ALGEBRA LINEARE I (A) PER SCIENZE STATISTICHE, A.A. 2001/02, GEMMA PARMEGGIANI

Università degli Studi di Padova
Dipartimento di Matematica Pura e Applicata
via Belzoni, 7
35131 Padova

1. Programma del corso

2. Alcune lezioni svolte (metà corso)

3. Esercizi tipo svolti

4. Esercizi teorici svolti

5. Testi delle esercitazioni a gruppi

Typeset by $\mathcal{AMS}$-TEX

Corso di ALGEBRA LINEARE (A), SEF - SGI

Programma a.a. 2001/02

04/03.1 Matrici. Esempi: diagonali e scalari. Moltiplicazione di una matrice per uno scalare e sue proprietà.

04/03.2 Addizione di matrici e sue proprietà. Prodotto di matrici righe per colonne e sue proprietà.

05/03.1 Matrici non singolari. Trasposte e H-trasposte e loro proprietà. Matrici simmetriche, hermitiane, anti-simmetriche, anti-hermitiane.

05/03.2 Parte hermitiana e parte anti-hermitiana di una matrice quadrata. Decomposizione a blocchi. Applicazioni al prodotto.

06/03.1 Matrici elementari e loro inverse. Operazioni elementari sulle righe di una matrice.

06/03.2 Eliminazione di Gauss senza scambi di righe.

12/03.1 Eliminazione di Gauss con scambi di righe. Forma ridotta di Gauss di una matrice. Colonne dominanti e colonne libere.

12/03.2 Scrittura matriciale di un sistema lineare. Risoluzione di un sistema lineare (con una o infinite soluzioni), sistemi lineari senza soluzione.

13/03.1 Esercizi tipo 1 e 2.

13/03.2 Inverse destre, sinistre e bilatere. Criteri per l'esistenza. Inverse di matrici 2×2.

14/03.1 Esercizi tipo 3 e 4.

14/03.2 Matrici triangolari. Decomposizione $A = LU$, determinazione di L.

18/03.1 Decomposizione $A = P^T LU$.

18/03.2 Esercizi tipo 5 e 6.

20/03.1 Spazi vettoriali reali e complessi. Esempi.

20/03.2 Sottospazi di uno spazio vettoriale. Esempi. I sottospazi fondamentali di una matrice.

21/03.1 Insiemi di generatori. Insiemi linearmente indipendenti. Lemma della scrematura.

21/03.2 Esercizi tipo 7 e 8.

25/03.1 Esercizi teorici 1 e 2.

25/03.2 Lemma del rimpiazzo. Esistenza ed equipotenza delle basi.

26/03.1 Caratterizzazioni delle basi. Basi degli spazi delle righe e delle colonne di una matrice in forma ridotta di Gauss.

26/03.2 Basi di $C(A)$ e di $R(A)$. Rango di una matrice.

27/03.1 Esercizio tipo 9.

27/03.2 Proprieta' del rango di una matrice. Decomposizioni a rango pieno. Coordinate di un vettore rispetto ad una base ordinata.

08/04.1 Mappa delle coordinate e sue proprieta'. Matrice di passaggio tra due basi ordinate. Trasformazioni lineari. Spazio nullo e spazio immagine.

08/04.2 Il caso della moltiplicazione per una matrice. Teorema nullita'+rango. Matrice associata ad una trasformazione lineare.

09/04.1 Esercizi tipo 10, 11, 12.

09/04.2 Come cambia la matrice associata ad una trasformazione lineare quando si cambiano le basi.

10/04.1 Esercizio tipo 13.

Interpretazione geometrica di $\mathbb{R}^2$ ed $\mathbb{R}^3$. Regola del parallelogramma.

10/04.2 Norme su spazi vettoriali. Le norme $||\cdot||_1, ||\cdot||_2$ e $||\cdot||_\infty$

15/04.1 Rotazioni in $\mathbb{R}^2$ ed angoli tra vettori di $\mathbb{R}^2$. Prodotti scalari e norme indotte.

15/04.2 Diseguaglianza di Schwarz per i prodotti scalari. Esercizio tipo 14.

16/04.1 Intorni dell'origine in $\mathbb{R}^2$ rispetto alle norme $||\cdot||_1, ||\cdot||_2$ e $||\cdot||_\infty$. Esercizi tipo 15 e 16.

16/04.2 Angolo tra vettori. Ortogonalita'. Ortogonalita' di vettori non nulli implica indipendenza. Proiezione ortogonale su di una retta. Proiezione ortogonale su un sottospazio.

17/04.1 Proprieta' della proiezione ortogonale del piano su di una retta. Complemento ortogonale di un sottospazio. Complementarieta' dei sottospazi fondamentali di una matrice (senza dimostrazione).

17/04.2 Algoritmo di Gram-Schmidt (senza dimostrazione). Esercizio tipo 17.

22/04.1 Matrice di proiezione su di un sottospazio di $\mathbb{C}^n$. Decomposizioni Q_0R_0-non-normalizzata e QR-normalizzata per una matrice.

22/04.2 Esercizi tipo 18 e 19.

23/04.1 Determinanti. Esempi.

23/04.2 Esercizio tipo 20 (1^0 modo). Esercizio teorico 3.

24/04.1 Proprietà del determinante. Polinomio caratteristico, autovalori e loro molteplicità algebriche. Esercizi tipo 21 e 22.

24/04.2 Determinante di una matrice triangolare. Esercizio teorico 4.

LEZIONE 1

Matrici ed esempi

Def. 1. Una **matrice m×n ad elementi reali** (risp. **ad elementi complessi**) è una tabella di numeri reali (risp. complessi) disposti in m righe ed n colonne.

Una matrice ad elementi reali (risp. complessi) è detta anche una **matrice reale** (risp. **complessa**).

Le matrici vengono indicate con lettere maiuscole.

Esempio 1. Siano $A = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{5} & -3 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 7+i \\ 1-i & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} -3 & \pi & 2 \\ 9 & 6 & 4 \\ 1 & -1 & 5 \end{pmatrix}$, $D = (8 \quad 11i)$ ed $E = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$. A è una matrice 2×3 ad elementi reali (oppure: A è una matrice 2×3 reale), B è una matrice 3×2 complessa, C è una matrice 3×3 reale, D è una matrice 1×2 complessa ed E è una matrice 3×1 reale.

N.B. Si puó scrivere indifferentemente $A = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{5} & -3 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, oppure $A = \begin{bmatrix} 1 & \sqrt{5} & -3 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix}$, oppure $A = \begin{matrix} 1 & \sqrt{5} & -3 \\ 4 & 2 & 1 \end{matrix}$.

La 1^a riga di A è $(1 \quad \sqrt{5} \quad -3)$, la 2^a riga di A è $(4 \quad 2 \quad 1)$, la 1^a colonna di A è $\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$, la 2^a colonna di A è $\begin{pmatrix} \sqrt{5} \\ 2 \end{pmatrix}$, la 3^a colonna di A è $\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Def. 2. Data una matrice $m \times n$ reale (risp. complessa) A, il numero che si trova nella i-esima riga e nella j-esima colonna di A, dove $1 \leq i \leq m$ e $1 \leq j \leq n$, si dice l'**elemento di posto** (i, j) **di** A. Esso viene di solito indicato con il simbolo a_{ij}. Si scrive allora:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n-1} & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m-11} & a_{m-12} & \dots & a_{m-1n-1} & a_{m-1n} \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn-1} & a_{mn} \end{pmatrix},$$

oppure, in forma compatta, $A = [a_{ij}]_{i=1,\dots,m;j=1,\dots,n}$ (anche: $A = [a_{ij}]$, $m \times n$).

