$

Da una E.G. su $\quad \mathbf{A} + 3\mathbf{I}_3 \quad$:

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & -3i \\ 0 & 6 & 0 \\ 3i & 0 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{31}(-3i)E_1(\frac{1}{3})} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -i \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_2(\frac{1}{6})} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -i \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

segue che

$$E_{\mathbf{A}}(-3) = N\Big(\begin{pmatrix} 3 & 0 & -3i \\ 0 & 6 & 0 \\ 3i & 0 & 3 \end{pmatrix} \Big) = N\Big(\begin{pmatrix} 1 & 0 & -i \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Big) = \Big\{ \begin{pmatrix} ih \\ 0 \\ h \end{pmatrix} \Big| h \in \mathbb{C} \Big\},$$

e quindi $\Big\{ \begin{pmatrix} i \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Big\}$ è una base di $E_{\mathbf{A}}(\lambda_1) = E_{\mathbf{A}}(-3)$.

$$E_{\mathbf{A}}(\lambda_2) = E_{\mathbf{A}}(3) = N(\mathbf{A} - 3\mathbf{I}_3) = N\Big(\begin{pmatrix} -3 & 0 & -3i \\ 0 & 0 & 0 \\ 3i & 0 & -3 \end{pmatrix} \Big)$$

Da una E.G. su $\quad \mathbf{A} - 3\mathbf{I}_3 \quad$:

$$\begin{pmatrix} -3 & 0 & -3i \\ 0 & 0 & 0 \\ 3i & 0 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{31}(-3i)E_1(-\frac{1}{3})} \begin{pmatrix} 1 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

segue che

$$E_{\mathbf{A}}(3) = N\Big(\begin{pmatrix} -3 & 0 & -3i \\ 0 & 0 & 0 \\ 3i & 0 & -3 \end{pmatrix} \Big) = N\Big(\begin{pmatrix} 1 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Big) = \Big\{ \begin{pmatrix} -ih \\ k \\ h \end{pmatrix} \Big| h, k \in \mathbb{C} \Big\},$$

e quindi

$$d_2 = \dim(E_{\mathbf{A}}(3)) = \text{ [numero di colonne di } (\mathbf{A} - 3\mathbf{I}_3)] - \mathrm{rk}(\mathbf{A} - 3\mathbf{I}_3) = 3 - 1 = 2$$

e $\left\{ \begin{pmatrix} -i \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ è una base di $E_{\mathbf{A}}(\lambda_2) = E_{\mathbf{A}}(3)$.

B è una matrice triangolare, per cui i suoi autovalori sono i suoi elementi diagonali:

$$\lambda_1 = 0 \text{ e } \lambda_2 = 3.$$

$\Big($Infatti, il polinomio caratteristico di **B** è:

$$\begin{aligned} p_{\mathbf{B}}(x) &= \mathrm{Det}(\mathbf{B} - x\mathbf{I}_3) = \mathrm{Det} \begin{pmatrix} -x & 0 & -3i \\ 0 & 3-x & 0 \\ 0 & 0 & -x \end{pmatrix} = \\ &= (-1)^{3+3}(-x)\mathrm{Det} \begin{pmatrix} -x & 0 \\ 0 & 3-x \end{pmatrix} = \\ &= (-x)(-x)(3-x) = x^2(3-x), \end{aligned}$$

e gli autovalori di **B** sono gli zeri del polinomio caratteristico $p_{\mathbf{B}}(x)$ di **B**, ossia le soluzioni dell'equazione $x^2(3-x) = 0.\Big)$

Siano m_1 ed m_2 le molteplicità algebriche e d_1 e d_2 le molteplicità geometriche di λ_1 e λ_2 rispettivamente. Da

$$p_{\mathbf{B}}(x) = x^2(3-x) = (\lambda_1 - x)^{m_1}(\lambda_2 - x)^{m_2}$$

otteniamo:

$$m_1 = 2 \quad \text{e} \quad m_2 = 1.$$

Infine, da $1 \leq d_i \leq m_i = 1$ per $i = 1, 2$, otteniamo:

$$1 \leq d_1 \leq 2 \quad \text{e} \quad d_2 = 1.$$

$$E_{\mathbf{B}}(\lambda_1) = E_{\mathbf{B}}(0) = N(\mathbf{B} - 0\mathbf{I}_3) = N(\mathbf{B})$$

Da una E.G. su **B** :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -3i \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_2(\frac{1}{3}i)E_1(\frac{1}{3})E_{12}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

segue che

$$E_{\mathbf{B}}(\lambda_1) = E_{\mathbf{B}}(0) = N(\mathbf{B}) = N\Big(\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Big) = \Big\{ \begin{pmatrix} h \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Big| h \in \mathbb{C} \Big\},$$

e quindi

$$d_1 = \dim(E_{\mathbf{B}}(\lambda_1)) = \text{ (numero di colonne di } \mathbf{B}) - \text{rk}(\mathbf{B}) = 3 - 2 = 1$$

e $\Big\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Big\}$ è una base di $E_{\mathbf{B}}(\lambda_1) = E_{\mathbf{B}}(0)$.

$$E_{\mathbf{B}}(\lambda_2) = E_{\mathbf{B}}(3) = N(\mathbf{B} - 3\mathbf{I}_3) = N\Big(\begin{pmatrix} -3 & 0 & -3i \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \Big)$$

Da una E.G. su $\quad \mathbf{B} - 3\mathbf{I}_3 \quad$:

$$\begin{pmatrix} -3 & 0 & -3i \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_3(-\frac{1}{3})E_{23}E_1(-\frac{1}{3})} \begin{pmatrix} 1 & 0 & i \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

segue che

$$E_{\mathbf{B}}(3) = N\Big(\begin{pmatrix} -3 & 0 & -3i \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \Big) = N\Big(\begin{pmatrix} 1 & 0 & i \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Big) = \Big\{ \begin{pmatrix} 0 \\ h \\ 0 \end{pmatrix} \Big| h \in \mathbb{C} \Big\},$$

e quindi $\Big\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Big\}$ è una base di $E_{\mathbf{B}}(\lambda_2) = E_{\mathbf{B}}(3)$.

ESERCIZIO TIPO 20

Sia $\mathbf{A}(\alpha) = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \alpha-1 & 0 \\ \alpha & \alpha+1 & \alpha-1 \end{pmatrix}$ dove $\alpha \in \mathbb{R}$.

Per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$, si trovino:

– gli autovalori di $\mathbf{A}(\alpha)$,
– le loro molteplicità algebriche,
– le loro molteplicità geometriche,
– basi degli autospazi di $\mathbf{A}(\alpha)$.

Per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$, la matrice $\mathbf{A}(\alpha)$ è una triangolare, per cui i suoi autovalori sono i suoi elementi diagonali

$$\lambda_1 = \alpha \quad \text{e} \quad \lambda_2 = \alpha - 1$$

con molteplicità algebriche

$$m_1 = 1 \quad \text{e} \quad m_2 = 2.$$

(Infatti, il polinomio caratteristico di $\mathbf{A}(\alpha)$ è: $p_{\mathbf{A}(\alpha)}(x) = (\alpha - x)(\alpha - 1 - x)^2$.)

Siano d_1 e d_2 le molteplicità geometriche di λ_1 e λ_2. Da $1 \leq d_i \leq m_i = 1$ per $i = 1, 2$, otteniamo:

$$d_1 = 1 \quad \text{e} \quad d_2 \leq 2.$$

$$E_{\mathbf{A}(\alpha)}(\lambda_1) = E_{\mathbf{A}(\alpha)}(\alpha) = N(\mathbf{A}(\alpha) - \alpha\mathbf{I}_3) = N\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ \alpha & \alpha+1 & -1 \end{pmatrix} \right)$$

Da una E.G. su $\quad \mathbf{A}(\alpha) - \alpha\mathbf{I}_3 \quad$:

$$\boxed{\text{caso } \alpha = 0 :} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_2(-1)E_{21}(1)E_{13}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\boxed{\text{caso } \alpha \neq 0 :} \quad \alpha \neq 0 \quad \Longrightarrow \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ \alpha & \alpha+1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_2(-1)E_1(\frac{1}{\alpha})E_{13}} \begin{pmatrix} 1 & \frac{\alpha+1}{\alpha} & -\frac{1}{\alpha} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

segue che

$$\boxed{\text{caso } \alpha = 0:} \quad d_1 = 1 \text{ e } \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \text{ è una base di } E_{\mathbf{A}(\alpha)}(\lambda_1)$$

$$\boxed{\text{caso } \alpha \neq 0:} \quad d_1 = 1 \text{ e } \left\{ \begin{pmatrix} \frac{1}{\alpha} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \text{ è una base di } E_{\mathbf{A}(\alpha)}(\lambda_1).$$

N.B.: $\underline{\text{Per ogni } \alpha \in \mathbb{R} \text{ si ha che}} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \alpha \end{pmatrix} \right\} \underline{\text{ è una base di } E_{\mathbf{A}}(\lambda_1).}$

$$E_{\mathbf{A}(\alpha)}(\lambda_2) = E_{\mathbf{A}(\alpha)}(\alpha - 1) = N(\mathbf{A}(\alpha) - (\alpha - 1)\mathbf{I}_3) = N\Big(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \alpha & \alpha+1 & 0 \end{pmatrix} \Big)$$

Da una E.G. su $\quad \mathbf{A}(\alpha) - (\alpha - 1)\mathbf{I}_3 \quad$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \alpha & \alpha+1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{21}E_{31}(-\alpha)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha+1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\boxed{\text{caso } \alpha = -1:} \quad E_{\mathbf{A}(\alpha)}(\lambda_2) = N\Big(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Big)$$

$$\boxed{\text{caso } \alpha \neq -1:} \quad E_{\mathbf{A}(\alpha)}(\lambda_2) = N\Big(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Big).$$

Concludiamo che

$$\boxed{\text{caso } \alpha = -1:} \quad d_2 = 2 \text{ e } \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \text{ è una base di } E_{\mathbf{A}(\alpha)}(\lambda_2)$$

$$\boxed{\text{caso } \alpha \neq -1:} \quad d_2 = 1 \text{ e } \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \text{ è una base di } E_{\mathbf{A}(\alpha)}(\lambda_2).$$

ESERCIZIO TIPO 21

Sia $\mathbf{A}(\delta)$ una matrice quadrata, dipendente dal parametro $\delta \in \mathbb{C}$, con polinomio caratteristico uguale a

$$p_{\mathbf{A}(\delta)}(x) = -x^7 + (1+4\delta)x^6 + (4+\delta)x^5 - 4x^4 - \delta x + 3\delta$$

(a) Per quali $\delta \in \mathbb{C}$ si ha che $\mathbf{A}(\delta)$ è non singolare ?

(b) Per quale $\delta_0 \in \mathbb{C}$ si ha che $\mathrm{Tr}(\mathbf{A}(\delta_0)) = 0$? ($\mathrm{Tr}(\mathbf{A}(\delta_0))$ indica la traccia della matrice $\mathbf{A}(\delta_0)$)

(c) Sia $\mathbf{A} = \mathbf{A}(0)$ la matrice che si ottiene ponendo $\delta = 0$. Per quali $\alpha \in \mathbb{C}$ si ha che $\mathbf{A} - \alpha\mathbf{I}$ è non singolare ?

(a) $\mathbf{A}(\delta)$ è non singolare $\iff$ $\mathrm{Det}(\mathbf{A}(\delta)) \neq 0$.

Poichè

$$\mathrm{Det}(\mathbf{A}(\delta)) = \Big(\text{ termine noto di } p_{\mathbf{A}(\delta)}(x)\Big) = 3\delta$$

allora

$$\mathbf{A}(\delta) \text{ è non singolare } \iff \quad 3\delta \neq 0 \quad \iff \delta \neq 0.$$

(b) Poichè $n = \deg(p_{\mathbf{A}(\delta)}(x)) = 7$ e

$$\Big(\text{ il coefficiente di } x^{n-1} \text{ in } p_{\mathbf{A}(\delta)}(x)\Big) = (-1)^{n-1}\mathrm{Tr}(\mathbf{A}(\delta)),$$

allora

$$\mathrm{Tr}(\mathbf{A}(\delta)) = (-1)^{7-1}\mathrm{Tr}(\mathbf{A}(\delta)) = \Big(\text{ il coefficiente di } x^{7-1} \text{ in } p_{\mathbf{A}(\delta)}(x)\Big) = 1+4\delta,$$

per cui $\delta_0 \in \mathbb{C}$ è la soluzione dell'equazione (nell'incognita δ):

$$1 + 4\delta = 0.$$

Dunque $\delta_0 = -\frac{1}{4}$.

(c) Si ha:

$$\mathbf{A}-\alpha\mathbf{I} \text{ è non singolare} \iff N(\mathbf{A}-\alpha\mathbf{I})=\{\mathbf{0}\} \iff E_{\mathbf{A}}(\alpha)=\{\mathbf{0}\} \iff$$
$$\iff \alpha \notin \mathrm{Spec}(\mathbf{A}).$$

Calcoliamo gli autovalori di $\mathbf{A}$. Il polinomio caratteristico di $\mathbf{A}$ è:

$$\begin{aligned} p_{\mathbf{A}}(x) &= -x^7+x^6+4x^5-4x^4 = -x^6(x-1)+4x^4(x-1) = \\ &= -(x-1)(x^6-4x^4) = -x^4(x-1)(x^2-4) = \\ &= -x^4(x-1)(x-2)(x+2). \end{aligned}$$

I suoi zeri sono (gli autovalori di $\mathbf{A}$):

$$\lambda_1 = 0 \text{ (con } m_1=4), \quad \lambda_2 = 1 \text{ (con } m_2=1),$$
$$\lambda_3 = 2 \text{ (con } m_3=1), \quad \lambda_4 = -2 \text{ (con } m_4=1).$$

Dunque Spec($\mathbf{A}$)$=\{-2,0,1,2\}$ e

$$\mathbf{A}-\alpha\mathbf{I} \text{ è non singolare} \iff \alpha \notin \{-2,0,1,2\}.$$

ESERCIZIO TIPO 22

Sia

$$\mathbf{A}(\alpha) = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \alpha - 1 & 0 \\ \alpha & \alpha + 1 & \alpha - 1 \end{pmatrix}, \text{ dove } \alpha \in \mathbb{R},$$

la matrice considerata nell'Esercizio Tipo 20.

(a) Si dica per quale/quali $\alpha \in \mathbb{R}$, la matrice $\mathbf{A}(\alpha)$ è diagonalizzabile.

(b) Per quel/quegli $\alpha \in \mathbb{R}$ per cui la matrice $\mathbf{A}(\alpha)$ è diagonalizzabile, si trovi una diagonalizzazione di $\mathbf{A}(\alpha)$.

(c) Per quel/quegli $\alpha \in \mathbb{R}$ per cui la matrice $\mathbf{A}(\alpha)$ è diagonalizzabile, si calcoli $\mathbf{A}(\alpha)^{123}$.

(a) Nell'Esercizio Tipo 20 abbiamo calcolato:

matrice	**autovalori**	**molteplicità algebriche**	**molteplicità geometriche**
$\mathbf{A}(\alpha)$ $\alpha \neq -1$	$\lambda_1 = \alpha$ $\lambda_2 = \alpha - 1$	$m_1 = 1$ $m_2 = 2$	$d_1 = 1$ $d_2 = 1$
$\mathbf{A}(-1)$	$\lambda_1 = \alpha = -1$ $\lambda_2 = \alpha - 1 = -2$	$m_1 = 1$ $m_2 = 2$	$d_1 = 1$ $d_2 = 2$

Dal momento che una matrice è diagonalizzabile se e solo se ciascun suo autovalore ha le due molteplicità, algebrica e geometrica, uguali tra loro, e

$$d_1 = 1 = m_1 \quad \forall \quad \alpha \in \mathbb{R},$$

$$m_2 = 2 \quad \forall \quad \alpha \in \mathbb{R},$$

allora:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(\alpha) \quad \text{è diagonalizzabile} \quad &\iff \quad d_2 = \dim(E_{\mathbf{A}(\alpha)}(\lambda_2)) = 2 \\ &\iff \quad \alpha = -1. \end{aligned}$$

(b) Posto $\mathbf{A} = \mathbf{A}(-1)$, nell'Esercizio Tipo 20 abbiamo visto che

$$\left\{\mathbf{v_1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\alpha} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\} \text{è una base di } E_{\mathbf{A}}(\lambda_1) = E_{\mathbf{A}}(-1) \text{ e}$$

$$\left\{\mathbf{w_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \mathbf{w_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\} \text{è una base di } E_{\mathbf{A}}(\lambda_2) = E_{\mathbf{A}}(-2).$$

Dunque se $\alpha = -1$, una diagonalizzazione di $\mathbf{A} = \mathbf{A}(-1)$ è:

$$\mathbf{A} = \mathbf{SDS}^{-1} \quad \text{con}$$

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{ed}$$

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} \mathbf{v_1} & \mathbf{w_1} & \mathbf{w_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(c) Posto $\mathbf{A} = \mathbf{A}(-1)$, da (b) otteniamo che

$$\mathbf{A}^{123} = (\mathbf{SDS}^{-1})^{123} = \mathbf{SD}^{123}\mathbf{S}^{-1} \quad \text{con}$$

$$\mathbf{D}^{123} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}^{123} = \begin{pmatrix} (-1)^{123} & 0 & 0 \\ 0 & (-2)^{123} & 0 \\ 0 & 0 & (-2)^{123} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2^{123} & 0 \\ 0 & 0 & -2^{123} \end{pmatrix} \quad \text{ed}$$

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Calcoliamo l'inversa di $\mathbf{S}$:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{S} & | & \mathbf{I_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{31}(-1)E_1(-1)}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{I_3} & | & \mathbf{S}^{-1} \end{pmatrix}$$

Dunque

$$\mathbf{S}^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{N.B.: } \mathbf{S}^{-1} = \mathbf{S}).$$

Concludendo:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^{123} &= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2^{123} & 0 \\ 0 & 0 & -2^{123} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2^{123} & 0 \\ -1 & 0 & -2^{123} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2^{123} & 0 \\ 1-2^{123} & 0 & -2^{123} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

ESERCIZIO TIPO 23

Sia

$$\mathbf{A}(\alpha) = \begin{pmatrix} 0 & -2i\alpha & 0 \\ 2i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \text{ dove } \alpha \text{ è un numero reale } \textbf{non negativo}.$$

(a) Per quali α **reali non negativi** la matrice $\mathbf{A}(\alpha)$ è diagonalizzabile ?

(b) Per quali α **reali non negativi** la matrice $\mathbf{A}(\alpha)$ è unitariamente diagonalizzabile ?

(c) Sia $\mathbf{A} = \mathbf{A}(1)$ la matrice che si ottiene ponendo $\alpha = 1$. Si trovi una diagonalizzazione unitaria $\mathbf{A} = \mathbf{UDU}^H$ per $\mathbf{A}$.

(a) Una matrice è diagonalizzabile se e solo se ciascun suo autovalore ha le due molteplicità, algebrica e geometrica, uguali tra loro. Calcoliamo gli autovalori di $\mathbf{A}(\alpha)$ e le loro molteplicità.

Il polinomio caratteristico di $\mathbf{A}$ è:

$$\begin{aligned} p_{\mathbf{A}}(x) &= \text{Det}(\mathbf{A} - x\mathbf{I}_3) = \text{Det}\begin{pmatrix} -x & -2i\alpha & 0 \\ 2i & -x & 0 \\ 3i & 0 & -2-x \end{pmatrix} = \\ &= (-1)^{3+3}(-2-x)\text{Det}\begin{pmatrix} -x & -2i\alpha \\ 2i & -x \end{pmatrix} = \\ &= (-2-x)[(-x)^2 - (-2i\alpha)\cdot 2i] = \\ &= (-2-x)(x^2 + 4i^2\alpha) = \\ &= (-2-x)(x^2 - 4\alpha) = \\ &= (-2-x)(-2\sqrt{\alpha} - x)(2\sqrt{\alpha} - x). \end{aligned}$$

Qundi gli autovalori di $\mathbf{A}(\alpha)$ sono:

$$\lambda_1 = -2, \quad \lambda_2 = 2\sqrt{\alpha} \quad \text{e} \quad \lambda_3 = -2\sqrt{\alpha}.$$

Dal momento che α è un numero reale non negativo, allora

$$
\begin{aligned}
&\lambda_1 \neq \lambda_2, \\
&\lambda_1 = \lambda_3 \quad \Longleftrightarrow \quad \alpha = 1, \\
&\lambda_2 = \lambda_3 \quad \Longleftrightarrow \quad \alpha = 0.
\end{aligned}
$$

matrice	**autovalori**	**molteplicità algebriche**	**molteplicità geometriche**
$\mathbf{A}(\alpha)$ $\alpha \notin \{0,1\}$	$\lambda_1 = -2$ $\lambda_2 = 2\sqrt{\alpha}$ $\lambda_3 = -2\sqrt{\alpha}$	$m_1 = 1$ $m_2 = 1$ $m_3 = 1$	$d_1 = 1$ $d_2 = 1$ $d_3 = 1$
$\mathbf{A}(0)$	$\lambda_1 = -2$ $\lambda_2 = 0$	$m_1 = 1$ $m_2 = 2$	$d_1 = 1$ $1 \leq d_2 \leq 2$
$\mathbf{A}(1)$	$\lambda_1 = -2$ $\lambda_2 = 2$	$m_1 = 2$ $m_2 = 1$	$1 \leq d_1 \leq 2$ $d_2 = 1$

Quindi se $\alpha \notin \{0,1\}$ allora $\mathbf{A}(\alpha)$ è diagonalizzabile, inoltre:

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{A}(0) \quad \text{è diagonalizzabile} \quad \Longleftrightarrow \quad d_2 = \dim(E_{\mathbf{A}(0)}(0)) = m_2 = 2, \\
&\mathbf{A}(1) \quad \text{è diagonalizzabile} \quad \Longleftrightarrow \quad d_1 = \dim(E_{\mathbf{A}(1)}(-2)) = m_1 = 2.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
d_2 \quad &= \dim(E_{\mathbf{A}(0)}(0)) = \dim(N(\mathbf{A}(0)) = \\
&= [\text{numero di colonne di } \mathbf{A}(0)] - \operatorname{rk}(\mathbf{A}(0)) = \\
&= 3 - \operatorname{rk}(\mathbf{A}(0)) \\
d_1 \quad &= \dim(E_{\mathbf{A}(1)}(-2)) = \dim(N(\mathbf{A}(1) + 2\mathbf{I}_3) = \\
&= [\text{numero di colonne di } \mathbf{A}(1) + 2\mathbf{I}_3] - \operatorname{rk}(\mathbf{A}(1) + 2\mathbf{I}_3) = \\
&= 3 - \operatorname{rk}(\mathbf{A}(1) + 2\mathbf{I}_3)
\end{aligned}
$$

Da una E.G. su $\mathbf{A}(0)$:

$$\mathbf{A}(0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_2(-\frac{1}{2})E_{23}E_1(-\frac{1}{2}i)E_{12}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

per cui $\mathrm{rk}(\mathbf{A}(0)) = 2$, e quindi

$$d_2 = \dim(E_{\mathbf{A}(0)}(0)) = 3 - 2 = 1.$$

Dunque $\mathbf{A}(0)$ non è diagonalizzabile.

Da una E.G. su $\mathbf{A}(1) + 2\mathbf{I}_3$:

$$\mathbf{A}(1) + 2\mathbf{I}_3 = \begin{pmatrix} 0 & -2i & 0 \\ 2i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} + 2\mathbf{I}_3 = \begin{pmatrix} 2 & -2i & 0 \\ 2i & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{21}(-2i)E_1(\frac{1}{2})}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

per cui $\mathrm{rk}(\mathbf{A}(1) + 2\mathbf{I}_3) = 1$, e quindi

$$d_1 = \dim(E_{\mathbf{A}(1)}(-2)) = 3 - 1 = 2.$$

Dunque $\mathbf{A}(1)$ è diagonalizzabile.

In conclusione (essendo α reale non negativo):

$$\mathbf{A}(\alpha) \quad \text{è diagonalizzabile} \quad \iff \quad \alpha \in \mathbb{R} \text{ con } \alpha > 0.$$

(b) Abbiamo:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(\alpha) \text{ è unitariamente diagonalizzabile} \quad &\iff \mathbf{A}(\alpha) \text{ è normale} \\ &\iff \mathbf{A}(\alpha)\mathbf{A}(\alpha)^H = \mathbf{A}(\alpha)^H\mathbf{A}(\alpha). \end{aligned}$$

Calcoliamo $\mathbf{A}(\alpha)^H$ tenendo conto che $\overline{\alpha} = \alpha$, essendo $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$\mathbf{A}(\alpha)^H = \begin{pmatrix} 0 & \overline{2i} & 0 \\ \overline{-2i\alpha} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2i & 0 \\ 2i\overline{\alpha} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2i & 0 \\ 2i\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Quindi

$$\mathbf{A}(\alpha)\mathbf{A}(\alpha)^H = \begin{pmatrix} 0 & -2i\alpha & 0 \\ 2i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -2i & 0 \\ 2i\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4\alpha^2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A}(\alpha)^H\mathbf{A}(\alpha) = \begin{pmatrix} 0 & -2i & 0 \\ 2i\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -2i\alpha & 0 \\ 2i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4\alpha^2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix},$$

per cui, essendo α un numero reale non negativo,

$$\mathbf{A}(\alpha) \text{ è unitariamente diagonalizzabile} \iff \alpha^2 = 1 \iff \alpha = 1.$$

(c) Abbiamo visto che $\mathbf{A} = \mathbf{A}(1) = \begin{pmatrix} 0 & -2i & 0 \\ 2i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ ha due autovalori:

$$\lambda_1 = -2 \text{ con molteplicità } m_1 = d_1 = 2 \text{ e}$$

$$\lambda_2 = 2 \text{ con molteplicità } m_2 = d_2 = 1.$$

Cerchiamo **basi ortonormali** degli autospazi di $\mathbf{A}$.

$$E_{\mathbf{A}}(\lambda_1) = E_{\mathbf{A}}(-2) = E_{\mathbf{A}(1)}(-2) = N(\mathbf{A}(1) + 2\mathbf{I}_3),$$

e poichè abbiamo visto che $\begin{pmatrix} 1 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ è una forma ridotta di Gauss per $\mathbf{A}(1)+2\mathbf{I}_3$, allora

$$E_{\mathbf{A}}(\lambda_1) = E_{\mathbf{A}}(-2) = N\Big(\begin{pmatrix} 1 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Big) = \Big\{ \begin{pmatrix} ih \\ h \\ k \end{pmatrix} \Big| h, k \in \mathbb{C} \Big\},$$

e quindi $\Big\{ \mathbf{v_1} = \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \mathbf{v_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Big\}$ è una base di $E_{\mathbf{A}}(\lambda_1) = E_{\mathbf{A}}(-2)$.

N.B.: In questo caso non occorre applicare l'algoritmo di G.S. a $\{\mathbf{v_1}; \mathbf{v_2}\}$: $\mathbf{v_1}^H\mathbf{v_2} = \mathbf{0}$, per cui

$$\{\mathbf{v_1}; \mathbf{v_2}\} \quad \textbf{è già una base ortogonale di } E_{\mathbf{A}}(-2)$$

Per ottenere una base ortonormale di $E_{\mathbf{A}}(-2)$, "normalizziamo"$\mathbf{v_1}$ e $\mathbf{v_2}$.

$$\|\mathbf{v_1}\|_2 = \sqrt{\mathbf{v_1}^H \mathbf{v_1}} = \sqrt{\begin{pmatrix} -i & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

$$\|\mathbf{v_2}\|_2 = \sqrt{\mathbf{v_2}^H \mathbf{v_2}} = \sqrt{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}} = \sqrt{1} = 1$$

per cui

$$\left\{ \frac{\mathbf{v_1}}{\|\mathbf{v_1}\|_2} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} i \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}; \frac{\mathbf{v_2}}{\|\mathbf{v_2}\|_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

è una **base ortonormale** di $E_{\mathbf{A}}(\lambda_1) = E_{\mathbf{A}}(-2)$.

$$E_{\mathbf{A}}(\lambda_2) = E_{\mathbf{A}}(2) = E_{\mathbf{A}(1)}(2) = N(\mathbf{A}(1) - 2\mathbf{I}_3).$$

Da una E.G. su $\quad \mathbf{A}(1) - 2\mathbf{I}_3 \quad$:

$$\mathbf{A}(1) - 2\mathbf{I}_3 = \begin{pmatrix} -2 & -2i & 0 \\ 2i & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_2(-\frac{1}{4})E_{23}E_{21}(-2i)E_1(-\frac{1}{2})} \begin{pmatrix} 1 & i & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

segue che

$$E_{\mathbf{A}}(\lambda_2) = E_{\mathbf{A}}(2) = N\Big(\begin{pmatrix} 1 & i & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Big) = \Big\{ \begin{pmatrix} -ih \\ h \\ 0 \end{pmatrix} \Big| h \in \mathbb{C} \Big\},$$

e quindi $\Big\{ \mathbf{w_1} = \begin{pmatrix} -i \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Big\}$ è una base di $E_{\mathbf{A}}(\lambda_2) = E_{\mathbf{A}}(2)$.

N.B.: Poichè ha un unico elemento, $\{\mathbf{w_1}\}$ è già una base ortogonale di $E_{\mathbf{A}}(2)$. Per ottenere una base ortonormale di $E_{\mathbf{A}}(2)$, "normalizziamo"$\mathbf{w_1}$.

$$\|\mathbf{w_1}\|_2 = \sqrt{\mathbf{w_1}^H \mathbf{w_1}} = \sqrt{\begin{pmatrix} i & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -i \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

per cui

$$\left\{ \frac{\mathbf{w_1}}{\|\mathbf{w_1}\|_2} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}}i \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

è una **base ortonormale** di $E_{\mathbf{A}}(\lambda_2) = E_{\mathbf{A}}(2)$.

Dunque se $\alpha = 1$, una diagonalizzazione unitaria di $\mathbf{A} = \mathbf{A}(1)$ è:

$$\mathbf{A} = \mathbf{UDU}^H \quad \text{con}$$

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{ed}$$

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} \frac{\mathbf{v_1}}{\|\mathbf{v_1}\|_2} & \frac{\mathbf{v_2}}{\|\mathbf{v_2}\|_2} & \frac{\mathbf{w_1}}{\|\mathbf{w_1}\|_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}i & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}}i \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

TESTI DEGLI ESERCIZI PER CASA

Esercizi per casa 1

$\boxed{\mathbf{1}}$ Per ciascuno dei seguenti numeri complessi

$$z_1 = i, \quad z_2 = -3i, \quad z_3 = 1-2i \quad \text{e} \quad z_4 = 5+3i$$

si calcolino il modulo ed il coniugato, e si scriva l'inverso in forma algebrica.

$\boxed{\mathbf{2}}$ Quali sono i numeri complessi z tali che $z = -\overline{z}$?

$\boxed{\mathbf{3}}$ Siano $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 1 & -3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 4 & -2 & -3 \end{pmatrix}$, $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ e $\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 0 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$.
Si calcoli $\mathbf{BDC} - 2\mathbf{A}) + 4\mathbf{C}$.

$\boxed{\mathbf{4}}$ Sia $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

(a) Si trovino tutte le matrici reali $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ tali che $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$.

(b) Si trovino tutte le matrici reali 2×2 $\mathbf{C}$ tali che $\mathbf{AC} = \mathbf{O}$.

$\boxed{\mathbf{5}}$ Siano $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2-3i & 1+i \\ 0 & i \\ 1-i & 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 1+i \end{pmatrix}$, $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 3+5i \\ 6 \\ 2-2i \end{pmatrix}$, $\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 7+i & 2+3i \\ 3-2i & 0 \end{pmatrix}$.

(a) Di ciascuna delle precedenti matrici si calcolino la trasposta, la coniugata e la H-trasposta.

(b) Si calcoli $(\mathbf{A}^H\overline{\mathbf{C}} + i\mathbf{B}^T)\overline{\mathbf{B}} + (1+3i)\mathbf{D}^H$.

Esercizi per casa 2

$\boxed{1}$ Si trovino forme ridotte di Gauss per le seguenti matrici:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 4 & 0 \\ 3 & -3 & 9 & 6 \\ 3 & -3 & 3 & -6 \end{pmatrix}, \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 3 & -9 \\ -2 & 6 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}, \mathbf{w}^T = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

$\boxed{2}$ Sia $\mathbf{A}(\alpha) = \begin{pmatrix} 2i & 0 & -2i & 2i\alpha \\ 1 & \alpha^2+4 & 0 & \alpha \\ 2 & 2\alpha^2+8 & 0 & 4\alpha \end{pmatrix}$, dove $\alpha \in \mathbb{C}$. Per ogni $\alpha \in \mathbb{C}$ si trovi una forma ridotta di Gauss $\mathbf{U}(\alpha)$ per $\mathbf{A}(\alpha)$ e si dica quali sono le colonne dominanti e quali sono le colonne libere di $\mathbf{U}(\alpha)$.

$\boxed{3}$ Si risolva il sistema lineare $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ nei seguenti casi:

(a) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 9 & 6 \\ 1 & -1 & 7 & 4 \\ 1 & -1 & 3 & 2 \\ -2 & 2 & -6 & -4 \end{pmatrix}$ e $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$;

(b) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 9 & 6 \\ 1 & -1 & 7 & 4 \\ 1 & -1 & 3 & 2 \\ -2 & 2 & -6 & -4 \end{pmatrix}$ e $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}$;

(c) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 9 & 6 \\ 1 & 0 & 7 & 4 \\ 1 & -1 & 5 & 2 \\ 1 & 0 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ e $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix}$.

$\boxed{4}$ Si risolva il sistema lineare $\mathbf{A}(\alpha)\mathbf{x} = \mathbf{b}(\alpha)$ dipendente dal parametro complesso α dove

$$\mathbf{A}(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & \alpha - i & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & \alpha - i & \alpha + i \\ -\alpha - i & -\alpha^2 - 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ e } \mathbf{b}(\alpha) = \begin{pmatrix} \alpha - i \\ \alpha^2 + 1 \\ 2\alpha \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Esercizi per casa 3

$\boxed{\mathbf{1}}$ Si trovino tutte le inverse destre della matrice $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

$\boxed{\mathbf{2}}$ Si trovino tutte le inverse sinistre della matrice $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.

$\boxed{\mathbf{3}}$ Si trovi una forma ridotta di Gauss-Jordan per la matrice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 & 0 & 0 & 6 \\ 2 & -2 & 3 & -2 & -1 & 8 \\ -2 & 2 & -2 & 0 & 0 & 5 \\ 3 & -3 & 4 & -2 & -1 & 12 \end{pmatrix}.$$

$\boxed{\mathbf{4}}$ Sia $\mathbf{A}(\alpha) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \alpha & \alpha^2 & -\alpha \\ 2\alpha & 2\alpha^2 & 1 \end{pmatrix}$, dove $\alpha \in \mathbb{R}$. Per quegli $\alpha \in \mathbb{R}$ per cui $\mathbf{A}(\alpha)$ è non singolare, si calcoli $\mathbf{A}(\alpha)^{-1}$.

$\boxed{\mathbf{5}}$ Sia $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 6i & 1-i \\ 3 & -i \end{pmatrix}$. Si calcoli $\mathbf{A}^{-1}$.

$\boxed{\mathbf{6}}$ Si dica per quali $\alpha \in \mathbb{C}$ la matrice $\mathbf{A}(\alpha) = \begin{pmatrix} \alpha + 3i & \alpha \\ \alpha + 3i & \alpha - i \end{pmatrix}$ è non singolare. Per tali α, si trovi l'inversa di $\mathbf{A}(\alpha)$.

Esercizi per casa 4

$\boxed{1}$ Si scrivano le matrici elementari $\mathbf{E_{13}(4)}$, $\mathbf{E_3(4)}$ ed $\mathbf{E_{13}}$ di ordine 3 e di ordine 4.

$\boxed{2}$ Sia $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{r}^T \\ \mathbf{r}^T \end{pmatrix}$ una matrice reale $2 \times n$ non nulla con le righe uguali. Si trovino tutte le matrici elementari $\mathbf{E}$ tali che $\mathbf{EA} = \begin{pmatrix} \mathbf{r}^T \\ 3\mathbf{r}^T \end{pmatrix}$.

$\boxed{3}$ Sia $\mathbf{A} = \mathbf{E}_{47}(2)\mathbf{E}_3(6)\mathbf{E}_{12}(-3)\mathbf{E}_{24}\mathbf{E}_5(3)$ di ordine n. Si scrivano $\mathbf{A}^{-1}$ ed $\mathbf{A}^T$ come prodotti di matrici elementari.

$\boxed{4}$ Sia $\mathbf{A}(\alpha) = \begin{pmatrix} \alpha & 3\alpha & 2\alpha & -2\alpha \\ 0 & 0 & \alpha^2+9 & \alpha^2+9 \\ 2 & 6 & 4 & -3+\alpha \\ 1 & 3 & 1 & -6-3\alpha \\ \alpha+1 & 3\alpha+3 & 2\alpha+1 & -1 \end{pmatrix}$, dove $\alpha \in \mathbb{C}$. Per ogni $\alpha \notin \{0, 3i, -3i\}$ si trovi una decomposizione $\mathbf{A}(\alpha) = \mathbf{L}(\alpha)\mathbf{U}(\alpha)$, scrivendo anche $\mathbf{L}(\alpha)$ come prodotto di matrici elementari.

$\boxed{5}$ Sia

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 9 & -6 & 0 \\ -2 & -6 & 4 & -1 \\ 0 & 2 & -4 & 0 \\ 1 & 7 & 6 & 0 \\ 1 & -4 & 10 & -4 \end{pmatrix}.$$

Si trovi una decomposizione $\mathbf{A} = \mathbf{P}^T\mathbf{LU}$.

Esercizi per casa 5

$\boxed{\mathbf{1}}$ Si provi che l'insieme delle matrici simmetriche (complesse) di ordine n è un sottospazio vettoriale di $M_n(\mathbb{C})$ e che l'insieme delle matrici anti-hermitiane (complesse) di ordine n non lo è.

$\boxed{\mathbf{2}}$ Si dica quale dei seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{R}^2$ è un suo sottospazio:

$$W_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \middle| x - 2y = 0 \right\};$$

$$W_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \middle| x^2 - 2y = 0 \right\};$$

$$W_3 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \middle| x - 2y = 1 \right\}.$$

$\boxed{\mathbf{3}}$ Sia $\mathbf{A} \in M_n(\mathbb{C})$. Si provi che i tre seguenti sottoinsiemi di $M_n(\mathbb{C})$ sono sottospazi vettoriali di $M_n(\mathbb{C})$:

$$\begin{aligned} W_1 &= \{\mathbf{B} \in M_n(\mathbb{C}) | \mathbf{AB} = \mathbf{BA}\}; \\ W_2 &= \{\mathbf{B} \in M_n(\mathbb{C}) | \mathbf{AB} \text{ è scalare}\}; \\ W_3 &= \{\mathbf{B} \in M_n(\mathbb{C}) | \mathbf{AB} = \mathbf{B}^T\}. \end{aligned}$$

$\boxed{\mathbf{4}}$ Sia $V = \mathbb{R}^2$ (sp. vett. reale). Si dica quale dei seguenti sottoinsiemi di V è un sottospazio vettoriale di V:

$$\mathcal{S}_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\};$$

$$\mathcal{S}_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\};$$

$$\mathcal{S}_3 = \left\{ \begin{pmatrix} a - 2 \\ b \end{pmatrix} | a, b \in \mathbb{R} \right\};$$

$$\mathcal{S}_4 = \left\{ \begin{pmatrix} a - 2 \\ a + 1 \end{pmatrix} | a \in \mathbb{R} \right\}.$$

$\boxed{\mathbf{5}}$ Si dica se

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_1 &= \{i \cdot \mathbf{v} | \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n\} \text{ e} \\ \mathcal{W}_2 &= \{2 \cdot \mathbf{v} | \mathbf{v} \in \mathbb{C}^n\} \end{aligned}$$

sono sottospazi di $\mathbb{C}^n$.

$\boxed{\mathbf{6}}$ Sia $W = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix} | a \in \mathbb{R} \right\}$ l'insieme delle matrici reali anti-simmetriche di ordine 2. Si provi che W è un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale reale $M_2(\mathbb{R})$ e si dica quali dei seguenti sottoinsiemi di $M_2(\mathbb{R})$ è un insieme di generatori per W:

$$\boldsymbol{\mathcal{S}}_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\boldsymbol{\mathcal{S}}_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\boldsymbol{\mathcal{S}}_3 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$\boxed{\mathbf{7}}$ Si dica se

$$\boldsymbol{\mathcal{S}} = \left\{ \mathbf{v_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} ; \mathbf{v_2} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 8 \end{pmatrix} ; \mathbf{v_3} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} \right\}$$

è un insieme di generatori di $\mathbb{R}^3$.

$\boxed{\mathbf{8}}$ Siano $\mathbf{v_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$; $\mathbf{v_2} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $\mathbf{v_3} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ ed $\mathbf{e_3} \in \mathbb{R}^3$. Si dica per quali $x \in \mathbb{R}$ l'insieme di vettori $\boldsymbol{\mathcal{S}}(x) = \{\mathbf{v_1}; \mathbf{v_2}; \mathbf{v_3}; x \cdot \mathbf{e_3}\}$ è un insieme di generatori di $\mathbb{R}^3$.

$\boxed{\mathbf{9}}$ Si dica quale dei seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{R}^3$ è linearmente indipendente:

$$\left\{ \mathbf{v_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} ; \mathbf{v_2} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} ; \mathbf{v_3} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\},$$

$$\left\{ \mathbf{w_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} ; \mathbf{w_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} ; \mathbf{w_3} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} ; \right\}.$$

$\boxed{\mathbf{10}}$ Sia W l'insieme delle matrici anti-simmetriche reali di ordine 2. W è uno spazio vettoriale reale, essendo un sottospazio di $M_2(\mathbb{R})$ (si veda l'esercizio 6). Si considerino i suoi sottoinsiemi $\boldsymbol{\mathcal{S}}_1$, $\boldsymbol{\mathcal{S}}_2$ e $\boldsymbol{\mathcal{S}}_3$ definiti nell'esercizio 6. Per ciascuno di essi si dica se è linearmente indipendente oppure linearmente dipendente.

Esercizi per casa 6

$\boxed{1}$ Sia $V = \{a + bx + cx^2 \mid a, b, c \in \mathbb{C}\}$ lo spazio dei polinomi a coefficienti complessi di grado minore od uguale a 2. Si provi che $\mathcal{B} = \{2 + x^2; x - x^2; 1 + x\}$ è una base di V.

$\boxed{2}$ Si provi che

$$\mathcal{B} = \left\{ \mathbf{B_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}; \mathbf{B_2} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}; \mathbf{B_3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

è una base dello spazio vettoriale V delle matrici complesse triangolari inferiori 2×2.

$\boxed{3}$ Sia W lo spazio vettoriale reale delle matrici 2×2 reali simmetriche. L'insieme

$$\mathcal{S} = \{ \quad \mathbf{C_1} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}; \mathbf{C_2} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}; \mathbf{C_3} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix};$$

$$\mathbf{C_4} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \mathbf{C_5} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \mathbf{C_6} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

è un suo insieme di generatori (non ne è richiesta la verifica). Si trovi una base di W contenuta in $\mathcal{S}$.

$\boxed{4}$ Qual è la dimensione dello spazio vettoriale delle matrici 2×2 reali simmetriche ?

$\boxed{5}$ Sia $\mathbf{A_\alpha} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 1 & \alpha + 2 & \alpha & \alpha + 2 \\ 2 & 4 & 0 & \alpha + 6 \end{pmatrix}$. Per ogni $\alpha \in \mathbb{C}$ si trovi una base dello spazio nullo $N(\mathbf{A_\alpha})$ di $\mathbf{A_\alpha}$.

$\boxed{6}$ Sia $\quad \mathbf{A_\alpha} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 2i \\ 0 & \alpha & 0 & 2i \\ 4 & \alpha - 1 & 0 & 4i \\ 0 & 2 & 4\alpha - 6 & 0 \end{pmatrix}, \quad$ dove $\alpha \in \mathbb{C}$.

Per ogni $\alpha \in \mathbb{C}$ si dica qual è $rk(\mathbf{A_\alpha})$ e si trovino una base $\mathcal{B}_\alpha$ di $C(\mathbf{A_\alpha})$ ed una base $\mathcal{D}_\alpha$ di $R(\mathbf{A_\alpha})$.

$\boxed{7}$ Siano

$$\mathbf{v_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{v_2} = \begin{pmatrix} i \\ -1 \\ 2i \\ 0 \\ i \end{pmatrix}, \mathbf{v_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{v_4} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2i \\ 2 \\ -i \\ 1 \end{pmatrix}$$

ed

$$\boldsymbol{\mathcal{S}} = \{\mathbf{v_1}; \mathbf{v_2}; \mathbf{v_3}; \mathbf{v_4}\}.$$

Sia W il sottospazio di $\mathbb{C}^4$ generato da $\boldsymbol{\mathcal{S}}$. Si trovi una base $\boldsymbol{\mathcal{B}}$ di W contenuta in $\boldsymbol{\mathcal{S}}$ (si usi la Nota 2).

$\boxed{\mathbf{8}}$ Si dica per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ l'insieme $\boldsymbol{\mathcal{B}}_{\alpha} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \\ 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha+1 \\ \alpha+1 \end{pmatrix} \right\}$ è una base di $\mathbb{R}^3$ (si usi la Nota 2).

Esercizi per casa 7

$\boxed{\mathbf{1}}$ Si dica quale delle due seguenti posizioni definisce un'applicazione lineare:

(a) $f_1 : M_n(\mathbb{C}) \to M_n(\mathbb{C})$ definita da $f_1(\mathbf{A}) = \mathbf{A}^T$ per ogni $\mathbf{A} \in M_n(\mathbb{C})$;

(b) $f_2 : M_n(\mathbb{C}) \to M_n(\mathbb{C})$ definita da $f_2(\mathbf{A}) = \mathbf{A}^2$ per ogni $\mathbf{A} \in M_n(\mathbb{C})$.

$\boxed{\mathbf{2}}$ Sia $g : M_2(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}^2$ definita da $g(\mathbf{A}) = \mathbf{A}\mathbf{e_1}$ per ogni $\mathbf{A} \in M_2(\mathbb{C})$.

(a) Si provi che g è un'applicazione lineare.

(b) Si trovino lo spazio nullo $N(g)$ e lo spazio immagine $Im(g)$ di g.

$\boxed{\mathbf{3}}$ Sia $f : \mathbb{R}^2 \to M_2(\mathbb{R})$ definita da:

$$f\left(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} a & a+b \\ a-b & b \end{pmatrix} \quad \forall \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

(a) Si provi che f è un'applicazione lineare.
(b) Si determini la matrice $\mathbf{A}$ associata ad f rispetto alle basi ordinate

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\} \quad \text{e} \quad \mathcal{D} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

su dominio e codominio rispettivamente.

$\boxed{\mathbf{4}}$ Siano

$$\mathcal{B} = \left\{ \mathbf{v_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \mathbf{v_2} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \mathbf{v_3} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \quad \text{e}$$

$$\mathcal{B}' = \left\{ \mathbf{v_1}' = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \mathbf{v_2}' = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \mathbf{v_3}' = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Dopo aver provato che $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$ sono due basi ordinate di $\mathbb{R}^3$, si calcolino le matrici di passaggio

$$\mathbf{M}_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{B}'} \text{ (da } \mathcal{B}' \text{ a } \mathcal{B}) \text{ e } \mathbf{M}_{\mathcal{B}' \leftarrow \mathcal{B}} \text{ (da } \mathcal{B} \text{ a } \mathcal{B}').$$

$\boxed{\mathbf{5}}$ Sia $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 6 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$ la matrice associata ad un'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ rispetto alle basi ordinate

$$\boldsymbol{\mathcal{B}} = \left\{ \mathbf{v_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} ; \mathbf{v_2} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \text{ e}$$

$$\boldsymbol{\mathcal{D}} = \left\{ \mathbf{w_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} ; \mathbf{w_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} ; \mathbf{w_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

su dominio e codominio rispettivamente. Si determini la matrice $\mathbf{A'}$ associata ad f rispetto alle basi ordinate

$$\boldsymbol{\mathcal{B}}\,' = \left\{ \mathbf{v_1}' = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} ; \mathbf{v_2}' = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} \right\} \text{ e}$$

$$\boldsymbol{\mathcal{D}}\,' = \left\{ \mathbf{w_1}' = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} ; \mathbf{w_2}' = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} ; \mathbf{w_3}' = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

su dominio e codominio rispettivamente.