Quindi se A e B sono le matrici dell'Esempio 1, $a_{11} = 1$, $a_{12} = \sqrt{5}$, ecc., $b_{22} = 1$, $b_{32} = 3$, ecc..

Def. 3. Due **matrici** $A = [a_{ij}]$, $m \times n$, e $B = [b_{ij}]$, $r \times t$, sono **uguali** se

$$\begin{cases} m = r \\ n = t \\ a_{ij} = b_{ij} \text{ per ogni } 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n \end{cases}$$

ossia se hanno uguale numero di righe, uguale numero di colonne, e gli elementi corrispondenti uguali.

Def. 4. Si chiama **matrice nulla** $m \times n$ la matrice $m \times n$ ogni cui elemento è 0. Il simbolo usato per indicarla è $\mathbb{O}_{m\times n}$ (oppure $\mathbb{O}$ quando dal contesto si puó dedurre quante righe e quante colonne ha).

Def. 5. Una matrice con una sola riga ed n colonne si dice **vettore riga con n componenti**.

Ad esempio la matrice D dell'Esempio 1 è un vettore riga con 2 componenti.

Def. 6. Una matrice con una sola colonna ed m righe si dice **vettore colonna con m componenti**.

Ad esempio la matrice E dell'Esempio 1 è un vettore colonna con 3 componenti.

N.B. Per indicare i vettori colonna si preferiscono usare lettere in carattere corsivo minuscolo con un segno sotto: $\underline{e}$ piuttosto che E.

Def. 7. Una **matrice** in cui il numero delle righe è uguale al numero delle colonne si dice **quadrata**. Se A è una matrice quadrata, il numero delle righe di A (che è uguale al numero delle colonne di A) si chiama **l'ordine di A**.

Ad esempio la matrice C dell'Esempio 1 è una matrice quadrata di ordine 3.

Notazioni. L'insieme delle matrici reali $m \times n$ si indica con il simbolo $M_{mn}(\mathbb{R})$, l'insieme delle matrici complesse $m \times n$ si indica con il simbolo $M_{mn}(\mathbb{C})$.

N.B. Si usano

– il simbolo $\mathbb{R}_n$ (risp. $\mathbb{C}_n$) al posto del simbolo $M_{1n}(\mathbb{R})$ (risp. $M_{1n}(\mathbb{C})$),

– il simbolo $\mathbb{R}^m$ (risp. $\mathbb{C}^m$) al posto del simbolo $M_{m1}(\mathbb{R})$ (risp. $M_{m1}(\mathbb{C})$),

– il simbolo $M_m(\mathbb{R})$ (risp. $M_m(\mathbb{C})$) al posto del simbolo $M_{mm}(\mathbb{R}$ (risp. $M_{mm}(\mathbb{C})$).

Quindi se A, B, C, D ed E sono le matrici dell'Esempio 1, allora $A \in M_{23}(\mathbb{R})$, $B \in M_{32}(\mathbb{C})$, $C \in M_3(\mathbb{R})$, $D \in \mathbb{C}_2$ ed $E \in \mathbb{R}^3$.

Def. 8. Sia $A = [a_{ij}]$ una matrice $m \times n$. Gli elementi a_{ii} si chiamano **elementi diagonali** di A.

Ad esempio, se A, B e C sono le matrici dell'Esempio 1, gli elementi diagonali di A

sono 1 e 2, gli elementi diagonali di B sono 2 e 1, gli elementi diagonali di C sono -3, 6 e 5.

Def. 9. Una **matrice** quadrata $A = [a_{ij}]$ si dice **diagonale** se $a_{ij} = 0$ per ogni (i, j) con $i \neq j$ (ossia se gli elementi di A che non sono diagonali sono tutti nulli).

Esempio 2. $A = \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ sono matrici diagonali, mentre $D = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}$ ed $E = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ non sono matrici diagonali.

Def. 10. Una **matrice** diagonale si dice **scalare** se i suoi elementi diagonali sono tra loro uguali.

Esempio 3. $A = \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$ è una matrice scalare, mentre $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 7 & 1 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$ e $D = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \end{pmatrix}$ non sono matrici scalari.

Def. 11. Si chiama **matrice identica di ordine m** la matrice scalare $m \times m$ i cui elementi diagonali sono tutti uguali ad 1. Il simbolo usato per indicarla è I_m (oppure I quando dal contesto si puó dedurre il suo numero di righe e di colonne).

La sua colonna i-esima, quando $1 \leq i \leq m$, è indicata con il simbolo $\underline{e_i}$.

Dunque $\underline{e_i}$ è il vettore colonna con m componenti: $\underline{e_i} = \boxed{\begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix}} \begin{matrix} \\ \\ \\ \leftarrow i \\ \\ \\ \\ \end{matrix}$

Prodotto di una matrice per uno scalare

Def. 12. Siano $A = [a_{ij}]$ una matrice complessa (risp. reale) $m \times n$ ed α un numero complesso (risp. reale).

α viene chiamato **scalare**.

Sia $B = [b_{ij}]$ la matrice $m \times n$ definita da

$$b_{ij} = \alpha a_{ij} \quad \text{per ogni } i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n,$$

ossia la matrice che si ottiene da A moltiplicando ciascun elemento di A per lo scalare α. Allora B si chiama **il prodotto della matrice A per lo scalare α.**

B viene indicata con il simbolo αA.

Esempio 4. Se B la matrice considerata nell'Esempio 1, allora

$$(1+i)B = (1+i)\begin{pmatrix} 2 & 7+i \\ 1-i & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1+i)2 & (1+i)(7+i) \\ (1+i)(1-i) & (1+i)1 \\ (1+i)0 & (1+i)3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2+2i & 7+7i+i-1 \\ 1^2-i^2 & 1+i \\ 0 & 3+3i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+2i & 6+8i \\ 2 & 1+i \\ 0 & 3+3i \end{pmatrix}.$$

Si definisce così su $M_{mn}(\mathbb{C})$ (risp. su $M_{mn}(\mathbb{R})$) un'**operazione di moltiplicazione di matrici per scalari**

$$\mathbb{C} \times M_{mn}(\mathbb{C}) \to M_{mn}(\mathbb{C}) \quad (\text{risp.} \quad \mathbb{R} \times M_{mn}(\mathbb{R}) \to M_{mn}(\mathbb{R}))$$
$$(\alpha, A) \mapsto \alpha A.$$

Proprietà della moltiplicazione di matrici per scalari

(1) $\alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A$ per ogni scalare α e β ed ogni matrice A,

(2) $1A = A$ per ogni matrice A.

Dimostrazione. Sia $A = [a_{ij}]$ una matrice $m \times n$.

Si ponga $B := \beta A$ e si indichi con b_{ij} l'elemento di posto (i,j) di B (per cui $B = [b_{ij}]$).

Si ponga $C := \alpha B$ e si indichi con c_{ij} l'elemento di posto (i,j) di C (per cui $C = [c_{ij}]$).

Si ponga infine $D := (\alpha\beta)A$ e si indichi con d_{ij} l'elemento di posto (i,j) di D (per cui $D = [d_{ij}]$).

Si noti che B e D sono $m \times n$ essendolo A, e che C è $m \times n$ essendolo B.

Per ogni $1 \le i \le m$ e $1 \le j \le n$ si ha

$$c_{ij} = \alpha b_{ij} = \alpha(\beta a_{ij}) = (\alpha\beta)a_{ij} = d_{ij}$$

quindi $C = D$ ossia $\alpha B = D$. Poichè $B = \beta A$ e $D = (\alpha\beta)A$ si ottiene (1).

Per provare (2) si ponga $E = 1A$ e si indichi con e_{ij} l'elemento di posto (i,j) di E (per cui $E = [e_{ij}]$). E è $m \times n$ essendolo A.

Per ogni $1 \le i \le m$ e $1 \le j \le n$ si ha $e_{ij} = 1a_{ij} = a_{ij}$, quindi $E = A$, ossia $1A = A$.

LEZIONE 2

Somma di due matrici $m \times n$

Def. 1. Siano $A = [a_{ij}]$ e $B = [b_{ij}]$ due matrici (reali o complesse) **ENTRAMBE** $m \times n$. Sia $C = [c_{ij}]$ la matrice $m \times n$ definita da

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \quad \text{per ogni } i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n,$$

(ossia la matrice i cui elementi si ottengono sommando gli elementi corrispondenti di A e B). La matrice C si chiama **la somma delle matrici** A **e** B. Per indicare C si usa il simbolo $A + B$.

Esempio 1. Siano $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & i \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 0 & i & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Allora

$$A + B = \begin{pmatrix} 1+0 & 2+i & i+3 \\ 0+1 & 3+1 & 1+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2+i & 3+i \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

N.B. NON ESISTE la somma di due matrici che non abbiano lo stesso numero di righe oppure che non abbiano lo stesso numero di colonne.

Si definisce cosìsu $M_{mn}(\mathbb{C})$ (risp. su $M_{mn}(\mathbb{R})$) un'**operazione di addizione di matrici**

$$M_{mn}(\mathbb{C}) \times M_{mn}(\mathbb{C}) \to M_{mn}(\mathbb{C}) \quad (\text{risp.} \quad M_{mn}(\mathbb{R}) \times M_{mn}(\mathbb{R}) \to M_{mn}(\mathbb{R}))$$

$$(A, B) \mapsto A + B.$$

Proprietà dell'addizione di matrici

Per ogni $A, B, C \in M_{mn}(\mathbb{C})$ (risp. $M_{mn}(\mathbb{R})$) ed ogni $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ (risp. $\mathbb{R}$) si ha:

(1) associatività: $A + (B + C) = (A + B) + C$;

(2) commutatività: $A + B = B + A$;

(3) elemento neutro: $A + \mathbb{O} = A (= \mathbb{O} + A)$;

(4) matrice opposta: se si indica con $-A$ la matrice $(-1)A$, si ha $A + (-A) = \mathbb{O}$ (la matrice $-A$ si chiama **l'opposta della matrice A**;

(5) $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$;

(6) $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$.

Le proprietà (5) e (6) sono **proprietà ditributive** che "collegano"l'addizione di matrici con la moltiplicazione per scalari.

Dimostrazione. Siano $A = [a_{ij}]$, $B = [b_{ij}]$ e $C = [c_{ij}]$. Per ogni $1 \leq i \leq m$ e $1 \leq j \leq n$ si ha:

$$
\begin{array}{llll}
(1): & a_{ij} + (b_{ij} + c_{ij}) = (a_{ij} + b_{ij}) + c_{ij}; & (2): & a_{ij} + b_{ij} = b_{ij} + a_{ij}; \\
(3): & a_{ij} + 0 = a_{ij} = 0 + a_{ij}; & (4): & a_{ij} + (-a_{ij}) = a_{ij} - a_{ij} = 0; \\
(5): & \alpha(a_{ij} + b_{ij}) = \alpha a_{ij} + \alpha b_{ij}; & (6): & (\alpha + \beta)a_{ij} = \alpha a_{ij} + \beta a_{ij}.
\end{array}
$$

Notazione. Per indicare la somma di A con l'opposta di B si scrive $A - B$, al posto di $A + (-B)$.

Def. 2. Siano $A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ un vettore riga ed un vettore colonna con lo stesso numero di componenti, n. Si chiama **prodotto del vettore riga con n componenti A ed il vettore colonna con n componenti B** il numero

$$
\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n = \sum_{1 \leq i \leq n} a_i b_i.
$$

N.B.

– Quando si vuole metter in evidenza che i numeri sono matrici 1×1, si scrive $[a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n]$ al posto di $a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n$.

– Nel caso di vettori riga si preferisce scrivere $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \end{pmatrix}$ piuttosto che $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \end{pmatrix}$, ed analogamente per i vettori colonna.

Esempio 1. $\begin{pmatrix} 3 & i & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 2i \\ 6 \end{pmatrix} = 3 \times (-2) + i \times 2i + 2 \times 6 = -6 - 2 + 12 = 4.$

Def. 3. Siano $A = [a_{ij}]$ una matrice $m \times n$ e $B = [b_{ij}]$ una matrice $n \times r$. Il **prodotto delle due matrici, A e B, di cui la prima, A, ha un numero di colonne uguale al numero delle righe della seconda, B** è la matrice $C = [c_{ij}]$, $m \times r$, ove

$$c_{ij} = \begin{pmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{nj} \end{pmatrix} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj} = \sum_{1 \le k \le n} a_{ik}b_{kj},$$

ossia la matrice $m \times r$ il cui elemento di posto (i, j) è il prodotto della i-esima riga di A e la j-esima colonna di B. Per indicare C si usa il simbolo AB.

Esempio 2. Siano $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 6 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 2 \\ -1 & -2 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$. Allora $AB = C = [c_{ij}]$ è la matrice 2×4 ove

$$c_{11} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = 2 \times 1 + 1 \times (-1) + 3 \times 0 = 2 - 1 + 0 = 1,$$

$$c_{12} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = 2 \times 3 + 1 \times (-2) + 3 \times 1 = 6 - 2 + 3 = 7,$$

$$c_{13} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} = 2 \times 0 + 1 \times 4 + 3 \times 0 = 0 + 4 + 0 = 4,$$

$$c_{14} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = 2 \times 2 + 1 \times 1 + 3 \times (-2) = 4 + 1 - 6 = -1,$$

$$c_{21} = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = 6 \times 1 + 0 \times (-1) + 1 \times 0 = 6 + 0 + 0 = 6,$$

$$c_{22} = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = 6 \times 3 + 0 \times (-2) + 1 \times 1 = 18 + 0 + 1 = 19,$$

$$c_{23} = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} = 6 \times 0 + 0 \times 4 + 1 \times 0 = 0 + 0 + 0 = 0,$$

$$c_{24} = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = 6 \times 2 + 0 \times 1 + 1 \times (-2) = 12 + 0 - 2 = 10,$$

ossia $C = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 4 & -1 \\ 6 & 19 & 0 & 10 \end{pmatrix}$.