Esercizi per casa 8

$\boxed{\mathbf{1}}$ Sia $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$. Si provi che $\|\mathbf{v}\|_\infty = \|\mathbf{v}\|_1$ se e solo se $\mathbf{v}$ è un multiplo di una colonna di $\mathbf{I}_{\boldsymbol{n}}$.

$\boxed{\mathbf{2}}$ Sia $\mathbf{A} = (a_{ij})$ una matrice complessa quadrata di ordine n tale che $\mathbf{A} = \mathbf{A}^H = \mathbf{A}^2$ e siano $\mathbf{b_1}$, $\mathbf{b_2}$, $\dots\ \dots, \mathbf{b}_{\boldsymbol{n}} \in \mathbb{C}^n$ le colonne di $\mathbf{A}$. Si provi che $\|\mathbf{b}_{\boldsymbol{i}}\|_2^2 = a_{ii}$ per ogni $i = 1, \dots, n$.

$\boxed{\mathbf{3}}$ Sapendo che la posizione $(\cdot|\cdot) : M_2(\mathbb{C}) \times M_2(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$

$$\left(\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{pmatrix}\right) = \sum_{i=1}^{4} \overline{a_i} b_i.$$

definisce un prodotto interno, si consideri la norma $\|\cdot\| : M_2(\mathbb{C}) \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ da esso indotta. Si trovino tutte le matrici complesse scalari $\mathbf{A}$ di ordine 2 tali che $\|\mathbf{A}\| = 2\sqrt{2}$.

$\boxed{\mathbf{4}}$ Sapendo che la posizione $\quad (\cdot|\cdot) : \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C} \quad$ definita da

$$\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) = \overline{x}_1 y_1 + 2\overline{x}_2 y_2$$

definisce un prodotto interno, siano $\|\cdot\| : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ la norma da esso indotta ed $\mathbf{u} = \mathbf{e_1} + \mathbf{e_2}$.

(a) Si trovino tutti i vettori $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ tali che $\|\mathbf{x}\| = \|\mathbf{x}\|_2$.

(b) Si calcolino $\cos(\widehat{\mathbf{e_1}\mathbf{u}})$ e $\cos(\widehat{\mathbf{e_2}\mathbf{u}})$.

Esercizi per casa 9

$\boxed{\mathbf{1}}$ Si trovi una base ortonormale del sottospazio

$$V = \left\langle \begin{pmatrix} i \\ -1 \\ i \\ -1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} -1 \\ -i \\ -1 \\ -i \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2i \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

di $\mathbb{C}^4$.

$\boxed{\mathbf{2}}$ Si consideri il sottospazio

$$W = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 1 & 2i \\ 0 & 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1+2i \end{pmatrix} \right\rangle$$

di $M_2(\mathbb{C})$. Si trovi una base ortonormale di W rispetto al prodotto interno $(\cdot|\cdot) : M_2(\mathbb{C}) \times M_2(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ definito nell'esercizio $\boxed{3}$ degli "Esercizi per casa"8.

$\boxed{\mathbf{3}}$ Siano

$$V_1 = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ i \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle \quad \text{e} \quad V_2 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 1 \\ i \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} i \\ -1 \\ i \\ -1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Si trovino basi di $V_1^\perp$ e $V_2^\perp$.

$\boxed{\mathbf{4}}$ Siano W e $(\cdot|\cdot) : M_2(\mathbb{C}) \times M_2(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ come nell'esercizio $\boxed{2}$. Si trovi il complemento ortogonale $W^\perp$ di W in $M_2(\mathbb{C})$ rispetto al prodotto interno $(\cdot|\cdot)$.

$\boxed{\mathbf{5}}$ Si calcoli la proiezione ortogonale di $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 2i \\ -6 \\ 8i \\ 10 \end{pmatrix}$ sul sottospazio

$$U = \left\langle \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 8i \\ 0 \\ -i \\ 1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 7i \\ -1 \\ -i \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

di $\mathbb{C}^3$.

$\boxed{\mathbf{6}}$ Siano W e $(\cdot|\cdot) : M_2(\mathbb{C}) \times M_2(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ come nell'esercizio $\boxed{2}$. Si calcoli la proiezione ortogonale $P_W(\mathbf{v})$ di

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 & i \\ 2i & 3\sqrt{5} \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{C})$$

su W rispetto al prodotto interno $(\cdot|\cdot)$.

Esercizi per casa 10

$\boxed{\mathbf{1}}$ Sia $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & i & -2 & 9i \\ i & -1 & -2i & 0 \\ -1 & -i & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

(a) Si trovino una decomposizione $\mathbf{Q_0R_0}$-non-normalizzata ed una decomposizione $\mathbf{QR}$-normalizzata per $\mathbf{A}$.

(b) Si calcoli la matrice di proiezione sullo spazio delle colonne $C(\mathbf{A})$ di $\mathbf{A}$.

$\boxed{\mathbf{2}}$ Siano $\mathbf{0} \neq \mathbf{v} \in \mathbb{R}^m$, $\alpha \in \mathbb{R}$ ed $\mathbf{A}(\alpha) = \begin{pmatrix} \mathbf{v} & \alpha\mathbf{v} \end{pmatrix}$. Si trovino:

(a) una decomposizione $\mathbf{Q_0R_0}$-non-normalizzata per $\mathbf{A}(\alpha)$;

(b) una decomposizione $\mathbf{QR}$-normalizzata per $\mathbf{A}(\alpha)$;

(c) la matrice di proiezione sullo spazio delle colonne $C(\mathbf{A}(\alpha))$ di $\mathbf{A}(\alpha)$.

$\boxed{\mathbf{3}}$ Si trovi l'equazione della retta che meglio approssima i cinque punti di $\mathbb{R}^2$:

$$P_1(-2,-1), \quad P_2(-1,-1), \quad P_3(0,0), \quad P_4(1,2), \quad P_5(2,1).$$

$\boxed{\mathbf{4}}$ Si trovi l'equazione della parabola che meglio approssima i quattro punti di $\mathbb{R}^2$:

$$P_1(-2,1), \quad P_2(-1,1), \quad P_3(0,0), \quad P_4(1,1).$$

$\boxed{\mathbf{5}}$ Si calcoli il determinante delle seguenti matrici:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2-i & 1 & 0 \\ 2 & 1+i & 3 \\ i & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} i & 1 & 1+i \\ -1 & 1 & 2 \\ i & i & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1+i \end{pmatrix}.$$

Esercizi per casa 11

$\boxed{\mathbf{1}}$ Sia $\quad \mathbf{A}(\alpha) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \alpha & 0 & 1 \\ 4 & \alpha - 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 3\alpha - 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad$ dove $\alpha \in \mathbb{R}$.

Si dica per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ si ha che $\mathbf{A}(\alpha)$ è non singolare (sugg.: si calcoli il determinante $\mathrm{Det}(\mathbf{A}(\alpha))$ di $\mathbf{A}(\alpha)$).

$\boxed{\mathbf{2}}$ Sia $\mathbf{A}$ una matrice quadrata non singolare e sia $\mathbf{P}$ la matrice di proiezione sullo spazio delle colonne $C(\mathbf{A})$ di $\mathbf{A}$. Si provi che $\mathrm{Det}(\mathbf{P}) \in \{0, 1\}$. **(N.B.: Da A non singolare segue che P=I, per cui, in particolare, Det(P)** $= 1$**)**

$\boxed{\mathbf{3}}$ Sia $\mathbf{A}$ una matrice quadrata di ordine n tale che

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^T = I_n \quad \text{e} \quad \det(\mathbf{A}) \neq 1.$$

Si calcoli il determinante $\det(7 \cdot \mathbf{A})$ della matrice $7 \cdot \mathbf{A}$.

$\boxed{\mathbf{4}}$ Sia $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & -2i \\ 2i & 0 \end{pmatrix}$.

Si calcolino:
– gli autovalori di $\mathbf{A}$,
– le loro molteplicità algebriche e
– le loro molteplicità geometriche.

$\boxed{\mathbf{5}}$ Sia $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2i \\ 0 & -8 & 0 \\ 2i & 0 & -6 \end{pmatrix}$.

Si calcolino:
– gli autovalori di $\mathbf{A}$,
– le loro molteplicità algebriche e
– le loro molteplicità geometriche.

Esercizi per casa 12

$\boxed{\mathbf{1}}$ Si trovino basi degli autospazi delle matrici considerate negli esercizi 4 e 5 degli "Esercizi per casa 11".

$\boxed{\mathbf{2}}$ Sia $\quad \mathbf{A}(\alpha) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 1 & \alpha & -1 \\ 7 & 0 & -5 \end{pmatrix}, \quad$ dove $\alpha \in \mathbb{C}$.

(a) Per ogni $\alpha \in \mathbb{C}$ si calcolino gli autovalori di $\mathbf{A}(\alpha)$ e le loro molteplicità algebriche e geometriche.

(b) Siano $\mathbf{A} = \mathbf{A}(2)$ e $\mathbf{B} = \mathbf{A}(-8)$ le matrici che si ottengono ponendo $\alpha = 2$ ed $\alpha = -8$ rispettivamente. Si trovino basi degli autospazi di $\mathbf{A}$ e di $\mathbf{B}$.

$\boxed{\mathbf{3}}$ Sia $\mathbf{A}(\delta)$ una matrice quadrata con polinomio caratteristico uguale a

$$p_{\mathbf{A}(\delta)} = -(x^5 - 2x^3 + x + \delta - 3).$$

(a) Per quali $\delta \in \mathbb{C}$ si ha che $\mathbf{A}(\delta)$ è non singolare ?

(b) Sia $\mathbf{A} = \mathbf{A}(3)$ la matrice che si ottiene ponendo $\delta = 3$. Per quali $\alpha \in \mathbb{C}$ si ha che $\mathbf{A} - \alpha\mathbf{I}$ è non singolare ?

$\boxed{\mathbf{4}}$ Sia $\quad \mathbf{A}(\alpha) = \begin{pmatrix} \frac{\alpha}{2}+1 & \frac{\alpha}{2} & 0 \\ \frac{\alpha}{2} & \frac{\alpha}{2}+1 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}, \quad$ dove $\alpha \in \mathbb{C}$.

(a) Per quali $\alpha \in \mathbb{C}$ si ha che 3 è un autovalore di $\mathbf{A}(\alpha)$?

(b) Per quali $\alpha \in \mathbb{C}$ la matrice $\mathbf{A}(\alpha)$ ha due autovaori uguali ? In questi casi dire se $\mathbf{A}(\alpha)$ è o non è diagonalizzabile.

$\boxed{\mathbf{5}}$ Si dica se le matrici considerate negli esercizi 4 e 5 degli "Esercizi per casa 11"sono diagonalizzabili oppure no.

$\boxed{\mathbf{6}}$ Sia $\mathbf{A}(\alpha)$ la matrice considerata nell'esercizio 2. Per quegli $\alpha \in \mathbb{C}$ per cui $\mathbf{A}(\alpha)$ è diagonalizzabile, si trovi una diagonalizzazione di $\mathbf{A}(\alpha)$.

Esercizi per casa 13

$\boxed{1}$ Sia $\quad \mathbf{A}(\alpha) = \begin{pmatrix} 0 & \alpha + 2i \\ \alpha + 2i & 0 \end{pmatrix}, \quad$ dove $\alpha \in \mathbb{C}$.

Per quali $\alpha \in \mathbb{C}$ si ha che di $\mathbf{A}(\alpha)$ è una matrice unitariamente triangolarizzabile in $M_2(\mathbb{R})$ (ossia è tale che esistano una matrice $\mathbf{T}$ triangolare reale ed una matrice $\mathbf{U}$ ortogonale reale per cui $\mathbf{A}(\alpha) = \mathbf{UTU}^T$) ?

$\boxed{2}$ Sia $\quad \mathbf{A}(\alpha) = \begin{pmatrix} 2 & i \\ i & \alpha \end{pmatrix}, \quad$ dove $\alpha \in \mathbb{C}$.

(a) Per quali $\alpha \in \mathbb{C}$ si ha che di $\mathbf{A}(\alpha)$ è unitariamente diagonalizzabile ?
(b) Per quali $\alpha \in \mathbb{C}$ si ha che di $\mathbf{A}(\alpha)$ è diagonalizzabile ?
(c) Sia $\mathbf{A} = \mathbf{A}(2)$ la matrice che si ottiene ponendo $\alpha = 2$. Si trovi una diagonalizzazione unitaria $\mathbf{A} = \mathbf{UDU}^H$ per $\mathbf{A}$.
(d) Sia $\mathbf{A} = \mathbf{A}(2)$ la matrice che si ottiene ponendo $\alpha = 2$. Posto $z_1 = (2+i)^{300}$ e $z_2 = (2-i)^{300}$, si scriva $\mathbf{A}^{300}$ in funzione di z_1 e z_2.

$\boxed{3}$ Sia $\quad \mathbf{A}(\alpha) = \begin{pmatrix} -2 & 2i & 0 \\ 2i & 2+\alpha & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}, \quad$ dove $\alpha \in \mathbb{R}$.

(a) Per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ si ha che di $\mathbf{A}(\alpha)$ è unitariamente diagonalizzabile ?
(b) Per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ si ha che di $\mathbf{A}(\alpha)$ è diagonalizzabile ?
(c) Sia $\mathbf{A} = \mathbf{A}(-4)$ la matrice che si ottiene ponendo $\alpha = -4$. Si trovi una diagonalizzazione unitaria $\mathbf{A} = \mathbf{UDU}^H$ per $\mathbf{A}$.

$\boxed{4}$ Sia $\quad \mathbf{A}(\alpha) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -3i \\ 0 & -3 & 0 \\ -3i\alpha & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad$ dove α è **un numero reale nn positivo**.

(a) Per quali α numeri reali noon positivi si ha che di $\mathbf{A}(\alpha)$ è unitariamente diagonalizzabile ?
(b) Per quali α numeri reali noon positivi si ha che di $\mathbf{A}(\alpha)$ è diagonalizzabile ?
(c) Sia $\mathbf{A} = \mathbf{A}(-1)$ la matrice che si ottiene ponendo $\alpha = -1$. Si trovi una diagonalizzazione unitaria $\mathbf{A} = \mathbf{UDU}^H$ per $\mathbf{A}$.

SVOLGIMENTO DEGLI ESERCIZI PER CASA

Svolgimento degli Esercizi per casa 1

$\boxed{\mathbf{1}}$ Per ciascuno dei seguenti numeri complessi

$$z_1 = i, \quad z_2 = -3i, \quad z_3 = 1-2i \quad \text{e} \quad z_4 = 5+3i$$

si calcolino il modulo ed il coniugato, e si scriva l'inverso in forma algebrica.

$$\begin{array}{l} |z_1| = |i| = \sqrt{0^2+1^2} = \sqrt{1} = 1 \quad \text{e} \quad \overline{z}_1 = -i \\ |z_2| = |-3i| = \sqrt{0^2+(-3)^2} = \sqrt{9} = 3 \quad \text{e} \quad \overline{z}_2 = 3i \\ |z_3| = |1-2i| = \sqrt{1^2+(-2)^2} = \sqrt{1+4} = \sqrt{5} \quad \text{e} \quad \overline{z}_3 = 1+2i \\ |z_4| = |5+3i| = \sqrt{5^2+3^2} = \sqrt{25+9} = \sqrt{34} \quad \text{e} \quad \overline{z}_4 = 5-3i \end{array}$$

Siano $w_1 = z_1^{-1}$, $w_2 = z_2^{-1}$, $w_3 = z_3^{-1}$ e $w_4 = z_4^{-1}$. Allora

$$w_1 = \frac{1}{z_1} = \frac{1}{i} = \frac{1}{i} \cdot \frac{\overline{i}}{\overline{i}} = \frac{1}{i} \cdot \frac{(-i)}{(-i)} = \frac{-i}{-i^2} = \frac{-i}{1} = -i$$

è la forma algebrica di w_1: $a_1 = 0$ e $b_1 = -1$ sono la parte reale e la parte immaginaria di w_1;

$$w_2 = \frac{1}{z_2} = \frac{1}{-3i} = \frac{1}{-3i} \cdot \frac{\overline{-3i}}{\overline{-3i}} = \frac{1}{-3i} \cdot \frac{3i}{3i} = \frac{3i}{-9i^2} = \frac{3i}{9} = \frac{1}{3}i$$

è la forma algebrica di w_2: $a_2 = 0$ e $b_2 = 1/3$ sono la parte reale e la parte immaginaria di w_2;

$$w_3 = \frac{1}{z_3} = \frac{1}{1-2i} = \frac{1}{1-2i} \cdot \frac{\overline{1-2i}}{\overline{1-2i}} = \frac{1}{1-2i} \cdot \frac{1+2i}{1+2i} = \frac{1+2i}{1^2-(2i)^2} = \frac{1+2i}{1^2-4i^2} = \frac{1+2i}{1+4} = \frac{1}{5} + \frac{2}{5}i$$

è la forma algebrica di w_3: $a_3 = 1/5$ e $b_3 = 2/5$ sono la parte reale e la parte immaginaria di w_3;

$$w_4 = \frac{1}{z_4} = \frac{1}{5+3i} = \frac{1}{5+3i} \cdot \frac{\overline{5+3i}}{\overline{5+3i}} = \frac{1}{5+3i} \cdot \frac{5-3i}{5-3i} = \frac{5-3i}{5^2-(3i)^2} = \frac{5-3i}{5^2-9i^2} = \frac{5-3i}{25+9} = \frac{5}{34} - \frac{3}{34}i$$

è la forma algebrica di w_4: $a_4 = 5/34$ e $b_4 = -3/34$ sono la parte reale e la parte immaginaria di w_4.

$\boxed{\mathbf{2}}$ Quali sono i numeri complessi z tali che $z = -\overline{z}$?

Scrivendo $z \in \mathbb{C}$ in forma algebrica, si ha $z = a+ib$ con $a, b \in \mathbb{R}$. Il coniugato $\overline{z}$ di z è $\overline{z} = a - ib$, e $-\overline{z} = -a + ib$. Poichè

$$a + ib = -a + ib \iff a = -a \iff a = 0,$$

si ottiene che

$$z = -\overline{z} \iff z = ib, \text{ con } b \in \mathbb{R},$$

ossia z è l'opposto del suo coniugato se e solo se z è un numero immaginario puro.

$\boxed{\mathbf{3}}$ Siano $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 1 & -3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 4 & -2 & -3 \end{pmatrix}$, $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ e $\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 0 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$.
Si calcoli $\mathbf{B}(\mathbf{DC} - 2\mathbf{A}) + 4\mathbf{C}$.

$$4\mathbf{C} = 4 \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 4 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{DC} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 0 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \times 2 + 2 \times 0 & 4 \times 1 + 2 \times 1 \\ 1 \times 2 + 0 \times 0 & 1 \times 1 + 0 \times 1 \\ (-1) \times 2 + (-2) \times 0 & (-1) \times 1 + (-2) \times 1 \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} 8+0 & 4+2 \\ 2+0 & 1+0 \\ -2+0 & -1-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 6 \\ 2 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$$

$$-2\mathbf{A} = -2 \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 1 & -3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 & 0 \\ -2 & 6 \\ -4 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{DC} - 2\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 8 & 6 \\ 2 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -12 & 0 \\ -2 & 6 \\ -4 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 6 \\ 0 & 7 \\ -6 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{DC} - 2\mathbf{A}) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 4 & -2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 & 6 \\ 0 & 7 \\ -6 & 1 \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} 2 \times (-4) + 1 \times 0 + 0 \times (-6) & 2 \times 6 + 1 \times 7 + 0 \times 1 \\ 4 \times (-4) - 2 \times 0 - 3 \times (-6) & 4 \times 6 - 2 \times 7 - 3 \times 1 \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} -8+0+0 & 12+7+0 \\ -16+0+18 & 24-14-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & 19 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{DC} - 2\mathbf{A}) + 4\mathbf{C} = \begin{pmatrix} -8 & 19 \\ 2 & 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 8 & 4 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 23 \\ 2 & 11 \end{pmatrix}$$

$\boxed{\mathbf{4}}$ Sia $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

(a) Si trovino tutte le matrici reali $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ tali che $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$.

(b) Si trovino tutte le matrici reali 2×2 $\mathbf{C}$ tali che $\mathbf{AC} = \mathbf{O}$.

(a) Poichè

$$\mathbf{AB} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+z & y+t \\ x+z & y+t \end{pmatrix} \qquad \text{e}$$
$$\mathbf{BA} = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y & x+y \\ z+t & z+t \end{pmatrix},$$

la condizione $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$ equivale a $\begin{cases} x+z = x+y \\ y+t = x+y \\ x+z = z+t \\ y+t = z+t \end{cases}$, ossia a $\begin{cases} z = y \\ \\ t = x \end{cases}$

Dunque le matrici reali 2×2 $\mathbf{B}$ tali che $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$ sono tutte e sole le matrici del tipo

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} x & y \\ y & x \end{pmatrix}, \qquad \text{dove} \qquad x, y \in \mathbb{R}.$$

(b) Siano $x, y, z, t \in \mathbb{R}$ tali che $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$. Poichè

$$\mathbf{AC} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+z & y+t \\ x+z & y+t \end{pmatrix}$$

la condizione $\mathbf{AC} = \mathbf{O} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ equivale a $\begin{cases} x+z = 0 \\ \\ y+t = 0 \end{cases}$ ossia $\begin{cases} z = -x \\ \\ t = -y \end{cases}$ Dunque le matrici reali 2×2 $\mathbf{C}$ tali che $\mathbf{AC} = \mathbf{O}$ sono tutte e sole le matrici del tipo

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} x & y \\ -x & -y \end{pmatrix}, \qquad \text{dove} \qquad x, y \in \mathbb{R}.$$

$\boxed{\mathbf{5}}$ Siano $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2-3i & 1+i \\ 0 & i \\ 1-i & 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 1+i \end{pmatrix}$, $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 3+5i \\ 6 \\ 2-2i \end{pmatrix}$, $\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 7+i & 2+3i \\ 3-2i & 0 \end{pmatrix}$.

(a) Di ciascuna delle precedenti matrici si calcolino la trasposta, la coniugata e la H-trasposta.

(b) Si calcoli $(\mathbf{A}^H \overline{\mathbf{C}} + i\mathbf{B}^T)\overline{\mathbf{B}} + (1+3i)\mathbf{D}^H$.

$$\mathbf{A}^T = \begin{pmatrix} 2-3i & 0 & 1-i \\ 1+i & i & 1 \end{pmatrix} \qquad \overline{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} 2+3i & 1-i \\ 0 & -i \\ 1+i & 1 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{A}^H = \begin{pmatrix} 2+3i & 0 & 1+i \\ 1-i & -i & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{B}^T = \begin{pmatrix} 2 \\ 1+i \end{pmatrix} \qquad \overline{\mathbf{B}} = \begin{pmatrix} 2 & 1-i \end{pmatrix} \qquad \mathbf{B}^H = \begin{pmatrix} 2 \\ 1-i \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{C}^T = \begin{pmatrix} 3+5i & 6 & 2-2i \end{pmatrix} \qquad \overline{\mathbf{C}} = \begin{pmatrix} 3-5i \\ 6 \\ 2+2i \end{pmatrix} \qquad \mathbf{C}^H = \begin{pmatrix} 3-5i & 6 & 2+2i \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{D}^T = \begin{pmatrix} 7+i & 3-2i \\ 2+3i & 0 \end{pmatrix} \qquad \overline{\mathbf{D}} = \begin{pmatrix} 7-i & 2-3i \\ 3+2i & 0 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{D}^H = \begin{pmatrix} 7-i & 3+2i \\ 2-3i & 0 \end{pmatrix}$$

$$(\mathbf{A}^H\overline{\mathbf{C}} + i\mathbf{B}^T)\overline{\mathbf{B}} + (1+3i)\mathbf{D}^H =$$

$$= (\begin{pmatrix} 2+3i & 0 & 1+i \\ 1-i & -i & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3-5i \\ 6 \\ 2+2i \end{pmatrix} + i\begin{pmatrix} 2 \\ 1+i \end{pmatrix}) \begin{pmatrix} 2 & 1-i \end{pmatrix} + (1+3i)\begin{pmatrix} 7-i & 3+2i \\ 2-3i & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= (\begin{pmatrix} (2+3i)(3-5i)+(1+i)(2+2i) \\ (1-i)(3-5i)-6i+2+2i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2i \\ i(1+i) \end{pmatrix}) \begin{pmatrix} 2 & 1-i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} (1+3i)(7-i) & (1+3i)(3+2i) \\ (1+3i)(2-3i) & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 6+9i-10i+15+2+2i+2i-2 \\ 3-3i-5i-5-6i+2+2i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ -1+i \end{pmatrix}) \begin{pmatrix} 2 & 1-i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7+21i-i+3 & 3+9i+2i-6 \\ 2+6i-3i+9 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= (\begin{pmatrix} 21+3i \\ -12i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2i \\ -1+i \end{pmatrix}) \begin{pmatrix} 2 & 1-i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 10+20i & -3+11i \\ 11+3i & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 21+5i \\ -1-11i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1-i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 10+20i & -3+11i \\ 11+3i & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2(21+5i) & (21+5i)(1-i) \\ 2(-1-11i) & (-1-11i)(1-i) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 10+20i & -3+11i \\ 11+3i & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 42+10i & 21+5i-21i+5 \\ -2-22i & -1-11i+i-11 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 10+20i & -3+11i \\ 11+3i & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 42+10i & 26-16i \\ -2-22i & -12-10i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 10+20i & -3+11i \\ 11+3i & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 52+30i & 23-5i \\ 9-19i & -12-10i \end{pmatrix}$$

Svolgimento degli Esercizi per casa 2

$\boxed{1}$ Si trovino forme ridotte di Gauss per le seguenti matrici:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 4 & 0 \\ 3 & -3 & 9 & 6 \\ 3 & -3 & 3 & -6 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 3 & -9 \\ -2 & 6 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{w}^T = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Facendo un'eliminazione di Gauss su $\mathbf{A}$ si ottiene:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 4 & 0 \\ 3 & -3 & 9 & 6 \\ 3 & -3 & 3 & -6 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{31}(-3)E_{21}(-3)E_1(1/2)} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & -3 & -6 \end{pmatrix} \to$$

$$\xrightarrow{E_{32}(3)E_2(1/3)} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{U_1}$$

ed $\mathbf{U_1}$ è una forma ridotta di Gauss per $\mathbf{A}$.
Facendo un'eliminazione di Gauss su $\mathbf{B}$ si ottiene:

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 3 & -9 \\ -2 & 6 \\ 4 & 8 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{31}(-4)E_{21}(2)E_1(1/3)} \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 0 \\ 0 & 20 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_2(\frac{1}{20})E_{23}} \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{U_2}$$

ed $\mathbf{U_2}$ è una forma ridotta di Gauss per $\mathbf{B}$.
Facendo un'eliminazione di Gauss su $\mathbf{w}^T$ si ottiene:

$$\mathbf{w}^T = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_1(1/4)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3/4 \end{pmatrix} = \mathbf{z}^T$$

e $\mathbf{z}^T$ è una forma ridotta di Gauss per $\mathbf{w}^T$.
Facendo un'eliminazione di Gauss su $\mathbf{v}$ si ottiene:

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{12}} \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{31}(-3)E_1(1/7)} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \mathbf{u}$$

ed $\mathbf{u}$ è una forma ridotta di Gauss per $\mathbf{v}$.

$\boxed{2}$ Sia $\mathbf{A}(\alpha) = \begin{pmatrix} 2i & 0 & -2i & 2i\alpha \\ 1 & \alpha^2+4 & 0 & \alpha \\ 2 & 2\alpha^2+8 & 0 & 4\alpha \end{pmatrix}$, dove $\alpha \in \mathbb{C}$. Per ogni $\alpha \in \mathbb{C}$ si trovi una forma ridotta di Gauss $\mathbf{U}(\alpha)$ per $\mathbf{A}(\alpha)$ e si dica quali sono le colonne dominanti e quali sono le colonne libere di $\mathbf{U}(\alpha)$.

Facciamo un'eliminazione di Gauss su $\mathbf{a}(\alpha)$:

$$\mathbf{A}(\alpha)=\begin{pmatrix}2i & 0 & -2i & 2i\alpha\\ 1 & \alpha^2+4 & 0 & \alpha\\ 2 & 2\alpha^2+8 & 0 & 4\alpha\end{pmatrix}\xrightarrow{E_{31}(-2)E_{21}(-1)E_1(-\frac{1}{2}i)}\begin{pmatrix}1 & 0 & -1 & \alpha\\ 0 & \alpha^2+4 & 1 & 0\\ 0 & 2\alpha^2+8 & 2 & 2\alpha\end{pmatrix}=\mathbf{B}(\alpha)$$

$\boxed{1^o CASO}$ $\quad\alpha^2+4\neq 0$ ossia $\alpha\neq 2i$ ed $\alpha\neq -2i$.

$$\mathbf{B}(\alpha)=\begin{pmatrix}1 & 0 & -1 & \alpha\\ 0 & \alpha^2+4 & 1 & 0\\ 0 & 2\alpha^2+8 & 2 & 2\alpha\end{pmatrix}\xrightarrow{E_{32}(-2\alpha^2-8)E_2(\frac{1}{\alpha^2+4})}\begin{pmatrix}1 & 0 & -1 & \alpha\\ 0 & 1 & 1/(\alpha^2+4) & 0\\ 0 & 0 & 0 & 2\alpha\end{pmatrix}=\mathbf{C}(\alpha)$$

$\boxed{1^o \quad \text{sottocaso del} \quad 1^0 \quad \text{caso}}$ $\quad\alpha\neq 2i,\quad \alpha\neq -2i,\quad \alpha\neq 0$

$$\mathbf{C}(\alpha)=\begin{pmatrix}1 & 0 & -1 & \alpha\\ 0 & 1 & 1/(\alpha^2+4) & 0\\ 0 & 0 & 0 & 2\alpha\end{pmatrix}\xrightarrow{E_3(1/2\alpha)}\begin{pmatrix}1 & 0 & -1 & \alpha\\ 0 & 1 & 1/(\alpha^2+4) & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=\mathbf{U}(\alpha)$$

$\mathbf{U}(\alpha)$ è una forma ridotta di Gauss per $\mathbf{A}(\alpha)$, le colonne dominanti sono la 1^a, la 2^a e la 4^a, l'unica colonna libera è la 3^a.

$\boxed{2^o \quad \text{sottocaso del} \quad 1^0 \quad \text{caso}}$ $\quad\alpha=0 \qquad \mathbf{C}(0)=\begin{pmatrix}1 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 1/4 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}=\mathbf{U}(0)$

è una forma ridotta di Gauss per $\mathbf{A}(0)$, le colonne dominanti sono la 1^a e la 2^a, quelle libere la 3^a e la 4^a.

$\boxed{2^o CASO}$ $\quad\alpha^2+4=0$ ossia $\alpha=2i$ oppure $\alpha=-2i$.

$$\mathbf{B}(\alpha)=\begin{pmatrix}1 & 0 & -1 & \alpha\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2 & 2\alpha\end{pmatrix}\xrightarrow{E_{32}(-2)}\begin{pmatrix}1 & 0 & -1 & \alpha\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 2\alpha\end{pmatrix}\rightarrow$$

$$\xrightarrow{E_3(1/2\alpha)\quad(\alpha\neq 0)}\begin{pmatrix}1 & 0 & -1 & \alpha\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=\mathbf{U}(\alpha)$$

$\mathbf{U}(\alpha)$ è una forma ridotta di Gauss per $\mathbf{A}(\alpha)$, le colonne dominanti sono la 1^a, la 3^a e la 4^a, l'unica colonna libera è la 2^a.

$\boxed{3}$ Si risolva il sistema lineare $\mathbf{A}\ \mathbf{x} = \mathbf{b}$ nei seguenti casi:

$$(a) \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 9 & 6 \\ 1 & -1 & 7 & 4 \\ 1 & -1 & 3 & 2 \\ -2 & 2 & -6 & -4 \end{pmatrix} \quad \text{e } \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix};$$

$$(b) \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 9 & 6 \\ 1 & -1 & 7 & 4 \\ 1 & -1 & 3 & 2 \\ -2 & 2 & -6 & -4 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix};$$

$$(c) \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 9 & 6 \\ 1 & 0 & 7 & 4 \\ 1 & -1 & 5 & 2 \\ 1 & 0 & 5 & 6 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

(a) Troviamo una forma ridotta di Gauss della matrice aumentata del sistema.

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mid & \mathbf{b} \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & -3 & 9 & 6 & 6 \\ 1 & -1 & 7 & 4 & 4 \\ 1 & -1 & 3 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & -6 & -4 & -4 \end{array}\right) \xrightarrow{E_{41}(2)E_{31}(-1)E_{21}(-1)E_1(\frac{1}{3})}$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{E_2(\frac{1}{4})} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) = \begin{pmatrix} \mathbf{U} & \mid & \mathbf{d} \end{pmatrix}.$$

Il sistema $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ è equivalente al sistema $\mathbf{U}\ \mathbf{x} = \mathbf{d}$ che è una forma compatta per

$$(*) \qquad \begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 + 2x_4 & = 2 \\ \qquad\qquad x_3 + \frac{1}{2}x_4 & = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Poichè $\mathbf{d}$ è libera, $\mathbf{U}\mathbf{x} = \mathbf{d}$ ammette soluzioni.

Poichè $\mathbf{U}$ ha esattamente due colonne libere, $\mathbf{U}\ \mathbf{x} = \mathbf{d}$ ha ∞^2 soluzioni.

Scegliamo come parametri le variabili corrispondenti alle colonne libere di $\mathbf{U}$ (la 2^a e la 4^a) e con la sostituzione all'indietro da $(*)$ otteniamo

$$\begin{cases} x_2 = h \\ x_4 = k \\ x_3 = -\frac{1}{2}x_4 + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}k + \frac{1}{2} \\ x_1 = x_2 - 3x_3 - 2x_4 + 2 = h - 3(-\frac{1}{2}k + \frac{1}{2}) - 2k + 2 = h - \frac{1}{2}k + \frac{1}{2} \end{cases}$$

L'insieme delle soluzioni del sistema $\mathbf{U}\mathbf{x} = \mathbf{d}$ (e quindi l'insieme delle soluzioni del sistema $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$) è

$$\left\{ \begin{pmatrix} h - \frac{1}{2}k + \frac{1}{2} \\ h \\ -\frac{1}{2}k + \frac{1}{2} \\ k \end{pmatrix} | h, k \in \mathbb{C} \right\}.$$

(b) Troviamo una forma ridotta di Gauss della matrice aumentata del sistema.

$$\begin{pmatrix}\mathbf{A} & | & \mathbf{b}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 9 & 6 & | & 6 \\ 1 & -1 & 7 & 4 & | & 4 \\ 1 & -1 & 3 & 2 & | & 3 \\ -2 & 2 & -6 & -4 & | & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{41}(2)E_{31}(-1)E_{21}(-1)E_1(\frac{1}{3})}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 2 & | & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 2 & | & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_2(\frac{1}{4})} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 2 & | & 2 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & | & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\mathbf{U} & | & \mathbf{d}\end{pmatrix}.$$

Il sistema $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ è equivalente al sistema $\mathbf{U}\ \mathbf{x} = \mathbf{d}$.
Poichè $\mathbf{d}$ è dominante, allora $\mathbf{U}\ \mathbf{x} = \mathbf{d}$ e quindi $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, non ha soluzioni.

(c) Troviamo una forma ridotta di Gauss della matrice aumentata del sistema.

$$\begin{pmatrix}\mathbf{A} & | & \mathbf{b}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 9 & 6 & | & 6 \\ 1 & 0 & 7 & 4 & | & 4 \\ 1 & -1 & 5 & 2 & | & 4 \\ 1 & 0 & 5 & 6 & | & 8 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{41}(-1)E_{31}(-1)E_{21}(-1)E_1(\frac{1}{3})}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 2 & | & 2 \\ 0 & 1 & 4 & 2 & | & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & | & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 4 & | & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{42}(-1)} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 2 & | & 2 \\ 0 & 1 & 4 & 2 & | & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & | & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{43}(2)E_3(\frac{1}{2})}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 2 & | & 2 \\ 0 & 1 & 4 & 2 & | & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & | & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_4(\frac{1}{2})} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 2 & | & 2 \\ 0 & 1 & 4 & 2 & | & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\mathbf{U} & | & \mathbf{d}\end{pmatrix}.$$

Il sistema $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ è equivalente al sistema $\mathbf{U}\ \mathbf{x} = \mathbf{d}$ che è una forma compatta per

$$(*) \qquad \begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 + 2x_4 & = 2 \\ \qquad x_2 + 4x_3 + 2x_4 & = 2 \\ \qquad\qquad x_3 & = 1 \\ \qquad\qquad\quad x_4 & = 3 \end{cases}$$

Poichè $\mathbf{d}$ è libera, $\mathbf{U}\ \mathbf{x} = \mathbf{d}$ ammette soluzioni.

Poichè $\mathbf{U}$ non ha colonne libere, $\mathbf{U}\ \mathbf{x} = \mathbf{d}$ ha esattamente una soluzione.
Con la sostituzione all'indietro da $(*)$ otteniamo

$$\begin{cases} x_4 = 3 \\ x_3 = 1 \\ x_2 = -4x_3 - 2x_4 + 2 = -8 \\ x_1 = x_2 - 3x_3 - 2x_4 + 2 = -15 \end{cases}$$

Dunque l'unica soluzione di $\mathbf{U}\ \mathbf{x} = \mathbf{d}$, e quindi anche di $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$, è il vettore $\begin{pmatrix} -15 \\ -8 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

$\boxed{\mathbf{4}}$ Si risolva il sistema lineare $\mathbf{A}(\alpha)\mathbf{x} = \mathbf{b}(\alpha)$ dipendente dal parametro complesso α dove

$$\mathbf{A}(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & \alpha - i & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & \alpha - i & \alpha + i \\ -\alpha - i & -\alpha^2 - 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{b}(\alpha) = \begin{pmatrix} \alpha - i \\ \alpha^2 + 1 \\ 2\alpha \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^4.$$

Troviamo una forma ridotta di Gauss della matrice aumentata del sistema.

$$\left(\mathbf{A}(\alpha) \quad | \quad \mathbf{b}(\alpha)\right) = \begin{pmatrix} 1 & \alpha - i & 0 & | & \alpha - i \\ 0 & 1 & 0 & | & \alpha^2 + 1 \\ 1 & \alpha - i & \alpha + i & | & 2\alpha \\ -\alpha - i & -\alpha^2 - 1 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{41}(\alpha+i)E_{31}(-1)}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & \alpha - i & 0 & | & \alpha - i \\ 0 & 1 & 0 & | & \alpha^2 + 1 \\ 0 & 0 & \alpha + i & | & \alpha + i \\ 0 & 0 & 0 & | & \alpha^2 + 1 \end{pmatrix} = \left(\mathbf{B}(\alpha) \quad | \quad \mathbf{c}(\alpha)\right).$$

$\boxed{1^0 \text{ CASO}}$ $\alpha = -i$ $\quad \left(\mathbf{B}(-i) \quad | \quad \mathbf{c}(-i)\right) = \begin{pmatrix} 1 & -2i & 0 & | & -2i \\ 0 & 1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$ è una forma ridotta di Gauss per $\left(\mathbf{A}(-i) \quad | \quad \mathbf{b}(-i)\right)$, quindi $\mathbf{A}(-i)\mathbf{x} = \mathbf{b}(-i)$ è equivalente a $\mathbf{B}(-i)\mathbf{x} = \mathbf{c}(-i)$ che è una forma compatta per

$$(*) \qquad \begin{cases} x_1 - 2ix_2 & = -2i \\ x_2 & = 0 \end{cases}$$

Poichè $\mathbf{c}$(-i) è libera, $\mathbf{B}$(-i) $\mathbf{x} = \mathbf{c}$(-i) ammette soluzioni.
Poichè $\mathbf{B}$(-i) ha esattamente una colonna libera, $\mathbf{B}$(-i)$\mathbf{x} = \mathbf{c}$(-i) ha ∞^1 soluzioni.

Scegliamo come parametro la variabile corrispondente alla colonna libera di $\mathbf{B}$(-i) (la 3^a) e con la sostituzione all'indietro da $(*)$ otteniamo

$$\begin{cases} x_3 = h \\ x_2 = 0 \\ x_1 = 2ix_2 - 2i = -2i \end{cases}$$

L'insieme delle soluzioni del sistema $\mathbf{B}$(-i)$\mathbf{x} = \mathbf{c}$(-i) (e quindi l'insieme delle soluzioni del sistema $\mathbf{A}$(-i)$\mathbf{x} = \mathbf{b}$(-i)) è

$$\left\{ \begin{pmatrix} -2i \\ 0 \\ h \end{pmatrix} | h \in \mathbb{C} \right\}.$$

$\boxed{2^0 \text{ CASO}}$ $\qquad \alpha \neq -i$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{B}(\alpha) & | & \mathbf{c}(\alpha) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \alpha - i & 0 & | & \alpha - i \\ 0 & 1 & 0 & | & \alpha^2 + 1 \\ 0 & 0 & \alpha + i & | & \alpha + i \\ 0 & 0 & 0 & | & \alpha^2 + 1 \end{pmatrix} \longrightarrow$$

$$\xrightarrow{E_3(\frac{1}{\alpha+i})} \begin{pmatrix} 1 & \alpha - i & 0 & | & \alpha - i \\ 0 & 1 & 0 & | & \alpha^2 + 1 \\ 0 & 0 & 1 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & | & \alpha^2 + 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_4(\frac{1}{\alpha+i})}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & \alpha - i & 0 & | & \alpha - i \\ 0 & 1 & 0 & | & \alpha^2 + 1 \\ 0 & 0 & 1 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & | & \alpha - i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{C}(\alpha) | & \mathbf{d}(\alpha) \end{pmatrix}.$$

$\boxed{1^0 \text{ Sottocaso}}$ $\qquad \alpha = i \qquad \begin{pmatrix} \mathbf{C}(i) & | & \mathbf{d}(i) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$ è una forma ridotta di Gauss per $\begin{pmatrix} \mathbf{A}(i) & | & \mathbf{b}(i) \end{pmatrix}$, quindi $\mathbf{A}$(i)$\mathbf{x}$ =$\mathbf{b}$(i) è equivalente a $\mathbf{C}$(i)$\mathbf{x}$ = $\mathbf{d}$(i) che è una forma compatta per

$$(*) \qquad \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 1 \end{cases}$$

Poichè $\mathbf{d}$(i) è libera, $\mathbf{C}$(i)$\mathbf{x}$ =$\mathbf{d}$(i) ammette soluzioni.

Poichè tutte le colonne di $\mathbf{C}(\mathrm{i})$ sono dominanti, $\mathbf{C}(\mathrm{i})\mathbf{x} = \mathbf{d}(\mathrm{i})$ ammette un'unica soluzione. L'unica soluzione di $\mathbf{C}(\mathrm{i})\mathbf{x} =\mathbf{d}(\mathrm{i})$ (e quindi di $\mathbf{A}(\mathrm{i})\mathbf{x} = \mathbf{b}(\mathrm{i})$) è

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$\boxed{2^0 \text{ Sottocaso}}$ $\qquad \alpha \notin \{i, -i\}$

$$\begin{pmatrix}\mathbf{C}(\alpha) | & \mathbf{d}(\alpha)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \alpha - i & 0 & | & \alpha - i \\ 0 & 1 & 0 & | & \alpha^2 + 1 \\ 0 & 0 & 1 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & | & \alpha - i \end{pmatrix} \xrightarrow{E_4(\frac{1}{\alpha - i})}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & \alpha - i & 0 & | & \alpha - i \\ 0 & 1 & 0 & | & \alpha^2 + 1 \\ 0 & 0 & 1 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & | & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\mathbf{D}(\alpha) | & \mathbf{e}(\alpha)\end{pmatrix}$$

è una forma ridotta di Gauss per $\begin{pmatrix}\mathbf{A}(\alpha) & | & \mathbf{b}(\alpha)\end{pmatrix}$.

Poichè $\mathbf{e}(\alpha)$ è dominante, $\mathbf{D}(\alpha)\mathbf{x} = \mathbf{e}(\alpha)$ (e quindi di $\mathbf{A}(\alpha)\mathbf{x} = \mathbf{b}(\alpha)$) non ammette soluzioni.

Svolgimento degli Esercizi per casa 3

$\boxed{1}$ Si trovino tutte le inverse destre della matrice $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

Un'inversa destra di $\mathbf{A}$ è una matrice 3×2 $\mathbf{R}$ tale che se $\mathbf{R} = \begin{pmatrix} \mathbf{c_1} & | & \mathbf{c_2} \end{pmatrix}$, allora
$\mathbf{c_1}$ è soluzione di (1) $\mathbf{Ax} = \mathbf{e_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e
$\mathbf{c_2}$ è soluzione di (2) $\mathbf{Ax} = \mathbf{e_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.
Cerchiamo tutte le soluzioni di (1) e (2).

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A} & | & \mathbf{I_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & | & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & | & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{21}(-1)E_1(\frac{1}{2})} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 & | & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 3 & | & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\xrightarrow{E_2(-2)} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 & | & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & -6 & | & 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{U} & | & \mathbf{b_1} & \mathbf{b_2} \end{pmatrix}.$$

(1) è equivalente a (1′) $\mathbf{Ux} = \mathbf{b_1}$ che è una forma compatta per

$$\begin{cases} x_1 + \frac{1}{2}x_2 \quad = \frac{1}{2} \\ \quad x_2 - 6x_3 = 1 \end{cases}$$

Scegliamo come parametro la variabile corrispondente all'unica colonna libera di $\mathbf{U}$ (la 3^a) e con la sostituzione all'indietro otteniamo

$$\begin{cases} x_3 = h \\ x_2 = 6x_3 + 1 = 6h + 1 \\ x_1 = -\dfrac{1}{2}x_2 + \dfrac{1}{2} = -\dfrac{1}{2}(6h+1) + \dfrac{1}{2} = -3h \end{cases}$$

L'insieme delle soluzioni di (1) è

$$\left\{ \begin{pmatrix} -3h \\ 6h+1 \\ h \end{pmatrix} | h \in \mathbb{C} \right\}.$$

(2) è equivalente a (2′) $\mathbf{Ux} = \mathbf{b_2}$ che è una forma compatta per

$$\begin{cases} x_1 + \frac{1}{2}x_2 \quad = 0 \\ x_2 - 6x_3 = -2 \end{cases}$$

Scegliamo come parametro la variabile corrispondente all'unica colonna libera di $\mathbf{U}$ (la 3^a) e con la sostituzione all'indietro otteniamo

$$\begin{cases} x_3 = k \\ x_2 = 6x_3 - 2 = 6k - 2 \\ x_1 = -\frac{1}{2}x_2 = -\frac{1}{2}(6k-2) = -3k+1 \end{cases}$$

L'insieme delle soluzioni di (2) è

$$\left\{ \begin{pmatrix} -3k+1 \\ 6k-2 \\ k \end{pmatrix} | k \in \mathbb{C} \right\}.$$

Le inverse destre di $\mathbf{A}$ sono esattamente tutte le matrici del tipo $\mathbf{R}(h,k) = \begin{pmatrix} -3h & -3k+1 \\ 6h+1 & 6k-2 \\ h & k \end{pmatrix}$, al variare di $h, k \in \mathbb{C}$.

$\boxed{\mathbf{2}}$ Si trovino tutte le inverse sinistre della matrice $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.

1. Poniamo $\mathbf{B} = \mathbf{A}^T$.

2. Cerchiamo tutte le inverse destre di $\mathbf{B}$. Dall'esercizio $\boxed{1}$ sappiamo che sono tutte e sole le matrici del tipo $\begin{pmatrix} -3h & -3k+1 \\ 6h+1 & 6k-2 \\ h & k \end{pmatrix}$ con $h, k \in \mathbb{C}$.