N.B. Il prodotto AB di due matrici A e B **ESISTE SOLO SE IL NUMERO DELLE COLONNE DI A E' UGUALE AL NUMERO DELLE RIGHE DI** B.

Si definisce cosìun'**operazione di moltiplicazione di matrici**

$$M_{mn}(\mathbb{C}) \times M_{nr}(\mathbb{C}) \to M_{mr}(\mathbb{C}) \quad (\text{risp.} \quad M_{mn}(\mathbb{R}) \times M_{nr}(\mathbb{R}) \to M_{mr}(\mathbb{R}))$$
$$(A, B) \mapsto AB.$$

Proprietà della moltiplicazione di matrici

(1) associatività: $A(BC) = (AB)C$, se A, B e C sono matrici tali che tutte le moltiplicazioni scritte siano possibili;

(2) distributività rispetto alla somma:

$A(B + C) = AB + AC$, se A, B e C sono matrici tali che tutti i prodotti e tutte le somme scritte siano possibili, e

$(B + C)A = BA + CA$, se A, B e C sono matrici tali che tutti i prodotti e tutte le somme scritte siano possibili;

(3) $\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B)$, se A e B sono matrici tali che il prodotto AB esista ed α è uno scalare;

(4) $I_m A = A = A I_n$ per ogni matrice A, $m \times n$;

(5) $\mathbb{O}_{k\times m} A = \mathbb{O}_{k\times n}$ e $A\mathbb{O}_{n\times k} = \mathbb{O}_{m\times k}$ per ogni matrice A, $m \times n$, ed ogni numero naturale k.

N.B.

– la moltiplicazione di matrici **NON** gode della proprietà **commutativa**: date due matrici A, $m \times n$, e B, $r \times t$,

(1) se esiste AB (ossia se $r = n$) non è detto che esista BA (perchè BA esista occorre che $m = t$).

(2) Se sia AB che BA esistono, ossia se A è $m \times n$, e B è $n \times m$, allora AB è $m \times m$ e BA è $n \times n$. Se $m \neq n$, senz'altro $AB \neq BA$.

(3) Se anche A e B sono entrambe $m \times m$, per cui AB e BA entrambe esistono ed entrambe sono $m \times m$, non è egualmente detto che AB e BA siano uguali. Ad esempio:

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 8 & 1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} -2 & 8 \\ -1 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

– Per la moltiplicazione di matrici **NON** vale la **legge di cancellazione per il prodotto**: esistono matrici A e B, con $A \neq \mathbb{O} \neq B$ e $AB = \mathbb{O}$. Ad esempio:

$$\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 & 6 \\ -4 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Esercizio. Per ogni $a \in \mathbb{R}$ sia $S_a = aI_2 = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$. Si provi:

(1) $S_a A = A S_a$ per ogni $A \in M_2(\mathbb{R})$.

(2) Se $B \in M_2(\mathbb{R})$ è tale che $BA = AB$ per ogni $A \in M_2(\mathbb{R})$, allora $B = S_a$ per un opportuno $a \in \mathbb{R}$.

Svolgimento.

(1) Sia $A \in M_2(\mathbb{R})$. Allora

$$S_a A = (aI_2)A = a(I_2A) = aA = a(AI_a).$$

Poichè per la proprietà (3) della moltiplicazione di matrici si ha che $a(AI_a) = A(aI_a)$, si conclude che $S_aA = AS_a$.

(2) Sia $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$ tale che

$$(*) \qquad BA = AB \quad \text{per ogni} \quad A \in M_2(\mathbb{R}).$$

In particolare prendendo in $(*)$ come matrice A la matrice $\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, si ottiene:

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Se ne deduce che $b = c = 0$, ossia che la matrice B deve essere una matrice diagonale: $B = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}$.

Tenendo conto del fatto che $B = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}$ e prendendo in $(*)$ come matrice A la matrice $A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ si ottiene:

$$\begin{pmatrix} a & a \\ d & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & d \\ a & d \end{pmatrix}.$$

Se ne deduce che $d = a$, e quindi che

$$B = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} = S_a.$$

Nell'esercizio si è provato che **le matrici reali 2×2 che commutano con ogni matrice reale 2×2 sono esattamente le matrici reali scalari di ordine 2**.

Allo stesso modo si può vedere che le matrici complesse 2×2 che commutano con ogni matrice complessa 2×2 sono esattamente le matrici complesse scalari di ordine 2.

In generale è possibile provare: **le matrici reali (risp. complesse) m×m che commutano con ogni matrice reale (risp. complessa) m×m sono esattamente le matrici reali (risp. complesse) scalari di ordine m**.

Def. 4. Sia A una matrice quadrata. Si definisce **la potenza n-esima di** A, dove $n \geq 1$ è un numero naturale, nel seguente modo:

$$A^1 = A, \quad A^2 = AA^1, \quad A^3 = AA^2, \quad \dots \quad A^n = AA^{n-1}.$$

Si pone poi $A^0 = I$.

Come per le potenze dei numeri, si ha la seguente **proprietà delle potenze**: per ogni coppia di numeri naturali m ed n ed ogni matrice quadrata A si ha

$$A^m A^n = A^{m+n} = A^n A^m.$$

Def. 5. Una matrice A si dice **non singolare** (o anche invertibile), se esiste una matrice B tale che $AB = I = BA$. Vedremo che se una tale B esiste, allora è unica. Essa si chiama **l'inversa** di A e si indica con il simbolo A^{-1}.

Proposizione. Se A e B sono due matrici non singolari tali che esista AB, allora anche il prodotto AB è una matrice non singolare e $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

In generale se $A_1, A_2, \dots, A_{r-1}, A_r$ sono matrici non singolari tali che esista il prodotto $A_1 A_2 \dots A_{r-1} A_r$, allora anche il prodotto $A_1 A_2 \dots A_{r-1} A_r$ è non singolare e si ha

$$(A_1 A_2 \dots A_{r-1} A_r)^{-1} = A_r^{-1} A_{r-1}^{-1} \dots A_2^{-1} A_1^{-1}.$$

Dimostrazione. Facciamo la dimostrazione supponendo che il prodotto abbia solo due fattori. Osserviamo innanzitutto che se A e B sono matrici non singolari tali che esista AB, allora A, B, A^{-1} e B^{-1} sono tutte matrici $m \times m$ per un opportuno m.

Si ha poi:

$$(AB)B^{-1}A^{-1} = A(BB^{-1})A^{-1} = AIA^{-1} = AA^{-1} = I,$$

$$(B^{-1}A^{-1})(AB) = B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}IB = B^{-1}B = I.$$

La dimostrazione del risultato quando il numero dei fattori nel prodotto è r è analoga.

LEZIONE 3

Trasposte, coniugate, H-trasposte

Def. 1. Data una matrice $A = [a_{ij}]$, $m \times n$, si chiama **trasposta** di A la matrice $n \times m$ $B = [b_{ij}]$ definita da:

$$b_{ij} = a_{ji} \quad \text{per ogni } 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n.$$

La matrice B si indica con il simbolo A^T.