3. Una matrice è inversa sinistra di $\mathbf{A}$ se e solo se è la trasposta di una inversa destra di $\mathbf{B}$. Quindi le inverse sinistre di $\mathbf{A}$ sono esattamente tutte le matrici del tipo $\begin{pmatrix} -3h & 6h+1 & h \\ -3k+1 & 6k-2 & k \end{pmatrix}$ al variare di $h, k \in \mathbb{C}$.

$\boxed{\mathbf{3}}$ Si trovi una forma ridotta di Gauss-Jordan per la matrice $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 & 0 & 0 & 6 \\ 2 & -2 & 3 & -2 & -1 & 8 \\ -2 & 2 & -2 & 0 & 0 & 5 \\ 3 & -3 & 4 & -2 & -1 & 12 \end{pmatrix}$.

Facendo una E.G. "in avanti" su $\mathbf{A}$ otteniamo

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 & 0 & 0 & 6 \\ 2 & -2 & 3 & -2 & -1 & 8 \\ -2 & 2 & -2 & 0 & 0 & 5 \\ 3 & -3 & 4 & -2 & -1 & 12 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{41}(-3)E_{31}(2)E_{21}(-2)E_1(\frac{1}{2})} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 11 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -1 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\xrightarrow{E_{42}(-1)} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{43}(-1)E_3(\frac{1}{11})} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{U}$$

Facendo ora una E.G. "all'indietro" su $\mathbf{U}$ otteniamo

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{13}(-3)E_{23}(-2)} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{12}(-1)}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{W}$$

$\mathbf{W}$ è una forma ridotta di Gauss-Jordan per $\mathbf{A}$.

$\boxed{4}$ Sia $\quad \mathbf{A}(\alpha) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \alpha & \alpha^2 & -\alpha \\ 2\alpha & 2\alpha^2 & 1 \end{pmatrix}$, dove $\alpha \in \mathbb{R}$. Per quegli $\alpha \in \mathbb{R}$ per cui $\mathbf{A}(\alpha)$ è non singolare, si calcoli $\mathbf{A}(\alpha)^{-1}$.

$$\big(\mathbf{A}(\alpha) \quad | \quad \mathbf{I_3}\big) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \alpha & \alpha^2 & -\alpha & 0 & 1 & 0 \\ 2\alpha & 2\alpha^2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{E_{21}}$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} \alpha & \alpha^2 & -\alpha & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2\alpha & 2\alpha^2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{E_{31}(-2\alpha)E_1(\frac{1}{\alpha}) \quad \boxed{\alpha \neq 0 : \mathbf{A}(0) \text{ non ha inversa}}}$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \alpha & -1 & 0 & \frac{1}{\alpha} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1+2\alpha & 0 & -2 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{E_3(\frac{1}{1+2\alpha}) \quad \boxed{\alpha \neq -\frac{1}{2} : \mathbf{A}(-\frac{1}{2}) \text{ non ha inversa}}}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & \alpha & -1 & | & 0 & \frac{1}{\alpha} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 & -\frac{2}{1+2\alpha} & \frac{1}{1+2\alpha} \end{pmatrix} \xrightarrow{\quad E_{13}(1) \quad} \begin{pmatrix} 1 & \alpha & 0 & | & 0 & \frac{1}{\alpha(1+2\alpha)} & \frac{1}{1+2\alpha} \\ 0 & 1 & 0 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 & -\frac{2}{1+2\alpha} & \frac{1}{1+2\alpha} \end{pmatrix} \to$$

$$\xrightarrow{\quad E_{12}(-\alpha) \quad} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & -\alpha & \frac{1}{\alpha(1+2\alpha)} & \frac{1}{1+2\alpha} \\ 0 & 1 & 0 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 & -\frac{2}{1+2\alpha} & \frac{1}{1+2\alpha} \end{pmatrix}.$$

Se $\boxed{\alpha \notin \{0, -\frac{1}{2}\}}$ $\qquad \mathbf{A}(\alpha)^{-1} = \begin{pmatrix} -\alpha & \frac{1}{\alpha(1+2\alpha)} & \frac{1}{1+2\alpha} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{2}{1+2\alpha} & \frac{1}{1+2\alpha} \end{pmatrix}.$

$\boxed{5}$ Sia $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 6i & 1-i \\ 3 & -i \end{pmatrix}$. Si calcoli $\mathbf{A}^{-1}$.

Ricordando che

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \quad \text{se} \quad ad - bc \neq 0,$$

si ha:

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{6i(-i) - 3(1-i)} \begin{pmatrix} -i & -1+i \\ -3 & 6i \end{pmatrix} = \frac{1}{6-3+3i} \begin{pmatrix} -i & -1+i \\ -3 & 6i \end{pmatrix} = \frac{1}{3+3i} \begin{pmatrix} -i & -1+i \\ -3 & 6i \end{pmatrix}$$

Poichè

$$\frac{1}{3+3i} = \frac{1}{3+3i} \times \frac{\overline{3+3i}}{\overline{3+3i}} = \frac{3-3i}{(3+3i)(3-3i)} = \frac{3-3i}{3^2-3^2i^2} = \frac{3-3i}{9+9} = \frac{1}{6} - \frac{1}{6}i = \frac{1}{6} \cdot (1-i),$$

allora

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{6} \cdot (1-i) \cdot \begin{pmatrix} -i & -1+i \\ -3 & 6i \end{pmatrix}.$$

$\boxed{6}$ Si dica per quali $\alpha \in \mathbb{C}$ la matrice $\mathbf{A}(\alpha) = \begin{pmatrix} \alpha+3i & \alpha \\ \alpha+3i & \alpha-i \end{pmatrix}$ è non singolare. Per tali α, si trovi l'inversa di $\mathbf{A}(\alpha)$.

Ricordando che $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ è non singolare se e solo se $ad - bc \neq 0$ ed in tal caso si ha

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix},$$

$\mathbf{A}(\alpha)$ è non singolare se e solo se

$$(\alpha+3i)(\alpha-i) - \alpha(\alpha+3i) = -i(\alpha+3i) \neq 0,$$

ossia se e solo se $\alpha \neq -3i$, ed in tal caso si ha:

$$\mathbf{A}(\alpha)^{-1} = \frac{1}{-i(\alpha+3i)} \begin{pmatrix} \alpha - i & -\alpha \\ -\alpha - 3i & \alpha + 3i \end{pmatrix}.$$

Svolgimento degli Esercizi per casa 4

$\boxed{1}$ Si scrivano le matrici elementari $\mathbf{E}_{13}(4)$, ed $\mathbf{E}_{13}$ di ordine 3 e di ordine 4.

di ordine 3: $\quad \mathbf{E}_{13}(4) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{E}_3(4) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \mathbf{E}_{13} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

di ordine 4: $\quad \mathbf{E}_{13}(4) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{E}_3(4) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{E}_{13} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\boxed{2}$ Sia $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{r}^T \\ \mathbf{r}^T \end{pmatrix}$ una matrice reale $2 \times n$ non nulla con le righe uguali. Si trovino tutte le matrici elementari $\mathbf{E}$ tali che $\mathbf{EA} = \begin{pmatrix} \mathbf{r}^T \\ 3\mathbf{r}^T \end{pmatrix}$.

Premoltiplicare $\mathbf{A}$ per una matrice elementare equivale ad eseguire un'operazione elementare sulle sue righe.

Poichè $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{r}^T \\ \mathbf{r}^T \end{pmatrix}$ con $\mathbf{r}^T \neq \mathbf{0}^T$ (essendo $\mathbf{A} \neq \mathbf{O}$), le operazioni elementari sulle righe di $\mathbf{A}$ che permettono di ottenere la matrice $\begin{pmatrix} \mathbf{r}^T \\ 3\mathbf{r}^T \end{pmatrix}$ da $\mathbf{A}$ sono esattamente le seguenti:

(a) moltiplicare la 2^a riga di $\mathbf{A}$ per il numero 3,

(b) sommare alla 2^a riga di $\mathbf{A}$ la 1^a riga di $\mathbf{A}$ moltiplicata per il numero 2.

Eseguire l'operazione (a) equivale a premoltiplicare $\mathbf{A}$ per la matrice elementare $\mathbf{E}_2(3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$; eseguire l'operazione (b) equivale a premoltiplicare $\mathbf{A}$ per la matrice elementare $\mathbf{E}_{21}(2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Dunque $\mathbf{E} \in \{\mathbf{E}_2(3), \mathbf{E}_{21}(2)\}$.

N.B. Se $\mathbf{A}$ fosse nulla, anche $\begin{pmatrix} \mathbf{r}^T \\ 3\mathbf{r}^T \end{pmatrix}$ sarebbe nulla, e per ogni matrice elementare $\mathbf{E}$ di ordine 2 si avrebbe $\mathbf{AE} = \begin{pmatrix} \mathbf{r}^T \\ 3\mathbf{r}^T \end{pmatrix}$.

$\boxed{3}$ Sia $\mathbf{A} = \mathbf{E}_{47}(2)\mathbf{E}_3(6)\mathbf{E}_{12}(-3)\mathbf{E}_{24}\mathbf{E}_5(3)$ di ordine n. Si scrivano $\mathbf{A}^{-1}$ ed $\mathbf{A}^T$ come prodotti di matrici elementari.

Per ogni $i, j = 1, \ldots, n$, con $i \neq j$, ed ogni $c, d \in \mathbb{C}$ con $d \neq 0$ si ha

$$\begin{array}{lll} \mathbf{E}_{ij}(c)^{-1} = \mathbf{E}_{ij}(-c) & \text{ed} & \mathbf{E}_{ij}(c)^T = \mathbf{E}_{ji}(c), \\ \mathbf{E}_i(d)^{-1} = \mathbf{E}_i(1/d) & \text{ed} & \mathbf{E}_i(d)^T = \mathbf{E}_i(d), \\ \mathbf{E}_{ij}^{-1} = \mathbf{E}_{ij} = \mathbf{E}_{ij}^T. & & \end{array}$$

Inoltre, se $\mathbf{B}, \mathbf{C} \in M_n(\mathbb{C})$ allora $(\mathbf{BC})^T = \mathbf{C}^T\mathbf{B}^T$, e se in più esistono $\mathbf{B}^{-1}$ e $\mathbf{C}^{-1}$ allora esiste $(\mathbf{BC})^{-1}$ ed è $(\mathbf{BC})^{-1} = \mathbf{C}^{-1}\mathbf{B}^{-1}$.
Quindi da $\mathbf{A} = \mathbf{E}_{47}(2)\mathbf{E}_3(6)\mathbf{E}_{12}(-3)\mathbf{E}_{24}\mathbf{E}_5(3)$ segue

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^{-1} &= (\mathbf{E}_{47}(2)\mathbf{E}_3(6)\mathbf{E}_{12}(-3)\mathbf{E}_{24}\mathbf{E}_5(3))^{-1} = \\ &= \mathbf{E}_5(3)^{-1}\mathbf{E}_{24}^{-1}\mathbf{E}_{12}(-3)^{-1}\mathbf{E}_3(6)^{-1}\mathbf{E}_{47}(2)^{-1} = \\ &= \mathbf{E}_5(\tfrac{1}{3})\mathbf{E}_{24}\mathbf{E}_{12}(3)\mathbf{E}_3(\tfrac{1}{6})\mathbf{E}_{47}(-2) \end{aligned}$$

ed

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^{T} &= (\mathbf{E}_{47}(2)\mathbf{E}_3(6)\mathbf{E}_{12}(-3)\mathbf{E}_{24}\mathbf{E}_5(3))^{T} = \\ &= \mathbf{E}_5(3)^{T}\mathbf{E}_{24}^{T}\mathbf{E}_{12}(-3)^{T}\mathbf{E}_3(6)^{T}\mathbf{E}_{47}(2)^{T} = \\ &= \mathbf{E}_5(3)\mathbf{E}_{24}\mathbf{E}_{21}(-3)\mathbf{E}_3(6)\mathbf{E}_{74}(2) \end{aligned}$$

$\boxed{\mathbf{4}}$ Sia $\mathbf{A}(\alpha) = \begin{pmatrix} \alpha & 3\alpha & 2\alpha & -2\alpha \\ 0 & 0 & \alpha^2+9 & \alpha^2+9 \\ 2 & 6 & 4 & -3+\alpha \\ 1 & 3 & 1 & -6-3\alpha \\ \alpha+1 & 3\alpha+3 & 2\alpha+1 & -1 \end{pmatrix}$, dove $\alpha \in \mathbb{C}$.

Per ogni $\alpha \notin \{0, 3i, -3i\}$ si trovi una decomposizione $\mathbf{A}(\alpha) = \mathbf{L}(\alpha)\mathbf{U}(\alpha)$, scrivendo anche $\mathbf{L}(\alpha)$ come prodotto di matrici elementari.

$$\mathbf{A}(\alpha) = \begin{pmatrix} \boxed{\alpha} & 3\alpha & 2\alpha & -2\alpha \\ \boxed{0} & 0 & \alpha^2+9 & \alpha^2+9 \\ \boxed{2} & 6 & 4 & -3+\alpha \\ \boxed{1} & 3 & 1 & -6-3\alpha \\ \boxed{\alpha+1} & 3\alpha+3 & 2\alpha+1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{51}(-\alpha-1)E_{41}(-1)E_{31}(-2)E_1(\frac{1}{\alpha}) \quad \boxed{\alpha \neq 0}}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & \boxed{\alpha^2+9} & \alpha^2+9 \\ 0 & 0 & \boxed{0} & \alpha+1 \\ 0 & 0 & \boxed{-1} & -3\alpha-4 \\ 0 & 0 & \boxed{-1} & 2\alpha+1 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{52}(1)E_{42}(1)E_2(\frac{1}{\alpha^2+9}) \quad \boxed{\alpha \notin \{3i, -3i\}}}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha+1 \\ 0 & 0 & 0 & -3\alpha-3 \\ 0 & 0 & 0 & 2\alpha+2 \end{pmatrix} = \mathbf{B}(\alpha)$$

$\boxed{1^o CASO}$ $\alpha \neq -1$ (nonchè $\alpha \neq 0, 3i, -3i$)

$$\mathbf{B}(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{\alpha+1} \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{-3\alpha-3} \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{2\alpha+2} \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{53}(-2\alpha-2)E_{43}(3\alpha+3)E_3(\frac{1}{\alpha+1})} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{U}(\alpha)$$

$$\mathbf{L}(\alpha) = \begin{pmatrix} \boxed{\alpha} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \boxed{0} & \boxed{\alpha^2+9} & 0 & 0 & 0 \\ \boxed{2} & \boxed{0} & \boxed{\alpha+1} & 0 & 0 \\ \boxed{1} & \boxed{-1} & \boxed{-3\alpha-3} & 1 & 0 \\ \boxed{\alpha+1} & \boxed{-1} & \boxed{2\alpha+2} & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \mathbf{E}_1(\alpha)\mathbf{E}_{31}(2)\mathbf{E}_{41}(1)\mathbf{E}_{51}(\alpha+1)\mathbf{E}_2(\alpha^2+9)\mathbf{E}_{42}(-1)\mathbf{E}_{52}(-1)\mathbf{E}_3(\alpha+1)\mathbf{E}_{43}(-3\alpha-3)\mathbf{E}_{53}(2\alpha+2)$$

$\boxed{2^o CASO}$ $\alpha = -1$

$$\mathbf{B}(-1) = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{U}(-1)$$

$$\mathbf{L}(-1) = \begin{pmatrix} \boxed{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \boxed{0} & \boxed{10} & 0 & 0 & 0 \\ \boxed{2} & \boxed{0} & 1 & 0 & 0 \\ \boxed{1} & \boxed{-1} & 0 & 1 & 0 \\ \boxed{0} & \boxed{-1} & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{E}_1(-1)\mathbf{E}_{31}(2)\mathbf{E}_{41}(1)\mathbf{E}_2(10)\mathbf{E}_{42}(-1)\mathbf{E}_{52}(-1)$$

$\boxed{N.B.}$ Se $\alpha \in \{0, 3i, -3i\}$ non è possibile trovare una forma ridotta di Gauss di $\mathbf{A}(\alpha)$ senza fare scambi di righe, quindi $\mathbf{A}(\alpha)$ **NON** ha una decomposizione $\mathbf{L}(\alpha)\mathbf{U}(\alpha)$.

$\boxed{\mathbf{5}}$ Sia

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 9 & -6 & 0 \\ -2 & -6 & 4 & -1 \\ 0 & 2 & -4 & 0 \\ 1 & 7 & 6 & 0 \\ 1 & -4 & 10 & -4 \end{pmatrix}.$$

Si trovi una decomposizione $\mathbf{A} = \mathbf{P}^T\mathbf{L}\mathbf{U}$.

Applicando l'algoritmo di Gauss ad A si ottiene:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 9 & -6 & 0 \\ -2 & -6 & 4 & -1 \\ 0 & 2 & -4 & 0 \\ 1 & 7 & 6 & 0 \\ 1 & -4 & 10 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{51}(-1)E_{41}(-1)E_{21}(2)E_1(\frac{1}{3})} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -4 & 0 \\ 0 & 4 & 8 & 0 \\ 0 & -7 & 12 & -4 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\xrightarrow{E_{23}} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & 8 & 0 \\ 0 & -7 & 12 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{52}(7)E_{42}(-4)E_2(\frac{1}{2})} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 16 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -4 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\xrightarrow{E_{34}} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 16 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{53}(2)E_3(\frac{1}{16})} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\xrightarrow{E_{54}(4)E_4(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Sia

$$\mathbf{P} = \mathbf{E}_{34}\mathbf{E}_{23} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Allora

$$\mathbf{P}\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 9 & -6 & 0 \\ -2 & -6 & 4 & -1 \\ 0 & 2 & -4 & 0 \\ 1 & 7 & 6 & 0 \\ 1 & -4 & 10 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 9 & -6 & 0 \\ 0 & 2 & -4 & 0 \\ 1 & 7 & 6 & 0 \\ -2 & -6 & 4 & -1 \\ 1 & -4 & 10 & -4 \end{pmatrix}.$$

Applichiamo l'algoritmo di Gauss senza scambi di righe a $\mathbf{PA}$. Otteniamo una decomposizione $\mathbf{LU}$ per $\mathbf{PA}$:

$$\mathbf{PA} = \begin{pmatrix} \boxed{3} & 9 & -6 & 0 \\ \boxed{0} & 2 & -4 & 0 \\ \boxed{1} & 7 & 6 & 0 \\ \boxed{-2} & -6 & 4 & -1 \\ \boxed{1} & -4 & 10 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{51}(-1)E_{41}(2)E_{31}(-1)E_1(\frac{1}{3})} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & \boxed{2} & -4 & 0 \\ 0 & \boxed{4} & 8 & 0 \\ 0 & \boxed{0} & 0 & -1 \\ 0 & \boxed{-7} & 12 & -4 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\xrightarrow{E_{52}(7)E_{32}(-4)E_2(\frac{1}{2})} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{16} & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{0} & -1 \\ 0 & 0 & \boxed{-2} & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{53}(2)E_3(\frac{1}{16})} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{-1} \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{-4} \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\xrightarrow{E_{54}(4)E_4(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{U},$$

ed

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} \boxed{3} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \boxed{0} & \boxed{2} & 0 & 0 & 0 \\ \boxed{1} & \boxed{4} & \boxed{16} & 0 & 0 \\ \boxed{-2} & \boxed{0} & \boxed{0} & \boxed{-1} & 0 \\ \boxed{1} & \boxed{-7} & \boxed{-2} & \boxed{-4} & 1 \end{pmatrix}.$$

Dunque $\mathbf{A} = \mathbf{P}^T\mathbf{LU}$ dove

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{L} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 16 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & -7 & -2 & -4 & 1 \end{pmatrix} \text{ e } \mathbf{U} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

SI NOTI:

$\boxed{1}$

$$\mathbf{H} = \mathbf{E}_{23}\mathbf{E}_{34} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \neq \mathbf{P}$$

e che facendo un'eliminazione di Gauss su $\mathbf{HA}$ si ottiene:

$$\mathbf{HA} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 9 & -6 & 0 \\ -2 & -6 & 4 & -1 \\ 0 & 2 & -4 & 0 \\ 1 & 7 & 6 & 0 \\ 1 & -4 & 10 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 9 & -6 & 0 \\ 1 & 7 & 6 & 0 \\ -2 & -6 & 4 & -1 \\ 0 & 2 & -4 & 0 \\ 1 & -4 & 10 & -4 \end{pmatrix} \to$$

$$\xrightarrow{E_{51}(-1)E_{31}(2)E_{21}(-1)E_1(\frac{1}{3})} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 4 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -4 & 0 \\ 0 & -7 & 12 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{52}(7)E_{42}(-2)E_2(\frac{1}{4})}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & 26 & -4 \end{pmatrix}.$$

Dunque $\mathbf{HA}$ non ha una decomposizione $\mathbf{LU}$.
Quindi è fondamentale, per costruire $\mathbf{P}$, l'ordine in cui si moltiplicano le matrici corrispondenti agli scambi di righe effettuati (si parte dall'ultimo procedendo a ritroso).

$\boxed{2}$ Dall'eliminazione di Gauss fatta su $\mathbf{A}$ si ottiene che

$$\mathbf{E}_{54}(4) \cdot \mathbf{E}_4(-1) \cdot \mathbf{E}_{53}(2) \cdot \mathbf{E}_3(\tfrac{1}{16}) \cdot \mathbf{E}_{34} \cdot \mathbf{E}_{52}(7) \cdot \mathbf{E}_{42}(-4) \cdot \mathbf{E}_2(\tfrac{1}{2}) \cdot \mathbf{E}_{23} \cdot \mathbf{E}_{51}(-1)\cdot$$

$$\cdot\mathbf{E}_{41}(-1) \cdot \mathbf{E}_{21}(2) \cdot \mathbf{E}_1(\tfrac{1}{3}) \cdot \mathbf{A} = \mathbf{U}.$$

Quindi la tentazione di intuire $\mathbf{L}$ direttamente da questa eliminazione di Gauss è fuorviante: posto

$$\mathbf{B} = \mathbf{E}_{54}(4) \cdot \mathbf{E}_4(-1) \cdot \mathbf{E}_{53}(2) \cdot \mathbf{E}_3(\tfrac{1}{16}) \cdot \mathbf{E}_{52}(7) \cdot \mathbf{E}_{42}(-4) \cdot \mathbf{E}_2(\tfrac{1}{2}) \cdot \mathbf{E}_{51}(-1)\cdot$$

$$\cdot\mathbf{E}_{41}(-1) \cdot \mathbf{E}_{21}(2) \cdot \mathbf{E}_1(\tfrac{1}{3})$$

il prodotto delle matrici elementari diverse da quelle corrispondenti agli scambi di righe, si ha che $\mathbf{BPA} \neq \mathbf{U}$, e quindi $\mathbf{PA} \neq \mathbf{B}^{-1}\mathbf{U}$, ossia $\mathbf{B}^{-1}$ non è un buon candidato per $\mathbf{L}$.

$\boxed{3}$ Mostriamo che esistono una forma ridotta di Gauss $\mathbf{U}^*$ per $\mathbf{A}$, una matrice di permutazione $\mathbf{P}^*$ ed una matrice triangolare inferiore non singolare $\mathbf{L}^*$ tali che

$$\mathbf{U}^* \neq \mathbf{U}, \qquad \mathbf{P}^* \neq \mathbf{P}, \qquad \mathbf{L}^* \neq \mathbf{L}, \qquad \text{ma } \mathbf{A} = (\mathbf{P}^*)^T\mathbf{L}^*\mathbf{U}^* = \mathbf{P}^T\mathbf{L}\mathbf{U},$$

ossia la decomposizione $\mathbf{A} = \mathbf{P}^T\mathbf{L}\mathbf{U}$ non è unica.

Facciamo una eliminazione di Gauss su $\mathbf{A}$ scegliendo degli scambi di riga diversi da quelli scelti nell'eliminazione che abbiamo fatto precedentemente.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 9 & -6 & 0 \\ -2 & -6 & 4 & -1 \\ 0 & 2 & -4 & 0 \\ 1 & 7 & 6 & 0 \\ 1 & -4 & 10 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{51}(-1)E_{41}(-1)E_{21}(2)E_1(\frac{1}{3})} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -4 & 0 \\ 0 & 4 & 8 & 0 \\ 0 & -7 & 12 & -4 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\xrightarrow{E_{24}} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 4 & 8 & 0 \\ 0 & 2 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -7 & 12 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{52}(7)E_{32}(-2)E_2(\frac{1}{4})} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 26 & -4 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\xrightarrow{E_{53}(-26)E_3(\frac{1}{-8})} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{54}(4)E_4(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Sia $\mathbf{P}^* = \mathbf{E}_{24} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Allora

$$\mathbf{P}^*\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 9 & -6 & 0 \\ -2 & -6 & 4 & -1 \\ 0 & 2 & -4 & 0 \\ 1 & 7 & 6 & 0 \\ 1 & -4 & 10 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{3} & 9 & -6 & 0 \\ \boxed{1} & 7 & 6 & 0 \\ \boxed{0} & 2 & -4 & 0 \\ \boxed{-2} & -6 & 4 & -1 \\ \boxed{1} & -4 & 10 & -4 \end{pmatrix} \to$$

$$\xrightarrow{E_{51}(-1)E_{41}(2)E_{21}(-1)E_1(\frac{1}{3})} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & \boxed{4} & 8 & 0 \\ 0 & \boxed{2} & -4 & 0 \\ 0 & \boxed{0} & 0 & -1 \\ 0 & \boxed{-7} & 12 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{52}(7)E_{32}(-2)E_2(\frac{1}{4})}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{-8} & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{0} & -1 \\ 0 & 0 & \boxed{26} & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{53}(-26)E_3(\frac{1}{-8})} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{-1} \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{-4} \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{54}(4)E_4(-1)}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Quindi $\mathbf{A} = (\mathbf{P}^*)^T\mathbf{L}^*\mathbf{U}^*$ con

$$\mathbf{P}^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \neq \mathbf{P}, \quad \mathbf{U}^* = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \neq \mathbf{U},$$

$$\mathbf{L}^* = \begin{pmatrix} \boxed{3} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \boxed{1} & \boxed{4} & 0 & 0 & 0 \\ \boxed{0} & \boxed{2} & \boxed{-8} & 0 & 0 \\ \boxed{-2} & \boxed{0} & \boxed{0} & \boxed{-1} & 0 \\ \boxed{1} & \boxed{-7} & \boxed{26} & \boxed{-4} & 1 \end{pmatrix} \neq \mathbf{L}.$$

Svolgimento degli Esercizi per casa 5

$\boxed{\mathbf{1}}$ Si provi che l'insieme delle matrici simmetriche (complesse) di ordine n è un sottospazio vettoriale di $M_n(\mathbb{C})$ e che l'insieme delle matrici anti-hermitiane (complesse) di ordine n non lo è.

Sia $W_1 = \{\mathbf{A} \in M_n(\mathbb{C}) | \mathbf{A} = \mathbf{A}^T\}$ l'insieme delle matrici simmetriche (complesse) di ordine n.

$(i)\quad \mathbf{O}_{n\times n} \in W_1$: $\mathbf{O}^T = \mathbf{O}$

$(ii)\quad \mathbf{A}, \mathbf{B} \in W_1 \quad \overset{?}{\Longrightarrow} \quad \mathbf{A} + \mathbf{B} \in W_1$

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}\mathbf{A} \in W_1 \Longrightarrow \mathbf{A} \in M_n(\mathbb{C}) \\ \mathbf{B} \in W_1 \Longrightarrow \mathbf{B} \in M_n(\mathbb{C})\end{array}\right\} \Longrightarrow \mathbf{A} + \mathbf{B} \in M_n(\mathbb{C}) \\ \left.\begin{array}{l}\mathbf{A} \in W_1 \Longrightarrow \mathbf{A} = \mathbf{A}^T \\ \mathbf{B} \in W_1 \Longrightarrow \mathbf{B} = \mathbf{B}^T\end{array}\right\} \Longrightarrow (\mathbf{A} + \mathbf{B})^T = \mathbf{A}^T + \mathbf{B}^T = \mathbf{A} + \mathbf{B}\end{array}\right\} \Longrightarrow \mathbf{A} + \mathbf{B} \in W_1$$

$(iii)\quad \alpha \in \mathbb{C}, \mathbf{A} \in W_1 \quad \overset{?}{\Longrightarrow} \quad \alpha\mathbf{A} \in W_1$

$$\left.\begin{array}{r}\mathbf{A} \in W_1 \Longrightarrow \mathbf{A} \in M_n(\mathbb{C}) \Longrightarrow \alpha\mathbf{A} \in M_n(\mathbb{C}) \\ \mathbf{A} \in W_1 \Longrightarrow \mathbf{A} = \mathbf{A}^T \Longrightarrow (\alpha\mathbf{A})^T = \alpha\mathbf{A}^T = \alpha\mathbf{A}\end{array}\right\} \Longrightarrow \quad \alpha\mathbf{A} \in W_1$$

Sia $W_2 = \{\mathbf{A} \in M_n(\mathbb{C}) | \mathbf{A}^H = -\mathbf{A}\}$ l'insieme delle matrici anti-hermitiane (complesse) di ordine n.

$(i)\quad \mathbf{O}_{n\times n} \in W_2$: $\mathbf{O}^H = \mathbf{O} = -\mathbf{O}$

$(ii)\quad \mathbf{A}, \mathbf{B} \in W_2 \quad \overset{?}{\Longrightarrow} \quad \mathbf{A} + \mathbf{B} \in W_2$

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}\mathbf{A} \in W_2 \Longrightarrow \mathbf{A} \in M_n(\mathbb{C}) \\ \mathbf{B} \in W_2 \Longrightarrow \mathbf{B} \in M_n(\mathbb{C})\end{array}\right\} \Longrightarrow \mathbf{A} + \mathbf{B} \in M_n(\mathbb{C}) \\ \left.\begin{array}{l}\mathbf{A} \in W_2 \Longrightarrow \mathbf{A}^H = -\mathbf{A} \\ \mathbf{B} \in W_2 \Longrightarrow \mathbf{B}^H = -\mathbf{B}\end{array}\right\} \Longrightarrow (\mathbf{A} + \mathbf{B})^H = \mathbf{A}^H + \mathbf{B}^H = -\mathbf{A} + (-\mathbf{B}) = -(\mathbf{A} + \mathbf{B})\end{array}\right\} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \quad \mathbf{A} + \mathbf{B} \in W_2$$

$(iii) \quad \alpha \in \mathbb{C}, \mathbf{A} \in W_2 \quad \overset{?}{\Longrightarrow} \quad \alpha\mathbf{A} \in W_2$

$$\mathbf{A} \in W_2 \Longrightarrow \mathbf{A} \in M_n(\mathbb{C}) \Longrightarrow \alpha\mathbf{A} \in M_n(\mathbb{C})$$

$$\mathbf{A} \in W_2 \Longrightarrow \mathbf{A}^H = -\mathbf{A} \Longrightarrow (\alpha\mathbf{A})^H = \overline{\alpha}\mathbf{A}^H = \overline{\alpha}(-\mathbf{A}) = -\overline{\alpha}\mathbf{A}$$

Non è vero che $\alpha\mathbf{A} \in W_2$ **per ogni scalare** α **ed ogni** $\mathbf{A} \in W_2$:

prendendo $\mathbf{A} \neq \mathbf{O}$si ottiene che

$$\overline{\alpha}\mathbf{A} = \alpha\mathbf{A} \quad \underset{\substack{\uparrow \\ \boxed{\text{poichè } \mathbf{A} \neq \mathbf{O}}}}{\Longleftrightarrow} \quad \overline{\alpha} = \alpha \iff \alpha \in \mathbb{R}$$

Quindi se $\mathbf{O} \neq \mathbf{A} \in W_2$ e $\alpha \notin \mathbb{R}$ (ad esempio se $\mathbf{A}$ è la matrice $n \times n$ con 1 al posto $(1, n)$, -1 al posto $(n, 1)$ e 0 altrove, ed $\alpha = i$) allora $\alpha\mathbf{A} \notin W_2$.

Dunque W_2 non è un sottospazio dello spazio vettoriale $M_n(\mathbb{C})$.

$\boxed{\mathbf{2}}$ Si dica quale dei seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{R}^2$ è un suo sottospazio:

$$W_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \middle| x - 2y = 0 \right\};$$

$$W_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \middle| x^2 - 2y = 0 \right\};$$

$$W_3 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \middle| x - 2y = 1 \right\}.$$

• Per vedere se W_1 è o non è un sottospazio di $\mathbb{R}^2$ occorre stabilire se le seguenti condizioni sono soddisfatte:
(i) $\mathbf{0} \in W_1$,
(ii) $\mathbf{u} + \mathbf{v} \in W_1$ per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in W_1$,
(iii) $\alpha\mathbf{u} \in W_1$ per ogni $\mathbf{u} \in W_1$ ed ogni scalare α.

(i) $\mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in W_1$ perchè $0 - 2 \cdot 0 = 0$.

(ii) Se $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \in W_1$, allora

$$\begin{cases} x_1 - 2y_1 = 0 \\ x_2 - 2y_2 = 0 \end{cases}$$

Di conseguenza

$$(x_1 + x_2) - 2(y_1 + y_2) = (x_1 - 2y_1) + (x_2 - 2y_2) = 0 + 0 = 0,$$

e quindi $\mathbf{u}+\mathbf{v} = \begin{pmatrix} x_1+x_2 \\ y_1+y_2 \end{pmatrix} \in W_1$.

(iii) Se $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in W_1$, allora $x - 2y = 0$. Ne segue che per ogni scalare $\alpha \in \mathbb{R}$ si ha

$$\alpha x - 2\alpha y = \alpha(x-2y) = \alpha \cdot 0 = 0,$$

e quindi $\alpha\mathbf{u} = \alpha \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha x \\ \alpha y \end{pmatrix} \in W_1$.

Dunque W_1 è un sottospazio di $\mathbb{R}^2$.

• Per vedere se W_2 è o non è un sottospazio di $\mathbb{R}^2$ occorre stabilire se le seguenti condizioni sono soddisfatte:

(i) $\mathbf{0} \in W_2$,
(ii) $\mathbf{u}+\mathbf{v} \in W_2$ per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in W_2$,
(iii) $\alpha\mathbf{u} \in W_2$ per ogni $\mathbf{u} \in W_2$ ed ogni scalare α.

(i) $\mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in W_2$ perchè $0^2 - 2 \cdot 0 = 0$.

(ii) Se $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \in W_2$, allora

$$(*) \qquad \begin{cases} x_1^2 - 2y_1 = 0 \\ x_2^2 - 2y_2 = 0 \end{cases}$$

Perchè $\mathbf{u}+\mathbf{v} = \begin{pmatrix} x_1+x_2 \\ y_1+y_2 \end{pmatrix}$ appartenga a W_2 occorre che sia soddisfatta la condizione:

$$(**) \qquad (x_1+x_2)^2 - 2(y_1+y_2) = 0.$$

Da $(*)$ segue

$$\begin{aligned} (x_1+x_2)^2 - 2(y_1+y_2) &= x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_2 - 2(y_1+y_2) = \\ &= (x_1^2 - 2y_1) + (x_2^2 - 2y_2) + 2x_1x_2 \quad \overset{(*)}{=} 2x_1x_2, \end{aligned}$$

per cui prendendo

$$\begin{cases} x_1 \neq 0 \\ x_2 \neq 0 \\ y_1 = \frac{x_1^2}{2} \\ y_2 = \frac{x_2^2}{2} \end{cases}$$

si ha che $(*)$ è soddisfatta, ma $(**)$ no, ossia $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \in W_2$, ma $\mathbf{u}+\mathbf{v} = \begin{pmatrix} x_1+x_2 \\ y_1+y_2 \end{pmatrix} \notin W_2$ (ad esempio, con $\mathbf{u} = \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \in W_2$ si ha che $2\mathbf{u} =$

$\mathbf{u}+\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \notin W_2$). Quindi W_2, non soddisfacendo la condizione (ii), non è un sottospazio di $\mathbb{R}^2$.

• Per vedere se W_3 è o non è un sottospazio di $\mathbb{R}^2$ occorre stabilire se le seguenti condizioni sono soddisfatte:

(i) $\mathbf{0} \in W_3$,
(ii) $\mathbf{u}+\mathbf{v} \in W_3$ per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in W_3$,
(iii) $\alpha\mathbf{u} \in W_3$ per ogni $\mathbf{u} \in W_3$ ed ogni scalare α.

(i) $\mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \notin W_3$ perchè $0 - 2 \cdot 0 = 0 \neq 1$.

Dunque W_3, non soddisfacendo la condizione (i), non è un sottospazio di $\mathbb{R}^2$.

$\boxed{\mathbf{3}}$ Sia $\mathbf{A} \in M_n(\mathbb{C})$. Si provi che i tre seguenti sottoinsiemi di $M_n(\mathbb{C})$ sono sottospazi vettoriali di $M_n(\mathbb{C})$:

$$\begin{aligned} W_1 &= \{\mathbf{B} \in M_n(\mathbb{C}) | \mathbf{AB} = \mathbf{BA}\}; \\ W_2 &= \{\mathbf{B} \in M_n(\mathbb{C}) | \mathbf{AB} \text{ è scalare}\}; \\ W_3 &= \{\mathbf{B} \in M_n(\mathbb{C}) | \mathbf{AB} = \mathbf{B}^T\}. \end{aligned}$$

W_1 è un sottospazio di $M_n(\mathbb{C})$:

(i) $\quad \mathbf{O}_{n\times n} \in W_1$: $\mathbf{O}_{n\times n} \in M_n(\mathbb{C})$ e $\mathbf{AO} = \mathbf{O} = \mathbf{OA}$.

(ii) $\quad \mathbf{B}, \mathbf{C} \in W_1 \quad \stackrel{?}{\Longrightarrow} \quad \mathbf{B}+\mathbf{C} \in W_1$

$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{r} \mathbf{B} \in W_1 \Longrightarrow \mathbf{B} \in M_n(\mathbb{C}) \\ \mathbf{C} \in W_1 \Longrightarrow \mathbf{C} \in M_n(\mathbb{C}) \end{array}\right\} \Longrightarrow \mathbf{B}+\mathbf{C} \in M_n(\mathbb{C}) \\ \left.\begin{array}{r} \mathbf{B} \in W_1 \Longrightarrow \mathbf{AB} = \mathbf{BA} \\ \mathbf{C} \in W_1 \Longrightarrow \mathbf{AC} = \mathbf{CA} \end{array}\right\} \Longrightarrow \mathbf{A}(\mathbf{B}+\mathbf{C}) = \mathbf{AB}+\mathbf{AC} = \mathbf{BA}+\mathbf{CA} = (\mathbf{B}+\mathbf{C})\mathbf{A} \end{array}\right\} \Longrightarrow$$

$\Longrightarrow \quad \alpha\mathbf{B}+\mathbf{C} \in W_1$

(iii) $\quad \alpha \in \mathbb{C}, \mathbf{B} \in W_1 \quad \stackrel{?}{\Longrightarrow} \quad \alpha\mathbf{B} \in W_1$

$$\left.\begin{array}{r} \mathbf{B} \in W_1 \Longrightarrow \mathbf{B} \in M_n(\mathbb{C}) \Longrightarrow \alpha\mathbf{B} \in M_n(\mathbb{C}) \\ \mathbf{B} \in W_1 \Longrightarrow \mathbf{AB} = \mathbf{BA} \Longrightarrow \mathbf{A}(\alpha\mathbf{B}) = \alpha(\mathbf{AB}) = \alpha(\mathbf{BA}) = (\alpha\mathbf{B})\mathbf{A} \end{array}\right\} \Longrightarrow \alpha\mathbf{B} \in W_1$$

W_2 è un sottospazio di $M_n(\mathbb{C})$: poichè

$$\mathbf{B} \in W_2 \iff \mathbf{B} \in M_n(\mathbb{C}) \text{ ed } \exists \delta_{\mathbf{B}} \in \mathbb{C} | \mathbf{AB} = \delta_{\mathbf{B}} \mathbf{I}_{\boldsymbol{n}},$$

e poichè $M_n(\mathbb{C})$ è uno spazio vettoriale (per cui la somma di due matrici di ordine n ed il prodotto di una matrice di ordine n per uno scalare sono matrici di ordine n) è sufficiente verificare che

(i) $\mathbf{AO}_{n\times n} = \mathbf{O} = 0\mathbf{I}_{\boldsymbol{n}}$ per cui esiste $\delta_{\mathbf{O}} \in \mathbb{C}$ tale che $\mathbf{AO} = \delta_{\mathbf{O}}\mathbf{I}_{\boldsymbol{n}}$ (si prenda $\delta_{\mathbf{O}} = 0$).

(ii) Se $\mathbf{B}$ e $\mathbf{C}$ sono matrici di ordine n tali che esistano $\delta_{\mathbf{B}}, \delta_{\mathbf{C}} \in \mathbb{C}$ per cui $\mathbf{AB} = \delta_{\mathbf{B}}\mathbf{I}_{\boldsymbol{n}}$ e $\mathbf{AC} = \delta_{\mathbf{C}}\mathbf{I}_{\boldsymbol{n}}$, allora

$$\mathbf{A}(\mathbf{B}+\mathbf{C}) = \mathbf{AB} + \mathbf{AC} = \delta_{\mathbf{B}}\mathbf{I}_{\boldsymbol{n}} + \delta_{\mathbf{C}}\mathbf{I}_{\boldsymbol{n}} = (\delta_{\mathbf{B}} + \delta_{\mathbf{C}})\mathbf{I}_{\boldsymbol{n}}.$$

Quindi esiste $\delta_{\mathbf{B}+\mathbf{C}} \in \mathbb{C}$ tale che $\mathbf{A}(\mathbf{B}+\mathbf{C}) = \delta_{\mathbf{B}+\mathbf{C}}\mathbf{I}_{\boldsymbol{n}}$: si prenda $\delta_{\mathbf{B}+\mathbf{C}} = \delta_{\mathbf{B}} + \delta_{\mathbf{C}}$.

(iii) Se $\alpha \in \mathbb{C}$ e $\mathbf{B}$ è una matrice di ordine n per cui esista $\delta_{\mathbf{B}} \in \mathbb{C}$ tale che $\mathbf{AB} = \delta_{\mathbf{B}}\mathbf{I}_{\boldsymbol{n}}$, allora

$$\mathbf{A}(\alpha\mathbf{B}) = \alpha(\mathbf{AB}) = \alpha(\delta_{\mathbf{B}}\mathbf{I}_{\boldsymbol{n}}) = (\alpha\delta_{\mathbf{B}})\mathbf{I}_{\boldsymbol{n}}.$$

Quindi esiste $\delta_{\alpha\mathbf{B}} \in \mathbb{C}$ tale che $\mathbf{A}(\alpha\mathbf{B}) = \delta_{\alpha\mathbf{B}}\mathbf{I}_{\boldsymbol{n}}$: si prenda $\delta_{\alpha\mathbf{B}} = \alpha\delta_{\mathbf{B}}$.

W_3 è un sottospazio di $M_n(\mathbb{C})$:

(i) $\mathbf{O}_{n\times n} \in W_3$: $\mathbf{O}_{n\times n} \in M_n(\mathbb{C})$ e$\mathbf{AO} = \mathbf{O} = \mathbf{O}^T$.

(ii) $\mathbf{B}, \mathbf{C} \in W_3 \overset{?}{\Longrightarrow} \mathbf{B}+\mathbf{C} \in W_3$

$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{r} \mathbf{B} \in W_3 \Longrightarrow \mathbf{B} \in M_n(\mathbb{C}) \\ \mathbf{C} \in W_3 \Longrightarrow \mathbf{C} \in M_n(\mathbb{C}) \end{array}\right\} \Longrightarrow \mathbf{B}+\mathbf{C} \in M_n(\mathbb{C}) \\ \left.\begin{array}{l} \mathbf{B} \in W_3 \Longrightarrow \mathbf{AB} = \mathbf{B}^T \\ \mathbf{C} \in W_3 \Longrightarrow \mathbf{AC} = \mathbf{C}^T \end{array}\right\} \Longrightarrow \mathbf{A}(\mathbf{B}+\mathbf{C}) = \mathbf{AB} + \mathbf{AC} = \mathbf{B}^T + \mathbf{C}^T = (\mathbf{B}+\mathbf{C})^T \end{array}\right\} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \quad \mathbf{B}+\mathbf{C} \in W_3$$

(iii) $\alpha \in \mathbb{C}, \mathbf{B} \in W_3 \overset{?}{\Longrightarrow} \alpha\mathbf{B} \in W_3$

$$\left.\begin{array}{r} \mathbf{B} \in W_3 \Longrightarrow \mathbf{B} \in M_n(\mathbb{C}) \Longrightarrow \alpha\mathbf{B} \in M_n(\mathbb{C}) \\ \mathbf{B} \in W_3 \Longrightarrow \mathbf{AB} = \mathbf{B}^T \Longrightarrow \mathbf{A}(\alpha\mathbf{B}) = \alpha(\mathbf{AB}) = \alpha\mathbf{B}^T = (\alpha\mathbf{B})^T \end{array}\right\} \Longrightarrow \alpha\mathbf{B} \in W_3$$

$\boxed{4}$ Sia $V = \mathbb{R}^2$ (sp. vett. reale). Si dica quale dei seguenti sottoinsiemi di V è un sottospazio vettoriale di V:

$$\boldsymbol{\mathcal{S}}_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\};$$

$$\boldsymbol{\mathcal{S}}_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\};$$

$$\boldsymbol{\mathcal{S}}_3 = \left\{ \begin{pmatrix} a-2 \\ b \end{pmatrix} | a, b \in \mathbb{R} \right\};$$

$$\boldsymbol{\mathcal{S}}_4 = \left\{ \begin{pmatrix} a-2 \\ a+1 \end{pmatrix} | a \in \mathbb{R} \right\}.$$

• $\boldsymbol{\mathcal{S}}_1$ è un sottospazio vettoriale di V: l'unico elemento di $\boldsymbol{\mathcal{S}}_1$ è il vettore $\mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, e $\mathbf{0} + \mathbf{0} = \mathbf{0} \in \boldsymbol{\mathcal{S}}_1$ e $\alpha\mathbf{0} = \mathbf{0} \in \boldsymbol{\mathcal{S}}_1$ per ogni scalare α ($\boldsymbol{\mathcal{S}}_1$ è il sottospazio nullo di $\mathbb{R}^2$).

• $\boldsymbol{\mathcal{S}}_2$ non è un sottospazio di V: contiene $\mathbf{e_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ma non contiene $\mathbf{e_2} + \mathbf{e_2} = 2\mathbf{e_2}$ (d'altra parte nessun sottoinsieme **finito** di uno spazio vettoriale W che contenga un elemento non nullo $\mathbf{w} \neq \mathbf{0}$ può essere un sottospazio di W: se U è un sottospazio di W che contiene $\mathbf{w} \neq \mathbf{0}$, allora U deve contenere l'insieme **infinito** di vettori $\{\alpha\mathbf{w} | \alpha \text{ scalare }\}$, per cui U stesso deve essere infinito).

• Per vedere se $\boldsymbol{\mathcal{S}}_3$ è o non è un sottospazio di V occorre stabilire se le seguenti condizioni sono soddisfatte:

(i) $\mathbf{0} \in \boldsymbol{\mathcal{S}}_3$,
(ii) $\mathbf{u} + \mathbf{v} \in \boldsymbol{\mathcal{S}}_3$ per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \boldsymbol{\mathcal{S}}_3$,
(iii) $\alpha\mathbf{u} \in \boldsymbol{\mathcal{S}}_3$ per ogni $\mathbf{u} \in \boldsymbol{\mathcal{S}}_3$ ed ogni scalare α.

(i) esistono $a, b \in \mathbb{R}$ tali che $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-2 \\ b \end{pmatrix}$: si prenda $a = 2$ e $b = 0$, quindi $\mathbf{0} \in \boldsymbol{\mathcal{S}}_3$.

(ii) Se $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \boldsymbol{\mathcal{S}}_3$ esistono $a_1, b_1, a_2, b_2 \in \mathbb{R}$ tali che

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} a_1 - 2 \\ b_1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} a_2 - 2 \\ b_2 \end{pmatrix},$$

inoltre

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} \in \boldsymbol{\mathcal{S}}_3 \quad \Longleftrightarrow \quad \exists \; a_3, b_3 \in \mathbb{R} \,|\, \mathbf{u} + \mathbf{v} = \begin{pmatrix} a_3 - 2 \\ b_3 \end{pmatrix}.$$

Poichè $\mathbf{u}+\mathbf{v} = \begin{pmatrix} a_1 - 2 \\ b_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2 - 2 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + a_2 - 4 \\ b_1 + b_2 \end{pmatrix}$, basta prendere $a_3 = a_1 + a_2 - 2$ e $b_3 = b_1 + b_2$.

(iii) Se $\mathbf{u} \in \boldsymbol{\mathcal{S}}_3$ esistono $a, b \in \mathbb{R}$ tali che $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} a-2 \\ b \end{pmatrix}$, inoltre per ogni scalare $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\alpha\mathbf{u} \in \boldsymbol{\mathcal{S}}_3 \quad \Longleftrightarrow \quad \exists \quad c, d \in \mathbb{R} \,|\, \alpha\mathbf{u} = \begin{pmatrix} c-2 \\ d \end{pmatrix}.$$

Poichè $\alpha\mathbf{u} = \alpha \begin{pmatrix} a-2 \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha a - 2\alpha \\ \alpha b \end{pmatrix}$, basta prendere $c = \alpha a - 2\alpha + 2$ e $d = \alpha b$.

Dunque $\boldsymbol{\mathcal{S}}_3$ è un sottospazio di V.

• Per vedere se $\boldsymbol{\mathcal{S}}_4$ è o non è un sottospazio di V occorre stabilire se le seguenti condizioni sono soddisfatte:

(i) $\mathbf{0} \in \boldsymbol{\mathcal{S}}_4$,
(ii) $\mathbf{u} + \mathbf{v} \in \boldsymbol{\mathcal{S}}_4$ per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \boldsymbol{\mathcal{S}}_4$,
(iii) $\alpha\mathbf{u} \in \boldsymbol{\mathcal{S}}_4$ per ogni $\mathbf{u} \in \boldsymbol{\mathcal{S}}_4$ ed ogni scalare α.

(i) Perchè $\mathbf{0}$ appartenga a $\boldsymbol{\mathcal{S}}_4$ occorre che esista $a \in \mathbb{R}$ tale che $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-2 \\ a+1 \end{pmatrix}$.
Poichè il sistema

$$\begin{cases} a - 2 = 0 \\ \\ a + 1 = 0 \end{cases}$$

nell'incognita a non ha soluzioni, allora $\boldsymbol{\mathcal{S}}_4$ non è un sottospazio di V.

$\boxed{\mathbf{5}}$ Si dica se

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{\mathcal{W}}_1 = \{i \cdot \mathbf{v} | \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n\} \text{ e} \\ &\boldsymbol{\mathcal{W}}_2 = \{2 \cdot \mathbf{v} | \mathbf{v} \in \mathbb{C}^n\} \end{aligned}$$

sono sottospazi di $\mathbb{C}^n$.

Per vedere se $\boldsymbol{\mathcal{W}}_1$ è o non è un sottospazio di $\mathbb{C}^n$ occorre stabilire se le seguenti condizioni sono soddisfatte:

(i) $\mathbf{0} \in \boldsymbol{\mathcal{W}}_1$,
(ii) $\mathbf{u_1} + \mathbf{u_2} \in \boldsymbol{\mathcal{W}}_1$ per ogni $\mathbf{u_1}, \mathbf{u_2} \in \boldsymbol{\mathcal{W}}_1$,
(iii) $\alpha\mathbf{u} \in \boldsymbol{\mathcal{W}}_1$ per ogni $\mathbf{u} \in \boldsymbol{\mathcal{W}}_1$ ed ogni $\alpha \in \mathbb{C}$.

(i) esiste $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ tale che $\mathbf{0} = i \cdot \mathbf{v}$: si prenda $\mathbf{v} = \mathbf{0}$. Quindi $\mathbf{0} \in \boldsymbol{\mathcal{W}}_1$
(ii) Se $\mathbf{u_1}, \mathbf{u_2} \in \boldsymbol{\mathcal{W}}_1$ esistono $\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2} \in \mathbb{R}^n$ tali che $\mathbf{u_1} = i \cdot \mathbf{v_1}$ ed $\mathbf{u_2} = i \cdot \mathbf{v_2}$. inoltre

$$\mathbf{u_1} + \mathbf{u_2} \in \boldsymbol{\mathcal{W}}_1 \quad \Longleftrightarrow \quad \exists \quad \mathbf{v_3} \in \mathbb{R}^n \,|\, \mathbf{u_1} + \mathbf{u_2} = i \cdot \mathbf{v_3}.$$

Poichè $\mathbf{u_1} + \mathbf{u_2} = i \cdot \mathbf{v_1} + i \cdot \mathbf{v_2} = i \cdot (\mathbf{v_1} + \mathbf{v_2})$, basta prendere $\mathbf{v_3} = \mathbf{v_1} + \mathbf{v_2}$.

(iii) Se $\mathbf{u} \in \boldsymbol{\mathcal{W}}_1$, esiste $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ tale che $\mathbf{u} = i \cdot \mathbf{v}$, inoltre per ogni scalare $\alpha \in \mathbb{C}$

$$\alpha\mathbf{u} \in \boldsymbol{\mathcal{W}}_1 \quad \Longleftrightarrow \quad \exists \mathbf{w} \in \mathbb{R}^n \,|\, \alpha\mathbf{u} = i \cdot \mathbf{w}.$$

Poichè $\alpha\mathbf{u} = \alpha \cdot (i \cdot \mathbf{v}) = i \cdot (\alpha \cdot \mathbf{v})$,

$$\alpha\mathbf{u} \in \mathcal{W}_1 \quad \forall \mathbf{u} \in \mathcal{W}_1, \alpha \in \mathbb{C} \quad \Longleftrightarrow \quad \mathbf{w} = \alpha \cdot \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n, \alpha \in \mathbb{C}.$$

Prendendo ad esempio $\mathbf{v} = \mathbf{e_1} \in \mathbb{R}^n$ ed $\alpha = i \in \mathbb{C}$, si ha che $\alpha\mathbf{v} = i \cdot \mathbf{e_1} \notin \mathbb{R}^n$ (quindi $\mathbf{u} = i \cdot \mathbf{e_1} \in \mathcal{W}_1$ mentre $\alpha\mathbf{u} = i^2 \cdot \mathbf{e_1} = -\mathbf{e_1} \notin \mathcal{W}_1$, non esistendo $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$ tale che $-\mathbf{e_1} = i \cdot \mathbf{z}$).

Concludendo, $\mathcal{W}_1$ non è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{C}^n$.

Per vedere se $\mathcal{W}_2$ è o non è un sottospazio di $\mathbb{C}^n$ occorre stabilire se le seguenti condizioni sono soddisfatte:

(i) $\mathbf{0} \in \mathcal{W}_2$,
(ii) $\mathbf{u_1} + \mathbf{u_2} \in \mathcal{W}_2$ per ogni $\mathbf{u_1}, \mathbf{u_2} \in \mathcal{W}_2$,
(iii) $\alpha\mathbf{u} \in \mathcal{W}_2$ per ogni $\mathbf{u} \in \mathcal{W}_2$ ed ogni $\alpha \in \mathbb{C}$.

(i) esiste $\mathbf{v} \in \mathbb{C}^n$ tale che $\mathbf{0} = 2 \cdot \mathbf{v}$: si prenda $\mathbf{v} = \mathbf{0}$. Quindi $\mathbf{0} \in \mathcal{W}_2$.

(ii) Se $\mathbf{u_1}, \mathbf{u_2} \in \mathcal{W}_2$ esistono $\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2} \in \mathbb{C}^n$ tali che $\mathbf{u_1} = 2 \cdot \mathbf{v_1}$ ed $\mathbf{u_2} = 2 \cdot \mathbf{v_2}$. inoltre

$$\mathbf{u_1} + \mathbf{u_2} \in \mathcal{W}_2 \quad \Longleftrightarrow \quad \exists \quad \mathbf{v_3} \in \mathbb{C}^n \,|\, \mathbf{u_1} + \mathbf{u_2} = 2 \cdot \mathbf{v_3}.$$

Poichè $\mathbf{u_1} + \mathbf{u_2} = 2 \cdot \mathbf{v_1} + 2 \cdot \mathbf{v_2} = 2 \cdot (\mathbf{v_1} + \mathbf{v_2})$, basta prendere $\mathbf{v_3} = \mathbf{v_1} + \mathbf{v_2}$.

(iii) Se $\mathbf{u} \in \mathcal{W}_2$, esiste $\mathbf{v} \in \mathbb{C}^n$ tale che $\mathbf{u} = 2 \cdot \mathbf{v}$, inoltre per ogni scalare $\alpha \in \mathbb{C}$

$$\alpha\mathbf{u} \in \mathcal{W}_2 \quad \Longleftrightarrow \quad \exists \mathbf{w} \in \mathbb{C}^n \,|\, \alpha\mathbf{u} = 2 \cdot \mathbf{w}.$$

Poichè $\alpha\mathbf{u} = \alpha \cdot (2 \cdot \mathbf{v}) = 2 \cdot (\alpha \cdot \mathbf{v})$,

$$\alpha\mathbf{u} \in \mathcal{W}_2 \quad \forall \mathbf{u} \in \mathcal{W}_2, \alpha \in \mathbb{C} \quad \Longleftrightarrow \quad \mathbf{w} = \alpha \cdot \mathbf{v} \in \mathbb{C}^n \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbb{C}^n, \alpha \in \mathbb{C}.$$

Dal momento che $\mathbb{C}^n$ è uno spazio vettoriale, allora $\alpha\mathbf{v} \in \mathbb{C}^n$ per ogni $\mathbf{v} \in \mathbb{C}^n$ ed ogni $\alpha \in \mathbb{C}$.

Concludendo, $\mathcal{W}_2$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{C}^n$.

$\boxed{\mathbf{6}}$ Sia $W = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix} | a \in \mathbb{R} \right\}$ l'insieme delle matrici reali anti-simmetriche di ordine 2. Si provi che W è un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale reale $M_2(\mathbb{R})$ e si dica quali dei seguenti sottoinsiemi di $M_2(\mathbb{R})$ è un insieme di generatori per W:

$$\mathcal{S}_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\mathcal{S}_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\mathcal{S}_3 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Proviamo prima che W è un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale reale $M_2(\mathbb{R})$.

$\boxed{1^0 \text{ MODO}}$ (i) $\mathbf{O}_{2\times 2} \in W$: $\mathbf{O}_{2\times 2} \in M_2(\mathbb{R})$ e $\mathbf{O}_{2\times 2}^T = \mathbf{O}_{2\times 2} = -\mathbf{O}_{2\times 2}$

(ii)

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{r}\mathbf{A} \in W \Longrightarrow \mathbf{A} \in M_2(\mathbb{R}) \\ \mathbf{B} \in W \Longrightarrow \mathbf{B} \in M_2(\mathbb{R})\end{array}\right\} \Longrightarrow \mathbf{A}+\mathbf{B} \in M_2(\mathbb{R}) \\ \\ \left.\begin{array}{r}\mathbf{A} \in W \Longrightarrow \mathbf{A}^T = -\mathbf{A} \\ \mathbf{B} \in W \Longrightarrow \mathbf{B}^T = -\mathbf{B}\end{array}\right\} \Longrightarrow (\mathbf{A}+\mathbf{B})^T = \mathbf{A}^T + \mathbf{B}^T = -\mathbf{A} - \mathbf{B} = -(\mathbf{A}+\mathbf{B})\end{array}\right\} \Longrightarrow$$

$\Longrightarrow \mathbf{A}+\mathbf{B} \in W$.

(iii) $\quad \alpha \in \mathbb{C}, \mathbf{A} \in W \quad \overset{?}{\Longrightarrow} \quad \alpha\mathbf{A} \in W$

$$\left.\begin{array}{r}\mathbf{A} \in W \Longrightarrow \mathbf{A} \in M_2(\mathbb{R}) \Longrightarrow \alpha\mathbf{A} \in M_2(\mathbb{R}) \\ \mathbf{A} \in W \Longrightarrow \mathbf{A}^T = -\mathbf{A} \Longrightarrow (\alpha\mathbf{A})^T = \alpha\mathbf{A}^T = \alpha(-\mathbf{A}) = -\alpha\mathbf{A}\end{array}\right\} \Longrightarrow \quad \alpha\mathbf{A} \in W$$

$\boxed{2^0 \text{ MODO}}$ (i) esiste $a \in \mathbb{R}$ tale che $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix}$: si prenda $a = 0$.

(ii) Se $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in W$ esistono $a, b \in \mathbb{R}$ tali che

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix},$$

inoltre

$$\mathbf{A}+\mathbf{B} \in W \quad \Longleftrightarrow \quad \exists \quad c \in \mathbb{R} \,|\, \mathbf{A}+\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & c \\ -c & 0 \end{pmatrix}.$$

Poichè

$$\mathbf{A}+\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & a+b \\ -(a+b) & 0 \end{pmatrix},$$

basta prendere $c = a + b$.

(iii) Se $\mathbf{A} \in W$ esiste $a \in \mathbb{R}$ tale che $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix}$, inoltre per ogni scalare $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\alpha\mathbf{A} \in W \quad \Longleftrightarrow \quad \exists \quad b \in \mathbb{R}^3 \,|\, \alpha\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix}.$$

Poichè
$$\alpha\mathbf{A} = \alpha\begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \alpha a \\ -\alpha a & 0 \end{pmatrix},$$
basta prendere $b = \alpha a$.

Dunque W è un sottospazio di $M_2(\mathbb{R})$.

Vediamo ora quale tra $\boldsymbol{\mathcal{S}}_1$, $\boldsymbol{\mathcal{S}}_2$ e $\boldsymbol{\mathcal{S}}_3$ è un insieme di generatori di W.

$\boldsymbol{\mathcal{S}}_1$: Dal momento che ogni elemento di $\boldsymbol{\mathcal{S}}_1 = \left\{\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}\right\}$ è un elemento di W, per stabilire se $\boldsymbol{\mathcal{S}}_1$ è o non è un insieme di generatori di W, spazio vettoriale **reale**, occorre stabilire se **per ogni $\mathbf{A} \in W$ esistono** α_1 ed α_2 numeri **reali** tali che
$$\mathbf{A} = \alpha_1\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \alpha_2\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha_1 + 2\alpha_2 \\ \alpha_1 - 2\alpha_2 & 0 \end{pmatrix}$$

Poichè per ogni $\mathbf{A} \in W$ esiste $a \in \mathbb{R}$ tale che $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix}$, il problema diventa stabilire se per ogni $a \in \mathbb{R}$ il sistema
$$(*) \qquad \begin{cases} -\alpha_1 + 2\alpha_2 = a \\ \alpha_1 - 2\alpha_2 = -a \end{cases}$$
nelle incognite **reali** α_1, α_2 ha soluzione. $(*)$ è equivalente all'unica equazione
$$\alpha_1 - 2\alpha_2 = -a$$
che ha soluzioni per ogni $a \in \mathbb{R}$ (si prendano ad esempio $\alpha_2 = 0$ ed $\alpha_1 = -a$).

Dunque $\boldsymbol{\mathcal{S}}_1$ è un insieme di generatori per W come spazio vettoriale reale.

$\boldsymbol{\mathcal{S}}_2$: Poichè $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \notin W$, allora $\boldsymbol{\mathcal{S}}_2 = \left\{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right\}$ non è un insieme di generatori per W.

$\boldsymbol{\mathcal{S}}_3$: Dal momento che $\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} \in W$, per stabilire se $\boldsymbol{\mathcal{S}}_3 = \left\{\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}\right\}$ è o non è un insieme di generatori per W come spazio vettoriale **reale** occorre stabilire se **per ogni $\mathbf{A} \in W$ esiste** $\alpha \in \mathbb{R}$ tale che
$$\mathbf{A} = \alpha\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3\alpha \\ -3\alpha & 0 \end{pmatrix}$$

Poichè per ogni $\mathbf{A} \in W$ esiste $a \in \mathbb{R}$ tale che $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix}$, il problema diventa stabilire se per ogni $a \in \mathbb{R}$ il sistema

$$(**) \qquad \begin{cases} 3\alpha = a \\ -3\alpha = -a \end{cases}$$

nell' incognita **reale** α ha soluzione. Poichè $(**)$ ha soluzione per ogni $a \in \mathbb{R}$ ($\alpha = a/3$), allora $\boldsymbol{\mathcal{S}}_3$ è un insieme di generatori per W come spazio vettoriale reale.

$\boxed{7}$ Si dica se

$$\boldsymbol{\mathcal{S}} = \left\{ \mathbf{v_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}; \mathbf{v_2} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 8 \end{pmatrix}; \mathbf{v_3} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} \right\}$$

è un insieme di generatori di $\mathbb{R}^3$.

Per stabilire se $\boldsymbol{\mathcal{S}}$ è o non è un insieme di generatori di $\mathbb{R}^3$ occorre stabilire se per ogni $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ esistono $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ tali che

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \alpha_1\mathbf{v}_1 + \alpha_2\mathbf{v}_2 + \alpha_3\mathbf{v}_3 == \alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 8 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 + 3\alpha_2 + \alpha_3 \\ -\alpha_1 - 4\alpha_2 + 2\alpha_3 \\ 2\alpha_1 + 8\alpha_2 - 4\alpha_3 \end{pmatrix}$$

ossia che il sistema lineare

$$(*) \qquad \begin{cases} \alpha_1 + 3\alpha_2 + \alpha_3 = a \\ -\alpha_1 - 4\alpha_2 + 2\alpha_3 = b \\ 2\alpha_1 + 8\alpha_2 - 4\alpha_3 = c \end{cases}$$

nelle incognite $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ ha soluzione **qualunque** siano $a, b, c \in \mathbb{R}$.

Facendo una eliminazione di Gauss sulla matrice aumentata del sistema si ottiene

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & a \\ -1 & -4 & 2 & b \\ 2 & 8 & -4 & c \end{array}\right) \xrightarrow{E_{31}(-2)E_{21}(1)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & a \\ 0 & -1 & 3 & a+b \\ 0 & 2 & -6 & c-2a \end{array}\right) \rightarrow$$

$$\xrightarrow{E_{32}(-2)E_2(-1)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & a \\ 0 & 1 & -3 & -a-b \\ 0 & 0 & 0 & 2b+c \end{array}\right).$$

Poichè esistono $a, b, c \in \mathbb{R}$ tali che $2b + c \neq 0$ (si prendano ad esempio $a = b = 0$ e $c = 1$), allora $(*)$ non ha soluzione qualunque siano $a, b, c \in \mathbb{R}$, per cui $\boldsymbol{\mathcal{S}}$ non è un insieme di generatori di $\mathbb{R}^3$.

$\boxed{8}$ Siano $\mathbf{v_1} = \begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$; $\mathbf{v_2} = \begin{pmatrix}3\\6\\0\end{pmatrix}$ e $\mathbf{v_3} = \begin{pmatrix}1\\3\\4\end{pmatrix}$ ed $\mathbf{e_3} \in \mathbb{R}^3$. Si dica per quali $x \in \mathbb{R}$ l'insieme di vettori $\boldsymbol{\mathcal{S}}\ (x) = \{\mathbf{v_1}; \mathbf{v_2}; \mathbf{v_3}; x \cdot \mathbf{e_3}\}$ è un insieme di generatori di $\mathbb{R}^3$.

$\boldsymbol{\mathcal{S}}\ (x) = \{\mathbf{v_1}; \mathbf{v_2}; \mathbf{v_3}; x \cdot \mathbf{e_3}\}$ è un insieme di generatori di $\mathbb{R}^3$ se e solo se per ogni $\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ esistono $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 \in \mathbb{R}$ tali che

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix} &= \alpha_1\mathbf{v_1} + \alpha_2\mathbf{v_2} + \alpha_3\mathbf{v_3} + \alpha_4 \cdot x \cdot \mathbf{e_3} = \\ &= \alpha_1 \begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix}3\\6\\0\end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix}1\\3\\4\end{pmatrix} + \alpha_4 \cdot x \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\alpha_1 + 3\alpha_2 + \alpha_3\\ 2\alpha_1 + 6\alpha_2 + 3\alpha_3\\ 4\alpha_3 + \alpha_4 x\end{pmatrix}\end{aligned}$$

ossia se e solo se il sistema lineare

$$(*) \qquad \begin{cases}\alpha_1 + 3\alpha_2 + \alpha_3 = a\\ 2\alpha_1 + 6\alpha_2 + 3\alpha_3 = b\\ 4\alpha_3 + \alpha_4 x = c\end{cases}$$

nelle incognite $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ ha soluzione **per ogni** $a, b, c \in \mathbb{R}$.

Facendo una eliminazione di Gauss sulla matrice aumentata del sistema si ottiene

$$\begin{pmatrix}1 & 3 & 1 & 0 & | & a\\ 2 & 6 & 3 & 0 & | & b\\ 0 & 0 & 4 & x & | & c\end{pmatrix} \xrightarrow{E_{21}(-2)} \begin{pmatrix}1 & 3 & 1 & 0 & | & a\\ 0 & 0 & 1 & 0 & | & b-2a\\ 0 & 0 & 4 & x & | & c\end{pmatrix} \to$$

$$\xrightarrow{E_{32}(-4)} \begin{pmatrix}1 & 3 & 1 & 0 & | & a\\ 0 & 0 & 1 & 0 & | & b-2a\\ 0 & 0 & 0 & x & | & c-4b+2a\end{pmatrix} = \left(\mathbf{B}(\boldsymbol{x}) \quad | \quad \mathbf{c}(\boldsymbol{x})\right)$$

Se $x \neq 0$

$$\left(\mathbf{B}(\boldsymbol{x}) \quad | \quad \mathbf{c}(\boldsymbol{x})\right) \xrightarrow{E_3(\frac{1}{x})} \begin{pmatrix}1 & 3 & 1 & 0 & | & a\\ 0 & 0 & 1 & 0 & | & b-2a\\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & \frac{c-4b+8a}{x}\end{pmatrix} = \left(\mathbf{U}(\boldsymbol{x}) \quad | \quad \mathbf{d}(\boldsymbol{x})\right)$$

Poichè $\mathbf{d}(\boldsymbol{x})$ è libera **per ogni** $a, b, c \in \mathbb{R}$, allora $\boldsymbol{\mathcal{S}}\ (x)$ è un insieme di generatori di $\mathbb{R}^3$.

Se $x = 0$

$$\left(\mathbf{B(0)} \quad | \quad \mathbf{c(0)}\right) = \begin{pmatrix}1 & 3 & 1 & 0 & | & a\\ 0 & 0 & 1 & 0 & | & b-2a\\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & c-4b+8a\end{pmatrix} = \left(\mathbf{U(0)} \quad | \quad \mathbf{d(0)}\right)$$

Poichè esistono $a, b, c \in \mathbb{R}$ per cui $\mathbf{d(0)}$ è dominante (ad esempio si prendano $a = b = 0$ e $c = 1$), allora $\boldsymbol{\mathcal{S}}$ (0) non è un insieme di generatori di $\mathbb{R}^3$.

Concludendo, $\boldsymbol{\mathcal{S}}$ (x) è un insieme di generatori di $\mathbb{R}^3$ se e solo se $x \neq 0$.

$\boxed{\mathbf{9}}$ Si dica quale dei seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{R}^3$ è linearmente indipendente:

$$\left\{ \mathbf{v_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}; \mathbf{v_2} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}; \mathbf{v_3} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\},$$

$$\left\{ \mathbf{w_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}; \mathbf{w_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}; \mathbf{w_3} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}; \right\}.$$

(1) Per stabilire se $\{\mathbf{v_1}; \mathbf{v_2}; \mathbf{v_3}\}$ sia linearmente indipendente o linearmente dipendente, occorre stabilire se gli unici numeri reali α_1, α_2, α_3 per cui $\alpha_1\mathbf{v_1}+\alpha_2\mathbf{v_2}+\alpha_3\mathbf{v_3} = \mathbf{0}$ siano $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$, oppure no. Poichè, dati α_1, α_2, $\alpha_3 \in \mathbb{R}$, si ha

$$\alpha_1\mathbf{v_1} + \alpha_2\mathbf{v_2} + \alpha_3\mathbf{v_3} = \alpha_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4\alpha_2 + 2\alpha_3 \\ 4\alpha_1 + 6\alpha_2 - \alpha_3 \\ 2\alpha_2 + \alpha_3 \end{pmatrix},$$

allora $\alpha_1\mathbf{v_1} + \alpha_2\mathbf{v_2} + \alpha_3\mathbf{v_3} = \mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ se e solo se

$$(*) \qquad \begin{cases} 4\alpha_2 + 2\alpha_3 = 0 \\ 4\alpha_1 + 6\alpha_2 - \alpha_3 = 0 \\ 2\alpha_2 + \alpha_3 = 0 \end{cases}$$

Il problema diventa quindi stabilire se il sistema $(*)$ (nelle incognite $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$) abbia un'unica soluzione (e quindi la soluzione nulla $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$), oppure no. La matrice aumentata di $(*)$ è: $\begin{pmatrix} 0 & 4 & 2 & | & 0 \\ 4 & 6 & -1 & | & 0 \\ 0 & 2 & 1 & | & 0 \end{pmatrix}$.

Facendo un'eliminazione di Gauss si ottiene:

$$\begin{pmatrix} 0 & 4 & 2 & | & 0 \\ 4 & 6 & -1 & | & 0 \\ 0 & 2 & 1 & | & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_1(\frac{1}{4})E_{12}} \begin{pmatrix} 1 & 3/2 & -1/4 & | & 0 \\ 0 & 4 & 2 & | & 0 \\ 0 & 2 & 1 & | & 0 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\xrightarrow{E_{32}(-2)E_2(\frac{1}{4})} \begin{pmatrix} 1 & 3/2 & -1/4 & | & 0 \\ 0 & 1 & 1/2 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{U} & | & \mathbf{0} \end{pmatrix}.$$

Poichè **non tutte** le colonne di $\mathbf{U}$ sono **dominanti**, allora $(*)$ ha ∞ soluzioni. In particolare $(*)$ ha una soluzione non nulla, e quindi $\{\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \mathbf{v_3}\}$ è **linearmente dipendente** (ad esempio, poichè $(*)$ è equivalente a

$$\begin{cases} \alpha_1 + \frac{3}{2}\alpha_2 - \frac{1}{4}\alpha_3 = 0 \\ \qquad \alpha_2 + \frac{1}{2}\alpha_3 = 0 \end{cases}$$

prendendo $\alpha_3 = 1$ con la sostituzione all'indietro si ottiene

$$\alpha_2 = -\frac{1}{2} quad \text{ e } \quad \alpha_1 = -\frac{3}{2}\alpha_2 - \frac{1}{4}\alpha_3 = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} = 1,$$

ossia $\begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$ è una soluzione non nulla di $(*)$ e $\mathbf{v_1} - \frac{1}{2}\mathbf{v_2} + \mathbf{v_3} = \mathbf{0}$ è una combinazione lineare nulla di $\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \mathbf{v_3}$ con coefficienti non tutti nulli).

(2) Per stabilire se $\{\mathbf{w_1}; \mathbf{w_2}; \mathbf{w_3}\}$ sia linearmente indipendente o linearmente dipendente, occorre stabilire se gli unici numeri reali α_1, α_2, α_3 per cui $\alpha_1\mathbf{w_1} + \alpha_2\mathbf{w_2} + \alpha_3\mathbf{w_3} = \mathbf{0}$ siano $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$, oppure no. Poichè, dati α_1, α_2, $\alpha_3 \in \mathbb{R}$, si ha

$$\alpha_1\mathbf{w_1} + \alpha_2\mathbf{w_2} + \alpha_3\mathbf{w_3} = \alpha_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_2 + \alpha_3 \\ 4\alpha_1 - \alpha_3 \\ 2\alpha_2 + \alpha_3 \end{pmatrix}$$

allora $\alpha_1\mathbf{w_1} + \alpha_2\mathbf{w_2} + \alpha_3\mathbf{w_3} = \mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ se e solo se

$$(**) \qquad \begin{cases} \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \\ 4\alpha_1 - \alpha_3 = 0 \\ 2\alpha_2 + \alpha_3 = 0 \end{cases}$$

Facendo un'eliminazione di Gauss sulla matrice aumentata di $(**)$ si ottiene:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{E_1(\frac{1}{4})E_{12}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1/4 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{E_{32}(-2)}$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1/4 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{E_3(-1)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1/4 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) = \left(\mathbf{U} \;\middle|\; \mathbf{0}\right).$$

Poichè **tutte** le colonne di $\mathbf{U}$ sono **dominanti**, allora $(**)$ ha come unica soluzione la soluzione nulla $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, ossia

$$\alpha_1\mathbf{w_1} + \alpha_2\mathbf{w_2} + \alpha_3\mathbf{w_3} = \mathbf{0} \quad \Longrightarrow \quad \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0.$$

Quindi $\{\mathbf{w_1}, \mathbf{w_2}, \mathbf{w_3}\}$ è **linearmente indipendente**.

$\boxed{\mathbf{10}}$ Sia W l'insieme delle matrici anti-simmetriche reali di ordine 2. W è uno spazio vettoriale reale, essendo un sottospazio di $M_2(\mathbb{R})$ (si veda l'esercizio 6). Si considerino i suoi sottoinsiemi $\boldsymbol{\mathcal{S}}_1$, $\boldsymbol{\mathcal{S}}_2$ e $\boldsymbol{\mathcal{S}}_3$ definiti nell'esercizio 6. Per ciascuno di essi si dica se è linearmente indipendente oppure linearmente dipendente.

$\boldsymbol{\mathcal{S}}_1$: Per stabilire se $\boldsymbol{\mathcal{S}}_1$ sia linearmente indipendente o linearmente dipendente, occorre stabilire se gli unici numeri reali α_1 ed α_2 per cui

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

siano $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$, oppure no. Poichè, dati α_1, $\alpha_2 \in \mathbb{R}$, si ha

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha_1 + 2\alpha_2 \\ \alpha_1 - 2\alpha_2 & 0 \end{pmatrix}$$

allora

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

se e solo se

$$(*) \qquad \begin{cases} -\alpha_1 + 2\alpha_2 = 0 \\ \alpha_1 - 2\alpha_2 = 0 \end{cases}$$

Poichè $(*)$ è equivalente all'unica equazione

$$-\alpha_1 + 2\alpha_2 = 0$$

che ha una soluzione non nulla (si prenda ad esempio $\alpha_2 = 1$ e con la sostituzione all'indietro si ottiene $\alpha_1 = 2$, per cui $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ è una soluzione non nulla di $(*)$ e

$$2 \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

è una combinazione lineare nulla degli elementi di $\boldsymbol{\mathcal{S}}_1$ con coefficienti non tutti nulli).

Quindi $\boldsymbol{\mathcal{S}}_1$ è **linearmente dipendente**.

$\boldsymbol{\mathcal{S}}_2$: **$\boldsymbol{\mathcal{S}}_2$ non è un sottoinsieme di W.**

La domanda se $\boldsymbol{\mathcal{S}}_2$ sia o non sia linearmente indipendente ha senso non nello spazio vettoriale W, ma in tutto $M_2(\mathbb{R})$.

Per stabilire se $\boldsymbol{\mathcal{S}}_2$ sia linearmente indipendente o linearmente dipendente (in $M_2(\mathbb{R})$), occorre stabilire se gli unici numeri reali α_1 ed α_2 per cui

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

siano $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$, oppure no. Poichè, dati α_1, $\alpha_2 \in \mathbb{R}$, si ha

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_2 & \alpha_1 \\ -\alpha_1 & 0 \end{pmatrix}$$

allora

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

se e solo se

$$\alpha_1 = \alpha_2 = 0,$$

Quindi $\boldsymbol{\mathcal{S}}_2$ è **linearmente indipendente in** $M_2(\mathbb{R})$.

$\boldsymbol{\mathcal{S}}_3$: Essendo $\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, l'unico $\alpha \in \mathbb{R}$ per cui si abbia

$$\alpha \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

è $\alpha = 0$, per cui

$\boldsymbol{\mathcal{S}}_3$ è **linearmente indipendente**.

Svolgimento degli Esercizi per casa 6

$\boxed{1}$ Sia $V = \{a + bx + cx^2 \mid a, b, c \in \mathbb{C}\}$ lo spazio dei polinomi a coefficienti complessi di grado minore od uguale a 2. Si provi che $\mathcal{B} = \{2 + x^2; x - x^2; 1 + x\}$ è una base di V.

Per provare che $\mathcal{B}$ è una base di V occorre provare che $\mathcal{B}$ è un insieme di generatori di V e che $\mathcal{B}$ è linearmente indipendente (L.I.).
Per provare che $\mathcal{B} \subseteq V$ è un insieme di generatori di V occorre provare che per ogni $a + bx + cx^2 \in V$ esistono scalari $\alpha, \beta, \delta \in \mathbb{C}$ tali che

$$a + bx + cx^2 = \alpha(2 + x^2) + \beta(x - x^2) + \delta(1 + x),$$

ossia che il sistema lineare

$$(*) \quad \begin{cases} 2\alpha + \delta = a \\ \beta + \delta = b \\ \alpha - \beta = c \end{cases}$$

nelle incognite α, β e δ ha soluzione **qualunque** siano $a, b, c \in \mathbb{C}$. Facendo una eliminazione di Gauss sulla matrice aumentata del sistema si ottiene

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & | & a \\ 0 & 1 & 1 & | & b \\ 1 & -1 & 0 & | & c \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{31}(-1)E_1(\frac{1}{2})} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} & | & \frac{a}{2} \\ 0 & 1 & 1 & | & b \\ 0 & -1 & -\frac{1}{2} & | & c - \frac{a}{2} \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{32}(1)}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} & | & \frac{a}{2} \\ 0 & 1 & 1 & | & b \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & | & c - \frac{a}{2} + b \end{pmatrix} \xrightarrow{E_3(2)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} & | & \frac{a}{2} \\ 0 & 1 & 1 & | & b \\ 0 & 0 & 1 & | & 2c - a + 2b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{U} & | & \mathbf{d} \end{pmatrix}.$$

Poichè $\mathbf{d}$ è libera qualunque siano $a, b, c \in \mathbb{C}$, allora $(*)$ ha soluzione per ogni $a, b, c \in \mathbb{C}$, e quindi $\mathcal{B}$ è un insieme di generatori di V.

Per provare che $\mathcal{B}$ è L.I. occorre provare che l'unica combinazione lineare nulla di suoi elementi ha tutti i coefficienti nulli, ossia che

$$\alpha(2 + x^2) + \beta(x - x^2) + \delta(1 + x) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \alpha = \beta = \delta = 0.$$

Da

$$0 = \alpha(2 + x^2) + \beta(x - x^2) + \delta(1 + x) = (2\alpha + \delta) + (\beta + \delta)x + (\alpha - \beta)x^2$$

si ottiene il sistema lineare nelle incognite α, β e δ

$$(**) \quad \begin{cases} 2\alpha + \delta = 0 \\ \beta + \delta = 0 \\ \alpha - \beta = 0 \end{cases}$$

Dal momento che $(**)$ si ottiene da $(*)$ ponendo $a = b = c = 0$, una forma ridotta di Gauss della matrice aumentata di $(**)$ si ottiene da quella trovata per $(*)$ ponendo $a = b = c = 0$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} & | & \frac{a}{2} \\ 0 & 1 & 1 & | & b \\ 0 & 0 & 1 & | & 2c - a + 2b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} & | & 0 \\ 0 & 1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{U} & | & \mathbf{0} \end{pmatrix}.$$

Poichè l'ultima colonna di $\begin{pmatrix} \mathbf{U} & | & \mathbf{0} \end{pmatrix}$ è libera, $(**)$ ha soluzioni, e poichè l'ultima colonna di $\begin{pmatrix} \mathbf{U} & | & \mathbf{0} \end{pmatrix}$ è nulla, tra le soluzioni di $(**)$ c'è quella nulla (ossia $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$). Inoltre, dal momento che tutte le colonne di $\mathbf{U}$ sono dominanti, $(**)$ ha un'unica soluzione.

Dunque l'unica soluzione di $(**)$ è quella nulla, per cui $\mathcal{B}$ è L.I.

$\boxed{\mathbf{2}}$ Si provi che

$$\mathcal{B} = \left\{ \mathbf{B_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}; \mathbf{B_2} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}; \mathbf{B_3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

è una base dello spazio vettoriale V delle matrici complesse triangolari inferiori 2×2.

Per provare che $\mathcal{B}$ è una base di V occorre provare che $\mathcal{B}$ è un insieme di generatori di V e che $\mathcal{B}$ è linearmente indipendente (L.I.).

Per provare che $\mathcal{B} \subseteq V$ è un insieme di generatori di V occorre provare che per ogni $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix} \in V$ esistono scalari $\alpha, \beta, \delta \in \mathbb{C}$ tali che

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix} &= \alpha \mathbf{B_1} + \beta \mathbf{B_2} + \delta \mathbf{B_3} = \alpha \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \delta \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \alpha + 2\beta & 0 \\ \alpha + \beta + \delta & \alpha + \beta \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

ossia che il sistema lineare

$$(*) \quad \begin{cases} \alpha + 2\beta = a \\ \alpha + \beta + \delta = b \\ \alpha + \beta = c \end{cases}$$

nelle incognite α, β e δ ha soluzione **qualunque** siano $a, b, c \in \mathbb{C}$. Facendo una eliminazione di Gauss sulla matrice aumentata del sistema si ottiene

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & | & a \\ 1 & 1 & 1 & | & b \\ 1 & 1 & 0 & | & c \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{31}(-1)E_{21}(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & | & a \\ 0 & -1 & 1 & | & b-a \\ 0 & -1 & 0 & | & c-a \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{32}(1)E_2(-1)}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & | & a \\ 0 & 1 & -1 & | & a-b \\ 0 & 0 & -1 & | & c-b \end{pmatrix} \xrightarrow{E_3(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & | & a \\ 0 & 1 & -1 & | & a-b \\ 0 & 0 & 1 & | & b-c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{U} & | & \mathbf{d} \end{pmatrix}.$$

Poichè $\mathbf{d}$ è libera qualunque siano $a, b, c \in \mathbb{C}$, allora $(*)$ ha soluzione per ogni $a, b, c \in \mathbb{C}$, e quindi $\boldsymbol{\mathcal{B}}$ è un insieme di generatori di V.

Per provare che $\boldsymbol{\mathcal{B}}$ è L.I. occorre provare che l'unica combinazione lineare nulla di suoi elementi ha tutti i coefficienti nulli, ossia che

$$\alpha\mathbf{B_1} + \beta\mathbf{B_2} + \delta\mathbf{B_3} = \mathbf{O} \quad \Longrightarrow \quad \alpha = \beta = \delta = 0.$$

Da

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \alpha\mathbf{B_1} + \beta\mathbf{B_2} + \delta\mathbf{B_3} = \alpha \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \delta \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \alpha + 2\beta & 0 \\ \alpha + \beta + \delta & \alpha + \beta \end{pmatrix},$$

si ottiene il sistema lineare nelle incognite α, β e δ

$$(**) \qquad \begin{cases} \alpha + 2\beta = 0 \\ \alpha + \beta + \delta = 0 \\ \alpha + \beta = 0 \end{cases}$$

Dal momento che $(**)$ si ottiene da $(*)$ ponendo $a = b = c = 0$, una forma ridotta di Gauss della matrice aumentata di $(**)$ si ottiene da quella trovata per $(*)$ ponendo $a = b = c = 0$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & | & a \\ 0 & 1 & -1 & | & a-b \\ 0 & 0 & 1 & | & b-c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & | & 0 \\ 0 & 1 & -1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{U} & | & \mathbf{0} \end{pmatrix}.$$

Poichè l'ultima colonna di $\begin{pmatrix} \mathbf{U} & | & \mathbf{0} \end{pmatrix}$ è libera, $(**)$ ha soluzioni, e poichè l'ultima colonna di $\begin{pmatrix} \mathbf{U} & | & \mathbf{0} \end{pmatrix}$ è nulla, tra le soluzioni di $(**)$ c'è quella nulla (ossia $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \delta \end{pmatrix} =$

$\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$). Inoltre, dal momento che tutte le colonne di $\mathbf{U}$ sono dominanti, ($**$) ha un'unica soluzione.

Dunque l'unica soluzione di ($**$) è quella nulla, per cui $\boldsymbol{\mathcal{B}}$ è L.I.

$\boxed{3}$ Sia W lo spazio vettoriale reale delle matrici 2×2 reali simmetriche. L'insieme

$$\boldsymbol{\mathcal{S}} = \left\{ \quad \mathbf{C_1} = \begin{pmatrix}0 & 2\\2 & 2\end{pmatrix}; \mathbf{C_2} = \begin{pmatrix}2 & 3\\3 & 0\end{pmatrix}; \mathbf{C_3} = \begin{pmatrix}1 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}; \right.$$

$$\left. \mathbf{C_4} = \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}; \mathbf{C_5} = \begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}; \mathbf{C_6} = \begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 1\end{pmatrix} \right\}$$

è un suo insieme di generatori (non ne è richiesta la verifica). Si trovi una base di W contenuta in $\boldsymbol{\mathcal{S}}$.

"Restringiamo" un insieme di generatori di W.

1^0 **passaggio**. Esistono in $\boldsymbol{\mathcal{S}}$ vettori che siano combinazioni lineari degli altri vettori di $\boldsymbol{\mathcal{S}}$?

$\mathbf{C_5} = \begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}$ è senz'altro combinazione degli altri:

$$\mathbf{C_5} = \mathbf{O} = 0\mathbf{C_1} + 0\mathbf{C_2} + 0\mathbf{C_3} + 0\mathbf{C_4} + 0\mathbf{C_6},$$

per cui togliamo subito $\mathbf{C_5}$ (**togliamo** comunque subito **tutti gli eventuali vettori di $\boldsymbol{\mathcal{S}}$ che siano nulli**), **e poniamo**

$$\boldsymbol{\mathcal{S}}_1 = \left\{ \quad \mathbf{C_1} = \begin{pmatrix}0 & 2\\2 & 2\end{pmatrix}; \mathbf{C_2} = \begin{pmatrix}2 & 3\\3 & 0\end{pmatrix}; \mathbf{C_3} = \begin{pmatrix}1 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}; \right.$$

$$\left. \mathbf{C_4} = \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}; \mathbf{C_6} = \begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 1\end{pmatrix} \right\}$$

2^0 **passaggio**. $\boldsymbol{\mathcal{S}}_1$ è ancora un insieme di generatori di W. Esistono in $\boldsymbol{\mathcal{S}}_1$ vettori che siano combinazioni lineari degli altri vettori di $\boldsymbol{\mathcal{S}}_1$?

Poichè

$$\mathbf{C_1} = 2\mathbf{C_6} = 0\mathbf{C_2} + 0\mathbf{C_3} + 0\mathbf{C_4} + 2\mathbf{C_6}$$

ma anche

$$\mathbf{C_6} = \frac{1}{2}\mathbf{C_1} = \frac{1}{2}\mathbf{C_1} + 0\mathbf{C_2} + 0\mathbf{C_3} + 0\mathbf{C_4}$$

possiamo togliere da $\boldsymbol{\mathcal{S}}_1$ il vettore $\mathbf{C_1}$, oppure possiamo togliere da $\boldsymbol{\mathcal{S}}_1$ il vettore $\mathbf{C_6}$, ottenendo ancora un insieme di generatori di W. Dunque, **guardiamo se tra i**

vettori di $\boldsymbol{\mathcal{S}}_1$ ci siano coppie di vettori di cui l'uno è multiplo dell'altro, e per ciascuna di queste eventuali coppie togliamo uno dei due vettori. In questo caso abbiamo individuato la coppia $\mathbf{C_1}, \mathbf{C_6}$ e scegliamo di togliere $\mathbf{C_1}$.

Poniamo

$$\boldsymbol{\mathcal{S}}_2 = \left\{ \mathbf{C_2} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}; \mathbf{C_3} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \mathbf{C_4} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \mathbf{C_6} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

3^0 **passaggio**. $\boldsymbol{\mathcal{S}}_2$ è ancora un insieme di generatori di W. Esistono in $\boldsymbol{\mathcal{S}}_2$ vettori che siano combinazioni lineari degli altri vettori di $\boldsymbol{\mathcal{S}}_2$?

Sia $\alpha_1\mathbf{C_2} + \alpha_2\mathbf{C_3} + \alpha_3\mathbf{C_4} + \alpha_4\mathbf{C_6} = \mathbf{O}$ una combinazione lineare nulla dei vettori di $\boldsymbol{\mathcal{S}}_2$. Allora da

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} &= \alpha_1 \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \alpha_4 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 2\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 & 3\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_4 \\ 3\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_4 & \alpha_3 + \alpha_4 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

si ottiene il sistema lineare, nelle incognite $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$

$$\begin{cases} 2\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \\ 3\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_4 = 0 \\ \alpha_3 + \alpha_4 = 0 \end{cases}$$

Facendo una E.G. sulla sua matrice aumentata si ha:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{E_{21}(-3)E_1(\frac{1}{2})} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{E_2(-2)}$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right),$$

per cui il sistema è equivalente al sistema

$$(*) \qquad \begin{cases} \alpha_1 + \frac{1}{2}\alpha_2 + \frac{1}{2}\alpha_3 = 0 \\ \alpha_2 + 3\alpha_3 - 2\alpha_4 = 0 \\ \alpha_3 + \alpha_4 = 0 \end{cases}$$

il cui insieme delle soluzioni è

$$\left\{ \begin{pmatrix} -2h \\ 5h \\ -h \\ h \end{pmatrix} | h \in \mathbb{R} \right\}$$

Prendendo una sua soluzione non nulla, ad esempio $\begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ (si ponga $h = 1$), si ottiene

$$-2\mathbf{C_2} + 5\mathbf{C_3} - \mathbf{C_4} + \mathbf{C_6} = \mathbf{O},$$

per cui $\mathbf{C_2}$,$\mathbf{C_3}$, $\mathbf{C_4}$ e $\mathbf{C_6}$ sono combinazioni lineari degli altri elementi di $\boldsymbol{\mathcal{S}}_2$ e ciascuno di loro puó essere scelto come elemento da eliminare da $\boldsymbol{\mathcal{S}}_2$.

Scegliamo di togliere da $\boldsymbol{\mathcal{S}}_2$ la matrice $\mathbf{C_2}$ (combinazione lineare degli altri elementi di $\boldsymbol{\mathcal{S}}_2$) e poniamo

$$\boldsymbol{\mathcal{S}}_3 = \left\{ \mathbf{C_3} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \mathbf{C_4} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \mathbf{C_6} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

4^0 **passaggio**. $\boldsymbol{\mathcal{S}}_3$ è ancora un insieme di generatori di W. Esistono in $\boldsymbol{\mathcal{S}}_3$ vettori che siano combinazioni lineari degli altri vettori di $\boldsymbol{\mathcal{S}}_3$?

Sia $\alpha_1\mathbf{C_3} + \alpha_2\mathbf{C_4} + \alpha_3\mathbf{C_6} = \mathbf{O}$ una combinazione lineare nulla dei vettori di $\boldsymbol{\mathcal{S}}_3$. Allora da

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \alpha_1 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 + \alpha_2 & \alpha_1 + \alpha_3 \\ \alpha_1 + \alpha_3 & \alpha_2 + \alpha_3 \end{pmatrix}$$

si ottiene il sistema lineare, nelle incognite $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 = 0 \\ \alpha_1 + \alpha_3 = 0 \\ \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \end{cases}$$

Facendo una E.G. sulla sua matrice aumentata si ottiene:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & | & 0 \\ 1 & 0 & 1 & | & 0 \\ 0 & 1 & 1 & | & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{21}(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & | & 0 \\ 0 & -1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 1 & 1 & | & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{32}(-1)E_2(-1)}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 1 & -1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 2 & | & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_3(\frac{1}{2})} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 1 & -1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 \end{pmatrix}$$

L'unica soluzione del sistema è quella nulla, per cui $\boldsymbol{\mathcal{S}}_3$ è linearmente indipendente, ed è una base di W contenuta in $\boldsymbol{\mathcal{S}}$.

$\boxed{\mathbf{4}}$ Qual è la dimensione dello spazio vettoriale delle matrici 2×2 reali simmetriche ?