Esempio 1. Se $A = \begin{pmatrix} 4i & 3 & -2 \\ 1 & 2-5i & 0 \end{pmatrix}$, allora la trasposta di A è

$$A^T = \begin{pmatrix} 4i & 1 \\ 3 & 2-5i \\ -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Def. 2. Data una matrice $A = [a_{ij}]$, $m \times n$, si chiama **coniugata** di A la matrice $m \times n$ $B = [b_{ij}]$ definita da:

$$b_{ij} = \overline{a}_{ij} \quad \text{per ogni } 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n,$$

ove se $z = a + ib$ è un numero complesso espresso in forma algebrica (cioè a e b sono numeri reali), $\overline{z} = a - ib$ è il suo coniugato. La matrice B si indica con il simbolo $\overline{A}$.

Esempio 2. Se $A = \begin{pmatrix} 4i & 3 & -2 \\ 1 & 2-5i & 0 \end{pmatrix}$, allora la coniugata di A è

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} \overline{4i} & \overline{3} & \overline{-2} \\ \overline{1} & \overline{2-5i} & \overline{0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4i & 3 & -2 \\ 1 & 2+5i & 0 \end{pmatrix}.$$

Def. 3. Data una matrice $A = [a_{ij}]$, $m \times n$, si chiama **H-trasposta** di A la matrice $n \times m$ $B = [b_{ij}]$ definita da:

$$b_{ij} = \overline{a}_{ji} \quad \text{per ogni } 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n.$$

La matrice B si indica con il simbolo A^H.

Si noti che per ottenere la H-trasposta di A si può procedere indifferentemente in uno dei due seguenti modi:

– o si calcola prima la trasposta di A e di quest'ultima si calcola poi la coniugata (ossia $A^H = \overline{A^T}$),

– oppure si calcola prima la coniugata di A e di quest'ultima si calcola poi la trasposta (ossia $A^H = (\overline{A})^T$).

Esempio 3. Se $A = \begin{pmatrix} 4i & 3 & -2 \\ 1 & 2-5i & 0 \end{pmatrix}$, allora la H-trasposta di A è

$$A^H = \overline{A^T} = \begin{pmatrix} \overline{4i} & \overline{1} \\ \overline{3} & \overline{2-5i} \\ \overline{-2} & \overline{0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4i & 1 \\ 3 & 2+5i \\ -2 & 0 \end{pmatrix},$$

ma anche

$$A^H = (\overline{A})^T = \begin{pmatrix} \overline{4i} & \overline{3} & \overline{-2} \\ \overline{1} & \overline{2-5i} & \overline{0} \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} -4i & 3 & -2 \\ 1 & 2+5i & 0 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} -4i & 1 \\ 3 & 2+5i \\ -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Proprietà delle coniugate

Siano A e B matrici per cui siano possibili le operazioni indicate, e sia α uno scalare. Allora si ha:

(1) $\overline{\overline{A}} = A$;

(2) $\overline{(A+B)} = \overline{A} + \overline{B}$, e $\overline{(A-B)} = \overline{A} - \overline{B}$;

(3) $\overline{\alpha A} = \overline{\alpha}\,\overline{A}$;

(4) $\overline{AB} = \overline{A}\,\overline{B}$.

Le proprietà delle coniugate seguono dalla definizione di coniugata di una matrice, e dalle definizioni di prodotto di una matrice per uno scalare e di prodotto di due matrici.

Proprietà delle trasposte e delle H-trasposte

Siano A e B matrici per cui siano possibili le operazioni indicate, e sia α uno scalare. Allora si ha:

$$
\begin{array}{lll}
(1): & (A^T)^T = A; & (A^H)^H = A; \\
(2): & (A+B)^T = A^T + B^T; & (A+B)^H = A^H + B^H; \\
 & (A-B)^T = A^T - B^T; & (A+B)^H = A^H + B^H; \\
(3): & (\alpha A)^T = \alpha A^T; & (\alpha A)^H = \overline{\alpha} A^H; \\
(4): & (AB)^T = B^T A^T; & (AB)^H = B^H A^H.
\end{array}
$$

Dimostrazione Per provare (1),(2) e (3) basta applicare le definizioni di trasposta, di H-trasposta, di somma di matrici e di prodotto di matrici per scalari.

Per provare la prima uguaglianza di (4), supponiamo che $A = [a_{ij}]$ sia $m \times n$ e $B = [b_{ij}]$ sia $n \times r$, e poniamo $AB = C = [c_{ij}]$ e $B^T A^T = D = [d_{ij}]$. Poichè B^T è $r \times n$ ed A^T è $n \times m$, allora D è $r \times m$, come C^T. L'elemento di posto (i,j) di D è il prodotto della i-esima riga di B^T per la j-esima colonna di A^T. Poichè la i-esima riga di B^T è la i-esima colonna di B pensata come vettore riga, e la j-esima colonna di A^T è la j-esima riga di A pensata come vettore colonna, allora $d_{ij} = \begin{pmatrix} b_{1i} & b_{2i} & \dots & b_{ni} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{j1} \\ a_{j2} \\ \dots \\ a_{jn} \end{pmatrix} =$

$$
= \sum_{1 \le l \le n} b_{li} a_{jl} = \sum_{1 \le l \le n} a_{jl} b_{li} = \begin{pmatrix} a_{j1} & a_{j2} & \dots & a_{jn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{1i} \\ b_{2i} \\ \dots \\ b_{ni} \end{pmatrix} = c_{ji}.
$$

Dalla definizione di trasposta (di C) si ottiene la prima uguaglianza di (4).

Per la seconda, si noti che la definizione di H-trasposta, la proprietà (4) delle coniugate e la proprietà $(AB)^T = B^T A^T$ che abbiamo già dimostrato implicano:

$$
(AB)^H = \overline{(AB)}^T = (\overline{A} \quad \overline{B})^T = \overline{B}^T \overline{A}^T = B^H A^H.
$$

Definizioni 4,5,6,7 Una matrice A si dice:

– **simmetrica** se coincide con la sua trasposta (ossia se $A = A^T$);

– **hermitiana** se coincide con la sua H-trasposta (ossia se $A = A^H$);

– **anti-simmetrica** se coincide con l'opposta della sua trasposta (ossia se $A = -A^T$, oppure, ed è lo stesso, se $A^T = -A$);

– **anti-hermitiana** se coincide con l'opposta della sua H-trasposta (ossia se $A = -A^H$, oppure, ed è lo stesso, se $A^H = -A$).

Si noti che se A è simmetrica, o hermitiana, o anti-simmetrica, o infine anti-hermitiana, allora A è quadrata.

Esempio 4. Siano

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 2+i \\ 2-i & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 2+i \\ -2+i & 0 \end{pmatrix}.$$

Allora A è simmetrica, B è hermitiana, C è anti-simmetrica e D è anti-hermitiana.

Dalla proprietà (4) della trasposta e della H-trasposta segue che

– la somma di due matrici simmetriche è una matrice simmetrica;

– la somma di due matrici hermitiane è una matrice hermitiana;

– la somma di due matrici anti-simmetriche è una matrice anti-simmetrica;

– la somma di due matrici anti-hermitiane è una matrice anti-hermitiana.