Poichè dall'esercizio precedente sappiamo che

$$\boldsymbol{\mathcal{S}}_3 = \left\{ \mathbf{C_3} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \mathbf{C_4} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \mathbf{C_6} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\},$$

è una base dello spazio vettoriale delle matrici 2×2 reali simmetriche, allora la dimensione dello spazio vettoriale delle matrici 2×2 reali simmetriche è 3 (ossia il numero di elementi di una sua qualsiasi base).

$\boxed{\mathbf{5}}$ Sia $\mathbf{A_\alpha} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 1 & \alpha+2 & \alpha & \alpha+2 \\ 2 & 4 & 0 & \alpha+6 \end{pmatrix}$. Per ogni $\alpha \in \mathbb{C}$ si trovi una base dello spazio nullo $N(\mathbf{A_\alpha})$ di $\mathbf{A_\alpha}$.

Poichè $N(\mathbf{A_\alpha}) = N(\mathbf{U_\alpha})$ per ogni forma ridotta di Gauss $\mathbf{U_\alpha}$ di $\mathbf{A_\alpha}$, troviamo una base dello spazio nullo di una forma ridotta di Gauss per $\mathbf{A_\alpha}$.

$$\mathbf{A_\alpha} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 1 & \alpha+2 & \alpha & \alpha+2 \\ 2 & 4 & 0 & \alpha+6 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{31}(-2)E_{21}(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & \alpha & \alpha & \alpha-1 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix} = \mathbf{B_\alpha}$$

$\boxed{1^0 \text{ CASO}}$ $\qquad \alpha = 0$

$$\mathbf{B_0} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_2(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{U_0}$$

Per il Teorema nullità+rango,

$$\dim N(\mathbf{U_0}) = \text{(numero delle colonne di } \mathbf{U_0})_0 - \text{ rk } (\mathbf{U_0}) = 4 - 2 = 2.$$

Da

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in N(\mathbf{U_0}) \iff \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_4 & = 0 \\ \qquad x_4 & = 0 \end{cases}$$

prendendo come parametri le variabili corrispondenti alle colonne libere di $\mathbf{U_0}$, ossia la 2^a e la 3^a, con la sostituzione all'indietro si ottiene

$$\begin{cases} x_2 = h \\ x_3 = k \\ x_4 = 0 \\ x_1 = -2x_2 - 3x_4 = -2h \end{cases}$$

Quindi $N(\mathbf{A_0}) = N(\mathbf{U_0}) = \left\{ \begin{pmatrix} -2h \\ h \\ k \\ 0 \end{pmatrix} | h, k \in \mathbb{C} \right\}.$

Siano $\mathbf{v_1}$ il vettore di $N(\mathbf{A_0})$ che si ottiene ponendo $h = 1$ e $k = 0$, e $\mathbf{v_2}$ il vettore di $N(\mathbf{A_0})$ che si ottiene ponendo $h = 0$ e $k = 1$:

$$\mathbf{v_1} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{v_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Allora $\left\{ \mathbf{v_1} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \mathbf{v_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ è una base di $N(\mathbf{A_0})$.

$\boxed{2^0 \text{ CASO}}$ $\alpha \neq 0$

$$\mathbf{B_\alpha} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & \alpha & \alpha & \alpha - 1 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix} \xrightarrow{E_3(\frac{1}{\alpha})E_2(\frac{1}{\alpha})} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & \frac{\alpha-1}{\alpha} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{U_\alpha}$$

Per il Teorema nullità+rango,

$$\dim N(\mathbf{U_\alpha}) = \text{ (numero delle colonne di } \mathbf{U})_\alpha - \text{ rk } (\mathbf{U_\alpha}) = 4 - 3 = 1.$$

Da

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in N(\mathbf{U_\alpha}) \iff \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_4 & = 0 \\ x_2 + x_3 + \frac{\alpha-1}{\alpha} x_4 & = 0 \\ x_4 & = 0 \end{cases}$$

prendendo come parametro la variabile corrispondente all'unica colonna libera di $\mathbf{U_\alpha}$, ossia la 3^a, con la sostituzione all'indietro si ottiene

$$\begin{cases} x_3 & = & h \\ x_4 & = & 0 \\ x_2 & = & -x_3 - \frac{\alpha-1}{\alpha} x_4 & = & -h \\ x_1 & = & -2x_2 - 3x_4 & = & 2h \end{cases}$$

Quindi $N(\mathbf{A_\alpha}) = N(\mathbf{U_\alpha}) = \left\{ \begin{pmatrix} 2h \\ -h \\ h \\ 0 \end{pmatrix} | h \in \mathbb{C} \right\}.$

Sia $\mathbf{v_1}$ il vettore di $N(\mathbf{A_\alpha})$ che s ottiene ponendo $h = 1$: $\mathbf{v_1} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Allora $\left\{ \mathbf{v_1} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ è una base di $N(\mathbf{A_\alpha})$.

$\boxed{\mathbf{6}}$ Sia $\mathbf{A_\alpha} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 2i \\ 0 & \alpha & 0 & 2i \\ 4 & \alpha - 1 & 0 & 4i \\ 0 & 2 & 4\alpha - 6 & 0 \end{pmatrix}$, dove $\alpha \in \mathbb{C}$.

Per ogni $\alpha \in \mathbb{C}$ si dica qual è $rk(\mathbf{A_\alpha})$ e si trovino una base $\boldsymbol{\mathcal{B}}_\alpha$ di $C(\mathbf{A_\alpha})$ ed una base $\boldsymbol{\mathcal{D}}_\alpha$ di $R(\mathbf{A_\alpha})$.

$$\mathbf{A_\alpha} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 2i \\ 0 & \alpha & 0 & 2i \\ 4 & \alpha - 1 & 0 & 4i \\ 0 & 2 & 4\alpha - 6 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{31}(-4)E_1(\frac{1}{2})} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & i \\ 0 & \alpha & 0 & 2i \\ 0 & \alpha - 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4\alpha - 6 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\xrightarrow{E_{24}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & i \\ 0 & 2 & 4\alpha - 6 & 0 \\ 0 & \alpha - 1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 & 2i \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{42}(-\alpha)E_{32}(-\alpha+1)E_2(\frac{1}{2})}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & i \\ 0 & 1 & 2\alpha - 3 & 0 \\ 0 & 0 & -(2\alpha - 3)(\alpha - 1) & 0 \\ 0 & 0 & -(2\alpha - 3)\alpha & 2i \end{pmatrix} = \mathbf{B_\alpha}$$

$\boxed{1^0 \text{ CASO}}$ $\alpha = 1$

$$\mathbf{B_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & i \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2i \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{34}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & i \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{U_1}$$

$\text{rk}(A_1) = 3$

Una base $\boldsymbol{\mathcal{B}}_1$ di $C(\mathbf{A_1})$ è $\boldsymbol{\mathcal{B}}_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}$.

Una base $\boldsymbol{\mathcal{D}}_{\,1}$ di $R(\mathbf{A_1})$ è $\boldsymbol{\mathcal{D}}_{\,\alpha} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -i \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -2i \end{pmatrix} \right\}.$

$\boxed{2^0 \text{ CASO}}$ $\qquad \alpha = \frac{3}{2}$

$$\mathbf{B}_{\frac{3}{2}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & i \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2i \end{pmatrix} \xrightarrow{E_3(\frac{1}{2i})E_{34}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & i \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{U}_{\frac{3}{2}}$$

$\text{rk}(\mathbf{A}_{\frac{3}{2}}) = 3$

Una base $\boldsymbol{\mathcal{B}}_{\,\frac{3}{2}}$ di $C(\mathbf{A}_{\frac{3}{2}})$ è $\boldsymbol{\mathcal{B}}_{\,\frac{3}{2}} = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 2 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 2i \\ 2i \\ 4i \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$

Una base $\boldsymbol{\mathcal{D}}_{\,\frac{3}{2}}$ di $R(\mathbf{A}_{\frac{3}{2}})$ è $\boldsymbol{\mathcal{D}}_{\,\frac{3}{2}} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -i \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$

$\boxed{3^0 \text{ CASO}}$ $\qquad \alpha \notin \{1, \frac{3}{2}\}$

$$\mathbf{B}_{\boldsymbol{\alpha}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & i \\ 0 & 1 & 2\alpha - 3 & 0 \\ 0 & 0 & -(2\alpha - 3)(\alpha - 1) & 0 \\ 0 & 0 & -(2\alpha - 3)\alpha & 2i \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{43}((2\alpha-3)\alpha)E_3(\frac{1}{-(2\alpha-3)(\alpha-1)})}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & i \\ 0 & 1 & 2\alpha - 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2i \end{pmatrix} \xrightarrow{E_4(\frac{1}{2i})} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & i \\ 0 & 1 & 2\alpha - 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{U}_{\boldsymbol{\alpha}}$$

$\text{rk}(A_\alpha) = 4$

Una base $\boldsymbol{\mathcal{B}}_{\,\alpha}$ di $C(\mathbf{A}_{\boldsymbol{\alpha}})$ è $\boldsymbol{\mathcal{B}}_{\,\alpha} = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ \alpha - 1 \\ 2 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 4\alpha - 6 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 2i \\ 2i \\ 4i \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$

Una base $\mathcal{D}_\alpha$ di $R(\mathbf{A}_{\boldsymbol{\alpha}})$ è $\mathcal{D}_\alpha = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -i \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2\overline{\alpha}-3 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

N.B.: Essendo in questo caso $C(\mathbf{A}_{\boldsymbol{\alpha}}) \leq \mathbb{C}^4$ e $\dim(C(\mathbf{A}_{\boldsymbol{\alpha}})) = 4 = \dim(\mathbb{C}^4)$, allora $C(\mathbf{A}_{\boldsymbol{\alpha}}) = \mathbb{C}^4$ e si sarebbe potuto prendere $\mathcal{B}_\alpha = \{\mathbf{e_1}; \mathbf{e_2}; \mathbf{e_3}; \mathbf{e_4}\}$.

N.B.: Essendo in questo caso $R(\mathbf{A}_{\boldsymbol{\alpha}}) \leq \mathbb{C}^4$ e $\dim(R(\mathbf{A}_{\boldsymbol{\alpha}})) = 4 = \dim(\mathbb{C}^4)$, allora $R(\mathbf{A}_{\boldsymbol{\alpha}}) = \mathbb{C}^4$ e si sarebbe potuto prendere $\mathcal{D}_\alpha = \{\mathbf{e_1}; \mathbf{e_2}; \mathbf{e_3}; \mathbf{e_4}\}$.

$\boxed{7}$ Siano

$$\mathbf{v_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{v_2} = \begin{pmatrix} i \\ -1 \\ 2i \\ 0 \\ i \end{pmatrix}, \mathbf{v_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{v_4} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2i \\ 2 \\ -i \\ 1 \end{pmatrix}$$

ed

$$\mathcal{S} = \{\mathbf{v_1}; \mathbf{v_2}; \mathbf{v_3}; \mathbf{v_4}\}.$$

Sia W il sottospazio di $\mathbb{C}^4$ generato da $\mathcal{S}$. Si trovi una base $\mathcal{B}$ di W contenuta in $\mathcal{S}$ (si usi la Nota 2).

Sia $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{v_1} & \mathbf{v_2} & \mathbf{v_3} & \mathbf{v_4} \end{pmatrix}$ una matrice che ha come colonne gli elementi di $\mathcal{S}$. Allora $W = C(\mathbf{A})$. Facendo una E.G. su $\mathbf{A}$ otteniamo:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & i & 0 & 1 \\ i & -1 & -1 & 2i \\ 2 & 2i & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -i \\ 1 & i & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{41}(-1)E_{31}(-2)E_{21}(-i)} \begin{pmatrix} 1 & i & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\xrightarrow{E_{42}(-1)E_2(-1)} \begin{pmatrix} 1 & i & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{U}$$

Poichè le colonne dominanti di $\mathbf{U}$ sono la 1^a e la 3^a, $\mathcal{B} = \{\mathbf{v_1}; \mathbf{v_3}\}$ è una base di $C(\mathbf{A}) = W$ contenuta in $\mathcal{S}$.

$\boxed{\mathbf{8}}$ Si dica per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ l'insieme $\mathcal{B}_\alpha = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \\ 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha+1 \\ \alpha+1 \end{pmatrix} \right\}$ è una base di $\mathbb{R}^3$ (si usi la Nota 2).

Costruiamo una matrice le cui colonne siano gli elementi di $\mathcal{B}_\alpha$:

$$\mathbf{A}_{\boldsymbol{\alpha}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ \alpha & 0 & \alpha+1 \\ 1 & 2 & \alpha+1 \end{pmatrix}.$$

Il problema diventa stabilire per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ si ha che $\mathrm{rk}\mathbf{A}_{\boldsymbol{\alpha}} = 3$. Facciamo un'eliminazione di Gauss su $\mathbf{A}_{\boldsymbol{\alpha}}$.

$$\mathbf{A}_{\boldsymbol{\alpha}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ \alpha & 0 & \alpha+1 \\ 1 & 2 & \alpha+1 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{31}(-1)E_{21}(-\alpha)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2\alpha & 1 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix} = \mathbf{B}_{\boldsymbol{\alpha}}$$

1^0 CASO: $\alpha = 0$ $\qquad \mathbf{B_0} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{U_0}$

$rk(\mathbf{A_0}) = rk(\mathbf{U_0}) = 2 \neq 3 \Longrightarrow$ $\mathcal{B}_0$ **NON E'** una base di $\mathbb{R}^3$.

2^0 CASO: $\alpha \neq 0$

$$\mathbf{B}_{\boldsymbol{\alpha}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2\alpha & 1 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix} \xrightarrow{E_3(1/\alpha)E_2(-1/2\alpha)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1/2\alpha \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{U}_{\boldsymbol{\alpha}}$$

$$rk(\mathbf{A}_{\boldsymbol{\alpha}}) = rk(\mathbf{U}_{\boldsymbol{\alpha}}) = 3 \quad \Longrightarrow \quad \mathcal{B}_\alpha \ \textbf{E'} \text{ una base di } \mathbb{R}^3.$$

Svolgimento degli Esercizi per casa 7

$\boxed{\mathbf{1}}$ Si dica quale delle due seguenti posizioni definisce un'applicazione lineare:

(a) $f_1 : M_n(\mathbb{C}) \to M_n(\mathbb{C})$ definita da $f_1(\mathbf{A}) = \mathbf{A}^T$ per ogni $\mathbf{A} \in M_n(\mathbb{C})$;

(b) $f_2 : M_n(\mathbb{C}) \to M_n(\mathbb{C})$ definita da $f_2(\mathbf{A}) = \mathbf{A}^2$ per ogni $\mathbf{A} \in M_n(\mathbb{C})$.

Fissato $i \in \{1, 2\}$, per vedere che $f_i : M_n(\mathbb{C}) \to M_n(\mathbb{C})$ è un'applicazione lineare occorre verificare che siano soddisfatte le seguenti condizioni:

(1) $f_i(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = f_i(\mathbf{A}) + f_i(\mathbf{B})$ per ogni $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in M_n(\mathbb{C})$;

(2) $f_i(\alpha\mathbf{A}) = \alpha f_i(\mathbf{A})$ per ogni $\mathbf{A} \in M_n(\mathbb{C})$ ed ogni $\alpha \in \mathbb{C}$.

• f_1 verifica la condizione (1) ?

Poichè la trasposta della somma di matrici è la somma delle trasposte si ha:

$$f_1(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = (\mathbf{A} + \mathbf{B})^T = \mathbf{A}^T + \mathbf{B}^T = f_1(\mathbf{A}) + f_1(\mathbf{B}) \quad \forall \mathbf{A}, \mathbf{B} \in M_n(\mathbb{C}).$$

Dunque f_1 verifica la condizione (1).

f_1 verifica la condizione (2) ?

Poichè la trasposta del prodotto di una matrice per uno scalare è il prodotto della trasposta della matrice per lo scalare, si ha:

$$f_1(\alpha\mathbf{A}) = (\alpha\mathbf{A})^T = \alpha\mathbf{A}^T = \alpha f_1(\mathbf{A}) \quad \forall \mathbf{A} \in M_n(\mathbb{C}), \forall \alpha \in \mathbb{C}.$$

Dunque f_1 verifica la condizione (2).

Verificando entrambe le condizioni (1) e (2), f_1 è un'applicazione lineare.

• f_2 verifica la condizione (1) ?

Essendo

$$\begin{cases} f_2(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = (\mathbf{A} + \mathbf{B})^2 = (\mathbf{A} + \mathbf{B})(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \mathbf{A}^2 + \mathbf{BA} + \mathbf{AB} + \mathbf{B}^2 \\ f_2(\mathbf{A}) = \mathbf{A}^2 \\ f_2(\mathbf{B}) = \mathbf{B}^2 \end{cases}$$

se fosse $f_2(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = f_2(\mathbf{A}) + f_2(\mathbf{B})$ per ogni $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in M_n(\mathbb{C})$, sarebbe

$$(*) \quad \mathbf{BA} + \mathbf{AB} = \mathbf{O} \quad \forall \mathbf{A}, \mathbf{B} \in M_n(\mathbb{C})$$

Ma $(*)$ è falsa: si prenda, ad esempio, $\mathbf{A} = \mathbf{B} = \mathbf{I}_{\boldsymbol{n}}$.

Dunque f_2 non verifica la condizione (1) e quindi non è un'applicazione lineare.

$\boxed{\mathbf{2}}$ Sia $g : M_2(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}^2$ definita da $g(\mathbf{A}) = \mathbf{Ae_1}$ per ogni $\mathbf{A} \in M_2(\mathbb{C})$.

(a) Si provi che g è un'applicazione lineare.

(b) Si trovino lo spazio nullo $N(g)$ e lo spazio immagine $Im(g)$ di g.

(a) $M_2(\mathbb{C})$ e $\mathbb{C}^2$ sono entrambi spazi vettoriali complessi. Verificare che g è un'applicazione lineare significa verificare che sono soddisfatte le seguenti condizioni:

(1) $g(\mathbf{A}+\mathbf{B}) = g(\mathbf{A}) + g(\mathbf{B})$ per ogni $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in M_2(\mathbb{C})$;

(2) $g(\alpha\mathbf{A}) = \alpha g(\mathbf{A})$ per ogni $\mathbf{A} \in M_2(\mathbb{C})$ ed ogni $\alpha \in \mathbb{C}$.

(1): $g(\mathbf{A}+\mathbf{B}) = (\mathbf{A}+\mathbf{B})\mathbf{e_1} = \mathbf{Ae_1} + \mathbf{Be_1} = g(\mathbf{A}) + g(\mathbf{B}) \quad \forall \mathbf{A}, \mathbf{B} \in M_2(\mathbb{C})$;

Dunque g verifica la condizione (1).

(2): $g(\alpha\mathbf{A}) = (\alpha\mathbf{A})\mathbf{e_1} = \alpha(\mathbf{Ae_1}) = \alpha g(\mathbf{A}) \quad \forall \mathbf{A} \in M_2(\mathbb{C}), \quad \forall \alpha \in \mathbb{C}$.

Dunque g verifica anche la condizione (2), per cui è un'applicazione lineare.

(b) Poichè $g(\mathbf{A}) = \mathbf{Ae_1}$ è la 1^a colonna di $\mathbf{A}$, allora

• $N(g) = \{\mathbf{A} \in M_2(\mathbb{C}) | g(\mathbf{A}) = \mathbf{0}\}$ è l'insieme delle matrici complesse 2×2 con la prima colonna nulla, ossia

$$N(g) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & b \end{pmatrix} \middle| a, b \in \mathbb{C} \right\},$$

• $Im(g) = \{g(\mathbf{A}) | \mathbf{A} \in M_2(\mathbb{C})\}$ è l'insieme dei vettori di $\mathbb{C}^2$ che siano prime colonne di matrici complesse 2×2. Poichè per ogni $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2$ esiste $\mathbf{A} \in M_2(\mathbb{C})$ tale che $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ sia la prima colonna di $\mathbf{A}$ (si prenda, ad esempio $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix}$), allora $Im(g) = \mathbb{C}^2$.

$\boxed{\mathbf{3}}$ Sia $f : \mathbb{R}^2 \to M_2(\mathbb{R})$ definita da:

$$f\left(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} a & a+b \\ a-b & b \end{pmatrix} \quad \forall \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

(a) Si provi che f è un'applicazione lineare.

(b) Si determini la matrice $\mathbf{A}$ associata ad f rispetto alle basi ordinate

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\} \quad \text{e} \quad \mathcal{D} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

su dominio e codominio rispettivamente.

(•) Per provare che f è un'applicazione lineare occorre provare :

1. $f(\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix}) = f(\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix}) + f(\begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix}) \quad \forall a_1, b_1, a_2, b_2 \in \mathbb{R}$

2. $f(\alpha \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}) = \alpha f(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}) \quad \forall \alpha, a, b \in \mathbb{R}$

1. $$f(\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix}) \overset{\boxed{\substack{\text{def. somma} \\ \text{vettori colonna}}}}{=} f(\begin{pmatrix} a_1 + a_2 \\ b_1 + b_2 \end{pmatrix}) \overset{\boxed{\text{def. } f}}{=}$$

$$= \begin{pmatrix} a_1 + a_2 & (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2) \\ (a_1 + a_2) - (b_1 + b_2) & b_1 + b_2 \end{pmatrix} \overset{\boxed{\substack{\text{prop. assoc. e} \\ \text{commut. di } + \text{ in } \mathbb{R}}}}{=}$$

$$= \begin{pmatrix} a_1 + a_2 & (a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) \\ (a_1 - b_1) + (a_2 - b_2) & b_1 + b_2 \end{pmatrix} \overset{\boxed{\text{def. somma matrici}}}{=}$$

$$= \begin{pmatrix} a_1 & a_1 + b_1 \\ a_1 - b_1 & b_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2 & a_2 + b_2 \\ a_2 - b_2 & b_2 \end{pmatrix} \overset{\boxed{\text{def. } f}}{=} f(\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix}) + f(\begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix})$$

$$2. \quad f(\alpha \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}) \overset{\boxed{\text{def. prod. di uno scal. per un vett}}}{=} f(\begin{pmatrix} \alpha a \\ \alpha b \end{pmatrix}) \overset{\boxed{\text{def. } f}}{=} \begin{pmatrix} \alpha a & \alpha a + \alpha b \\ \alpha a - \alpha b & \alpha b \end{pmatrix} =$$

$$\overset{\boxed{\text{propr. distr. in } \mathbb{R}}}{=} \begin{pmatrix} \alpha a & \alpha(a+b) \\ \alpha(a-b) & \alpha b \end{pmatrix} \overset{\boxed{\text{def. prod. di uno scal. per una matr.}}}{=} \alpha \begin{pmatrix} a & a+b \\ a-b & b \end{pmatrix} =$$

$$\overset{\boxed{\text{def. } f}}{=} \alpha f(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix})$$

(••) La matrice $\mathbf{A}$ associata ad f rispetto alle basi ordinate $\mathcal{B}$ e $\mathcal{D}$ su dominio e codominio rispettivamente è la matrice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} C_{\mathcal{D}}(f(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix})) & C_{\mathcal{D}}(f(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix})) \end{pmatrix}.$$

Dalla definizione di f si ottiene:

$$f(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad f(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix},$$

quindi

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} C_{\mathcal{D}}(\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}) & C_{\mathcal{D}}(\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}) \end{pmatrix}.$$

Calcoliamo le coordinate rispetto alla base ordinata $\mathcal{D}$ di un generico elemento $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$.

$$C_{\mathcal{D}}(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \delta \\ \gamma \end{pmatrix} \quad \Big| \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} =$$

$$= \alpha \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \delta \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2\gamma & \alpha + \beta \\ \beta + \delta & \beta \end{pmatrix}$$

Risolvendo il sistema $\begin{cases} 2\gamma & = & a \\ \alpha+\beta & = & b \\ \beta+\delta & = & c \\ \beta & = & d \end{cases}$ otteniamo $\begin{cases} \beta & = & d \\ \gamma & = & a/2 \\ \alpha = b-\beta = b-d \\ \delta = c-\beta = c-d \end{cases}$, quindi

$$C_{\boldsymbol{\mathcal{D}}}\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} b-d \\ d \\ c-d \\ a/2 \end{pmatrix}.$$

In particolare, specializzando a $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, otteniamo

$$C_{\boldsymbol{\mathcal{D}}}\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 1/2 \end{pmatrix}, \quad C_{\boldsymbol{\mathcal{D}}}\left(\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 1/2 \end{pmatrix}.$$

La matrice $\mathbf{A}$ associata ad f rispetto alle basi ordinate $\boldsymbol{\mathcal{B}}$ e $\boldsymbol{\mathcal{D}}$ su dominio e codominio rispettivamente è quindi la matrice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ -1 & -3 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

$\boxed{4}$ Siano

$$\boldsymbol{\mathcal{B}} = \left\{ \mathbf{v_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \mathbf{v_2} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \mathbf{v_3} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \quad \text{e}$$

$$\boldsymbol{\mathcal{B}}' = \left\{ \mathbf{v_1}' = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \mathbf{v_2}' = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \mathbf{v_3}' = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Dopo aver provato che $\boldsymbol{\mathcal{B}}$ e $\boldsymbol{\mathcal{B}}'$ sono due basi ordinate di $\mathbb{R}^3$, si calcolino le matrici di passaggio

$$\mathbf{M}_{\boldsymbol{\mathcal{B}} \leftarrow \boldsymbol{\mathcal{B}}'} \text{ (da } \boldsymbol{\mathcal{B}}' \text{ a } \boldsymbol{\mathcal{B}}\text{) e } \mathbf{M}_{\boldsymbol{\mathcal{B}}' \leftarrow \boldsymbol{\mathcal{B}}} \text{ (da } \boldsymbol{\mathcal{B}} \text{ a } \boldsymbol{\mathcal{B}}'\text{)}.$$

Siano $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ ed $\mathbf{A}' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ le matrici che hanno come colonne gli elementi di $\boldsymbol{\mathcal{B}}$ e di $\boldsymbol{\mathcal{B}}'$ rispettivamente. Per provare che $\boldsymbol{\mathcal{B}}$ e $\boldsymbol{\mathcal{B}}'$ sono due basi ordinate di $\mathbb{R}^3$, occorre provare che $\mathbf{A}$ ed $\mathbf{A}'$ hanno entrambe rango uguale a 3.

Facendo una E.G. su $\mathbf{A}$ si ottiene:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{21}(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{32}(-1)E_2(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{U}$$

per cui rk($\mathbf{A}$)=rk($\mathbf{U}$) $= 3$, ed, analogamente, facendo una E.G. su $\mathbf{A}'$ si ottiene:

$$\mathbf{A}' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{31}(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{32}(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \to$$

$$\xrightarrow{E_3(-\frac{1}{2})} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{U}'$$

per cui rk($\mathbf{A}'$)=rk($\mathbf{U}'$) $= 3$.

La matrice di passaggio $\mathbf{M}_{\boldsymbol{\mathcal{B}} \leftarrow \boldsymbol{\mathcal{B}}'}$ da $\boldsymbol{\mathcal{B}}'$ a $\boldsymbol{\mathcal{B}}$ è

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_{\boldsymbol{\mathcal{B}} \leftarrow \boldsymbol{\mathcal{B}}'} &= \begin{pmatrix} C_{\boldsymbol{\mathcal{B}}}(\mathbf{v_1'}) & C_{\boldsymbol{\mathcal{B}}}(\mathbf{v_2'}) & C_{\boldsymbol{\mathcal{B}}}(\mathbf{v_3'}) \end{pmatrix} = \\ &= \left(C_{\boldsymbol{\mathcal{B}}}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \quad C_{\boldsymbol{\mathcal{B}}}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \quad C_{\boldsymbol{\mathcal{B}}}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \right). \end{aligned}$$

Per calcolarla, piuttosto che calcolare separatamente $C_{\boldsymbol{\mathcal{B}}}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$, $C_{\boldsymbol{\mathcal{B}}}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ e $C_{\boldsymbol{\mathcal{B}}}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$, calcoliamo $C_{\boldsymbol{\mathcal{B}}}\left(\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}\right)$ per un generico vettore $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$, e specializziamo la formula ottenuta ai tre diversi vettori $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Poichè

$$C_{\boldsymbol{\mathcal{B}}}\left(\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \delta \end{pmatrix} \quad \Big| \quad \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \delta \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha + 2\beta + \delta \\ \alpha + \beta + \delta \\ \beta + \delta \end{pmatrix},$$

α, β e δ sono soluzioni del sistema lineare

$$(*) \qquad \begin{cases} \alpha + 2\beta + \delta = a \\ \alpha + \beta + \delta = b \\ \beta + \delta = c \end{cases}$$

Facendo una E.G. sulla matrice aumentata di $(*)$ otteniamo

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & | & a \\ 1 & 1 & 1 & | & b \\ 0 & 1 & 1 & | & c \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{21}(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & | & a \\ 0 & -1 & 0 & | & b-a \\ 0 & 1 & 1 & | & c \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\xrightarrow{E_{32}(-1)E_2(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & | & a \\ 0 & 1 & 0 & | & a-b \\ 0 & 0 & 1 & | & c-a+b \end{pmatrix}$$

da cui, con la sostituzione all'indietro,

$$\begin{cases} \delta = c - a + b \\ \beta = a - b \\ \alpha = -2\beta - \delta + a = -2a + 2b - c + a - b + a = b - c \end{cases}$$

Dunque $C_{\mathcal{B}}(\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} b-c \\ a-b \\ c-a+b \end{pmatrix}$, per cui

$$C_{\mathcal{B}}(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad C_{\mathcal{B}}(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad C_{\mathcal{B}}(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

e quindi

$$\mathbf{M}_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Analogamente si ha:

$$\mathbf{M}_{\mathcal{B}' \leftarrow \mathcal{B}} = \begin{pmatrix} C_{\mathcal{B}'}(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}) & C_{\mathcal{B}'}(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}) & C_{\mathcal{B}'}(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}) \end{pmatrix},$$

ma dal momento che $\mathbf{M}_{\mathcal{B}' \leftarrow \mathcal{B}} = \mathbf{M}^{-1}_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{B}'}$, calcoliamo $\mathbf{M}_{\mathcal{B}' \leftarrow \mathcal{B}}$ usando l'algoritmo di Gauss-Jordan:

$$\left(\mathbf{M}_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{B}'} \quad | \quad \mathbf{I}_3\right) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & | & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & | & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{21}(-1)E_1(-1)}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & | & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{32}(-2)E_2(-1)}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & | & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & | & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_3(1/2)}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & | & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & 1 & 1 & 1/2 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{23}(1)}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & | & 1 & 1 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

Dunque

$$\mathbf{M}_{\mathcal{B}' \leftarrow \mathcal{B}} = \mathbf{M}^{-1}_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

$\boxed{5}$ Sia $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 6 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$ la matrice associata ad un'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ rispetto alle basi ordinate

$$\mathcal{B} = \left\{ \mathbf{v_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \mathbf{v_2} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \text{ e}$$

$$\mathcal{D} = \left\{ \mathbf{w_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \mathbf{w_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \mathbf{w_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

su dominio e codominio rispettivamente. Si determini la matrice $\mathbf{A'}$ associata ad f

rispetto alle basi ordinate

$$\boldsymbol{\mathcal{B}}\,' = \left\{ \mathbf{v_1}' = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} ; \mathbf{v_2}' = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} \right\} \text{ e}$$

$$\boldsymbol{\mathcal{D}}\,' = \left\{ \mathbf{w_1}' = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} ; \mathbf{w_2}' = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} ; \mathbf{w_3}' = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

su dominio e codominio rispettivamente.

La matrice $\mathbf{A}'$ associata ad f rispetto alle basi ordinate $\boldsymbol{\mathcal{B}}\,'$ e $\boldsymbol{\mathcal{D}}\,'$ su dominio e codominio rispettivamente è la matrice

$$\mathbf{A}' = \mathbf{M}^{-1}_{\boldsymbol{\mathcal{D}} \leftarrow \boldsymbol{\mathcal{D}}\,'} \mathbf{A} \mathbf{M}_{\boldsymbol{\mathcal{B}} \leftarrow \boldsymbol{\mathcal{B}}\,'}$$

dove

$\mathbf{M}_{\boldsymbol{\mathcal{D}} \leftarrow \boldsymbol{\mathcal{D}}\,'}$ è la matrice di passaggio da $\boldsymbol{\mathcal{D}}\,'$ a $\boldsymbol{\mathcal{D}}$ e
$\mathbf{M}_{\boldsymbol{\mathcal{B}} \leftarrow \boldsymbol{\mathcal{B}}\,'}$ è la matrice di passaggio da $\boldsymbol{\mathcal{B}}\,'$ a $\boldsymbol{\mathcal{B}}$.

Per calcolare

$$\mathbf{M}^{-1}_{\boldsymbol{\mathcal{D}} \leftarrow \boldsymbol{\mathcal{D}}\,'} = \mathbf{M}_{\boldsymbol{\mathcal{D}}\,' \leftarrow \boldsymbol{\mathcal{D}}} = \begin{pmatrix} C_{\boldsymbol{\mathcal{D}}\,'}(\mathbf{w_1}) & C_{\boldsymbol{\mathcal{D}}\,'}(\mathbf{w_2}) & C_{\boldsymbol{\mathcal{D}}\,'}(\mathbf{w_3}) \end{pmatrix},$$

calcoliamo prima le coordinate rispetto a $\boldsymbol{\mathcal{D}}\,'$ di un generico $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$.

$$C_{\boldsymbol{\mathcal{D}}\,'}(\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \delta \end{pmatrix} \quad \text{t.c.} \quad \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \delta \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha+\beta \\ -\beta \\ \delta \end{pmatrix}$$

Dal momento che

$$\begin{cases} \alpha+\beta &= a \\ -\beta &= b \\ \delta &= c \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} \delta = c \\ \beta = -b \\ \alpha = a-\beta = a+b \end{cases}$$

otteniamo: $C_{\boldsymbol{\mathcal{D}}\,'}(\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} a+b \\ -b \\ c \end{pmatrix}$.

In particolare, specializzando a $\mathbf{w_1}$, $\mathbf{w_2}$ e $\mathbf{w_3}$;

$$C_{\boldsymbol{\mathcal{D}}\,'}(\mathbf{w_1}) = C_{\boldsymbol{\mathcal{D}}\,'}(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$C_{\mathcal{D}'}(\mathbf{w_2}) = C_{\mathcal{D}'}(\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}) = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},$$

$$C_{\mathcal{D}'}(\mathbf{w_3}) = C_{\mathcal{D}'}(\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}) = \begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix},$$

per cui

$$\mathbf{M}^{-1}_{\mathcal{D} \leftarrow \mathcal{D}'} = \mathbf{M}_{\mathcal{D}' \leftarrow \mathcal{D}} = \begin{pmatrix}2 & 1 & 1\\-1 & 0 & -1\\0 & 1 & 0\end{pmatrix}.$$

Per calcolare $\mathbf{M}_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{B}'} = \begin{pmatrix}C_{\mathcal{B}}(\mathbf{v_1'}) & C_{\mathcal{B}}(\mathbf{v_2'})\end{pmatrix}$, calcoliamo per prima cosa le coordinate rispetto a $\mathcal{B}$ di un generico $\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$.

$$C_{\mathcal{B}}(\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}) = \begin{pmatrix}\alpha\\\beta\end{pmatrix} \quad \text{t.c.} \quad \begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\alpha-\beta\\\alpha+\beta\end{pmatrix}$$

Dal momento che

$$\begin{cases}\alpha - \beta & = & a\\ \alpha + \beta & = & b\end{cases} \implies \begin{cases}2\alpha = a + b\\ 2\beta = b - a\end{cases} \implies \begin{cases}\alpha = (a+b)/2\\ \beta = (b-a)/2\end{cases}$$

otteniamo $C_{\mathcal{B}}(\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}) = \begin{pmatrix}(a+b)/2\\(b-a)/2\end{pmatrix}$.

In particolare, specializzando a $\mathbf{v_1'}$ e $\mathbf{v_2'}$:

$$C_{\mathcal{B}}(\mathbf{v_1'}) = C_{\mathcal{B}}(\begin{pmatrix}4\\0\end{pmatrix}) = \begin{pmatrix}2\\-2\end{pmatrix} \quad \text{e} \quad C_{\mathcal{B}}(\mathbf{v_2'}) = C_{\mathcal{B}}(\begin{pmatrix}3\\5\end{pmatrix}) = \begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix},$$

per cui $\mathbf{M}_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{B}'} = \begin{pmatrix}2 & 4\\-2 & 1\end{pmatrix}$.

La matrice $\mathbf{A}'$ che cerchiamo è quindi

$$\mathbf{A}' = \mathbf{M}^{-1}_{\mathcal{D} \leftarrow \mathcal{D}'}\mathbf{A}\mathbf{M}_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{B}'} = \begin{pmatrix}2 & 1 & 1\\-1 & 0 & -1\\0 & 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 1\\0 & 6\\-1 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 4\\-2 & 1\end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix}3 & 6\\-1 & 1\\0 & 6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 4\\-2 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-6 & 18\\-4 & -3\\-12 & 6\end{pmatrix}.$$

Svolgimento degli Esercizi per casa 8

$\boxed{\mathbf{1}}$ Sia $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$. Si provi che $\|\mathbf{v}\|_\infty = \|\mathbf{v}\|_1$ se e solo se $\mathbf{v}$ è un multiplo di una colonna di $\mathbf{I_n}$.

Sia $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$. Allora

$$\|\mathbf{v}\|_1 = |v_1| + |v_2| + \cdots + |v_n| \quad \text{e}$$

$$\|\mathbf{v}\|_\infty = |v_i| \text{ dove } i \in \{1, \ldots, n\} \text{ è tale che } |v_i| \geq |v_j| \quad \forall j \neq i.$$

Si ha:

$$\begin{aligned} \|\mathbf{v}\|_\infty = \|\mathbf{v}\|_1 \quad &\iff |v_i| = |v_1| + |v_2| + \cdots + |v_n| \\ &\iff |v_j| = 0 \quad \forall j \neq i \\ &\iff v_j = 0 \quad \forall j \neq i \\ &\iff \mathbf{v} = v_i \mathbf{e_i}. \end{aligned}$$

$\boxed{\mathbf{2}}$ Sia $\mathbf{A} = (a_{ij})$ una matrice complessa quadrata di ordine n tale che $\mathbf{A} = \mathbf{A}^H = \mathbf{A}^2$ e siano $\mathbf{b_1}, \mathbf{b_2}, \ldots \ldots, \mathbf{b_n} \in \mathbb{C}^n$ le colonne di $\mathbf{A}$. Si provi che $\|\mathbf{b_i}\|_2^2 = a_{ii}$ per ogni $i = 1, \ldots, n$.

Poiché $\mathbf{b_i} = \mathbf{A}\mathbf{e_i}$, allora

$$\begin{aligned} \|\mathbf{b_i}\|_2^2 \quad &= \|\mathbf{A}\mathbf{e_i}\|_2^2 = (\mathbf{A}\mathbf{e_i})^H \mathbf{A}\mathbf{e_i} = \mathbf{e_i}^H \mathbf{A}^H \mathbf{A}\mathbf{e_i} \quad \overset{\boxed{\mathbf{A}^H = \mathbf{A}}}{=} \\ &= \mathbf{e_i}^H \mathbf{A}\mathbf{A}\mathbf{e_i} \quad \overset{\boxed{\mathbf{A}^2 = \mathbf{A}}}{=} \quad \mathbf{e_i}^H \mathbf{A}\mathbf{e_i} = \mathbf{e_i}^H \begin{pmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ \vdots \\ a_{ni} \end{pmatrix} = a_{ii}. \end{aligned}$$

$\boxed{\mathbf{3}}$ Sapendo che la posizione $(\cdot|\cdot) : M_2(\mathbb{C}) \times M_2(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$

$$\left(\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} | \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{pmatrix} \right) = \sum_{i=1}^{4} \overline{a_i} b_i.$$

definisce un prodotto interno, si consideri la norma $\|\cdot\| : M_2(\mathbb{C}) \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ da esso indotta. Si trovino tutte le matrici complesse scalari $\mathbf{A}$ di ordine 2 tali che $\|\mathbf{A}\| = 2\sqrt{2}$.

La norma $\|\cdot\| : M_2(\mathbb{C}) \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ indotta dal prodotto interno è definita da:

$$\left\| \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{\left(\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} \right)} = \sqrt{\sum_{i=1}^4 \overline{a}_i \cdot a_i} =$$

$$= \sqrt{\sum_{i=1}^4 |a_i|^2} \qquad \forall \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{C}).$$

Una matrice $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{C})$ è scalare se e solo se $a_2 = a_3 = 0$ ed $a_1 = a_3 = \alpha$

per un opportuno $\alpha \in \mathbb{C}$, ossia se e solo se

$$\exists \alpha \in \mathbb{C} \,|\, \mathbf{A} = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$$

Dal momento che

$$\begin{aligned} \left\| \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} \right\| = 2\sqrt{2} \quad &\iff \quad \sqrt{|\alpha|^2 + |0|^2 + |0|^2 + |\alpha|^2} = 2\sqrt{2} \\ &\iff \quad |\alpha|\sqrt{2} = 2\sqrt{2} \\ &\iff \quad |\alpha| = 2, \end{aligned}$$

le matrici complesse scalari $\mathbf{A}$ di ordine 2 tali che $\|\mathbf{A}\| = 2\sqrt{2}$ sono tutte e sole le matrici del tipo

$$\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} \qquad \text{con } \alpha \in \mathbb{C} \text{ tale che } |\alpha| = 2.$$

N.B. I numeri complessi α tali che $|\alpha| = 2$ sono tutti e soli quei numeri complessi che corrispondono ai punti nel piano di Gauss che stanno sulla circonferenza di centro 0 e raggio 2. In particolare, ci sono infiniti numeri complessi α tali che $|\alpha| = 2$, per cui ci sono infinite matrici complesse scalari $\mathbf{A}$ di ordine 2 tali che $\|\mathbf{A}\| = 2\sqrt{2}$.

$\boxed{4}$ Sapendo che la posizione $\quad (\cdot|\cdot) : \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C} \quad$ definita da

$$\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \right) = \overline{x}_1 y_1 + 2\overline{x}_2 y_2$$

definisce un prodotto interno, siano $\|\cdot\| : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ la norma da esso indotta ed $\mathbf{u} = \mathbf{e_1} + \mathbf{e_2}$.

(a) Si trovino tutti i vettori $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ tali che $\|\mathbf{x}\| = \|\mathbf{x}\|_2$.
(b) Si calcolino $\cos(\widehat{\mathbf{e_1 u}})$ e $\cos(\widehat{\mathbf{e_2 u}})$.

La norma $\|\cdot\| : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ indotta da $(\cdot|\cdot)$ è definita da

$$\left\| \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \right)} = \sqrt{\overline{x}_1 x_1 + 2\overline{x}_2 x_2} = \sqrt{|x_1|^2 + 2|x_2|^2}.$$

(a) Sia $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$. Essendo $\|\mathbf{x}\| = \sqrt{|x_1|^2 + 2|x_2|^2}$ e

$$\|\mathbf{x}\|_2 = \sqrt{\mathbf{x}^H \mathbf{x}} = \sqrt{\begin{pmatrix} \overline{x}_1 & \overline{x}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}} = \sqrt{\overline{x}_1 x_1 + \overline{x}_2 x_2} = \sqrt{|x_1|^2 + |x_2|^2},$$

allora

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x}\| = \|\mathbf{x}\|_2 \quad &\iff \sqrt{|x_1|^2 + 2|x_2|^2} = \sqrt{|x_1|^2 + |x_2|^2} \\ &\iff |x_1|^2 + 2|x_2|^2 = |x_1|^2 + |x_2|^2 \\ &\iff |x_2|^2 = 0 \\ &\iff x_2 = 0. \end{aligned}$$

Dunque

$$\left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{C}^2 \,\middle|\, \|\mathbf{x}\| = \|\mathbf{x}\|_2 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \end{pmatrix} \,\middle|\, \alpha \in \mathbb{C} \right\} = \langle \mathbf{e_1} \rangle.$$

(b) Essendo

$$\begin{aligned} \|\mathbf{e_1}\| &= \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{|1|^2 + 2|0|^2} = 1, \\ \|\mathbf{e_2}\| &= \left\| \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{|0|^2 + 2|1|^2} = \sqrt{2}, \\ \|\mathbf{u}\| &= \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{|1|^2 + 2|1|^2} = \sqrt{3}, \end{aligned}$$

e

$$(\mathbf{e_1}|\mathbf{u}) = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Big| \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \overline{1} \cdot 1 + 2 \cdot \overline{0} \cdot 1 = 1,$$

$$(\mathbf{e_2}|\mathbf{u}) = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Big| \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \overline{0} \cdot 1 + 2 \cdot \overline{1} \cdot 1 = 2,$$

allora

$$\cos(\widehat{\mathbf{e_1}\mathbf{u}}) = \tfrac{(\mathbf{e_1}|\mathbf{u})}{\|\mathbf{e_1}\|\|\mathbf{u}\|} = \tfrac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\cos(\widehat{\mathbf{e_2}\mathbf{u}}) = \tfrac{(\mathbf{e_2}|\mathbf{u})}{\|\mathbf{e_2}\|\|\mathbf{u}\|} = \tfrac{2}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}} = \sqrt{\tfrac{2}{3}}.$$

Svolgimento degli Esercizi per casa 9

$\boxed{\mathbf{1}}$ Si trovi una base ortonormale del sottospazio

$$V = \left\langle \begin{pmatrix} i \\ -1 \\ i \\ -1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} -1 \\ -i \\ -1 \\ -i \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2i \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

di $\mathbb{C}^4$.

$\boxed{I}$ Costruiamo dapprima **una base di V**: poniamo

$$\mathbf{w_1} = \begin{pmatrix} i \\ -1 \\ i \\ -1 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{w_2} = \begin{pmatrix} -1 \\ -i \\ -1 \\ -i \end{pmatrix}; \quad \mathbf{w_3} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{w_4} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2i \\ 0 \end{pmatrix}$$

e calcoliamo una base di $C(\mathbf{A})$ dove $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{w_1} & \mathbf{w_2} & \mathbf{w_3} & \mathbf{w_4} \end{pmatrix}$.

$$\mathbf{A} \quad = \begin{pmatrix} \mathbf{w_1} & \mathbf{w_2} & \mathbf{w_3} & \mathbf{w_4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i & -1 & 1 & 0 \\ -1 & -i & 0 & 0 \\ i & -1 & 1 & 2i \\ -1 & -i & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{41}(1)E_{31}(-i)E_{21}(1)E_1(-i)}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & i & -i & 0 \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2i \\ 0 & 0 & -i & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_3(-\frac{1}{2}i)E_{42}(i)E_2(i)} \begin{pmatrix} 1 & i & -i & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{U}$$

Poichè $\mathbf{U}$ ha come colonne dominanti la 1^a, la 3^a e la 4^a, allora una base di $C(\mathbf{A}) = V$ è $\{\mathbf{w_1}; \mathbf{w_3}; \mathbf{w_4}\}$.