Esempio 5. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ sono simmetriche, ma $AB = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ non è simmetrica. Dunque **il prodotto di due matrici simmetriche puó essere una matrice non simmetrica**.

Esempio 6. $A = \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 2 & i \\ -i & 2 \end{pmatrix}$ sono hermitiane, ma $AB = \begin{pmatrix} 3 & 3i \\ -2i & 1 \end{pmatrix}$ non è hermitiana. Dunque **il prodotto di due matrici hermitiane puó essere una matrice non hermitiana**.

Esempio 7. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ è anti-simmetrica, ma $A^2 = AA = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ non è anti-simmetrica. Dunque **il prodotto di due matrici anti-simmetriche puó essere una matrice non anti-simmetrica**.

Esempio 8. $A = \begin{pmatrix} i & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}$ sono anti-hermitiane, ma $AB = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ non è anti-hermitiana. Dunque **il prodotto di due matrici anti-hermitiane puó essere una matrice non anti-hermitiana**.

Esercizio: (Decomposizione di una matrice quadrata nella parte hermitiana ed anti-hermitiana)

Sia A una matrice quadrata $m \times m$. Allora esistono $B = \frac{1}{2}(A + A^H)$ e $C = \frac{1}{2}(A - A^H)$.

Si provi che:

$-B$ è hermitiana,

– C è antihermitiana,

– $A = B + C$,

– se D ed E sono due matrici tali che

$$\begin{cases} D \text{ è hermitiana} \\ E \text{ è anti-hermitiana} \\ D + E = A \end{cases}$$

allora $D = \frac{1}{2}(A + A^H)$ ed $E = \frac{1}{2}(A - A^H)$.

Ossia: **ogni matrice quadrata A si puó scrivere in un modo unico come somma di una matrice hermitiana, $\frac{1}{2}(\mathbf{A}+\mathbf{A}^H)$, ed una matrice anti-hermitiana, $\frac{1}{2}(\mathbf{A}\text{-}\mathbf{A}^H)$.**

$\frac{1}{2}(A + A^H)$ si chiama **la parte hermitiana di** A e $\frac{1}{2}(A - A^H)$ si chiama **la parte anti-hermitiana di** A.

Svolgimento:

Poichè A è $m \times m$, anche A^H è $m \times m$, per cui esistono sia $A + A^H$ che $A - A^H$, entrambe $m \times m$, e dunque esistono anche $B = \frac{1}{2}(A + A^H)$ e $C = \frac{1}{2}(A - A^H)$. Allora, poichè B e C sono entrambe $m \times m$, esiste $B + C$, ed è:

$$B + C = \frac{1}{2}(A + A^H) + \frac{1}{2}(A - A^H) = \frac{1}{2}A + \frac{1}{2}A^H + \frac{1}{2}A - \frac{1}{2}A^H = A.$$

La matrice B è hermitiana:

$$B^H = (\frac{1}{2}(A + A^H))^H = \overline{\frac{1}{2}}(A + A^H)^H = \frac{1}{2}(A^H + (A^H)^H) = \frac{1}{2}(A^H + A) = B.$$

La matrice C è anti-hermitiana:

$$C^H = (\frac{1}{2}(A - A^H))^H = \overline{\frac{1}{2}}(A - A^H)^H = \frac{1}{2}(A^H - (A^H)^H) = \frac{1}{2}(A^H - A) = -C.$$

Abbiamo quindi visto per ogni matrice quadrata A **esistono** una matrice hermitiana, $\frac{1}{2}(A + A^H)$, ed una matrice antihermitiana $\frac{1}{2}(A - A^H)$ tali che A sia la loro somma.

Vogliamo ora provare che se A è una matrice quadrata e D ed E sono matrici tali che

$$\begin{cases} D \text{ è hermitiana} \\ E \text{ è anti-hermitiana} \\ D + E = A \end{cases}$$

allora $D = \frac{1}{2}(A + A^H)$ ed $E = \frac{1}{2}(A - A^H)$.

Poniamo $B = \frac{1}{2}(A + A^H)$ e $C = \frac{1}{2}(A - A^H)$. Poichè abbiamo visto che $A = B + C$ e stiamo supponendo che $A = D + E$, allora

$$(*) \qquad B + C = D + E.$$

Da (*) segue che anche $(B + C)^H = (D + E)^H$.

Poichè abbiamo visto che $B^H = B$ e $C^H = -C$, allora

$$(B + C)^H = B^H + C^H = B - C.$$

Poichè stiamo supponendo che $D^H = D$ ed $E^H = -E$, allora

$$(D + E)^H = D^H + E^H = D - E.$$

Quindi da $(B + C)^H = (D + E)^H$ segue

$$(**) \qquad B - C = D - E.$$

Sommando membro a membro (*) e (**) otteniamo $2B = 2D$, da cui, moltiplicando entrambi i membri dell'uguaglianza per $\frac{1}{2}$, $D = B = \frac{1}{2}(A + A^H)$.

Sottraendo membro a membro (*) e (**) otteniamo $-2C = -2E$, da cui, moltiplicando entrambi i membri dell'uguaglianza per $-\frac{1}{2}$, $E = C = \frac{1}{2}(A - A^H)$.

Abbiamo quindi provato che data una matrice quadrata A, esistono un'**unica** matrice hermitiana B ed un'**unica** matrice anti-hermitiana C tali che $A = B + C$ (inoltre $B = \frac{1}{2}(A + A^H)$ e $C = \frac{1}{2}(A - A^H)$).

Esempio 9. Se $A = \begin{pmatrix} 1+i & 6i \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$, allora $A^H = \overline{A^T} = \begin{pmatrix} \overline{1+i} & \overline{4} \\ \overline{6i} & \overline{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-i & 4 \\ -6i & 2 \end{pmatrix}$, per cui la parte hermitiana di A è

$$\frac{1}{2}(A + A^H) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1+i+1-i & 6i+4 \\ 4-6i & 2+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2+3i \\ 2-3i & 2 \end{pmatrix},$$

e la parte anti-hermitiana di A è

$$\frac{1}{2}(A - A^H) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1+i-1+i & 6i-4 \\ 4+6i & 2-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i & -2+3i \\ 2+3i & 0 \end{pmatrix}.$$

Quanto detto generalizza ció che già sappiamo per i numeri, ossia le matrici 1×1. Sappiamo infatti che per ogni numero complesso z esistono e sono unici due numeri reali a e b tali che $z = a + ib$ (tale espressione si chiama la forma algebrica di z).

Ogni numero reale a è una matrice 1×1 hermitiana:

$$a^H = \overline{a^T} = \overline{a} = a.$$

Ogni numero immaginario puro ib (ove b è un numero reale) è una matrice 1×1 anti-hermitiana:

$$(ib)^H = \overline{(ib)^T} = \overline{ib} = \overline{i} \quad \overline{b} = (-i)b = -(ib).$$

Quindi la forma algebrica di z, ossia l'espressione $z = a + ib$ con a e b numeri reali, è l'espressione della matrice 1×1 z come somma di una matrice hermitiana, a, ed una matrice anti-hermitiana, ib.

Un calcolo diretto mostra che a e b sono proprio la parte hermitiana e la parte anti-hermitiana di z: poichè $z^H = \overline{z^T} = \overline{z} = a - ib$, allora

$$\frac{1}{2}(z + z^H) = \frac{1}{2}(a + ib + a - ib) = a \quad \text{e} \quad \frac{1}{2}(z - z^H) = \frac{1}{2}(a + ib - a + ib) = ib.$$

LEZIONE 4

Matrici a blocchi

Def. 1. Data una matrice A si chiama **sottomatrice** di A ogni matrice che si ottiene da A sopprimendo alcune righe ed alcune colonne di A.

Esempio 1. Se $A = \begin{pmatrix} 4i & 3 & -2 & 9 & 0 \\ 1 & 5i & 0 & 4 & 2 \\ 6 & 7 & 2 & 8 & 0 \end{pmatrix}$, allora

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 5i & 0 & 2 \\ 6 & 7 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 4i & 3 & 9 \\ 6 & 7 & 8 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad D = \begin{pmatrix} 4i & -2 & 9 & 0 \\ 1 & 0 & 4 & 2 \\ 6 & 2 & 8 & 0 \end{pmatrix}$$

sono tre sottomatrici di A: B si ottiene da A sopprimendo la 1^a riga e la 4^a colonna, C si ottiene da A sopprimendo la 2^a riga, la 3^a e la 5^a colonna, D si ottiene da sopprimendo solo la 2^a colonna.

Ripartire una matrice A in blocchi significa tracciare delle linee orizzontali (lunghe tanto quanto lo è la matrice) e delle righe verticali (alte tanto quanto lo è la matrice): i **blocchi** della ripartizione effettuata sono le sottomatrici di A che le linee tracciate delimitano.

Esempio 2. Se $A = \begin{pmatrix} 4i & 3 & -2 & 9 & 0 \\ 1 & 5i & 0 & 4 & 2 \\ 6 & 7 & 2 & 8 & 0 \end{pmatrix}$ è la matrice considerata nell'Esempio 1, allora $A = \left(\begin{array}{cc|c|cc} 4i & 3 & -2 & 9 & 0 \\ 1 & 5i & 0 & 4 & 2 \\ \hline 6 & 7 & 2 & 8 & 0 \end{array}\right)$ è una ripartizione di A in blocchi. I blocchi di questa ripartizione sono:

$$A_{11} = \begin{pmatrix} 4i & 3 \\ 1 & 5i \end{pmatrix}, \quad A_{12} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad A_{13} = \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 4 & 2 \end{pmatrix},$$

$$A_{21} = \begin{pmatrix} 6 & 7 \end{pmatrix}, \quad A_{22} = \begin{pmatrix} 2 \end{pmatrix}, \quad A_{23} = \begin{pmatrix} 8 & 0 \end{pmatrix}.$$

Per indicare che A è stata ripartita nei blocchi $A_{11}, A_{12}, A_{13}, A_{21}, A_{22}$, ed A_{23} si scrive

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \end{pmatrix}.$$

Le notazioni scelte suggeriscono che quando si ripartisce una matrice A in blocchi, si puó pensare ad A come ad una matrice i cui elementi sono i blocchi della ripartizione effettuata.

Quando una matrice è ripartita in blocchi si dice che è una **matrice a blocchi**.

Prodotto di una matrice a blocchi per uno scalare

Siano $A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1r} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2r} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{t1} & A_{t2} & \dots & A_{tr} \end{pmatrix}$ una matrice a blocchi ed α uno scalare. Allora

$$\alpha A = \begin{pmatrix} \alpha A_{11} & \alpha A_{12} & \dots & \alpha A_{1r} \\ \alpha A_{21} & \alpha A_{22} & \dots & \alpha A_{2r} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha A_{t1} & \alpha A_{t2} & \dots & \alpha A_{tr} \end{pmatrix}.$$

Esempio 3. Se $A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \end{pmatrix}$ è la matrice a blocchi considerata nell'Esempio 2, ed $\alpha = -i$, allora $\alpha A = -iA = \begin{pmatrix} -iA_{11} & -iA_{12} & -iA_{13} \\ -iA_{21} & -iA_{22} & -iA_{23} \end{pmatrix}$. Poichè

$$-iA_{11} = \begin{pmatrix} 4 & -3i \\ -i & 5 \end{pmatrix}, \quad -iA_{12} = \begin{pmatrix} 2i \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (-i)A_{13} = \begin{pmatrix} -9i & 0 \\ -4i & -2i \end{pmatrix},$$

$$(-i)A_{21} = \begin{pmatrix} -6i & -7i \end{pmatrix}, \quad (-i)A_{22} = \begin{pmatrix} -2i \end{pmatrix}, \quad (-i)A_{23} = \begin{pmatrix} -8i & 0 \end{pmatrix},$$

allora $A = \begin{pmatrix} 4 & -3i & 2i & -9i & 0 \\ -i & 5 & 0 & -4i & -2i \\ -6i & -7i & -2i & -8i & 0 \end{pmatrix}$.

Somma di due matrici a blocchi

Siano $A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ & \dots & \dots & \\ A_{m1} & A_{m2} & \dots & A_{mn} \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & \dots & B_{1s} \\ & \dots & \dots & \\ B_{r1} & B_{r2} & \dots & B_{rs} \end{pmatrix}$ due matrici a blocchi.

Se

$$\begin{cases} m = r \\ n = s \\ \text{esiste } A_{ij} + B_{ij} \text{ per ogni } 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n \end{cases}$$

(l'ultima condizione è verificata se e solo se A_{ij} ha lo stesso numero di righe e lo stesso numero di colonne di B_{ij}, per ogni $1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$), allora

$$A + B = \begin{pmatrix} A_{11} + B_{11} & A_{12} + B_{12} & \dots & A_{1n} + B_{1n} \\ & \dots & \dots & \\ A_{m1} + B_{m1} & A_{m2} + B_{m2} & \dots & A_{mn} + B_{mn} \end{pmatrix}.$$

Esempio 4. Se $A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}$ sono le matrici a blocchi con blocchi

$$A_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}, A_{12} = B_{12} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, B_{21} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \end{pmatrix}, A_{22} = \begin{pmatrix} 0 \end{pmatrix}, B_{22} = \begin{pmatrix} 3 \end{pmatrix},$$

$B_{11} = \mathbb{O}_{2\times 2}$ e $A_{21} = \mathbb{O}_{1\times 2}$, allora

$$A + B = \begin{pmatrix} A_{11} + B_{11} & A_{12} + B_{12} \\ A_{21} + B_{21} & A_{22} + B_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & 2A_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 3 & -1 & 2 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

Prodotto di due matrici a blocchi

Siano $A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ & \dots & \dots & \\ A_{m1} & A_{m2} & \dots & A_{mn} \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & \dots & B_{1s} \\ & \dots & \dots & \\ B_{r1} & B_{r2} & \dots & B_{rs} \end{pmatrix}$ due matrici a blocchi.