$\boxed{II}$ Troviamo **una base ortogonale di V** applicando l'algoritmo di Gram-Schmidt a

$$\left\{ \mathbf{v_1} = \mathbf{w_1} = \begin{pmatrix} i \\ -1 \\ i \\ -1 \end{pmatrix}; \mathbf{v_2} = \mathbf{w_3} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \mathbf{v_3} = \mathbf{w_4} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2i \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

$$\mathbf{u_1} = \mathbf{v_1} = \begin{pmatrix} i \\ -1 \\ i \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{u_2} = \mathbf{v_2} - \alpha_{12}\mathbf{u_1}, \qquad \mathbf{u_1} \neq \mathbf{0} \quad \Longrightarrow \quad \alpha_{12} = \frac{(\mathbf{u_1}|\mathbf{v_2})}{(\mathbf{u_1}|\mathbf{u_1})}$$

$$(\mathbf{u_1}|\mathbf{v_2}) = \mathbf{u_1}^H \mathbf{v_2} = \begin{pmatrix} -i & -1 & -i & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = -2i$$

$$(\mathbf{u_1}|\mathbf{u_1}) = \mathbf{u_1}^H \mathbf{u_1} = \begin{pmatrix} -i & -1 & -i & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i \\ -1 \\ i \\ -1 \end{pmatrix} = 4$$

$$\Longrightarrow \quad \alpha_{12} = -\frac{2i}{4} = -\frac{1}{2}i$$

$$\begin{aligned} \mathbf{u_2} &= \mathbf{v_2} - \alpha_{12}\mathbf{u_1} = \\ &= \mathbf{v_2} + \tfrac{1}{2}i\mathbf{u_1} = \end{aligned}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \tfrac{1}{2}i \begin{pmatrix} i \\ -1 \\ i \\ -1 \end{pmatrix} = \tfrac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ 1 \\ -i \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{u_3} = \mathbf{v_3} - \alpha_{13}\mathbf{u_1} - \alpha_{23}\mathbf{u_2}, \qquad \mathbf{u_1} \neq \mathbf{0} \quad \Longrightarrow \quad \alpha_{13} = \frac{(\mathbf{u_1}|\mathbf{v_3})}{(\mathbf{u_1}|\mathbf{u_1})}$$

$$(\mathbf{u_1}|\mathbf{v_3}) = \mathbf{u_1}^H \mathbf{v_3} = \begin{pmatrix} -i & -1 & -i & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2i \\ 0 \end{pmatrix} = 2$$

$$(\mathbf{u_1}|\mathbf{u_1}) = \mathbf{u_1}^H \mathbf{u_1} = 4$$

$$\Longrightarrow \quad \alpha_{13} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$\mathbf{u_2} \neq \mathbf{0} \quad \Longrightarrow \quad \alpha_{23} = \frac{(\mathbf{u_2}|\mathbf{v_3})}{(\mathbf{u_2}|\mathbf{u_2})}$$

$$(\mathbf{u_2}|\mathbf{v_3}) = \mathbf{u_2}^H\mathbf{v_3} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & i & 1 & i\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\\2i\\0\end{pmatrix} = i$$

$$(\mathbf{u_2}|\mathbf{u_2}) = \mathbf{u_2}^H\mathbf{u_2} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & i & 1 & i\end{pmatrix}\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\-i\\1\\-i\end{pmatrix} = 1$$

$$\Longrightarrow \quad \alpha_{23} = i$$

$$\begin{aligned}\mathbf{u_3} &= \mathbf{v_3} - \alpha_{13}\mathbf{u_1} - \alpha_{23}\mathbf{u_2} = \\ &= \mathbf{v_3} - \tfrac{1}{2}\mathbf{u_1} - \tfrac{1}{2}i\mathbf{u_2} =\end{aligned}$$

$$= \begin{pmatrix}0\\0\\2i\\0\end{pmatrix} - \tfrac{1}{2}\begin{pmatrix}i\\-1\\i\\-1\end{pmatrix} - \tfrac{1}{2}i\begin{pmatrix}1\\-i\\1\\-i\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-i\\0\\i\\0\end{pmatrix}$$

Dunque

$$\left\{\mathbf{u_1} = \begin{pmatrix}i\\-1\\i\\-1\end{pmatrix}; \mathbf{u_2} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\-i\\1\\-i\end{pmatrix}; \mathbf{u_3} = \begin{pmatrix}-i\\0\\i\\0\end{pmatrix}\right\}$$

è una base ortogonale di V.

$\boxed{III}$ Costruiamo **base ortonormale di V** normalizzando la base ortogonale trovata al punto $\boxed{II}$, ossia dividendo ciascun elemento della base ortogonale trovata in $\boxed{II}$ per la propria norma euclidea.

Cominciamo con il calcolare la norma euclidea di $\mathbf{u_1}$, $\mathbf{u_2}$ ed $\mathbf{u_3}$:

$$\|\mathbf{u_1}\|_2 = \sqrt{(\mathbf{u_1}|\mathbf{u_1})} = \sqrt{4} = 2$$

$$\|\mathbf{u_2}\|_2 = \sqrt{(\mathbf{u_2}|\mathbf{u_2})} = \sqrt{1} = 1$$

$$\|\mathbf{u_3}\|_2 = \sqrt{(\mathbf{u_3}|\mathbf{u_3})} = \sqrt{\begin{pmatrix}i & 0 & -i & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-i\\0\\i\\0\end{pmatrix}} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

Allora

$$\boldsymbol{\mathcal{B}} = \{\frac{\mathbf{u_1}}{\|\mathbf{u_1}\|_2}; \frac{\mathbf{u_2}}{\|\mathbf{u_2}\|_2}; \frac{\mathbf{u_3}}{\|\mathbf{u_3}\|_2}\} = \left\{ \frac{1}{2}\begin{pmatrix} i \\ -1 \\ i \\ -1 \end{pmatrix}; \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ 1 \\ -i \end{pmatrix}; \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -i \\ 0 \\ i \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

è una base ortonormale di V.

$\boxed{\mathbf{2}}$ Si consideri il sottospazio

$$W = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 2i \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1+2i \end{pmatrix} \right\rangle$$

di $M_2(\mathbb{C})$. Si trovi una base ortonormale di W rispetto al prodotto interno $(\cdot|\cdot) : M_2(\mathbb{C}) \times M_2(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ definito nell'esercizio $\boxed{3}$ degli "Esercizi per casa"8.

Il prodotto interno su $M_2(\mathbb{C})$ definito nell'esercizio $\boxed{3}$ degli "Esercizi per casa"8 è: $(\cdot|\cdot) : M_2(\mathbb{C}) \times M_2(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ con

$$(\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} \Big| \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{pmatrix}) = \sum_{i=1}^{4} \overline{a_i} b_i$$

e la norma da esso indotta è: $\|\cdot\| : M_2(\mathbb{C}) \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ con

$$\begin{aligned} \Big\| \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} \Big\| &= \sqrt{\Big(\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} \Big| \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} \Big)} = \\ &= \sqrt{\textstyle\sum_{i=1}^{4} \overline{a}_i \cdot a_i} = \\ &= \sqrt{\textstyle\sum_{i=1}^{4} |a_i|^2} \qquad \forall \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{C}). \end{aligned}$$

Siano $\mathbf{v_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v_2} = \begin{pmatrix} 1 & 2i \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ e $\mathbf{v_3} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1+2i \end{pmatrix}$.
Poichè $\boldsymbol{\mathcal{S}} = \{\mathbf{v_1}; \mathbf{v_2}; \mathbf{v_3}\}$ è un insieme di generatori di W,

$\boxed{I}$ troviamo **una base** $\boldsymbol{\mathcal{B}}$ **di W** contenuta in $\boldsymbol{\mathcal{S}}$.

Esistono elementi di $\boldsymbol{\mathcal{S}}$ che siano combinazioni lineare dei rimanenti ?

Sia $\alpha_1\mathbf{v_1}+\alpha_2\mathbf{v_2}+\alpha_3\mathbf{v_3}=\mathbf{0}$ una combinazione lineare nulla dei vettori di $\boldsymbol{\mathcal{S}}$. Allora da

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \alpha_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 1 & 2i \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1+2i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1+\alpha_2 & 2i\alpha_2+\alpha_3 \\ 0 & (1+2i)\alpha_3 \end{pmatrix}$$

si ottiene il sistema lineare, nelle incognite $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$,

$$\begin{cases} \alpha_1+\alpha_2=0 \\ 2i\alpha_2+\alpha_3=0 \\ (1+2i)\alpha_3=0 \end{cases}$$

che ha come unica soluzione quella nulla (ossia $\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=0$).

Dunque $\boldsymbol{\mathcal{S}}$ è L.I., per cui $\boldsymbol{\mathcal{B}} = \boldsymbol{\mathcal{S}}$ è una base di W.

$\boxed{II}$ troviamo **una base ortogonale di W** applicando a $\boldsymbol{\mathcal{B}} = \{\mathbf{v_1};\mathbf{v_2};\mathbf{v_3}\}$ l'algoritmo di Gram-Schmidt (dove il prodotto interno

$$(\cdot|\cdot): M_2(\mathbb{C}) \times M_2(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$$

è definito sopra).

$$\boxed{\mathbf{u_1} = \mathbf{v_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}$$

$\mathbf{u_2} = \mathbf{v_2} - \alpha_{12}\mathbf{u_1}$

$\mathbf{u_1} \neq \mathbf{0} \quad \Longrightarrow \quad \alpha_{12} = \frac{(\mathbf{u_1}|\mathbf{v_2})}{(\mathbf{u_1}|\mathbf{u_1})}$

$(\mathbf{u_1}|\mathbf{v_2}) = (\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} | \begin{pmatrix} 1 & 2i \\ 0 & 0 \end{pmatrix}) = \overline{1}\cdot 1 + \overline{0}\cdot 2i + \overline{0}\cdot 0 + \overline{0}\cdot 0 = 1\cdot 1 + 0\cdot 2i + 0 + 0 = 1$

$(\mathbf{u_1}|\mathbf{u_1}) = (\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} | \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}) = \overline{1}\cdot 1 + \overline{0}\cdot 0 + \overline{0}\cdot 0 + \overline{0}\cdot 0 = 1\cdot 1 + 0 + 0 + 0 = 1$

$\alpha_{12} = \frac{1}{1} = 1$

$\mathbf{u_2} = \mathbf{v_2} - \alpha_{12}\mathbf{u_1} = \mathbf{v_2} - \mathbf{u_1} = \begin{pmatrix} 1 & 2i \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2i \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$\boxed{\mathbf{u_2} = \begin{pmatrix} 0 & 2i \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}$$

$\mathbf{u_3} = \mathbf{v_3} - \alpha_{13}\mathbf{u_1} - \alpha_{23}\mathbf{u_2}$

$\mathbf{u_1} \neq \mathbf{0} \quad \Longrightarrow \quad \alpha_{13} = \frac{(\mathbf{u_1}|\mathbf{v_3})}{(\mathbf{u_1}|\mathbf{u_1})}$

$(\mathbf{u_1}|\mathbf{v_3}) = (\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} | \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1+2i \end{pmatrix}) = \overline{1} \cdot 0 + \overline{0} \cdot 1 + \overline{0} \cdot 0 + \overline{0} \cdot (1+2i) = 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 0 + 0 \cdot (1+2i) = 0$

$\alpha_{13} = \frac{0}{(\mathbf{u_1}|\mathbf{u_1})} = 0$

$\mathbf{u_2} \neq \mathbf{0} \quad \Longrightarrow \quad \alpha_{23} = \frac{(\mathbf{u_2}|\mathbf{v_3})}{(\mathbf{u_2}|\mathbf{u_2})}$

$(\mathbf{u_2}|\mathbf{v_3}) = (\begin{pmatrix} 0 & 2i \\ 0 & 0 \end{pmatrix} | \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1+2i \end{pmatrix}) = \overline{0} \cdot 0 + \overline{2i} \cdot 1 + \overline{0} \cdot 0 + \overline{0} \cdot (1+2i) = 0 - 2i \cdot 1 + 0 + 0 \cdot (1+2i) = -2i$

$(\mathbf{u_2}|\mathbf{u_2}) = (\begin{pmatrix} 0 & 2i \\ 0 & 0 \end{pmatrix} | \begin{pmatrix} 0 & 2i \\ 0 & 0 \end{pmatrix}) = \overline{0} \cdot 0 + \overline{2i} \cdot 2i + \overline{0} \cdot 0 + \overline{0} \cdot 0 = 0 - 4i^2 + 0 + 0 = -4i^2 = -4(-1) = 4$

$\alpha_{23} = \frac{-2i}{4} = -\frac{i}{2}$

$\mathbf{u_3} = \mathbf{v_3} - \alpha_{13}\mathbf{u_1} - \alpha_{23}\mathbf{u_2} = \mathbf{v_3} + i\mathbf{u_2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1+2i \end{pmatrix} + \frac{i}{2} \begin{pmatrix} 0 & 2i \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1+2i \end{pmatrix}$

$$\boxed{\mathbf{u_3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1+2i \end{pmatrix}}$$

Dunque

$$\boldsymbol{\mathcal{B}}_1 \left\{ \mathbf{u_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \mathbf{u_2} = \begin{pmatrix} 0 & i \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \mathbf{u_3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1+2i \end{pmatrix} \right\}$$

è una base ortogonale di W.

$\boxed{III}$ Costruiamo **base ortonormale di W** normalizzando la base ortogonale $\boldsymbol{\mathcal{B}}_1$ trovata al punto $\boxed{II}$, ossia dividendo ciascun elemento di $\boldsymbol{\mathcal{B}}_1$ per la propria norma (dove la norma è quella indotta dal prodotto interno).

Cominciamo con il calcolare la norma di $\mathbf{u_1}$, $\mathbf{u_2}$ ed $\mathbf{u_3}$:

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{u_1}\| &= \sqrt{(\mathbf{u_1}|\mathbf{u_1})} = \sqrt{1} = 1 \\
\|\mathbf{u_2}\| &= \sqrt{(\mathbf{u_2}|\mathbf{u_2})} = \sqrt{4} = 2 \\
\|\mathbf{u_3}\| &= \sqrt{(\mathbf{u_3}|\mathbf{u_3})} = \sqrt{(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1+2i \end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1+2i \end{pmatrix})} = \\
&= \sqrt{\overline{0}\cdot 0 + \overline{0}\cdot 0 + \overline{0}\cdot 0 + \overline{(1+2i)}\cdot(1+2i)} = \\
&= \sqrt{0+0+0+(1-2i)(1+2i)} = \sqrt{1-(2i)^2} = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}
\end{aligned}$$

Allora

$$\begin{aligned}
\mathcal{B}^{\,*} &= \{\mathbf{u_1}^* = \tfrac{\mathbf{u_1}}{\|\mathbf{u_1}\|}; \mathbf{u_2}^* = \tfrac{\mathbf{u_2}}{\|\mathbf{u_2}\|}; \mathbf{u_3}^* = \tfrac{\mathbf{u_3}}{\|\mathbf{u_3}\|}\} = \\
&= \left\{\mathbf{u_1}^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \mathbf{u_2}^* = \begin{pmatrix} 0 & i \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \mathbf{u_3}^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{1+2i}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}\right\}
\end{aligned}$$

è una base ortonormale di W.

$\boxed{\mathbf{3}}$ Siano

$$V_1 = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ i \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle \quad \text{e} \quad V_2 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 1 \\ i \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} i \\ -1 \\ i \\ -1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Si trovino basi di $V_1^{\perp}$ e $V_2^{\perp}$.

(a) Se $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 \\ i \\ 2 \end{pmatrix}$ allora $C(\mathbf{A}) = V_1$ e $V_1^{\perp} = C(\mathbf{A})^{\perp} = N(\mathbf{A}^H)$.

Facendo un'eliminazione di Gauss su $\mathbf{A}^H$ otteniamo:

$$\mathbf{A}^H = \begin{pmatrix} 0 & -i & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_1(i)} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2i \end{pmatrix} = \mathbf{U}$$

Poichè $N(\mathbf{A}^H) = N(\mathbf{U})$ e

$$\dim(N(\mathbf{U})) = \text{numero delle colonne di} \mathbf{U} - \text{rango di } \mathbf{U} = 3 - 1 = 2,$$

una base di $V_1^{\perp}$ ha 2 elementi (d'altra parte $\dim V_1$=1 e $\dim \mathbb{C}^3$=3, per cui a priori potevamo dedurre che $\dim V_1^{\perp} = \dim \mathbb{C}^3 - \dim V_1 = 3 - 1 = 2$).

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in N(\mathbf{A}^H) = N(\mathbf{U}) \quad \Longleftrightarrow \quad x_2 + 2ix_3 = 0$$

quindi

$$N(\mathbf{U}) = \left\{ \begin{pmatrix} h \\ -2ik \\ k \end{pmatrix} | h, k \in \mathbb{C} \right\}.$$

Una base di $V_1^{\perp}$ è

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 \\ -2i \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

(b) Se $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & i & 1 & 0 \\ i & -1 & 0 & 1 \\ 1 & i & 1 & 0 \\ i & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, allora $C(\mathbf{A}) = V_2$ e $V_2^{\perp} = C(\mathbf{A})^{\perp} = N(\mathbf{A}^H)$.

Facendo un'eliminazione di Gauss su $\mathbf{A}^H$ otteniamo:

$$\mathbf{A}^H = \begin{pmatrix} 1 & -i & 1 & -i \\ -i & -1 & -i & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{31}(-1)E_{21}(i)} \begin{pmatrix} 1 & -i & 1 & -i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & i \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{23}}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & -i & 1 & -i \\ 0 & i & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{42}(-1)E_2(-i)} \begin{pmatrix} 1 & -i & 1 & -i \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{U}$$

Poichè $N(\mathbf{A}^H) = N(\mathbf{U})$ e

$$\dim(N(\mathbf{A})) = \text{numero delle colonne di } \mathbf{U} - \text{rango di } \mathbf{U} = 4 - 2 = 2,$$

una base di $V_2^{\perp}$ ha 2 elementi.

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in N(\mathbf{A}^H) = N(\mathbf{U}) \iff \begin{cases} x_1 - ix_2 + x_3 - ix_4 = 0 \\ x_2 + x_4 = 0 \end{cases}$$

Quindi

$$V_2^{\perp} = N(\mathbf{A}^H) = \left\{ \begin{pmatrix} -h \\ -k \\ h \\ k \end{pmatrix} | h, k \in \mathbb{C} \right\}$$

ed una sua base è

$$\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

$\boxed{\mathbf{4}}$ Siano W e $(\cdot|\cdot) : M_2(\mathbb{C}) \times M_2(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ come nell'esercizio $\boxed{2}$. Si trovi il complemento ortogonale $W^\perp$ di W in $M_2(\mathbb{C})$ rispetto al prodotto interno $(\cdot|\cdot)$.

Il complemento ortogonale di W in $M_2(\mathbb{C})$ è

$$W^\perp = \{\mathbf{v} \in M_2(\mathbb{C}) | (\mathbf{a}|\mathbf{v}) = 0 \quad \forall \mathbf{w} \in W\}.$$

Dal momento che

$$\left\{ \mathbf{v_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} ; \mathbf{v_2} = \begin{pmatrix} 1 & 2i \\ 0 & 0 \end{pmatrix} ; \mathbf{v_3} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1+2i \end{pmatrix} \right\}$$

è un insieme di generatori di W, allora

$$W^\perp = \{\mathbf{v} \in M_2(\mathbb{C}) | (\mathbf{v_{\boldsymbol{i}}}|\mathbf{v}) = 0 \quad \text{per } i = 1, 2, 3\}.$$

Se $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{C})$,

$$\begin{aligned}
(\mathbf{v_1}|\mathbf{v}) &= (\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} | \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix}) = \overline{1} \cdot a_1 + \overline{0} \cdot a_2 + \overline{0} \cdot a_3 + \overline{0} \cdot a_4 = \\
&= 1 \cdot a_1 + 0 \cdot a_2 + 0 \cdot a_3 + 0 \cdot a_4 = \\
&= a_1 \\
(\mathbf{v_2}|\mathbf{v}) &= (\begin{pmatrix} 1 & 2i \\ 0 & 0 \end{pmatrix} | \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix}) = \overline{1} \cdot a_1 + \overline{2i} \cdot a_2 + \overline{0} \cdot a_3 + \overline{0} \cdot a_4 = \\
&= 1 \cdot a_1 - 2i \cdot a_2 + 0 \cdot a_3 + 0 \cdot a_4 = \\
&= a_1 - 2ia_2 \\
(\mathbf{v_3}|\mathbf{v}) &= (\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1+2i \end{pmatrix} | \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix}) = \overline{0} \cdot a_1 + \overline{1} \cdot a_2 + \overline{0} \cdot a_3 + \overline{1+2i} \cdot a_4 = \\
&= 0 \cdot a_1 + 1 \cdot a_2 + 0 \cdot a_3 + (1 - 2i) \cdot a_4 = \\
&= a_2 + (1 - 2i)a_4
\end{aligned}$$

Dunque

$$\begin{aligned} W^{\perp} &= \left\{ \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{C}) \middle| a_1 = a_1 - 2ia_2 = a_2 + (1-2i)a_4 = 0 \right\} = \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{C}) \middle| a_1 = a_2 = a_4 = 0 \right\} = \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a & 0 \end{pmatrix} \middle| a \in \mathbb{C} \right\}. \end{aligned}$$

$\boxed{\mathbf{5}}$ Si calcoli la proiezione ortogonale di $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 2i \\ -6 \\ 8i \\ 10 \end{pmatrix}$ sul sottospazio

$$U = \left\langle \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 8i \\ 0 \\ -i \\ 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 7i \\ -1 \\ -i \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

di $\mathbb{C}^3$.

$\boxed{I}$ Troviamo una base ortonormale di U.

Poniamo

$$\mathbf{w_1} = \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{w_2} = \begin{pmatrix} 8i \\ 0 \\ -i \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{w_3} = \begin{pmatrix} 7i \\ -1 \\ -i \\ 1 \end{pmatrix}$$

e calcoliamo una base di $C(\mathbf{A})$ dove $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{w_1} & \mathbf{w_2} & \mathbf{w_3} \end{pmatrix}$.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{w_1} & \mathbf{w_2} & \mathbf{w_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i & 8i & 7i \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -i & -i \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{21}(-1)E_1(-i)}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 8 & 7 \\ 0 & -8 & -8 \\ 0 & -i & -i \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{42}(-1)E_{32}(i)E_2(-\frac{1}{8})} \begin{pmatrix} 1 & 8 & 7 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{U}$$

Poichè $\mathbf{U}$ ha come colonne dominanti la 1^a e la 2^a, allora una base di $C(\mathbf{A}) = U$ è $\{\mathbf{w_1}; \mathbf{w_2}\}$.

Applichiamo ora l'algoritmo di Gram-Schmidt a

$$\left\{ \mathbf{v_1} = \mathbf{w_1} = \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \mathbf{v_2} = \mathbf{w_2} = \begin{pmatrix} 8i \\ 0 \\ -i \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

per trovare una base ortogonale di U.

$$\mathbf{u_1} = \mathbf{v_1} = \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{u_2} = \mathbf{v_2} - \alpha_{12}\mathbf{u_1}, \qquad \mathbf{u_1} \neq \mathbf{0} \quad \Longrightarrow \quad \alpha_{12} = \frac{(\mathbf{u_1}|\mathbf{v_2})}{(\mathbf{u_1}|\mathbf{u_1})}$$

$$(\mathbf{u_1}|\mathbf{v_2}) = \mathbf{u_1}^H\mathbf{v_2} = \begin{pmatrix} -i & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8i \\ 0 \\ -i \\ 1 \end{pmatrix} = (-i)8i = 8$$

$$(\mathbf{u_1}|\mathbf{u_1}) = \mathbf{u_1}^H\mathbf{u_1} = \begin{pmatrix} -i & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = (-i)i + 1 = 2$$

$$\Longrightarrow \quad \alpha_{12} = \frac{8}{2} = 4$$

$$\mathbf{u_2} = \mathbf{v_2} - \alpha_{12}\mathbf{u_1} =$$

$$= \mathbf{v_2} - 4\mathbf{u_1} =$$

$$= \begin{pmatrix} 8i \\ 0 \\ -i \\ 1 \end{pmatrix} - 4 \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4i \\ -4 \\ -i \\ 1 \end{pmatrix}$$

Dunque $\left\{ \mathbf{u_1} = \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \mathbf{u_2} = \begin{pmatrix} 4i \\ -4 \\ -i \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ è una base ortogonale di U.

Costruiamo base ortonormale di U normalizzando la base ortogonale $\{\mathbf{u_1}; \mathbf{u_2}\}$, ossia dividendo ciascun suo elemento per la sua norma euclidea.
Cominciamo con il calcolare la norma euclidea di $\mathbf{u_1}$ ed $\mathbf{u_2}$:

$$\|\mathbf{u_1}\|_2 = \sqrt{(\mathbf{u_1}|\mathbf{u_1})} = \sqrt{2}$$

$$\|\mathbf{u_2}\|_2 = \sqrt{(\mathbf{u_2}|\mathbf{u_2})} = \sqrt{\begin{pmatrix} -4i & -4 & i & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4i \\ -4 \\ -i \\ 1 \end{pmatrix}} = \sqrt{16+16+1+1} = \sqrt{34}$$

Allora

$$\boldsymbol{\mathcal{B}} = \{\mathbf{u_1}^* = \frac{\mathbf{u_1}}{\|\mathbf{u_1}\|_2}; \mathbf{u_2}^* = \frac{\mathbf{u_2}}{\|\mathbf{u_2}\|_2}\} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \frac{1}{\sqrt{34}} \begin{pmatrix} 4i \\ -4 \\ -i \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

è una base ortonormale di U.

La proiezione ortogonale di $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 2i \\ -6 \\ 8i \\ 10 \end{pmatrix}$ su U è

$$P_U(\mathbf{v}) = (\mathbf{u_1}^*|\mathbf{v})\mathbf{u_1}^* + (\mathbf{u_2}^*|\mathbf{v})\mathbf{u_2}^*$$

dove

$$\begin{aligned} (\mathbf{u_1}^*|\mathbf{v}) &= (\mathbf{u_1}^*)^H \mathbf{v} = \tfrac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -i & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2i \\ -6 \\ 8i \\ 10 \end{pmatrix} = \\ &= \tfrac{1}{\sqrt{2}}((-i)2i - 6) = -\tfrac{4}{\sqrt{2}} \\ (\mathbf{u_2}^*|\mathbf{v}) &= (\mathbf{u_2}^*)^H \mathbf{v} = \tfrac{1}{\sqrt{34}} \begin{pmatrix} -4i & -4 & i & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2i \\ -6 \\ 8i \\ 10 \end{pmatrix} = \\ &= \tfrac{1}{\sqrt{34}}(-4i2i - 4(-6) + i8i + 10) = \sqrt{34} \end{aligned}$$

Quindi

$$\begin{aligned} P_U(\mathbf{v}) &= -\tfrac{4}{\sqrt{2}}\mathbf{u_1}^* + \sqrt{34}\mathbf{u_2}^* = -\tfrac{4}{\sqrt{2}}\tfrac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \sqrt{34}\tfrac{1}{\sqrt{34}} \begin{pmatrix} 4i \\ -4 \\ -i \\ 1 \end{pmatrix} = \\ &= -2 \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4i \\ -4 \\ -i \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2i \\ -6 \\ -i \\ 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

$\boxed{\mathbf{6}}$ Siano W e $(\cdot|\cdot) : M_2(\mathbb{C})\times M_2(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ come nell'esercizio $\boxed{2}$. Si calcoli la proiezione ortogonale $P_W(\mathbf{v})$ di

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 & i \\ 2i & 3\sqrt{5} \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{C})$$

su W rispetto al prodotto interno $(\cdot|\cdot)$.

Nell'esercizio $\boxed{2}$ abbiamo trovato che

$$\left\{ \mathbf{u_1}^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} ; \mathbf{u_2}^* = \begin{pmatrix} 0 & i \\ 0 & 0 \end{pmatrix} ; \mathbf{u_3}^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{1+2i}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \right\}$$

è una base ortonormale di W (rispetto al prodotto interno $(\cdot|\cdot)$ ed alla norma da esso indotta su $M_2(\mathbb{C})$).

La proiezione ortogonale di $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 & i \\ 2i & 3\sqrt{5} \end{pmatrix}$ su W è

$$P_W(\mathbf{v}) = (\mathbf{u_1}^*|\mathbf{v})\mathbf{u_1}^* + (\mathbf{u_2}^*|\mathbf{v})\mathbf{u_2}^* + (\mathbf{u_3}^*|\mathbf{v})\mathbf{u_3}^*$$

dove

$$\begin{aligned}
(\mathbf{u_1}^*|\mathbf{v}) &= (\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} | \begin{pmatrix} 1 & i \\ 2i & 3\sqrt{5} \end{pmatrix}) = \\
&= \overline{1} \cdot 1 + \overline{0} \cdot i + \overline{0} \cdot 2i + \overline{0} \cdot 3\sqrt{5} = \\
&= 1 \cdot 1 + 0 \cdot i + 0 \cdot 2i + 0 \cdot 3\sqrt{5} = 1 \\
(\mathbf{u_2}^*|\mathbf{v}) &= (\begin{pmatrix} 0 & i \\ 0 & 0 \end{pmatrix} | \begin{pmatrix} 1 & i \\ 2i & 3\sqrt{5} \end{pmatrix}) = \\
&= \overline{0} \cdot 1 + \overline{i} \cdot i + \overline{0} \cdot 2i + \overline{0} \cdot 3\sqrt{5} = \\
&= 0 \cdot 1 - i \cdot i + 0 \cdot 2i + 0 \cdot 3\sqrt{5} = -i^2 = 1 \\
(\mathbf{u_3}^*|\mathbf{v}) &= (\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{1+2i}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} | \begin{pmatrix} 1 & i \\ 2i & 3\sqrt{5} \end{pmatrix}) = \\
&= \overline{0} \cdot 1 + \overline{0} \cdot i + \overline{0} \cdot 2i + \overline{\tfrac{1+2i}{\sqrt{5}}} \cdot 3\sqrt{5} = \\
&= 0 \cdot 1 + 0 \cdot i + 0 \cdot 2i + \tfrac{1-2i}{\sqrt{5}} \cdot 3\sqrt{5} == 3(1-2i)
\end{aligned}$$

Quindi

$$
\begin{aligned}
P_W(\mathbf{v}) \quad &= \mathbf{u_1}^* + \mathbf{u_2}^* + 3(1-2i)\mathbf{u_3}^* = \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & i \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 3(1-2i)\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{1+2i}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} 1 & i \\ 0 & \frac{3(1-2i)(1+2i)}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & i \\ 0 & \frac{3\cdot 5}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & i \\ 0 & 3\sqrt{5} \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Svolgimento degli Esercizi per casa 10

$\boxed{\mathbf{1}}$ Sia $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & i & -2 & 9i \\ i & -1 & -2i & 0 \\ -1 & -i & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

(a) Si trovino una decomposizione $\mathbf{Q_0R_0}$-non-normalizzata ed una decomposizione $\mathbf{QR}$-normalizzata per $\mathbf{A}$.

(b) Si calcoli la matrice di proiezione sullo spazio delle colonne $C(\mathbf{A})$ di $\mathbf{A}$.

(a) $\boxed{I}$ Poniamo

$$\mathbf{v_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v_2} = \begin{pmatrix} i \\ -1 \\ -i \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v_3} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2i \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v_4} = \begin{pmatrix} 9i \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

e applichiamo l'algoritmo di Gram-Schimdt a $\{\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \mathbf{v_3}, \mathbf{v_4}\}$.

Otterremo 4 vettori, $\mathbf{u_1}, \mathbf{u_2}, \mathbf{u_3}, \mathbf{u_4}$. Per sapere se alcuni degli $\mathbf{u_i}$ saranno nulli, e in tal caso quali, troviamo innanzitutto una forma ridotta di Gauss $\mathbf{U}$ di $\mathbf{A}$: le eventuali colonne libere di $\mathbf{U}$ corrisponderanno agli $\mathbf{u_i}$ nulli.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & i & -2 & 9i \\ i & -1 & -2i & 0 \\ -1 & -i & 2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{31}(1)E_{21}(-i)} \begin{pmatrix} 1 & i & -2 & 9i \\ 0 & 0 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 9i \end{pmatrix} \to$$

$$\xrightarrow{E_{32}(-9i)E_2(1/9)} \begin{pmatrix} 1 & i & -2 & 9i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{U}$$

Poichè $\mathbf{U}$ ha come colonne libere la 2^a e la 3^a, applicando l'algoritmo di Gram-Schimdt a $\{\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \mathbf{v_3}, \mathbf{v_4}\}$ otterremo $\mathbf{u_2} = \mathbf{0} = \mathbf{u_3}$.

$$\boxed{\mathbf{u_1} = \mathbf{v_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ -1 \end{pmatrix}}$$

$$\mathbf{u_2} = \mathbf{v_2} - \alpha_{12}\mathbf{u_1}, \qquad \mathbf{u_1} \neq \mathbf{0} \quad \Longrightarrow \quad \alpha_{12} = \frac{(\mathbf{u_1}|\mathbf{v_2})}{(\mathbf{u_1}|\mathbf{u_1})}$$

$$(\mathbf{u_1}|\mathbf{v_2}) = \mathbf{u_1}^H\mathbf{v_2} = \begin{pmatrix}1 & -i & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}i\\-1\\-i\end{pmatrix} =$$

$$= i+i+i = 3i$$

$$(\mathbf{u_1}|\mathbf{u_1}) = \mathbf{u_1}^H\mathbf{u_1} = \begin{pmatrix}1 & -i & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\i\\-1\end{pmatrix} =$$

$$= 1+1+1 = 3$$

$$\implies \quad \boxed{\alpha_{12} = 3i/3 = i}$$

$$\mathbf{u_2} = \mathbf{v_2} - \alpha_{12}\mathbf{u_1} =$$

$$= \mathbf{v_2} - i\mathbf{u_1} =$$

$$= \begin{pmatrix}i\\-1\\-i\end{pmatrix} - i\begin{pmatrix}1\\i\\-1\end{pmatrix} = \boxed{\mathbf{0} = \mathbf{u_2}}$$

$$\mathbf{u_3} = \mathbf{v_3} - \alpha_{13}\mathbf{u_1} - \alpha_{23}\mathbf{u_2},$$

$$\mathbf{u_1} \neq \mathbf{0} \quad \implies \quad \alpha_{13} = \frac{(\mathbf{u_1}|\mathbf{v_3})}{(\mathbf{u_1}|\mathbf{u_1})}$$

$$(\mathbf{u_1}|\mathbf{v_3}) = \mathbf{u_1}^H\mathbf{v_3} = \begin{pmatrix}1 & -i & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2\\-2i\\2\end{pmatrix} =$$

$$= -2-2-2 = -6$$

$$\implies \quad \boxed{\alpha_{13} = -6/3 = -2}$$

$$\mathbf{u_2} = \mathbf{0} \quad \implies \quad \boxed{\alpha_{23} = 0}$$

$$\mathbf{u_3} = \mathbf{v_3} - \alpha_{13}\mathbf{u_1} - \alpha_{23}\mathbf{u_2} =$$

$$= \mathbf{v_3} + 2\mathbf{u_1} =$$

$$= \begin{pmatrix}-2\\-2i\\2\end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix}1\\i\\-1\end{pmatrix} = \boxed{\mathbf{0} = \mathbf{u_3}}$$

$$\mathbf{u_4} = \mathbf{v_4} - \alpha_{14}\mathbf{u_1} - \alpha_{24}\mathbf{u_2} - \alpha_{34}\mathbf{u_3},$$

$$\mathbf{u_1} \neq \mathbf{0} \quad \implies \quad \alpha_{14} = \frac{(\mathbf{u_1}|\mathbf{v_4})}{(\mathbf{u_1}|\mathbf{u_1})}$$

$$(\mathbf{u_1}|\mathbf{v_4}) = \mathbf{u_1}^H\mathbf{v_4} = \begin{pmatrix}1 & -i & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}9i\\0\\0\end{pmatrix} = 9i$$

$$\implies \quad \boxed{\alpha_{14} = 9i/3 = 3i}$$

$$\mathbf{u_2} = \mathbf{0} \quad \implies \quad \boxed{\alpha_{24} = 0}$$

$$\mathbf{u_3} = \mathbf{0} \quad \implies \quad \boxed{\alpha_{34} = 0}$$

$$\mathbf{u_4} = \mathbf{v_4} - 3i\mathbf{u_1} = \begin{pmatrix} 9i \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - 3i \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ -1 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 6i \\ 3 \\ 3i \end{pmatrix} = \mathbf{u_4}}$$

$\boxed{II}$ Poniamo

$$\mathbf{Q_0} = \begin{pmatrix} \mathbf{u_1} & \mathbf{u_2} & \mathbf{u_3} & \mathbf{u_4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 6i \\ i & 0 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 0 & 3i \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{R_0} = \begin{pmatrix} 1 & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \alpha_{14} \\ 0 & 1 & \alpha_{23} & \alpha_{24} \\ 0 & 0 & 1 & \alpha_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & i & -2 & 3i \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$\mathbf{A} = \mathbf{Q_0 R_0}$ è una decomposizione $\mathbf{Q_0 R_0}$-non-normalizzata per $\mathbf{A}$.

$\boxed{III}$ Sia $\mathbf{Q_1}$ la matrice che si ottiene dalla matrice $\mathbf{Q_0}$, ottenuta al punto (II), togliendo tutte le (eventuali) colonne nulle di $\mathbf{Q_0}$. In questo caso $\mathbf{Q_0}$ ha due colonne nulle, la 2^a e la 3^a, quindi

$$\mathbf{Q_1} = \begin{pmatrix} \mathbf{u_1} & \mathbf{u_4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 6i \\ i & 3 \\ -1 & 3i \end{pmatrix}.$$

Sia $\mathbf{R_1}$ la matrice che si ottiene dalla matrice $\mathbf{R_0}$, ottenuta al punto (II), togliendo le righe di $\mathbf{R_0}$ che corrispondono alle colonne che sono state tolte da $\mathbf{Q_0}$ per ottenere $\mathbf{Q_1}$. In questo caso, poichè per ottenere $\mathbf{Q_1}$ sono state tolte da $\mathbf{Q_0}$ la 2^a e la 3^a colonna, allora per ottenere $\mathbf{R_1}$ si toglie da $\mathbf{R_0}$ la 2^a e la 3^a riga. Dunque

$$\mathbf{R_1} = \begin{pmatrix} 1 & i & -2 & 3i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$\boxed{IV}$ Costruiamo la matrice diagonale $\mathbf{D}$ che ha sulla diagonale la norma euclidea delle colonne di $\mathbf{Q_1}$ (ossia delle colonne non nulle di $\mathbf{Q_0}$), e calcoliamo $\mathbf{D}^{-1}$.

Poichè

$$\begin{aligned} ||\mathbf{u_1}||_2 &= \sqrt{(\mathbf{u_1}|\mathbf{u_1})} = \sqrt{3}, \\ ||\mathbf{u_4}||_2 &= \sqrt{(\mathbf{u_4}|\mathbf{u_4})} = \sqrt{\mathbf{u_4}^H \mathbf{u_4}} = \sqrt{\begin{pmatrix} -6i & 3 & -3i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6i \\ 3 \\ 3i \end{pmatrix}} = \\ &= \sqrt{36+9+9} = \sqrt{54}, \end{aligned}$$

allora

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} ||\mathbf{u_1}||_2 & 0 \\ 0 & ||\mathbf{u_4}||_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 0 \\ 0 & \sqrt{54} \end{pmatrix}.$$

Quindi

$$\mathbf{D}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{54}} \end{pmatrix}.$$

$\boxed{V}$ Poniamo

$$\mathbf{Q} = \mathbf{Q_1}\mathbf{D}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 6i \\ i & 3 \\ -1 & 3i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{54}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{6}{\sqrt{54}}\, i \\ \frac{1}{\sqrt{3}}\, i & \frac{3}{\sqrt{54}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{3}{\sqrt{54}}\, i \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{R} = \mathbf{D}\mathbf{R_1} = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 0 \\ 0 & \sqrt{54} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & i & -2 & 3i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & \sqrt{3}\, i & -2\sqrt{3} & 3\sqrt{3}\, i \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{54} \end{pmatrix}.$$

Allora **A**=**QR** è una decomposizione **QR**-normalizzata di **A**.

(b) La matrice di proiezione sullo spazio delle colonne $C(\mathbf{A})$ di **A** è

$$\mathbf{P} \ = \mathbf{Q}\mathbf{Q}^H = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{6}{\sqrt{54}}i \\ \frac{1}{\sqrt{3}}i & \frac{3}{\sqrt{54}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{3}{\sqrt{54}}i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}}i & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{6}{\sqrt{54}}i & \frac{3}{\sqrt{54}} & -\frac{3}{\sqrt{54}}i \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{3} + \frac{36}{54} & -\frac{1}{3}i + \frac{18}{54}i & -\frac{1}{3} + \frac{18}{54} \\ \frac{1}{3}i - \frac{18}{54}i & \frac{1}{3} + \frac{9}{54} & -\frac{1}{3}i - \frac{9}{54}i \\ -\frac{1}{3} + \frac{18}{54} & \frac{1}{3}i + \frac{9}{54}i & \frac{1}{3} + \frac{9}{54} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -i \\ 0 & i & 1 \end{pmatrix}.$$

$\boxed{\mathbf{2}}$ Siano $\mathbf{0} \neq \mathbf{v} \in \mathbb{R}^m$, $\alpha \in \mathbb{R}$ ed $\mathbf{A}(\alpha) = \begin{pmatrix} \mathbf{v} & \alpha\mathbf{v} \end{pmatrix}$. Si trovino:

(a) una decomposizione $\mathbf{Q_0}\mathbf{R_0}$-non-normalizzata per $\mathbf{A}(\alpha)$;

(b) una decomposizione **QR**-normalizzata per $\mathbf{A}(\alpha)$;

(c) la matrice di proiezione sullo spazio delle colonne $C(\mathbf{A}(\alpha))$ di $\mathbf{A}(\alpha)$.

(a) $\boxed{I}$ Poniamo $\mathbf{v_1} = \mathbf{v}$ e $\mathbf{v_2} = \alpha\mathbf{v}$ e applichiamo l'algoritmo di Gram-Schimdt a $\{\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}\}$.

$\mathbf{u_1} = \mathbf{v_1} = \mathbf{v}$

$\mathbf{u_2} = \mathbf{v_2} - \alpha_{12}\mathbf{u_1},$

$\mathbf{u_1} \neq \mathbf{0} \quad \Longrightarrow \quad \alpha_{12} = \frac{(\mathbf{u_1}|\mathbf{v_2})}{(\mathbf{u_1}|\mathbf{u_1})} = \frac{(\mathbf{v}|\alpha\mathbf{v})}{(\mathbf{v}|\mathbf{v})} = \alpha\frac{(\mathbf{v}|\mathbf{v})}{(\mathbf{v}|\mathbf{v})} = \alpha$

$\mathbf{u_2} = \mathbf{v_2} - \alpha_{12}\mathbf{u_1} = \alpha\mathbf{v} - \alpha\mathbf{v} = \mathbf{0}$

$\boxed{II}$ Poniamo $\mathbf{Q_0} = \begin{pmatrix}\mathbf{u_1} & \mathbf{u_2}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\mathbf{v} & \mathbf{0}\end{pmatrix}$ ed $\mathbf{R_0} = \begin{pmatrix}1 & \alpha_{12}\\ 0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & \alpha\\ 0 & 1\end{pmatrix}.$

$\mathbf{A} = \mathbf{Q_0}\mathbf{R_0} = \begin{pmatrix}\mathbf{v} & \mathbf{0}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & \alpha\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ è una decomposizione $\mathbf{Q_0}\mathbf{R_0}$-non-normalizzata per $\mathbf{A}$.

(b) $\boxed{III}$ Sia $\mathbf{Q_1}$ la matrice che si ottiene dalla matrice $\mathbf{Q_0}$, ottenuta al punto (II), togliendo tutte le (eventuali) colonne nulle di $\mathbf{Q_0}$. In questo caso $\mathbf{Q_0}$ ha un'unica colonna nulla, la 2^a, quindi $\mathbf{Q_1} = \mathbf{v}$. Sia $\mathbf{R_1}$ la matrice che si ottiene dalla matrice $\mathbf{R_0}$, ottenuta al punto (II), togliendo le righe di $\mathbf{R_0}$ che corrispondono alle colonne che sono state tolte da $\mathbf{Q_0}$ per ottenere $\mathbf{Q_1}$. In questo caso, poichè per ottenere $\mathbf{Q_1}$ è stata tolta da $\mathbf{Q_0}$ la 2^a colonna, allora per ottenere $\mathbf{R_1}$ si toglie da $\mathbf{R_0}$ la 2^a riga. Dunque $\mathbf{R_1} = \begin{pmatrix}1 & \alpha\end{pmatrix}$. $\mathbf{Q}$ si ottiene da $\mathbf{Q_1}$ normalizzando $\mathbf{v}$, per cui $\mathbf{Q} = \frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|_2}$ ed $\mathbf{R} = \|\mathbf{v}\|_2\mathbf{R_1} = \begin{pmatrix}\|\mathbf{v}\|_2 & \alpha\|\mathbf{v}\|_2\end{pmatrix}$.

$\mathbf{A} = \mathbf{QR} = \frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|_2} \cdot \begin{pmatrix}\|\mathbf{v}\|_2 & \alpha\|\mathbf{v}\|_2\end{pmatrix}$ è una decomposizione $\mathbf{QR}$-normalizzata per $\mathbf{A}$.

(c) La matrice di proiezione sullo spazio delle colonne $C(\mathbf{A}(\alpha))$ di $\mathbf{A}(\alpha)$ è

$$\mathbf{P} = \mathbf{Q}\mathbf{Q}^H = \frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|_2} \cdot \left(\frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|_2}\right)^H = \frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|_2} \cdot \frac{\mathbf{v}^H}{\overline{\|\mathbf{v}\|_2}} = \frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|_2} \cdot \frac{\mathbf{v}^H}{\|\mathbf{v}\|_2} = \frac{\mathbf{v}\mathbf{v}^H}{\|\mathbf{v}\|_2^2} = \frac{\mathbf{v}\mathbf{v}^H}{\mathbf{v}^H\mathbf{v}}.$$

$\boxed{\mathbf{3}}$ Si trovi l'equazione della retta che meglio approssima i cinque punti di $\mathbb{R}^2$:

$$P_1(-2,-1), \quad P_2(-1,-1), \quad P_3(0,0), \quad P_4(1,2), \quad P_5(2,1).$$

Cerchiamo l'equazione della retta che approssima a minimi quadrati i cinque punti. Siano

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix}1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^n\\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^n\\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots\\ 1 & x_N & x_N^2 & \dots & x_N^n\end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{y} = \begin{pmatrix}y_1\\ y_2\\ \vdots\\ y_N\end{pmatrix}$$

dove

$N = 5$	è il numero dei punti P_i da approssimare,
$n = 1$	è il grado del polinomio con cui si vuol fare l'approssimazione (rendendo minima la somma dei quadrati degli errori)
(x_i, y_i)	sono le coordinate del punto P_i, per $i = 1, \dots, N$.

Nel nostro caso

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{y} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Dopo aver calcolato

$$\mathbf{A}^H = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

calcoliamo

$$\mathbf{B} = \mathbf{A}^H \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 10 \end{pmatrix} \text{ e}$$

$$\mathbf{b} = \mathbf{A}^H \mathbf{y} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

Poichè $\mathbf{B}$ è non singolare, il sistema

$$\mathbf{Bz} = \mathbf{b} \left(\text{ nell'incognita } \mathbf{z} = \begin{pmatrix} z_0 \\ z_1 \end{pmatrix} \right)$$

(ossia il sistema delle equazioni normali $\mathbf{A}^H \mathbf{A} \mathbf{z} = \mathbf{A}^H \mathbf{y}$ associato al sistema $\mathbf{Az} = \mathbf{y}$),

ha un'unica soluzione. Facendo una E.G. sulla matrice aumentata del sistema otteniamo:

$$\left(\mathbf{B} \mid \mathbf{b} \right) = \left(\begin{array}{cc|c} 5 & 0 & 1 \\ 0 & 10 & 7 \end{array} \right) \xrightarrow{E_2(\frac{1}{10}) E_1(\frac{1}{5})} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \frac{1}{5} \\ 0 & 1 & \frac{7}{10} \end{array} \right) = \left(\mathbf{U} \mid \mathbf{d} \right)$$

Il sistema $\mathbf{Bz}$=$\mathbf{b}$ è equivalente al sistema $\mathbf{Uz}$=$\mathbf{d}$, che ha come unica soluzione

$$\mathbf{z_0} = \begin{pmatrix} z_0 \\ z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} \\ \frac{7}{10} \end{pmatrix}$$

e la retta che approssima ai minimi quadrati i cinque punti ha equazione:

$$\begin{aligned} y &= z_0 + z_1 x = \\ &= \tfrac{1}{5} + \tfrac{7}{10} x. \end{aligned}$$

$\boxed{\mathbf{4}}$ Si trovi l'equazione della parabola che meglio approssima i quattro punti di $\mathbb{R}^2$:

$$P_1(-2,1), \quad P_2(-1,1), \quad P_3(0,0), \quad P_4(1,1).$$

Cerchiamo l'equazione della parabola che approssima a minimi quadrati i quattro punti. Siano

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 1 & x_N & x_N^2 & \dots & x_N^n \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_N \end{pmatrix}$$

dove

$N = 4$	è il numero dei punti P_i da approssimare,
$n = 2$	è il grado del polinomio con cui si vuol fare l'approssimazione (rendendo minima la somma dei quadrati degli errori)
(x_i, y_i)	sono le coordinate del punto P_i, per $i = 1, \dots, N$.

Nel nostro caso

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{y} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Dopo aver calcolato

$$\mathbf{A}^H = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

calcoliamo

$$\mathbf{B} = \mathbf{A}^H\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 6 \\ -2 & 6 & -8 \\ 6 & -8 & 18 \end{pmatrix} \text{ e}$$

$$\mathbf{b} = \mathbf{A}^H\mathbf{y} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

Poichè

$$\left.\begin{array}{c} \mathbf{gli\ x_i\ sono\ tutti\ distinti,\ per\ i = 1, \ldots, 4} \\ \\ N = 4 \geq 3 = 2 + 1 = n + 1, \end{array}\right\} \implies \mathrm{rk}(\mathbf{A}) = n + 1 = 3$$

allora

$$\mathrm{rk}(\mathbf{A}^H) = \mathrm{rk}(\mathbf{A}) = \mathrm{rk}(\mathbf{B}) = n + 1 = 3,$$

per cui $\mathbf{B}$ è non singolare. Quindi il sistema

$$\mathbf{Bz} = \mathbf{b} \;\Big(\text{ nell'incognita } \mathbf{z} = \begin{pmatrix} z_0 \\ z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \;\Big)$$

(ossia il sistema delle equazioni normali $\mathbf{A}^H\mathbf{Az} = \mathbf{A}^H\mathbf{y}$
associato al sistema $\mathbf{Az} = \mathbf{y}$),

ha un'unica soluzione. Facendo una E.G. sulla matrice aumentata del sistema otteniamo:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{B} & | & \mathbf{b} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 6 & | & 3 \\ -2 & 6 & -8 & | & -2 \\ 6 & -8 & 18 & | & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{12}} \begin{pmatrix} -2 & 6 & -8 & | & -2 \\ 4 & -2 & 6 & | & 3 \\ 6 & -8 & 18 & | & 6 \end{pmatrix} \to$$

$$\xrightarrow{E_{31}(-6)E_{21}(-4)E_1(-\frac{1}{2})} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 & | & 1 \\ 0 & 10 & -10 & | & -1 \\ 0 & 10 & -6 & | & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{32}(-10)E_2(\frac{1}{10})}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 & | & 1 \\ 0 & 1 & -1 & | & -\frac{1}{10} \\ 0 & 0 & 4 & | & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_3(\frac{1}{4})} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 & | & 1 \\ 0 & 1 & -1 & | & -\frac{1}{10} \\ 0 & 0 & 1 & | & \frac{1}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{U} & | & \mathbf{d} \end{pmatrix}$$

Il sistema $\mathbf{Bz}$=$\mathbf{b}$ è equivalente al sistema $\mathbf{Uz}$=$\mathbf{d}$, che è una forma compatta per

$$\begin{cases} z_0 - 3z_1 + 4z_2 = 1 \\ \qquad z_1 - z_2 = -\frac{1}{10} \\ \qquad\qquad z_2 = \frac{1}{4} \end{cases}$$

Con la sostituzione all'indietro otteniamo

$$\begin{cases} z_2 &= & \frac{1}{4} & & & & \\ z_1 &= & z_2 - \frac{1}{10} &= & \frac{1}{4} - \frac{1}{10} &= & \frac{3}{20} \\ z_0 &= & 3z_1 - 4z_2 + 1 &= & 3 \cdot \left(\frac{3}{20}\right) - 4 \cdot \left(\frac{1}{4}\right) + 1 &= & \frac{9}{20} \end{cases}$$

Dunque l'unica soluzione del sistema delle equazioni normali è

$$\mathbf{z_0} = \begin{pmatrix} z_0 \\ z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{9}{20} \\ \frac{3}{20} \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix} = \frac{1}{20} \cdot \begin{pmatrix} 9 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

e la parabola che approssima ai minimi quadrati i quattro punti ha equazione:

$$\begin{aligned} y &= z_0 + z_1 x + z_2 x^2 = \\ &= \tfrac{1}{20} \cdot \left(9 + 3x + 5x^2\right). \end{aligned}$$

$\boxed{\mathbf{5}}$ Si calcoli il determinante delle seguenti matrici:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2-i & 1 & 0 \\ 2 & 1+i & 3 \\ i & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} i & 1 & 1+i \\ -1 & 1 & 2 \\ i & i & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1+i \end{pmatrix}.$$

Conviene sviluppare Det($\mathbf{A}$) rispetto alla riga o alla colonna che contengono piú zeri. In questo caso conviene svilupparlo ripetto alla 1^a riga oppure alla 3^a colonna. Facciamolo in entrambi i modi, per esercizio.

Rispetto alla 1^a riga:

$$\begin{aligned} \mathrm{Det}(\mathbf{A}) &= (2-i)(-1)^{1+1}\mathrm{Det}\begin{pmatrix} 1+i & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + (-1)^{1+2}\mathrm{Det}\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ i & 1 \end{pmatrix} = \\ &= (2-i)(1+i-3) - (2-3i) = (2-i)(-2+i) - 2 + 3i = \\ &= -4 + 2i + 2i - i^2 - 2 + 3i = -5 + 7i \end{aligned}$$

Rispetto alla 3^a colonna:

$$\begin{aligned}\mathrm{Det}(\mathbf{A}) &= 3(-1)^{2+3}\mathrm{Det}\begin{pmatrix}2-i & 1\\ i & 1\end{pmatrix} + (-1)^{3+3}\mathrm{Det}\begin{pmatrix}2-i & 1\\ 2 & 1+i\end{pmatrix} =\\ &= -3(2-i-i) + [(2-i)(1+i)-2] =\\ &= -3(2-2i) + 2 - i + 2i - i^2 - 2 =\\ &= -6+6i+2-i+2i+1-2 = -5+7i\end{aligned}$$

Sviluppiamo $\mathrm{Det}(\mathbf{B})$, ad esempio rispetto alla 1^a colonna:

$$\mathrm{Det}\begin{pmatrix}i & 1 & 1+i\\ -1 & 1 & 2\\ i & i & 1\end{pmatrix} = i(-1)^{1+1}\mathrm{Det}\begin{pmatrix}1 & 2\\ i & 1\end{pmatrix} +$$

$$+(-1)(-1)^{2+1}\mathrm{Det}\begin{pmatrix}1 & 1+i\\ i & 1\end{pmatrix} + i(-1)^{3+1}\mathrm{Det}\begin{pmatrix}1 & 1+i\\ 1 & 2\end{pmatrix} =$$

$$= i(1-2i) + [1 - i(1+i)] + i[2-(1+i)] =$$

$$= i - 2i^2 + 1 - i - i^2 + 2i - i - i^2 =$$

$$= i + 2 + 1 - i + 1 + 2i - i + 1 =$$

$$= 5 + i$$

Infine sviluppiamo $\mathrm{Det}(\mathbf{C})$ ad esempio rispetto alla 3^a riga:

$$\mathrm{Det}\mathbf{C} = \mathrm{Det}\begin{pmatrix}0 & 1 & 1 & 1\\ 2 & 1 & 2 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 0 & 1+i\end{pmatrix} = (-1)^{3+1}\mathrm{Det}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 1\\ 1 & 0 & 1+i\end{pmatrix} +$$

$$+(-1)^{3+2}\mathrm{Det}\begin{pmatrix}0 & 1 & 1\\ 2 & 2 & 1\\ 1 & 0 & 1+i\end{pmatrix} + (-1)^{3+3}\mathrm{Det}\begin{pmatrix}0 & 1 & 1\\ 2 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1+i\end{pmatrix}$$

Sviluppiamo il primo addendo rispetto alla 2^a colonna, mentre il secondo ed il terzo addendo rispetto alla 1^a riga.

$$\text{Det}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 1\\ 1 & 0 & 1+i\end{pmatrix} = (-1)^{1+2}\text{Det}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1+i\end{pmatrix} + 2(-1)^{2+2}\text{Det}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1+i\end{pmatrix} =$$

$$= -(1+i-1) + 2(1+i-1) = -i + 2i = i$$

$$\text{Det}\begin{pmatrix}0 & 1 & 1\\ 2 & 2 & 1\\ 1 & 0 & 1+i\end{pmatrix} = (-1)^{1+2}\text{Det}\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 1+i\end{pmatrix} + (-1)^{1+3}\text{Det}\begin{pmatrix}2 & 2\\ 1 & 0\end{pmatrix} =$$

$$= -[2(1+i)-1] + (0-2) = -(2+2i-1) - 2 = -1-2i-2 = -3-2i$$

$$\text{Det}\begin{pmatrix}0 & 1 & 1\\ 2 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1+i\end{pmatrix} = (-1)^{1+2}\text{Det}\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 1+i\end{pmatrix} + (-1)^{1+3}\text{Det}\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix} =$$

$$= -[2(1+i)-1] + 2 - 1 = -(2+2i-1) + 1 = -1-2i+1 = -2i$$

Quindi

$$\text{Det}(\mathbf{C}) = i - (-3-2i) - 2i = i + 3 + 2i - 2i = 3 + i.$$

Svolgimento degli Esercizi per casa 11

$\boxed{1}$ Sia $\quad \mathbf{A}(\alpha) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \alpha & 0 & 1 \\ 4 & \alpha-1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 3\alpha-1 & 1 \end{pmatrix}, \quad$ dove $\alpha \in \mathbb{R}$.

Si dica per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ si ha che $\mathbf{A}(\alpha)$ è non singolare (sugg.: si calcoli il determinante $\mathrm{Det}(\mathbf{A}(\alpha))$ di $\mathbf{A}(\alpha)$).

$$\begin{aligned}
(1) \qquad \mathrm{Det}(\mathbf{A}(\alpha)) &= \mathrm{Det} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \alpha & 0 & 1 \\ 4 & \alpha-1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 3\alpha-1 & 1 \end{pmatrix} = \\
&= (-1)^{3+4}(3\alpha-1)\mathrm{Det} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & \alpha & 1 \\ 4 & \alpha-1 & 1 \end{pmatrix} = \\
&= -(3\alpha-1)\Big[(-1)^{1+1}2\mathrm{Det} \begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ \alpha-1 & 1 \end{pmatrix} + (-1)^{1+3}\mathrm{Det} \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ 4 & \alpha-1 \end{pmatrix} \Big] = \\
&= -(3\alpha-1)\Big[2(\alpha-\alpha+1) - 4\alpha\Big] = -2(3\alpha-1)(1-2\alpha)
\end{aligned}$$

Poichè $\mathbf{A}(\alpha)$ è non singolare se e solo se $\mathrm{Det}(\mathbf{A}(\alpha)) \neq 0$, dal punto (1) otteniamo che

$$\mathbf{A}(\alpha) \text{ è non singolare} \quad \Longleftrightarrow \quad -2(3\alpha-1)(1-2\alpha) \neq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \alpha \neq \frac{1}{3}, \frac{1}{2}.$$

$\boxed{2}$ Sia $\mathbf{A}$ una matrice quadrata non singolare e sia $\mathbf{P}$ la matrice di proiezione sullo spazio delle colonne $C(\mathbf{A})$ di $\mathbf{A}$. Si provi che $\mathrm{Det}(\mathbf{P}) \in \{0,1\}$ **(N.B.: Da A non singolare segue che P=I, per cui, in particolare, Det(P) = 1)**

Se $\mathbf{A} = \mathbf{QR}$ è una decomposizione $\mathbf{QR}$-normalizzata di $\mathbf{A}$, allora $\mathbf{P} = \mathbf{QQ}^H$. Essendo $\mathbf{P} = \mathbf{P}^2$, si ha $\mathrm{Det}(\mathbf{P}) = \mathrm{Det}(\mathbf{P}^2) = (\mathrm{Det}(\mathbf{P}))^2$, per cui $\mathrm{Det}(\mathbf{P}) \in \{0,1\}$.

$$\boxed{\textbf{N.B. A non singolare} \quad \Longrightarrow \quad \mathbf{P} = \mathbf{I} \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{Det}(\mathbf{P}) = 1.}$$

Infatti da $\mathbf{A}$ non singolare segue

$$\mathrm{rk}(\mathbf{A}) = \text{ ordine di } \mathbf{A}$$

ed essendo

$$\mathrm{rk}(\mathbf{A}) = \mathrm{rk}(\mathbf{Q}) \quad \text{e} \quad (\text{ ordine di } \mathbf{A}) = (\text{ ordine di } \mathbf{Q})$$

allora

$$\mathrm{rk}(\mathbf{Q}) = \text{ ordine di } \mathbf{Q},$$

per cui anche $\mathbf{Q}$ è non singolare. Quindi, dal momento che $\mathbf{Q}^H$ è un'inversa sinistra di $\mathbf{Q}$ (perchè $\mathbf{Q}$ a colonne ortonormali equivale a $\mathbf{Q}^H\mathbf{Q} = \mathbf{I}$), si conclude che $\mathbf{Q}^H$ è anche inversa destra (è l'inversa) di $\mathbf{Q}$. Dunque

$$\mathbf{P} = \mathbf{Q}\mathbf{Q}^H = \mathbf{I},$$

e, in particolare,

$$\mathrm{Det}(\mathbf{P}) = 1.$$

$\boxed{\mathbf{3}}$ Sia $\mathbf{A}$ una matrice quadrata di ordine n tale che

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^T = \mathbf{I}_n \quad \text{e} \quad \det(\mathbf{A}) \neq 1.$$

Si calcoli il determinante $\det(7 \cdot \mathbf{A})$ della matrice $7 \cdot \mathbf{A}$.

Da $\mathbf{I}_n = \mathbf{A}\mathbf{A}^T$ segue $\det(\mathbf{I}_n)$ =$\det(\mathbf{A}\mathbf{A}^T)$, da cui, essendo

$$\det(\mathbf{I}_n) = 1^n = 1 \quad \text{e}$$

$$\det(\mathbf{A}\mathbf{A}^T) = \det(\mathbf{A})\det(\mathbf{A}^T) = \det(\mathbf{A})\det(\mathbf{A}) = \det(\mathbf{A})^2,$$

si ricava che $\det(\mathbf{A}) \in \{-1, 1\}$. Quindi, poichè $\det(\mathbf{A}) \neq 1$ per ipotesi, si ottiene:

$$\det(\mathbf{A}) = -1.$$

Ne segue che

$$\det(7 \cdot \mathbf{A}) = \det((7 \cdot \mathbf{I}_n) \cdot \mathbf{A}) = \det(7 \cdot \mathbf{I}_n)\det(\mathbf{A}) = 7^n \cdot \det(\mathbf{A}) = 7^n \cdot (-1) = -7^n.$$

$\boxed{\mathbf{4}}$ Sia $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & -2i \\ 2i & 0 \end{pmatrix}$.

Si calcolino:
– gli autovalori di $\mathbf{A}$,
– le loro molteplicità algebriche e
– le loro molteplicità geometriche.

Il polinomio caratteristico di $\mathbf{A}$ è:

$$\begin{aligned} p_{\mathbf{A}}(x) \quad &= \mathrm{Det}(\mathbf{A} - x\mathbf{I}_2) = \mathrm{Det}\begin{pmatrix} -x & -2i \\ 2i & -x \end{pmatrix} = (-x)^2 - (-2i) \cdot 2i = x^2 + 4i^2 = \\ &= x^2 - 4. \end{aligned}$$

Gli autovalori di $\mathbf{A}$ sono gli zeri del polinomio carattaristico $p_{\mathbf{A}}(x)$ di $\mathbf{A}$, ossia le soluzioni dell'equazione $p_{\mathbf{A}}(x) = 0$. Dal momento che le soluzioni dell'equazione

$$x^2 - 4 = 0$$

sono -2 e 2, gli autovalori di $\mathbf{A}$ sono:

$$\lambda_1 = -2 \quad \text{e} \quad \lambda_2 = 2.$$

Siano m_1 ed m_2 le molteplicità algebriche e d_1 e d_2 le molteplicità geometriche di λ_1 e λ_2 rispettivamente. Da

$$p_{\mathbf{A}}(x) = x^2 - 4 = (x + 2)(x - 2) = (x - \lambda_1)^{m_1} (x - \lambda_2)^{m_2}$$

otteniamo:

$$m_1 = 1 \quad \text{e} \quad m_2 = 1.$$

Infine, da $1 \leq d_i \leq m_i = 1$ per $i = 1, 2$, otteniamo:

$$d_1 = 1 \quad \text{e} \quad d_2 = 1.$$

$\boxed{\mathbf{5}}$ Sia $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2i \\ 0 & -8 & 0 \\ 2i & 0 & -6 \end{pmatrix}$.

Si calcolino:
– gli autovalori di $\mathbf{A}$,
– le loro molteplicità algebriche e
– le loro molteplicità geometriche.

Il polinomio caratteristico di $\mathbf{A}$ è:

$$
\begin{aligned}
p_{\mathbf{A}}(x) &= \mathrm{Det}(\mathbf{A} - x\mathbf{I}_3) = \mathrm{Det}\begin{pmatrix} -2-x & 0 & 2i \\ 0 & -8-x & 0 \\ 2i & 0 & -6-x \end{pmatrix} = \\
&= (-1)^{2+2}(-8-x)\mathrm{Det}\begin{pmatrix} -2-x & 2i \\ 2i & -6-x \end{pmatrix} = \\
&= (-8-x)[(-2-x)(-6-x) - 4i^2] = \\
&= (-8-x)(12 + 6x + 2x + x^2 + 4) = \\
&= (-8-x)(x^2 + 8x + 16) = \\
&= (-8-x)(x+4)^2.
\end{aligned}
$$

Gli autovalori di $\mathbf{A}$ sono gli zeri del polinomio caratteristico $p_{\mathbf{A}}(x)$ di $\mathbf{A}$, ossia le soluzioni dell'equazione $p_{\mathbf{A}}(x) = 0$. Dal momento che le soluzioni dell'equazione

$$(-8-x)(x+4)^2 = 0$$

sono -8 e -4, gli autovalori di $\mathbf{A}$ sono:

$$\lambda_1 = -8 \quad \text{e} \quad \lambda_2 = -4.$$

Siano m_1 ed m_2 le molteplicità algebriche e d_1 e d_2 le molteplicità geometriche di λ_1 e λ_2 rispettivamente. Da

$$p_{\mathbf{A}}(x) = (-8-x)(-4-x)^2 = (\lambda_1 - x)^{m_1}(\lambda_2 - x)^{m_2}$$

otteniamo:

$$m_1 = 1 \quad \text{e} \quad m_2 = 2.$$

Infine, da $1 \leq d_i \leq m_i = 1$ per $i = 1, 2$, otteniamo:

$$d_1 = 1 \quad \text{e} \quad 1 \leq d_2 \leq 2.$$

$$
\begin{aligned}
d_2 &= \dim(E_{\mathbf{A}}(\lambda_2)) = \dim(E_{\mathbf{A}}(-4)) = \dim(N(\mathbf{A} + 4\mathbf{I}_3)) = \\
&= [\text{numero delle colonne di } (\mathbf{A} + 4\mathbf{I}_3)] - [\mathrm{rk}(\mathbf{A} + 4\mathbf{I}_3)] = \\
&= 3 - [\mathrm{rk}(\mathbf{A} + 4\mathbf{I}_3)].
\end{aligned}
$$

Da una E.G. su $\quad \mathbf{A}+4\mathbf{I}_3 \quad$ otteniamo:

$$\mathbf{A}+4\mathbf{I}_3 \quad = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2i \\ 0 & -4 & 0 \\ 2i & 0 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{31}(-2i)E_1(\frac{1}{2})} \begin{pmatrix} 1 & 0 & i \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\xrightarrow{E_2(-\frac{1}{4})} \begin{pmatrix} 1 & 0 & i \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

per cui

$$\mathrm{rk}(\mathbf{A}+4\mathbf{I}_3) = \mathrm{rk}\Big(\begin{pmatrix} 1 & 0 & i \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Big) = 2$$

e quindi

$$d_2 = 3-2 = 1.$$

Svolgimento degli Esercizi per casa 12

$\boxed{1}$ Si trovino basi degli autospazi delle matrici considerate negli esercizi 4 e 5 degli "Esercizi per casa 11".

Le matrici considerate negli esercizi 4 e 5 degli "Esercizi per casa 11"sono:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & -2i \\ 2i & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2i \\ 0 & -8 & 0 \\ 2i & 0 & -6 \end{pmatrix},$$

ed abbiamo calcolato:

matrice	**autovalori**	**molteplicità geometriche**
A	$\lambda_1 = -2$ e $\lambda_2 = 2$	$d_1 = d_2 = 1$
B	$\lambda_1 = -8$ e $\lambda_2 = -4$	$d_1 = d_2 = 1$

In particolare, ciascuno degli autospazi $E_{\mathbf{A}}(\lambda_i)$ ed $E_{\mathbf{B}}(\lambda_i)$ per $i = 1, 2$ ha dimensione 1, per cui una sua base ha un unico elemento.

$$E_{\mathbf{A}}(\lambda_1) = E_{\mathbf{A}}(-2) = N(\mathbf{A} + 2\mathbf{I}_2) = N\Big(\begin{pmatrix} 2 & -2i \\ 2i & 2 \end{pmatrix} \Big)$$

Da una E.G. su $\quad \mathbf{A} + 2\mathbf{I}_2 \quad : \begin{pmatrix} 2 & -2i \\ 2i & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{21}(-2i)E_1(\frac{1}{2})} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, segue

$$E_{\mathbf{A}}(-2) = N\Big(\begin{pmatrix} 2 & -2i \\ 2i & 2 \end{pmatrix} \Big) = N\Big(\begin{pmatrix} 1 & -i \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Big) = \Big\{ \begin{pmatrix} ih \\ h \end{pmatrix} \Big| h \in \mathbb{C} \Big\},$$

e quindi $\Big\{ \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} \Big\}$ è una base di $E_{\mathbf{A}}(\lambda_1) = E_{\mathbf{A}}(-2)$.

$$E_{\mathbf{A}}(\lambda_2) = E_{\mathbf{A}}(2) = N(\mathbf{A} - 2\mathbf{I}_2) = N\Big(\begin{pmatrix} -2 & -2i \\ 2i & -2 \end{pmatrix} \Big)$$

Da una E.G. su $\quad \mathbf{A} - 2\mathbf{I}_2 \quad : \begin{pmatrix} -2 & -2i \\ 2i & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{21}(-2i)E_1(-\frac{1}{2})} \begin{pmatrix} 1 & i \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, segue

$$E_{\mathbf{A}}(2) = N\Big(\begin{pmatrix} -2 & -2i \\ 2i & -2 \end{pmatrix} \Big) = N\Big(\begin{pmatrix} 1 & i \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Big) = \Big\{ \begin{pmatrix} -ih \\ h \end{pmatrix} \Big| h \in \mathbb{C} \Big\},$$

e quindi $\Big\{ \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix} \Big\}$ è una base di $E_{\mathbf{A}}(\lambda_2) = E_{\mathbf{A}}(2)$.

$$E_{\mathbf{B}}(\lambda_1) = E_{\mathbf{B}}(-8) = N(\mathbf{B} + 8\mathbf{I}_3) = N\Big(\begin{pmatrix} 6 & 0 & 2i \\ 0 & 0 & 0 \\ 2i & 0 & 2 \end{pmatrix} \Big)$$

Da una E.G. su $\quad \mathbf{B} + 8\mathbf{I}_3 \quad$:

$$\begin{pmatrix} 6 & 0 & 2i \\ 0 & 0 & 0 \\ 2i & 0 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{31}(-2i)E_1(\frac{1}{6})} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{3}i \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{8}{3} \end{pmatrix} \xrightarrow{E_2(\frac{3}{8})E_{23}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{3}i \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

segue che

$$E_{\mathbf{B}}(-8) = N\Big(\begin{pmatrix} 6 & 0 & 2i \\ 0 & 0 & 0 \\ 2i & 0 & 2 \end{pmatrix} \Big) = N\Big(\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{3}i \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Big) = \Big\{ \begin{pmatrix} 0 \\ h \\ 0 \end{pmatrix} \Big| h \in \mathbb{C} \Big\},$$

e quindi $\Big\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Big\}$ è una base di $E_{\mathbf{B}}(\lambda_1) = E_{\mathbf{B}}(-8)$.

$$E_{\mathbf{B}}(\lambda_2) = E_{\mathbf{B}}(-4) = N(\mathbf{B} + 4\mathbf{I}_3) = N\Big(\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2i \\ 0 & -4 & 0 \\ 2i & 0 & -2 \end{pmatrix} \Big)$$

Da una E.G. su $\quad \mathbf{B} + 4\mathbf{I}_3 \quad$:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2i \\ 0 & -4 & 0 \\ 2i & 0 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{31}(-2i)E_1(\frac{1}{2})} \begin{pmatrix} 1 & 0 & i \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_2(-\frac{1}{4})} \begin{pmatrix} 1 & 0 & i \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

segue che

$$E_{\mathbf{B}}(-4) = N\Big(\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2i \\ 0 & -4 & 0 \\ 2i & 0 & -2 \end{pmatrix} \Big) = N\Big(\begin{pmatrix} 1 & 0 & i \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Big) = \Big\{ \begin{pmatrix} -ih \\ 0 \\ h \end{pmatrix} \Big| h \in \mathbb{C} \Big\},$$

e quindi $\Big\{ \begin{pmatrix} -i \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Big\}$ è una base di $E_{\mathbf{B}}(\lambda_2) = E_{\mathbf{B}}(-4)$.

$\boxed{\mathbf{2}}$ Sia $\quad \mathbf{A}(\alpha) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 1 & \alpha & -1 \\ 7 & 0 & -5 \end{pmatrix}, \quad$ dove $\alpha \in \mathbb{C}$.

(a) Per ogni $\alpha \in \mathbb{C}$ si calcolino gli autovalori di $\mathbf{A}(\alpha)$ e le loro molteplicità algebriche e geometriche.

(b) Siano $\mathbf{A} = \mathbf{A}(2)$ e $\mathbf{B} = \mathbf{A}(-8)$ le matrici che si ottengono ponendo $\alpha = 2$ ed $\alpha = -8$ rispettivamente. Si trovino basi degli autospazi di $\mathbf{A}$ e di $\mathbf{B}$.

(a) Gli autovalori di $\mathbf{A}(\alpha)$ sono gli zeri del suo polinomio caratteristico. Il polinomio caratteristico di $\mathbf{A}(\alpha)$ è:

$$\begin{aligned} p_{\mathbf{A}(\alpha)}(x) \quad &= \mathrm{Det}(\mathbf{A}(\alpha) - x\mathbf{I}_3) = \\ &= \mathrm{Det}\begin{pmatrix} -1-x & 0 & 3 \\ 1 & \alpha - x & -1 \\ 7 & 0 & -5-x \end{pmatrix} = \\ &= (-1)^{2+2}(\alpha - x)\mathrm{Det}\begin{pmatrix} -1-x & 3 \\ 7 & -5-x \end{pmatrix} = \\ &= (\alpha - x)[(-1-x)(-5-x) - 21] = \\ &= (\alpha - x)(5 + 5x + x + x^2 - 21) = \\ &= (\alpha - x)(x^2 + 6x - 16). \end{aligned}$$

L'equazione $\alpha - x = 0$ ha un'unica souzione: α.

L'equazione $x^2 + 6x - 16 = 0$ ha due soluzioni distinte: -8 e 2.

Quindi otteniamo:

Per finire di rispondere alla domanda (a) resta da calcolare:

$$\begin{aligned} d_2 &= \dim(E_{\mathbf{A}(2)}(\lambda_2)) = \dim(E_{\mathbf{A}}(2)) \quad \text{e} \\ d_1 &= \dim(E_{\mathbf{A}(-8)}(\lambda_1)) = \dim(E_{\mathbf{B}}(-8)). \end{aligned}$$

dove

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}(2) \quad \text{e} \quad \mathbf{B} = \mathbf{A}(-8).$$

matrice	autovalori	molteplicità algebriche	molteplicità geometriche
$\mathbf{A}(\alpha)$ $\alpha \notin \{-8, 2\}$	$\lambda_1 = -8$ $\lambda_2 = 2$ $\lambda_3 = \alpha$	$m_1 = 1$ $m_2 = 1$ $m_3 = 1$	$d_1 = 1$ $d_2 = 1$ $d_3 = 1$
$\mathbf{A} = \mathbf{A}(2)$	$\lambda_1 = -8$ $\lambda_2 = 2$	$m_1 = 1$ $m_2 = 2$	$d_1 = 1$ $1 \leq d_2 \leq 2$
$\mathbf{B} = \mathbf{A}(-8)$	$\lambda_1 = -8$ $\lambda_2 = 2$	$m_1 = 2$ $m_2 = 1$	$1 \leq d_1 \leq 2$ $d_2 = 1$

$$E_{\mathbf{A}}(2) = N(\mathbf{A} - 2\mathbf{I}_3) = N\left(\begin{pmatrix} -3 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 7 & 0 & -7 \end{pmatrix}\right)$$

Da una E.G. su $\quad \mathbf{A} - 2\mathbf{I}_3 \quad$:

$$\begin{pmatrix} -3 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 7 & 0 & -7 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{31}(-7)E_{21}(-1)E_1(-\frac{1}{3})} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

segue che

$$\begin{aligned} d_2 &= \dim(E_{\mathbf{A}}(2)) = \dim(N(\mathbf{A} - 2\mathbf{I}_3) = \\ &= [(\text{numero di colonne di } \mathbf{A} - 2\mathbf{I}_3) - \text{rk}(\mathbf{A} - 2\mathbf{I}_3)] = 3 - 1 = 2. \end{aligned}$$

$$E_{\mathbf{B}}(-8) = N(\mathbf{B} + 8\mathbf{I}_3) = N\left(\begin{pmatrix} 7 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 7 & 0 & 3 \end{pmatrix}\right)$$

Da una E.G. su $\quad \mathbf{B} + 8\mathbf{I}_3 \quad$:

$$\begin{pmatrix} 7 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 7 & 0 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{31}(-7)E_{21}(-7)E_{12}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{32}(-10)E_2(\frac{1}{10})} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

segue che

$$\begin{aligned} d_1 &= \dim(E_{\mathbf{B}}(-8)) = \dim(N(\mathbf{B}+8\mathbf{I}_3) = \\ &= [(\text{numero di colonne di } \mathbf{B}+8\mathbf{I}_3) - \text{rk}(\mathbf{B}+8\mathbf{I}_3)] = 3-2 = 1. \end{aligned}$$

(b) Al Punto (a) abbiamo visto che la matrice $\mathbf{A} = \mathbf{A}(2)$ ha autovalori $\lambda_1 = -8$ e $\lambda_2 = 2$ con molteplicità geometriche $d_1 = 1$ e $d_2 = 2$.

$$E_{\mathbf{A}}(-8) = N(\mathbf{A}+8\mathbf{I}_3) = N\Big(\begin{pmatrix} 7 & 0 & 3 \\ 1 & 10 & -1 \\ 7 & 0 & 3 \end{pmatrix} \Big)$$

Da una E.G. su $\quad \mathbf{A}+8\mathbf{I}_3 \quad$:

$$\begin{pmatrix} 7 & 0 & 3 \\ 1 & 10 & -1 \\ 7 & 0 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{31}(-7)E_{21}(-1)E_1(\frac{1}{7})} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{3}{7} \\ 0 & 10 & -\frac{10}{7} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_2(\frac{1}{10})} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{3}{7} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{7} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

segue che

$$E_{\mathbf{A}}(-8) = N\Big(\begin{pmatrix} 7 & 0 & 3 \\ 1 & 10 & -1 \\ 7 & 0 & 3 \end{pmatrix} \Big) = N\Big(\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{3}{7} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{7} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Big) = \Big\{ \begin{pmatrix} -\frac{3}{7}h \\ \frac{1}{7}h \\ h \end{pmatrix} \Big| h \in \mathbb{C} \Big\},$$

e $\Big\{ \begin{pmatrix} -\frac{3}{7} \\ \frac{1}{7} \\ 1 \end{pmatrix} \Big\}$ è una base di $E_{\mathbf{A}}(-8)$.

Al punto (a) abbiamo visto che

$$E_{\mathbf{A}}(2) = N\Big(\begin{pmatrix} -3 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 7 & 0 & -7 \end{pmatrix} \Big) = N\Big(\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Big),$$

per cui

$$E_{\mathbf{A}}(2) = \Big\{ \begin{pmatrix} k \\ h \\ k \end{pmatrix} \Big| h, k \in \mathbb{C} \Big\} \quad \text{e} \quad \Big\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Big\} \quad \text{è una base di } E_{\mathbf{A}}(2).$$

Al punto (a) abbiamo anche visto che la matrice $\mathbf{B} = \mathbf{A}(-8)$ ha autovalori $\lambda_1 = -8$ e $\lambda_2 = 2$ con molteplicità geometriche $d_1 = 1$ e $d_2 = 1$.

$$E_{\mathbf{B}}(2) = N(\mathbf{B} - 2\mathbf{I}_3) = N\Big(\begin{pmatrix} -3 & 0 & 3 \\ 1 & -10 & -1 \\ 7 & 0 & -7 \end{pmatrix} \Big)$$

Da una E.G. su $\quad \mathbf{B} - 2\mathbf{I}_3 \quad :$

$$\begin{pmatrix} -3 & 0 & 3 \\ 1 & -10 & -1 \\ 7 & 0 & -7 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{31}(-7)E_{21}(-1)E_1(-\frac{1}{3})} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_2(-\frac{1}{10})} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

segue che

$$E_{\mathbf{B}}(2) = N\Big(\begin{pmatrix} -3 & 0 & 3 \\ 1 & -10 & -1 \\ 7 & 0 & -7 \end{pmatrix} \Big) = N\Big(\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Big) = \Big\{ \begin{pmatrix} h \\ 0 \\ h \end{pmatrix} \Big| h \in \mathbb{C} \Big\},$$

e $\Big\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Big\}$ è una base di $E_{\mathbf{B}}(2)$.

Al punto (a) abbiamo visto che

$$E_{\mathbf{B}}(-8) = N\Big(\begin{pmatrix} 7 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 7 & 0 & 3 \end{pmatrix} \Big) = N\Big(\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Big),$$

per cui

$$E_{\mathbf{B}}(-8) = \Big\{ \begin{pmatrix} 0 \\ h \\ 0 \end{pmatrix} \Big| h \in \mathbb{C} \Big\} \quad \text{e} \quad \Big\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Big\} \quad \text{è una base di } E_{\mathbf{B}}(-8).$$

$\boxed{\mathbf{3}}$ Sia $\mathbf{A}(\delta)$ una matrice quadrata con polinomio caratteristico uguale a

$$p_{\mathbf{A}(\delta)} = -(x^5 - 2x^3 + x + \delta - 3).$$

(a) Per quali $\delta \in \mathbb{C}$ si ha che $\mathbf{A}(\delta)$ è non singolare ?

(b) Sia $\mathbf{A} = \mathbf{A}(3)$ la matrice che si ottiene ponendo $\delta = 3$. Per quali $\alpha \in \mathbb{C}$ si ha che $\mathbf{A} - \alpha\mathbf{I}$ è non singolare ?

(a) $\mathbf{A}(\delta)$ è non singolare $\iff$ $\mathrm{Det}(\mathbf{A}(\delta)) \neq 0$.

Poichè

$$\mathrm{Det}(\mathbf{A}(\delta)) = \Big(\text{ termine noto di } p_{\mathbf{A}(\delta)}(x)\Big) = -(\delta - 3)$$

allora

$$\mathbf{A}(\delta) \text{ è non singolare } \iff \quad -\delta + 3 \neq 0 \quad \iff \delta \neq 3.$$

(b) Si ha:

$$\mathbf{A} - \alpha\mathbf{I} \text{ è non singolare } \quad \iff N(\mathbf{A} - \alpha\mathbf{I}) = \{\mathbf{0}\} \iff E_{\mathbf{A}}(\alpha) = \{\mathbf{0}\} \iff$$

$$\iff \alpha \notin \mathrm{Spec}(\mathbf{A}).$$

Calcoliamo gli autovalori di $\mathbf{A}$. Il polinomio caratteristico di $\mathbf{A}$ è:

$$\begin{aligned} p_{\mathbf{A}}(x) &= -(x^5 - 2x^3 + x) = -x(x^4 - 2x^2 + 1) = \\ &= -x(x^2 - 1)^2 = -x(x-1)^2(x+1)^2. \end{aligned}$$

I suoi zeri sono (gli autovalori di $\mathbf{A}$):

$$\lambda_1 = 0 \text{ (con } m_1 = 1),$$

$$\lambda_2 = 1 \text{ (con } m_2 = 2),$$

$$\lambda_3 = -1 \text{ (con } m_3 = 2).$$

Dunque Spec($\mathbf{A}$)$= \{-1, 0, 1\}$ e

$$\mathbf{A} - \alpha\mathbf{I} \text{ è non singolare } \iff \alpha \notin \{-1, 0, 1\}.$$

$\boxed{\mathbf{4}}$ Sia $\quad \mathbf{A}(\alpha) = \begin{pmatrix} \frac{\alpha}{2} + 1 & \frac{\alpha}{2} & 0 \\ \frac{\alpha}{2} & \frac{\alpha}{2} + 1 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}, \quad$ dove $\alpha \in \mathbb{C}$.

(a) Per quali $\alpha \in \mathbb{C}$ si ha che 3 è un autovalore di $\mathbf{A}(\alpha)$?

(b) Per quali $\alpha \in \mathbb{C}$ la matrice $\mathbf{A}(\alpha)$ ha due autovaori uguali ? In questi casi dire se $\mathbf{A}(\alpha)$ è o non è diagonalizzabile.

(a) Il polinomio caratteristico di $\mathbf{A}(\alpha)$ è:

$$\begin{aligned}
p_{\mathbf{A}(\alpha)}(x) &= \mathrm{Det}(\mathbf{A}(\alpha) - x\mathbf{I}_3) = \\
&= \mathrm{Det}\begin{pmatrix} \frac{\alpha}{2}+1-x & \frac{\alpha}{2} & 0 \\ \frac{\alpha}{2} & \frac{\alpha}{2}+1-x & 0 \\ 0 & 0 & \alpha-x \end{pmatrix} = \\
&= (-1)^{3+3}(\alpha-x)\mathrm{Det}\begin{pmatrix} \frac{\alpha}{2}+1-x & \frac{\alpha}{2} \\ \frac{\alpha}{2} & \frac{\alpha}{2}+1-x \end{pmatrix} = \\
&= (\alpha-x)\left[\left(\frac{\alpha}{2}+1-x\right)^2 - \left(\frac{\alpha}{2}\right)^2\right] = \\
&= (\alpha-x)\left(\frac{\alpha}{2}+1-x-\frac{\alpha}{2}\right)\left(\frac{\alpha}{2}+1-x+\frac{\alpha}{2}\right) = \\
&= (\alpha-x)(1-x)(\alpha+1-x).
\end{aligned}$$

Gi autovalori di $\mathbf{A}(\alpha)$ sono gli zeri del polinomio caratteristico $p_{\mathbf{A}(\alpha)}(x)$, ossia le soluzioni dell'equazione:

$$(\alpha-x)(1-x)(\alpha+1-x) = 0,$$

cioè 1, α ed $\alpha+1$.

Dunque

$$\begin{aligned}
3 \text{ è autovalore di } \mathbf{A}(\alpha) \quad &\Longleftrightarrow \quad \alpha = 3 \quad \text{oppure} \quad \alpha+1=3 \\
&\Longleftrightarrow \quad \alpha = 3 \quad \text{oppure} \quad \alpha = 2.
\end{aligned}$$

(b) Dai conti svolti in (a), otteniamo che

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}(\alpha) \quad \text{ha due autovalori uguali} \quad &\Longleftrightarrow \quad \alpha = 1 \quad \text{oppure} \quad \alpha+1=1 \\
&\Longleftrightarrow \quad \alpha = 1 \quad \text{oppure} \quad \alpha = 0.
\end{aligned}$$

Studiamo i casi $\alpha = 1$ ed $\alpha = 0$. Abbiamo:

Dal momento che una matrice è diagonalizzabile se e solo se ciascun suo autovalore ha le due molteplicità, algebrica e geometrica, uguali tra loro, abbiamo:

matrice	**autovalori**	**molteplicità algebriche**	**molteplicità geometriche**
$\mathbf{A}(1)$	$\lambda_1 = 1$ $\lambda_2 = 2$	$m_1 = 2$ $m_2 = 1$	$1 \leq d_1 \leq 2$ $d_2 = 1$
$\mathbf{A}(0)$	$\lambda_1 = 0$ $\lambda_2 = 1$	$m_1 = 1$ $m_2 = 2$	$d_1 = 1$ $1 \leq d_2 \leq 2$

$$\begin{aligned}
&\mathbf{A}(1) \quad \text{è diagonalizzabile} \quad \iff \quad d_1 = \dim(E_{\mathbf{A}(1)}(1)) = m_1 = 2\\
&\mathbf{A}(0) \quad \text{è diagonalizzabile} \quad \iff \quad d_2 = \dim(E_{\mathbf{A}(0)}(1)) = m_2 = 2.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
d_1 &= \dim(E_{\mathbf{A}(1)}(1)) = \dim(N(\mathbf{A}(1) - \mathbf{I}_3) =\\
&= [\text{numero di colonne di } \mathbf{A}(1) - \mathbf{I}_3] - \text{rk}(\mathbf{A}(1) - \mathbf{I}_3) =\\
&= 3 - \text{rk}(\mathbf{A}(1) - \mathbf{I}_3)\\
d_2 &= \dim(E_{\mathbf{A}(0)}(1)) = \dim(N(\mathbf{A}(0) - \mathbf{I}_3) =\\
&= [\text{numero di colonne di } \mathbf{A}(0) - \mathbf{I}_3] - \text{rk}(\mathbf{A}(0) - \mathbf{I}_3) =\\
&= 3 - \text{rk}(\mathbf{A}(0) - \mathbf{I}_3)
\end{aligned}$$

Da una E.G. su $\mathbf{A}(1) - \mathbf{I}_3$:

$$\mathbf{A}(1) - \mathbf{I}_3 = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \mathbf{I}_3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{21}(-\frac{1}{2})E_1(2)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

per cui $\text{rk}(\mathbf{A}(1) - \mathbf{I}_3) = 1$, e quindi

$$d_1 = \dim(E_{\mathbf{A}(1)}(1)) = 3 - 1 = 2.$$

In conclusione, $\mathbf{A}(1)$ è diagonalizzabile.

Da una E.G. su $\mathbf{A}(0) - \mathbf{I}_3$:

$$\mathbf{A}(0)-\mathbf{I}_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}-\mathbf{I}_3=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&-1\end{pmatrix}\xrightarrow{E_1(-1)E_{13}}\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},$$

per cui $\text{rk}(\mathbf{A}(0)-\mathbf{I}_3)=1$, e quindi

$$d_2=\dim(E_{\mathbf{A}(0)}(1))=3-1=2.$$

In conclusione, anche $\mathbf{A}(0)$ è diagonalizzabile.

$\boxed{\mathbf{5}}$ Si dica se le matrici considerate negli esercizi 4 e 5 degli "Esercizi per casa 11"sono diagonalizzabili oppure no.

Le matrici considerate negli esercizi 4 e 5 degli "Esercizi per casa 11"sono:

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}0&-2i\\2i&0\end{pmatrix}\quad \text{e}\quad \mathbf{B}=\begin{pmatrix}-2&0&2i\\0&-8&0\\2i&0&-6\end{pmatrix},$$

ed abbiamo calcolato:

matrice	**autovalori**	**molteplicità algebriche**	**molteplicità geometriche**
$\mathbf{A}$	$\lambda_1=-2$ $\lambda_2=2$	$m_1=1$ $m_2=1$	$d_1=1$ $d_2=1$
$\mathbf{B}$	$\lambda_1=-8$ $\lambda_2=-4$	$m_1=1$ $m_2=2$	$d_1=1$ $d_2=1$

Ogni autovalore di $\mathbf{A}$ ha molteplicità algebrica e geometrica uguali ($\mathbf{A}$ ha autovalori distinti, per cui ogni suo autovalore ha molteplicità algebrica uguale ad 1 e conseguentemente, essendo

$$1\leq\ \text{molteplicità geometrica}\ \leq\ \text{molteplicità algebrica}\ (=1)$$

anche molteplicità geometrica uguale ad 1).

Dunque $\mathbf{A}$ è diagonalizzabile.

La matrice $\mathbf{B}$ ha un autovalore (l'autovalore $\lambda_2 = -4$) in cui la molteplicità algebrica ($m_2 = 2$) è diversa dalla molteplicità geometrica ($d_2 = 1$).

Dunque $\mathbf{B}$ non è diagonalizzabile.

$\boxed{\mathbf{6}}$ Sia $\mathbf{A}(\alpha)$ la matrice considerata nell'esercizio 2. Per quegli $\alpha \in \mathbb{C}$ per cui $\mathbf{A}(\alpha)$ è diagonalizzabile, si trovi una diagonalizzazione di $\mathbf{A}(\alpha)$.

La matrice considerata nell'esercizio 2 è $\mathbf{A}(\alpha) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 1 & \alpha & -1 \\ 7 & 0 & -5 \end{pmatrix}$, dove $\alpha \in \mathbb{C}$, ed abbiamo calcolato:

matrice	**autovalori**	**molteplicità algebriche**	**molteplicità geometriche**
$\mathbf{A}(\alpha)$ $\alpha \notin \{-8, 2\}$	$\lambda_1 = -8$ $\lambda_2 = 2$ $\lambda_3 = \alpha$	$m_1 = 1$ $m_2 = 1$ $m_3 = 1$	$d_1 = 1$ $d_2 = 1$ $d_3 = 1$
$\mathbf{A} = \mathbf{A}(2)$	$\lambda_1 = -8$ $\lambda_2 = 2$	$m_1 = 1$ $m_2 = 2$	$d_1 = 1$ $d_2 = 2$
$\mathbf{B} = \mathbf{A}(-8)$	$\lambda_1 = -8$ $\lambda_2 = 2$	$m_1 = 2$ $m_2 = 1$	$d_1 = 1$ $d_2 = 1$

Solo per $\alpha = -8$ la matrice $\mathbf{A}(\alpha) = \mathbf{A}(-8) = \mathbf{B}$ ha un autovalore ($\lambda_1 = -8$) con molteplicità algebrica ($m_1 = 2$) diversa dalla molteplicità geometrica ($d_1 = 1$). Quindi

$$\mathbf{A}(\alpha) \text{ è diagonalizzabile} \quad \Longleftrightarrow \quad \alpha \neq -8.$$

Troviamo una diagonalizzazione per $\mathbf{A}(\alpha)$ per ogni $\alpha \neq -8$.

$\boxed{\text{caso} \quad \alpha \notin \{\mathbf{-8}, \mathbf{2}\} :}$

$$E_{\mathbf{A}(\alpha)}(\lambda_1) = E_{\mathbf{A}(\alpha)}(-8) = N(\mathbf{A}(\alpha) + 8\mathbf{I}_3) = N\Big(\begin{pmatrix} 7 & 0 & 3 \\ 1 & \alpha+8 & -1 \\ 7 & 0 & 3 \end{pmatrix} \Big)$$

Da una E.G. su $\quad \mathbf{A}(\alpha) + 8\mathbf{I}_3 \quad$:

$$\begin{pmatrix} 7 & 0 & 3 \\ 1 & \alpha+8 & -1 \\ 7 & 0 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{31}(-7)E_{21}(-1)E_1(\frac{1}{7})} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{3}{7} \\ 0 & \alpha+8 & -\frac{10}{7} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to$$

$$\xrightarrow{\alpha\neq -8:\quad E_2(\frac{1}{\alpha+8})} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{3}{7} \\ 0 & 1 & -\frac{10}{7(\alpha+8)} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

segue che

$$E_{\mathbf{A}(\alpha)}(-8) = N\Bigg(\begin{pmatrix} 7 & 0 & 3 \\ 1 & \alpha+8 & -1 \\ 7 & 0 & 3 \end{pmatrix} \Bigg) = N\Bigg(\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{3}{7} \\ 0 & 1 & -\frac{10}{7(\alpha+8)} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Bigg) =$$

$$= \Bigg\{ \begin{pmatrix} -\frac{3}{7}h \\ \frac{10}{7(\alpha+8)}h \\ h \end{pmatrix} \Bigg| h \in \mathbb{C} \Bigg\},$$

e quindi $\Bigg\{ \mathbf{v_1} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{7} \\ \frac{10}{7(\alpha+8)} \\ 1 \end{pmatrix} \Bigg\}$ è una base di $E_{\mathbf{A}(\alpha)}(\lambda_1) = E_{\mathbf{A}(\alpha)}(-8)$.

$$E_{\mathbf{A}(\alpha)}(\lambda_2) = E_{\mathbf{A}(\alpha)}(2) = N(\mathbf{A}(\alpha) - 2\mathbf{I}_3) = N\Bigg(\begin{pmatrix} -3 & 0 & 3 \\ 1 & \alpha-2 & -1 \\ 7 & 0 & -7 \end{pmatrix} \Bigg)$$

Da una E.G. su $\mathbf{A}(\alpha) - 2\mathbf{I}_3$:

$$\begin{pmatrix} -3 & 0 & 3 \\ 1 & \alpha-2 & -1 \\ 7 & 0 & -7 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{31}(-7)E_{21}(-1)E_1(-\frac{1}{3})} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & \alpha-2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to$$

$$\xrightarrow{\alpha\neq 2:\quad E_2(\frac{1}{\alpha-2})} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

segue che

$$E_{\mathbf{A}(\alpha)}(2) = N\Bigg(\begin{pmatrix} -3 & 0 & 3 \\ 1 & \alpha-2 & -1 \\ 7 & 0 & -7 \end{pmatrix} \Bigg) = N\Bigg(\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Bigg) = \Bigg\{ \begin{pmatrix} h \\ 0 \\ h \end{pmatrix} \Bigg| h \in \mathbb{C} \Bigg\},$$

e quindi $\Bigg\{ \mathbf{v_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Bigg\}$ è una base di $E_{\mathbf{A}(\alpha)}(\lambda_2) = E_{\mathbf{A}(\alpha)}(2)$.

$$E_{\mathbf{A}(\alpha)}(\lambda_3) = E_{\mathbf{A}(\alpha)}(\alpha) = N(\mathbf{A}(\alpha) - \alpha\mathbf{I}_3) = N\Big(\begin{pmatrix} -1-\alpha & 0 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 7 & 0 & -5-\alpha \end{pmatrix}\Big)$$

Da una E.G. su $\quad \mathbf{A}(\alpha) - \alpha\mathbf{I}_3 \quad$:

$$\begin{pmatrix} -1-\alpha & 0 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 7 & 0 & -5-\alpha \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{12}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1-\alpha & 0 & 3 \\ 7 & 0 & -5-\alpha \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{31}(-7)E_{21}(1+\alpha)}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2-\alpha \\ 0 & 0 & 2-\alpha \end{pmatrix} \xrightarrow{\alpha\neq 2: \quad E_{32}(-2+\alpha)E_2(\frac{1}{\alpha-2})} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

segue che

$$\begin{aligned} E_{\mathbf{A}(\alpha)}(\alpha) \quad &= N\Big(\begin{pmatrix} -1-\alpha & 0 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 7 & 0 & -5-\alpha \end{pmatrix}\Big) = N\Big(\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\Big) = \\ &= \Big\{ \begin{pmatrix} 0 \\ h \\ 0 \end{pmatrix} \Big| h \in \mathbb{C} \Big\}, \end{aligned}$$

e quindi $\Big\{\mathbf{v_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\Big\}$ è una base di $E_{\mathbf{A}(\alpha)}(\lambda_3) = E_{\mathbf{A}(\alpha)}(\alpha)$.

Dunque se $\alpha \notin \{-8, 2\}$, una diagonalizzazione di $\mathbf{A}(\alpha)$ è:

$$\mathbf{A}(\alpha) = \mathbf{S}(\alpha)\mathbf{D}(\alpha)\mathbf{S}(\alpha)^{-1} \quad \text{con}$$

$$\mathbf{D}(\alpha) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix} \quad \text{ed}$$

$$\mathbf{S}(\alpha) = \begin{pmatrix} \mathbf{v_1} & \mathbf{v_2} & \mathbf{v_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{7} & 1 & 0 \\ \frac{10}{7(\alpha+8)} & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$\boxed{\text{caso} \quad \alpha = \mathbf{2}:}$ Posto $\mathbf{A} = \mathbf{A}(2)$, nell'Esercizio 2 abbiamo visto che

$$\left\{\mathbf{v_1} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{7} \\ \frac{1}{7} \\ 1 \end{pmatrix}\right\} \text{è una base di } E_{\mathbf{A}}(\lambda_1) = E_{\mathbf{A}}(-8) \text{ e}$$

$$\left\{\mathbf{w_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \mathbf{w_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\} \text{è una base di } E_{\mathbf{A}}(\lambda_2) = E_{\mathbf{A}}(2).$$

Dunque se $\alpha = 2$, una diagonalizzazione di $\mathbf{A} = \mathbf{A}(2)$ è:

$$\mathbf{A} = \mathbf{S}\mathbf{D}\mathbf{S}^{-1} \quad \text{con}$$

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{ed}$$

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} \mathbf{v_1} & \mathbf{w_1} & \mathbf{w_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{7} & 1 & 0 \\ \frac{1}{7} & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

N.B.: Per ogni $\alpha \neq -8$, una diagonalizzazione di $\mathbf{A}(\alpha)$ è:

$$\mathbf{A}(\alpha) = \mathbf{S}(\alpha)\mathbf{D}(\alpha)\mathbf{S}(\alpha)^{-1} \quad \text{con}$$

$$\mathbf{D}(\alpha) = \begin{pmatrix} -8 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix} \quad \text{ed} \quad \mathbf{S}(\alpha) = \begin{pmatrix} -\frac{3}{7} & 1 & 0 \\ \frac{10}{7(\alpha+8)} & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Svolgimento degli Esercizi per casa 13

$\boxed{1}$ Sia $\quad \mathbf{A}(\alpha) = \begin{pmatrix} 0 & \alpha+2i \\ \alpha+2i & 0 \end{pmatrix}, \quad$ dove $\alpha \in \mathbb{C}$.

Per quali $\alpha \in \mathbb{C}$ si ha che di $\mathbf{A}(\alpha)$ è una matrice unitariamente triangolarizzabile in $M_2(\mathbb{R})$ (ossia è tale che esistano una matrice $\mathbf{T}$ triangolare reale ed una matrice $\mathbf{U}$ ortogonale reale per cui $\mathbf{A}(\alpha) = \mathbf{UTU}^T$) ?

Per il teorema di Schur, $\mathbf{A}(\alpha)$ è una matrice unitariamente triangolarizzabile in $M_2(\mathbb{R})$ se e solo se soddisfa le due seguenti condizioni:

- • $\mathbf{A}(\alpha) \in M_2(\mathbb{R})$,
- •• gli autovalori di $\mathbf{A}(\alpha)$ sono numeri reali.

• $\mathbf{A}(\alpha) \in M_2(\mathbb{R}) \quad \Longleftrightarrow \quad \alpha + 2i \in \mathbb{R} \quad \Longleftrightarrow \quad$ esiste $a \in \mathbb{R}$ tale che $\alpha = a - 2i$.

Supponiamo quindi $\alpha = a - 2i$, ossia che la matrice $\mathbf{A}(\alpha)$ sia uguale alla matrice $\mathbf{B}(a) = \begin{pmatrix} 0 & a \\ a & 0 \end{pmatrix}$ dipendente dal parametro reale a.
Imponiamo adesso che gli autovalori di $\mathbf{A}(\alpha) = \mathbf{B}(a)$ siano numeri reali.

Gli autovalori di $\mathbf{B}(a)$ sono gli zeri del polinomio

$$p_{\mathbf{B}(a)}(x) = \det(\mathbf{B}(a) - x\mathbf{I}_2) = \det\left(\begin{pmatrix} -x & a \\ a & -x \end{pmatrix} \right) = (-x)^2 - a^2 = x^2 - a^2,$$

ossia a e $-a$. Dal momento che $a \in \mathbb{R}$, anche $-a \in \mathbb{R}$, per cui concludiamo che

$$\mathbf{A}(\alpha) \text{ è triangolarizzabile in } M_2(\mathbb{R}) \quad \Longleftrightarrow \quad \text{esiste } a \in \mathbb{R} \text{ tale che } \alpha = a - 2i.$$

$\boxed{2}$ Sia $\quad \mathbf{A}(\alpha) = \begin{pmatrix} 2 & i \\ i & \alpha \end{pmatrix}, \quad$ dove $\alpha \in \mathbb{C}$.

(a) Per quali $\alpha \in \mathbb{C}$ si ha che di $\mathbf{A}(\alpha)$ è unitariamente diagonalizzabile ?
(b) Per quali $\alpha \in \mathbb{C}$ si ha che di $\mathbf{A}(\alpha)$ è diagonalizzabile ?
(c) Sia $\mathbf{A} = \mathbf{A}(2)$ la matrice che si ottiene ponendo $\alpha = 2$. Si trovi una diagonalizzazione unitaria $\mathbf{A} = \mathbf{UDU}^H$ per $\mathbf{A}$.
(d) Sia $\mathbf{A} = \mathbf{A}(2)$ la matrice che si ottiene ponendo $\alpha = 2$. Posto $z_1 = (2+i)^{300}$ e $z_2 = (2-i)^{300}$, si scriva $\mathbf{A}^{300}$ in funzione di z_1 e z_2.

$$(a)\ \mathbf{A}(\alpha) \text{ è unitariamente diagonalizzabile } \iff \mathbf{A}(\alpha) \text{ è normale } \iff$$

$$\iff \mathbf{A}(\alpha)\mathbf{A}(\alpha)^H = \mathbf{A}(\alpha)^H\mathbf{A}(\alpha).$$

Calcoliamo $\mathbf{A}(\alpha)^H$:

$$\mathbf{A}(\alpha)^H = \begin{pmatrix} \overline{2} & \overline{i} \\ \overline{i} & \overline{\alpha} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -i \\ -i & \overline{\alpha} \end{pmatrix}.$$

Calcoliamo ora $\mathbf{A}(\alpha)\mathbf{A}(\alpha)^H$ ed $\mathbf{A}(\alpha)^H\mathbf{A}(\alpha)$:

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}(\alpha)\mathbf{A}(\alpha)^H &= \begin{pmatrix} 2 & i \\ i & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -i \\ -i & \overline{\alpha} \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} 4+1 & -2i+i\overline{\alpha} \\ 2i-\alpha i & 1+\alpha\overline{\alpha} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -2i+i\overline{\alpha} \\ 2i-\alpha i & 1+|\alpha|^2 \end{pmatrix}, \\
\mathbf{A}(\alpha)^H\mathbf{A}(\alpha) &= \begin{pmatrix} 2 & -i \\ -i & \overline{\alpha} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & i \\ i & \alpha \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} 4+1 & 2i-i\alpha \\ -2i+\overline{\alpha}i & 1+\overline{\alpha}\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 2i-i\alpha \\ -2i+\overline{\alpha}i & 1+|\alpha|^2 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Imponendo l'uguaglianza $\mathbf{A}(\alpha)\mathbf{A}(\alpha)^H = \mathbf{A}(\alpha)^H\mathbf{A}(\alpha)$ otteniamo:

$$\mathbf{A}(\alpha)\mathbf{A}(\alpha)^H = \mathbf{A}(\alpha)^H\mathbf{A}(\alpha) \quad \iff \quad -2i+i\overline{\alpha} = 2i-i\alpha \quad \iff \quad \alpha+\overline{\alpha} = 4.$$

Scrivendo α in forma algebrica:

$$\alpha = a+ib \quad \text{con} \quad a,b \in \mathbb{R},$$

abbiamo che $\overline{\alpha} = a-ib$ per cui

$$\alpha+\overline{\alpha} = (a+ib)+(a-ib) = 2a = 4 \iff a=2 \iff \alpha = 2+ib \text{ con } b \in \mathbb{R}.$$

In conclusione,

$$\mathbf{A}(\alpha) \text{ è unitariamente diagonalizzabile } \iff \alpha = 2+ib \text{ con } b \in \mathbb{R}.$$

(b) Poichè $\mathbf{A}(\alpha)$ **è una matrice** 2×2 **non scalare**, allora $\mathbf{A}(\alpha)$ è diagonalizzabile se e solo se ha i (due) autovalori distinti (perchè solo in tal caso ciascun suo autovalore ha molteplicità algebrica e geometrica uguali).

Il polinomio caratteristico di $\mathbf{A}(\alpha)$ è:

$$\begin{aligned} p_{\mathbf{A}(\alpha)}(x) &= \mathrm{Det}(\mathbf{A}(\alpha) - x\mathbf{I}_2) = \mathrm{Det}\begin{pmatrix} 2-x & i \\ i & \alpha - x \end{pmatrix} = \\ &= (2-x)(\alpha - x) - i^2 = \\ &= 2\alpha - \alpha x - 2x + x^2 + 1 = \\ &= x^2 - (\alpha+2)x + (2\alpha+1). \end{aligned}$$

Quindi gli autovalori di $\mathbf{A}(\alpha)$ sono:

$$\lambda_1 = \tfrac{\alpha+2+\sqrt{(\alpha+2)^2-4(2\alpha+1)}}{2} = \tfrac{\alpha+2+\sqrt{\alpha^2+4+4\alpha-8\alpha-4}}{2} = \tfrac{\alpha+2+\sqrt{\alpha^2-4\alpha}}{2} \quad \text{e}$$

$$\lambda_2 = \tfrac{\alpha+2-\sqrt{(\alpha+2)^2-4(2\alpha+1)}}{2} = \tfrac{\alpha+2-\sqrt{\alpha^2+4+4\alpha-8\alpha-4}}{2} = \tfrac{\alpha+2-\sqrt{\alpha^2-4\alpha}}{2}.$$

Quindi

$$\lambda_1 \neq \lambda_2 \iff \sqrt{\alpha^2 - 4\alpha} \neq 0 \iff \alpha^2 - 4\alpha \neq 0 \iff \alpha \notin \{0, 4\},$$

e concludiamo che

$$\mathbf{A}(\alpha) \quad \text{è diagonalizzabile} \quad \iff \quad \alpha \notin \{0, 4\},$$

(c) Sia $\mathbf{A} = \mathbf{A}(2) = \begin{pmatrix} 2 & i \\ i & 2 \end{pmatrix}$. Abbiamo visto in (a) che $\mathbf{A}$ è unitariamente diagonalizzabile (perchè $2 = 2 + ib$ con $b = 0 \in \mathbb{R}$). I suoi autovalori (calcolati in (b)) sono:

$$\lambda_1 = \tfrac{2+2+\sqrt{4-8}}{2} = \tfrac{4+\sqrt{-4}}{2} = \tfrac{4+2i}{2} = 2 + i \quad \text{e}$$

$$\lambda_2 = \tfrac{2+2-\sqrt{4-8}}{2} = \tfrac{4-\sqrt{-4}}{2} = \tfrac{4-2i}{2} = 2 - i.$$

con molteplicità algebriche e geometriche uguali a

$$m_1 = d_1 = m_2 = d_2 = 1.$$

Cerchiamo **basi ortonormali** degli autospazi di $\mathbf{A}$.

$$E_{\mathbf{A}}(\lambda_1) = E_{\mathbf{A}}(2+i) = N(\mathbf{A} - (2+i)\mathbf{I}_2).$$

Da una E.G. su $\quad \mathbf{A} - (2+i)\mathbf{I}_2 \quad :$

$$\mathbf{A} - (2+i)\mathbf{I}_2 = \begin{pmatrix} -i & i \\ i & -i \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{21}(-i)E_1(i)} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

segue che

$$E_{\mathbf{A}}(\lambda_1) = E_{\mathbf{A}}(2+i) = N\Big(\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Big) = \Big\{ \begin{pmatrix} h \\ h \end{pmatrix} \Big| h \in \mathbb{C} \Big\},$$

e quindi $\Big\{ \mathbf{v_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Big\}$ è una base di $E_{\mathbf{A}}(\lambda_1) = E_{\mathbf{A}}(2+i)$.

N.B.: Poichè ha un unico elemento, $\{\mathbf{v_1}\}$ è già una base ortogonale di $E_{\mathbf{A}}(2+i)$. Per ottenere una base ortonormale di $E_{\mathbf{A}}(2+i)$, "normalizziamo" $\mathbf{v_1}$.

$$\|\mathbf{v_1}\|_2 = \sqrt{\mathbf{v_1}^H \mathbf{v_1}} = \sqrt{\begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

per cui

$$\Big\{ \frac{\mathbf{v_1}}{\|\mathbf{v_1}\|_2} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \Big\}$$

è una **base ortonormale** di $E_{\mathbf{A}}(\lambda_1) = E_{\mathbf{A}}(2+i)$.

$$E_{\mathbf{A}}(\lambda_2) = E_{\mathbf{A}}(2-i) = N(\mathbf{A} - (2-i)\mathbf{I}_2).$$

Da una E.G. su $\quad \mathbf{A} - (2-i)\mathbf{I}_2 \quad :$

$$\mathbf{A} - (2-i)\mathbf{I}_2 = \begin{pmatrix} i & i \\ i & i \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{21}(-i)E_1(-i)} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

segue che

$$E_{\mathbf{A}}(\lambda_2) = E_{\mathbf{A}}(2-i) = N\Big(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Big) = \Big\{ \begin{pmatrix} -h \\ h \end{pmatrix} \Big| h \in \mathbb{C} \Big\},$$

e quindi $\Big\{ \mathbf{v_2} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \Big\}$ è una base di $E_{\mathbf{A}}(\lambda_2) = E_{\mathbf{A}}(2-i)$.

N.B.: Poichè ha un unico elemento, $\{\mathbf{v_2}\}$ è già una base ortogonale di $E_{\mathbf{A}}(2-i)$. Per ottenere una base ortonormale di $E_{\mathbf{A}}(2-i)$, "normalizziamo" $\mathbf{v_2}$.

$$\|\mathbf{v_2}\|_2 = \sqrt{\mathbf{v_2}^H\mathbf{v_2}} = \sqrt{\begin{pmatrix}-1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\ 1\end{pmatrix}} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

per cui

$$\left\{\frac{\mathbf{v_2}}{\|\mathbf{v_2}\|_2} = \begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}\right\}$$

è una **base ortonormale** di $E_{\mathbf{A}}(\lambda_2) = E_{\mathbf{A}}(2-i)$.

Dunque se $\alpha = 2$, una diagonalizzazione unitaria di $\mathbf{A} = \mathbf{A}(2)$ è:

$$\mathbf{A} = \mathbf{U}\mathbf{D}\mathbf{U}^H \quad \text{con}$$

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2+i & 0\\ 0 & 2-i\end{pmatrix} \quad \text{ed}$$

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix}\frac{\mathbf{v_1}}{\|\mathbf{v_1}\|_2} & \frac{\mathbf{v_2}}{\|\mathbf{v_2}\|_2}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}.$$

(d) Al punto (c) abbiamo visto che $\mathbf{A} = \mathbf{A}(2) = \begin{pmatrix}2 & i\\ i & 2\end{pmatrix}$ ha una diagonalizzazione unitaria

$$\mathbf{A} = \mathbf{U}\mathbf{D}\mathbf{U}^H \quad \text{con} \quad \mathbf{D} = \begin{pmatrix}2+i & 0\\ 0 & 2-i\end{pmatrix} \quad \text{ed} \quad \mathbf{U} = \begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}.$$

Allora

$$\mathbf{A}^{300} = (\mathbf{U}\mathbf{D}\mathbf{U}^H)^{300} = \mathbf{U}\mathbf{D}^{300}\mathbf{U}^H =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (2+i)^{300} & 0 \\ 0 & (2-i)^{300} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} =$$

$$= \tfrac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 & 0 \\ 0 & z_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \tfrac{1}{2} \begin{pmatrix} z_1 & -z_2 \\ z_1 & z_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \tfrac{1}{2} \begin{pmatrix} z_1 + z_2 & z_1 - z_2 \\ z_1 - z_2 & z_1 + z_2 \end{pmatrix}.$$

$\boxed{\mathbf{3}}$ Sia $\quad \mathbf{A}(\alpha) = \begin{pmatrix} -2 & 2i & 0 \\ 2i & 2+\alpha & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}, \quad$ dove $\alpha \in \mathbb{R}$.

(a) Per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ si ha che di $\mathbf{A}(\alpha)$ è unitariamente diagonalizzabile ?
(b) Per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ si ha che di $\mathbf{A}(\alpha)$ è diagonalizzabile ?
(c) Sia $\mathbf{A} = \mathbf{A}(-4)$ la matrice che si ottiene ponendo $\alpha = -4$. Si trovi una diagonalizzazione unitaria $\mathbf{A} = \mathbf{U}\mathbf{D}\mathbf{U}^H$ per $\mathbf{A}$.

(a) $\mathbf{A}(\alpha)$ è unitariamente diagonalizzabile $\iff$ $\mathbf{A}(\alpha)$ è normale $\iff$

$$\iff \mathbf{A}(\alpha)\mathbf{A}(\alpha)^H = \mathbf{A}(\alpha)^H\mathbf{A}(\alpha).$$

Calcoliamo $\mathbf{A}(\alpha)^H$, tenendo conto del fatto che da $\alpha \in \mathbb{R}$ segue $\overline{\alpha} = \alpha$:

$$\mathbf{A}(\alpha)^H = \begin{pmatrix} \overline{-2} & \overline{2i} & \overline{0} \\ \overline{2i} & \overline{2+\alpha} & \overline{0} \\ \overline{0} & \overline{0} & \overline{\alpha} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -2i & 0 \\ -2i & 2+\alpha & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}.$$

Calcoliamo ora $\mathbf{A}(\alpha)\mathbf{A}(\alpha)^H$ ed $\mathbf{A}(\alpha)^H\mathbf{A}(\alpha)$:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{A}(\alpha)\mathbf{A}(\alpha)^H &= \begin{pmatrix} -2 & 2i & 0 \\ 2i & 2+\alpha & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & -2i & 0 \\ -2i & 2+\alpha & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} 8 & 8i+2i\alpha & 0 \\ -8i-2i\alpha & 4+(2+\alpha)^2 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha^2 \end{pmatrix}, \\
\mathbf{A}(\alpha)^H\mathbf{A}(\alpha) &= \begin{pmatrix} -2 & -2i & 0 \\ -2i & 2+\alpha & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 2i & 0 \\ 2i & 2+\alpha & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} 8 & -8i-2i\alpha & 0 \\ 8i+2i\alpha & 4+(2+\alpha)^2 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha^2 \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

Imponendo l'uguaglianza $\mathbf{A}(\alpha)\mathbf{A}(\alpha)^H = \mathbf{A}(\alpha)^H\mathbf{A}(\alpha)$ otteniamo:

$$
\mathbf{A}(\alpha)\mathbf{A}(\alpha)^H = \mathbf{A}(\alpha)^H\mathbf{A}(\alpha) \quad \Longleftrightarrow \quad 8i+2i\alpha = -8i-2i\alpha \quad \Longleftrightarrow \quad \alpha = -4.
$$

(b) $\mathbf{A}(\alpha)$ è diagonalizzabile se e solo se ciascun suo autovalore ha le due molteplicità, algebrica e geometrica, uguali tra loro. Calcoliamo gli autovalori di $\mathbf{A}(\alpha)$ e le loro molteplicità.

Il polinomio caratteristico di $\mathbf{A}(\alpha)$ è:

$$
\begin{aligned}
p_{\mathbf{A}(\alpha)}(x) &= \mathrm{Det}(\mathbf{A}(\alpha) - x\mathbf{I}_3) = \mathrm{Det}\begin{pmatrix} -2-x & 2i & 0 \\ 2i & 2+\alpha-x & 0 \\ 3i & 0 & \alpha-x \end{pmatrix} = \\
&= (-1)^{3+3}(\alpha-x)\mathrm{Det}\begin{pmatrix} -2-x & 2i \\ 2i & 2+\alpha-x \end{pmatrix} = \\
&= (\alpha-x)[(-2-x)(2+\alpha-x) - 4i^2] = \\
&= (\alpha-x)(-4-2x-2\alpha-\alpha x+2x+x^2+4) = \\
&= (\alpha-x)(x^2-\alpha x-2\alpha).
\end{aligned}
$$

Qundi gli autovalori di $\mathbf{A}(\alpha)$ sono:

$$\lambda_1 = \alpha, \quad \lambda_2 = \frac{\alpha + \sqrt{\alpha^2 + 8\alpha}}{2} \quad \text{e} \quad \lambda_3 = \frac{\alpha - \sqrt{\alpha^2 + 8\alpha}}{2}.$$

Dal momento che

$$\lambda_1 = \lambda_2 \iff 2\alpha = \alpha + \sqrt{\alpha^2 + 8\alpha} \iff \alpha = \sqrt{\alpha^2 + 8\alpha} \iff \alpha = 0,$$

$$\lambda_1 = \lambda_3 \iff 2\alpha = \alpha - \sqrt{\alpha^2 + 8\alpha} \iff \alpha = -\sqrt{\alpha^2 + 8\alpha} \iff \alpha = 0,$$

$$\lambda_2 = \lambda_3 \iff \sqrt{\alpha^2 + 8\alpha} = 0 \iff \alpha \in \{0, -8\},$$

abbiamo:

matrice	**autovalori**	**molteplicità algebriche**	**molteplicità geometriche**
$\mathbf{A}(\alpha)$ $\alpha \notin \{0, -8\}$	$\lambda_1 = \alpha$ $\lambda_2 = \frac{\alpha+\sqrt{\alpha^2+8\alpha}}{2}$ $\lambda_3 = \frac{\alpha-\sqrt{\alpha^2+8\alpha}}{2}$	$m_1 = 1$ $m_2 = 1$ $m_3 = 1$	$d_1 = 1$ $d_2 = 1$ $d_3 = 1$
$\mathbf{A}(0)$	$\lambda_1 = 0$	$m_1 = 3$	$1 \leq d_1 \leq 3$
$\mathbf{A}(-8)$	$\lambda_1 = -8$ $\lambda_2 = -4$	$m_1 = 1$ $m_2 = 2$	$d_1 = 1$ $1 \leq d_2 \leq 2$

Dunque:

- se $\alpha \notin \{0, -8\}$ la matrice $\mathbf{A}(\alpha)$ è diagonalizzabile.

●● $\mathbf{A}(0)$ sarebbe diagonalizzabile solo se fosse $d_1 = \dim(E_{\mathbf{A}(0)}(0)) = m_3 = 3$.

N.B.: Se fosse $\dim(E_{\mathbf{A}(0)}(0)) = 3$ sarebbe $E_{\mathbf{A}(0)}(0) = \mathbb{C}^3$, e quindi $\mathbf{A}(0) = \mathbf{O}$.

Dunque, essendo $\mathbf{A}(0) = \begin{pmatrix} -2 & 2i & 0 \\ 2i & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \neq \mathbf{O}$, $\mathbf{A}(0)$ non è diagonalizzabile.

●●● $\mathbf{A}(-8)$ è diagonalizzabile $\iff$ $d_2 = \dim(E_{\mathbf{A}(-8)}(-4)) = m_2 = 2$

$$\begin{aligned} {\color{red}d_2} &= \dim(E_{\mathbf{A}(-8)}(-4)) = \dim(N(\mathbf{A}(-8)+4\mathbf{I}_3) = \\ &= [\text{numero di colonne di } \mathbf{A}(-8)+4\mathbf{I}_3] - \text{rk}(\mathbf{A}(-8)+4\mathbf{I}_3) = \\ &= 3 - \text{rk}(\mathbf{A}(-8)+4\mathbf{I}_3) \end{aligned}$$

Da una E.G. su $\mathbf{A}(-8)+4\mathbf{I}_3$:

$$\mathbf{A}(1)+2\mathbf{I}_3 = \begin{pmatrix} -2 & 2i & 0 \\ 2i & -6 & 0 \\ 0 & 0 & -8 \end{pmatrix} + 4\mathbf{I}_3 = \begin{pmatrix} 2 & 2i & 0 \\ 2i & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{21}(-2i)E_1(\frac{1}{2})}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_2(-\frac{1}{4})E_{23}} \begin{pmatrix} 1 & i & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

per cui $\text{rk}(\mathbf{A}(-8)+4\mathbf{I}_3) = 2$, e quindi

$${\color{red}d_2} = \dim(E_{\mathbf{A}(-8)}(-4)) = 3-2 {\color{red}= 1}.$$

Dunque $\mathbf{A}(-8)$ non è diagonalizzabile.

In conclusione abbiamo:

$$\mathbf{A}(\alpha) \quad \text{è diagonalizzabile} \quad \iff \quad \alpha \notin \{0,-8\}.$$

(c) Abbiamo visto in (a) che $\mathbf{A} = \mathbf{A}(-4) = \begin{pmatrix} -2 & 2i & 0 \\ 2i & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$ è unitariamente diagonalizzabile. I suoi autovalori (calcolati in (b)) sono:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \alpha = -4 \\ \lambda_2 &= \tfrac{\alpha+\sqrt{\alpha^2+8\alpha}}{2} = \tfrac{-4+\sqrt{(-4)^2+8(-4)}}{2} = \tfrac{-4+\sqrt{-16}}{2} = \tfrac{-4+4i}{2} = -2+2i, \\ \lambda_3 &= \tfrac{\alpha-\sqrt{\alpha^2+8\alpha}}{2} = \tfrac{-4-\sqrt{(-4)^2+8(-4)}}{2} = \tfrac{-4-\sqrt{-16}}{2} = \tfrac{-4-4i}{2} = -2-2i, \end{aligned}$$

ciascuno con molteplicità algebrica e geometrica uguali ad 1.

Cerchiamo **basi ortonormali** degli autospazi di $\mathbf{A}$.

$$E_{\mathbf{A}}(\lambda_1) = E_{\mathbf{A}}(-4) = N(\mathbf{A}+4\mathbf{I}_3).$$

Da una E.G. su $\quad \mathbf{A}+4\mathbf{I_3} \quad$:

$$\mathbf{A}+4\mathbf{I_3}=\begin{pmatrix}2 & 2i & 0\\ 2i & 2 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix} \xrightarrow{E_2(\frac{1}{4})E_{21}(-2i)E_1(\frac{1}{2})} \begin{pmatrix}1 & i & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix},$$

segue che

$$E_{\mathbf{A}}(\lambda_1)=E_{\mathbf{A}}(-4)=N\Big(\begin{pmatrix}1 & i & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\Big)=\Big\{\begin{pmatrix}0\\ 0\\ h\end{pmatrix}\Big| h\in\mathbb{C}\Big\},$$

e quindi $\Big\{\mathbf{w_1}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 1\end{pmatrix}\Big\}$ è una base di $E_{\mathbf{A}}(\lambda_1)=E_{\mathbf{A}}(-4)$.

N.B.: Poichè ha un unico elemento, $\{\mathbf{w_1}\}$ è già una base ortogonale di $E_{\mathbf{A}}(-4)$. Inoltre, essendo $\|\mathbf{w_1}\|_2=1$, non occorre "normalizzare" $\mathbf{w_1}$: $\{\mathbf{w_1}\}$ è già una base ortonormale di $E_{\mathbf{A}}(-4)$.

$$E_{\mathbf{A}}(\lambda_2)=E_{\mathbf{A}}(-2+2i)=N(\mathbf{A}+(2-2i)\mathbf{I_3}).$$

Da una E.G. su $\quad \mathbf{A}+(2-2i)\mathbf{I_3} \quad$:

$$\mathbf{A}+(2-2i)\mathbf{I_3}=\begin{pmatrix}-2i & 2i & 0\\ 2i & -2i & 0\\ 0 & 0 & -2-2i\end{pmatrix} \xrightarrow{E_2(\frac{-1+i}{4})E_{23}E_{21}(-2i)E_1(\frac{1}{2}i)} \begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix},$$

segue che

$$E_{\mathbf{A}}(\lambda_2)=E_{\mathbf{A}}(-2+2i)=N\Big(\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\Big)=\Big\{\begin{pmatrix}h\\ h\\ 0\end{pmatrix}\Big| h\in\mathbb{C}\Big\},$$

e quindi $\Big\{\mathbf{w_2}=\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 0\end{pmatrix}\Big\}$ è una base di $E_{\mathbf{A}}(\lambda_2)=E_{\mathbf{A}}(-2+2i)$.

N.B.: Poichè ha un unico elemento, $\{\mathbf{w_2}\}$ è già una base ortogonale di $E_{\mathbf{A}}(-2+2i)$. Per ottenere una base ortonormale di $E_{\mathbf{A}}(-2+2i)$, "normalizziamo" $\mathbf{w_2}$.

$$\|\mathbf{w_2}\|_2=\sqrt{\mathbf{w_2}^H\mathbf{w_2}}=\sqrt{\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 0\end{pmatrix}}=\sqrt{1+1}=\sqrt{2}$$

per cui

$$\left\{ \frac{\mathbf{w_2}}{\|\mathbf{w_2}\|_2} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

è una **base ortonormale** di $E_{\mathbf{A}}(\lambda_2) = E_{\mathbf{A}}(-2+2i)$.

$$E_{\mathbf{A}}(\lambda_3) = E_{\mathbf{A}}(-2-2i) = N(\mathbf{A} + (2+2i)\mathbf{I}_3).$$

Da una E.G. su $\quad \mathbf{A} + (2+2i)\mathbf{I}_3 \quad$:

$$\mathbf{A} + (2+2i)\mathbf{I}_3 = \begin{pmatrix} 2i & 2i & 0 \\ 2i & 2i & 0 \\ 0 & 0 & -2+2i \end{pmatrix} \xrightarrow{E_2(-\frac{1+i}{4})E_{23}E_{21}(-2i)E_1(-\frac{1}{2}i)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

segue che

$$E_{\mathbf{A}}(\lambda_3) = E_{\mathbf{A}}(-2-2i) = N\Big(\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Big) = \Big\{ \begin{pmatrix} -h \\ h \\ 0 \end{pmatrix} \Big| h \in \mathbb{C} \Big\},$$

e quindi $\Big\{ \mathbf{w_3} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Big\}$ è una base di $E_{\mathbf{A}}(\lambda_3) = E_{\mathbf{A}}(-2-2i)$.

N.B.: Poichè ha un unico elemento, $\{\mathbf{w_3}\}$ è già una base ortogonale di $E_{\mathbf{A}}(-2-2i)$. Per ottenere una base ortonormale di $E_{\mathbf{A}}(-2-2i)$, "normalizziamo" $\mathbf{w_3}$.

$$\|\mathbf{w_3}\|_2 = \sqrt{\mathbf{w_3}^H \mathbf{w_3}} = \sqrt{\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

per cui

$$\left\{ \frac{\mathbf{w_3}}{\|\mathbf{w_3}\|_2} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

è una **base ortonormale** di $E_{\mathbf{A}}(\lambda_3) = E_{\mathbf{A}}(-2-2i)$.

Dunque se $\alpha = -4$, una diagonalizzazione unitaria di $\mathbf{A} = \mathbf{A}(-4)$ è:

$$\mathbf{A} = \mathbf{U}\mathbf{D}\mathbf{U}^H \quad \text{con}$$

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & -2+2i & 0 \\ 0 & 0 & -2-2i \end{pmatrix} \quad \text{ed}$$

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} \mathbf{w_1} & \frac{\mathbf{w_2}}{\|\mathbf{w_2}\|_2} & \frac{\mathbf{w_3}}{\|\mathbf{w_3}\|_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$\boxed{\mathbf{4}}$ Sia $\quad \mathbf{A}(\alpha) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -3i \\ 0 & -3 & 0 \\ -3i\alpha & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad$ dove α è **un numero reale non positivo**.

(a) Per quali α numeri reali non positivi si ha che di $\mathbf{A}(\alpha)$ è unitariamente diagonalizzabile ?
(b) Per quali α numeri reali non positivi si ha che di $\mathbf{A}(\alpha)$ è diagonalizzabile ?
(c) Sia $\mathbf{A} = \mathbf{A}(-1)$ la matrice che si ottiene ponendo $\alpha = -1$. Si trovi una diagonalizzazione unitaria $\mathbf{A} = \mathbf{U}\mathbf{D}\mathbf{U}^H$ per $\mathbf{A}$.

(a) $\mathbf{A}(\alpha)$ è unitariamente diagonalizzabile $\iff$ $\mathbf{A}(\alpha)$ è normale $\iff$

$$\iff \mathbf{A}(\alpha)\mathbf{A}(\alpha)^H = \mathbf{A}(\alpha)^H\mathbf{A}(\alpha).$$

Calcoliamo $\mathbf{A}(\alpha)^H$, tenendo conto del fatto che da $\alpha \in \mathbb{R}$ segue $\overline{\alpha} = \alpha$:

$$\mathbf{A}(\alpha)^H = \begin{pmatrix} \overline{0} & \overline{0} & \overline{-3i\alpha} \\ \overline{0} & \overline{-3} & \overline{0} \\ \overline{-3i} & \overline{0} & \overline{0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3i\alpha \\ 0 & -3 & 0 \\ 3i & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Calcoliamo ora $\mathbf{A}(\alpha)\mathbf{A}(\alpha)^H$ ed $\mathbf{A}(\alpha)^H\mathbf{A}(\alpha)$:

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}(\alpha)\mathbf{A}(\alpha)^H &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -3i \\ 0 & -3 & 0 \\ -3i\alpha & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3i\alpha \\ 0 & -3 & 0 \\ 3i & 0 & 0 \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9\alpha^2 \end{pmatrix}, \\
\mathbf{A}(\alpha)^H\mathbf{A}(\alpha) &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3i\alpha \\ 0 & -3 & 0 \\ 3i & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -3i \\ 0 & -3 & 0 \\ -3i\alpha & 0 & 0 \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} 9\alpha^2 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Imponendo l'uguaglianza $\mathbf{A}(\alpha)\mathbf{A}(\alpha)^H = \mathbf{A}(\alpha)^H\mathbf{A}(\alpha)$, e tenendo conto che α **è non positivo**, otteniamo:

$$\mathbf{A}(\alpha)\mathbf{A}(\alpha)^H = \mathbf{A}(\alpha)^H\mathbf{A}(\alpha) \quad \Longleftrightarrow \quad \alpha^2 = 1 \quad \Longleftrightarrow \quad \alpha = -1.$$

(b) $\mathbf{A}(\alpha)$ è diagonalizzabile se e solo se ciascun suo autovalore ha le due molteplicità, algebrica e geometrica, uguali tra loro. Calcoliamo gli autovalori di $\mathbf{A}(\alpha)$ e le loro molteplicità.

Il polinomio caratteristico di $\mathbf{A}(\alpha)$ è:

$$\begin{aligned}
p_{\mathbf{A}(\alpha)}(x) &= \mathrm{Det}(\mathbf{A}(\alpha) - x\mathbf{I}_3) = \mathrm{Det}\begin{pmatrix} -x & 0 & -3i \\ 0 & -3-x & 0 \\ -3i\alpha & 0 & -x \end{pmatrix} = \\
&= (-1)^{2+2}(-3-x)\mathrm{Det}\begin{pmatrix} -x & -3i \\ -3i\alpha & -x \end{pmatrix} = \\
&= (-3-x)(x^2 - 9i^2\alpha) = \\
&= (-3-x)(x^2 + 9\alpha).
\end{aligned}$$

Quindi gli autovalori di $\mathbf{A}(\alpha)$ sono ($\alpha \in \mathbb{R}$ con $\alpha \leq 0$):

$$\lambda_1 = -3, \quad \lambda_2 = \sqrt{-9\alpha} = 3\sqrt{-\alpha} \quad \text{e} \quad \lambda_3 = -\sqrt{-9\alpha} = -3\sqrt{-\alpha}.$$

Dal momento che α è un numero reale non positivo, allora

$$\lambda_1 \neq \lambda_2,$$

$$\lambda_1 = \lambda_3 \quad \Longleftrightarrow \quad \alpha = -1,$$

$$\lambda_2 = \lambda_3 \quad \Longleftrightarrow \quad \alpha = 0.$$

matrice	**autovalori**	**molteplicità algebriche**	**molteplicità geometriche**
$\mathbf{A}(\alpha)$ $\alpha \notin \{0,-1\}$	$\lambda_1 = -3$ $\lambda_2 = 3\sqrt{-\alpha}$ $\lambda_3 = -3\sqrt{-\alpha}$	$m_1 = 1$ $m_2 = 1$ $m_3 = 1$	$d_1 = 1$ $d_2 = 1$ $d_3 = 1$
$\mathbf{A}(0)$	$\lambda_1 = -3$ $\lambda_2 = 0$	$m_1 = 1$ $m_2 = 2$	$d_1 = 1$ $1 \leq d_2 \leq 2$
$\mathbf{A}(-1)$	$\lambda_1 = -3$ $\lambda_2 = 3$	$m_1 = 2$ $m_2 = 1$	$1 \leq d_1 \leq 2$ $d_2 = 1$

Quindi se $\alpha \notin \{0,-1\}$ allora $\mathbf{A}(\alpha)$ è diagonalizzabile.
Anche $\mathbf{A} = \mathbf{A}(-1)$ è diagonalizzabile: abbiamo visto in (a) che è addirittura unitariamente diagonalizzabile (quindi è vero, e non occorre verificarlo, che $d_1 = \dim(E_{\mathbf{A}(-1)}(-3)) = m_1 = 2$).

Inoltre:

$$\mathbf{A}(0) \quad \text{è diagonalizzabile} \quad \iff \quad d_2 = \dim(E_{\mathbf{A}(0)}(0)) = m_2 = 2.$$

$$\begin{aligned} d_2 &= \dim(E_{\mathbf{A}(0)}(0)) = \dim(N(\mathbf{A}(0)) = \\ &= [\text{numero di colonne di } \mathbf{A}(0)] - \text{rk}(\mathbf{A}(0)) = \\ &= 3 - \text{rk}(\mathbf{A}(0)) \end{aligned}$$

Da una E.G. su $\mathbf{A}(0)$:

$$\mathbf{A}(0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -3i \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_2(\frac{1}{3}i)E_1(-\frac{1}{3})E_{12}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

per cui $\text{rk}(\mathbf{A}(0)) = 2$, e quindi

$$d_2 = \dim(E_{\mathbf{A}(0)}(0)) = 3 - 2 = 1.$$

Dunque $\mathbf{A}(0)$ non è diagonalizzabile.

In conclusione (essendo α reale non positivo):

$$\mathbf{A}(\alpha) \quad \text{è diagonalizzabile} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \alpha \in \mathbb{R} \text{ con } \alpha < 0.$$

(c) Abbiamo visto in (a) che $\mathbf{A} = \mathbf{A}(-1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -3i \\ 0 & -3 & 0 \\ 3i & 0 & 0 \end{pmatrix}$ è unitariamente diagonalizzabile. I suoi autovalori (calcolati in (b)) sono:

$$\lambda_1 = -3 \quad \text{e} \quad \lambda_2 = 3$$

con molteplicità algebriche e geometriche uguali a

$$m_1 = 2 = d_1 \quad \text{e} \quad m_2 = 1 = d_2.$$

Cerchiamo **basi ortonormali** degli autospazi di $\mathbf{A}$.

$$E_{\mathbf{A}}(\lambda_1) = E_{\mathbf{A}}(-3) = N(\mathbf{A} + 3\mathbf{I}_3).$$

Da una E.G. su $\quad \mathbf{A} + 3\mathbf{I}_3 \quad$:

$$\mathbf{A} + 3\mathbf{I}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -3i \\ 0 & -3 & 0 \\ 3i & 0 & 0 \end{pmatrix} + 3\mathbf{I}_3 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -3i \\ 0 & 0 & 0 \\ 3i & 0 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{31}(-3i)E_1(\frac{1}{3})}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

segue che

$$E_{\mathbf{A}}(\lambda_1) = E_{\mathbf{A}}(-3) = N\Big(\begin{pmatrix} 1 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Big) = \Big\{ \begin{pmatrix} ik \\ h \\ k \end{pmatrix} \Big| h, k \in \mathbb{C} \Big\},$$

e quindi $\Big\{ \mathbf{v_1} = \begin{pmatrix} i \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \mathbf{v_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Big\}$ è una base di $E_{\mathbf{A}}(\lambda_1) = E_{\mathbf{A}}(-3)$.

N.B.: In questo caso non occorre applicare l'algoritmo di G.S. a $\{\mathbf{v_1}; \mathbf{v_2}\}$: $\mathbf{v_1}^H \mathbf{v_2} = \mathbf{0}$, per cui

$$\{\mathbf{v_1}; \mathbf{v_2}\} \quad \textbf{è già una base ortogonale di } E_{\mathbf{A}}(-3)$$

Per ottenere una base ortonormale di $E_{\mathbf{A}}(-3)$, "normalizziamo" $\mathbf{v_1}$ e $\mathbf{v_2}$.

$$\|\mathbf{v_1}\|_2 = \sqrt{\mathbf{v_1}^H\mathbf{v_1}} = \sqrt{\begin{pmatrix}-i & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}i\\0\\1\end{pmatrix}} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

$$\|\mathbf{v_2}\|_2 = \sqrt{\mathbf{v_2}^H\mathbf{v_2}} = \sqrt{\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}} = \sqrt{1} = 1$$

per cui

$$\left\{\frac{\mathbf{v_1}}{\|\mathbf{v_1}\|_2} = \begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}i\\0\\\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix};\ \frac{\mathbf{v_2}}{\|\mathbf{v_2}\|_2} = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right\}$$

è una **base ortonormale** di $E_{\mathbf{A}}(\lambda_1) = E_{\mathbf{A}}(-3)$.

$$E_{\mathbf{A}}(\lambda_2) = E_{\mathbf{A}}(3) = N(\mathbf{A} - 3\mathbf{I}_3).$$

Da una E.G. su $\quad \mathbf{A} - 3\mathbf{I}_3 \quad$:

$$\mathbf{A} - 3\mathbf{I}_3 = \begin{pmatrix}-3 & 0 & -3i\\0 & -6 & 0\\3i & 0 & -3\end{pmatrix} \xrightarrow{E_2(-\frac{1}{6})E_{31}(-3i)E_1(-\frac{1}{3})} \begin{pmatrix}1 & 0 & i\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 0\end{pmatrix},$$

segue che

$$E_{\mathbf{A}}(\lambda_2) = E_{\mathbf{A}}(3) = N\Big(\begin{pmatrix}1 & 0 & i\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 0\end{pmatrix}\Big) = \Big\{\begin{pmatrix}-ih\\0\\h\end{pmatrix}\Big| h \in \mathbb{C}\Big\},$$

e quindi $\Big\{\mathbf{w_1} = \begin{pmatrix}-i\\0\\1\end{pmatrix}\Big\}$ è una base di $E_{\mathbf{A}}(\lambda_2) = E_{\mathbf{A}}(3)$.

N.B.: Poichè ha un unico elemento, $\{\mathbf{w_1}\}$ è già una base ortogonale di $E_{\mathbf{A}}(3)$. Per ottenere una base ortonormale di $E_{\mathbf{A}}(3)$, "normalizziamo" $\mathbf{w_1}$.

$$\|\mathbf{w_1}\|_2 = \sqrt{\mathbf{w_1}^H\mathbf{w_1}} = \sqrt{\begin{pmatrix}i & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-i\\0\\1\end{pmatrix}} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

per cui

$$\left\{ \frac{\mathbf{w_1}}{\|\mathbf{w_1}\|_2} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}}i \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \right\}$$

è una **base ortonormale** di $E_{\mathbf{A}}(\lambda_2) = E_{\mathbf{A}}(3)$.

Dunque se $\alpha = -1$, una diagonalizzazione unitaria di $\mathbf{A} = \mathbf{A}(-1)$ è:

$$\mathbf{A} = \mathbf{U}\mathbf{D}\mathbf{U}^H \quad \text{con}$$

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{ed}$$

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} \frac{\mathbf{v_1}}{\|\mathbf{v_1}\|_2} & \frac{\mathbf{v_2}}{\|\mathbf{v_2}\|_2} & \frac{\mathbf{w_1}}{\|\mathbf{w_1}\|_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}i & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}}i \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$