Se $r = n$ allora $AB = C$ è la matrice a blocchi $C = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & \dots & C_{1s} \\ & \dots & \dots & \\ C_{n1} & C_{n2} & \dots & C_{ns} \end{pmatrix}$ con

$$C_{ij} = A_{i1}B_{1j} + A_{i2}B_{2j} + \cdots + A_{in}B_{nj} = \sum_{1 \leq k \leq n} A_{ik}B_{kj},$$

A CONDIZIONE CHE TUTTE LE OPERAZIONI SCRITTE SIANO DEFINITE.

Esempio 5. Se A è la matrice 4×2 a blocchi $A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$ con $A_{11} = I_2, A_{12} = 2I_2, A_{21} = 3I_2, A_{22} = 4I_2$, e B è la matrice 4×2 a blocchi $B = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}$ con $B_{11} = B_{12} = B_{21} = B_{22} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ allora $AB = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix} =$

$$= \begin{pmatrix} A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} & A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22} \\ A_{21}B_{11} + A_{22}B_{21} & A_{21}B_{12} + A_{22}B_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_2B_{11} + 2I_2B_{21} & I_2B_{12} + 2I_2B_{22} \\ 3I_2B_{11} + 4I_2B_{21} & 3I_2B_{12} + 4I_2B_{22} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 3B_{11} & 3B_{11} \\ 7B_{11} & 7B_{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & | & 3 \\ 6 & | & 6 \\ - & - & - \\ 7 & | & 7 \\ 14 & | & 14 \end{pmatrix}.$$

Applicazione del prodotto a blocchi al prodotto di due matrici

(1) Ripartizione della seconda matrice in colonne.

Siano A e B due matrici tali che esista il loro prodotto AB (quindi se A è una matrice $m \times n$ allora B è una matrice $n \times r$).

Ripartiamo B in blocchi prendendo come blocchi le sue colonne:

$$B = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & \dots & B_{1r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{b}_1 & \underline{b}_2 & \dots & \underline{b}_r \end{pmatrix}$$

dove $B_{1j} = \underline{b}_j$ è la j-esima colonna di B per ogni $1 \leq j \leq r$.

Si puó allora calcolare il prodotto AB pensando A come ad un unico blocco, e si ottiene

$$AB = A \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & \dots & B_{1r} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \underline{b}_1 & \underline{b}_2 & \dots & \underline{b}_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A\underline{b}_1 & A\underline{b}_2 & \dots & A\underline{b}_r \end{pmatrix}.$$

Per ogni $1 \leq j \leq r$, $A\underline{b}_j$ è un vettore colonna con m componenti, ed è la j-esima colonna di AB.

(2) Ripartizione della prima matrice in righe.

Come in (1), siano A e B due matrici tali che esista il loro prodotto AB (quindi se A è una matrice $m \times n$ allora B è una matrice $n \times r$).

Ripartiamo A in blocchi prendendo come blocchi le sue righe:

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} \\ A_{21} \\ \vdots \\ A_{m1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{r}_1^T \\ \underline{r}_2^T \\ \vdots \\ \underline{r}_m^T \end{pmatrix}$$

dove $A_{1i} = \underline{r}_i^T$ è la i-esima riga di A per ogni $1 \leq i \leq m$.

Si noti che indicando con $\underline{r}_i^T$ un vettore riga con n componenti, ossia una matrice $1 \times n$, stiamo indicando con $\underline{r}_i$ un vettore colonna con n componenti, ossia una matrice $n \times 1$.

Si puó allora calcolare il prodotto AB pensando B come ad un unico blocco, e si ottiene

$$AB = \begin{pmatrix} A_{11} \\ A_{21} \\ \vdots \\ A_{m1} \end{pmatrix} B = \begin{pmatrix} \underline{r}_1^T \\ \underline{r}_2^T \\ \vdots \\ \underline{r}_m^T \end{pmatrix} B = \begin{pmatrix} \underline{r}_1^T B \\ \underline{r}_2^T B \\ \vdots \\ \underline{r}_m^T B \end{pmatrix}.$$

Per ogni $1 \leq i \leq m$, $\underline{r}_i^T B$ è un vettore riga con r componenti, ed è la i-esima riga di AB.

(3) Il prodotto di una matrice per un vettore colonna.

Siano A una matrice $m \times n$ e $\underline{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$ un vettore colonna con n componenti. Allora esiste $A\underline{v}$ e puó essere calcolato come prodotto a blocchi, pensando A ripartita nei suoi blocchi colonna $A = (\underline{a}_1 \quad \underline{a}_2 \quad \dots \quad \underline{a}_n)$ e $\underline{v}$ ripartito nei suoi blocchi riga (quindi $\underline{v}$ ha n blocchi riga, ciascuno dei quali è una matrice 1×1, ossia un numero v_j):

$$A\underline{b} = (\underline{a}_1 \quad \underline{a}_2 \quad \dots \quad \underline{a}_n) \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = v_1\underline{a}_1 + v_2\underline{a}_2 + \dots + v_n\underline{a}_n.$$

In particolare $A\underline{e}_i = i$-esima colonna di A ($\underline{e}_i$ è la i-esima colonna di I_n).

(4) Il prodotto di vettore riga per una matrice.

Siano B una matrice $n \times r$ e $\underline{w}^T = (w_1 \quad w_2 \quad \dots \quad w_n)$ un vettore riga con n componenti. Allora esiste $\underline{w}^T B$ e puó essere calcolato come prodotto a blocchi, pensando B ripartita nei suoi blocchi riga $B = \begin{pmatrix} \underline{s}_1^T \\ \underline{s}_2^T \\ \vdots \\ \underline{s}_n^T \end{pmatrix}$ e $\underline{w}^T$ ripartito nei suoi blocchi colonna (quindi $\underline{w}^T$ ha n blocchi riga, ciascuno dei quali è una matrice 1×1, ossia un numero w_j):

$$\underline{w}^T B = (w_1 \quad w_2 \quad \dots \quad w_n) \begin{pmatrix} \underline{s}_1^T \\ \underline{s}_2^T \\ \vdots \\ \underline{s}_n^T \end{pmatrix} = w_1 \underline{s}_1^T + w_2 \underline{s}_2^T + \ldots + w_n \underline{s}_n^T.$$

In particolare $\underline{e}_i^T B = i$-esima riga di B ($\underline{e}_i$ è la i-esima colonna di I_n).

Siano A una matrice $m \times n$ e B una matrice $n \times r$.

Da (1) e (3) si ricava che la j-esima colonna di AB è $b_{1j}\underline{a}_1 + b_{2j}\underline{a}_2 + \ldots + b_{nj}\underline{a}_n$ ove $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \ldots \underline{a}_n$ sono le colonne di A e $\begin{pmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{nj} \end{pmatrix}$ è la j-esima colonna di B.

Da (2) e (4) si ricava che la i-esima riga di AB è $a_{i1}\underline{s}_1^T + a_{i2}\underline{s}_2^T + \ldots + a_{in}\underline{s}_n^T$ ove $\underline{s}_1^T, \underline{s}_2^T, \ldots \underline{s}_n^T$ sono le righe di B e $(a_{i1} \quad a_{i2} \quad \dots \quad a_{in})$ è la i-esima riga di A.

(5) Ripartizione della prima matrice in colonne e della seconda in righe.

Siano A e B due matrici tali che esista il loro prodotto AB (quindi se A è una matrice $m \times n$ allora B è una matrice $n \times r$).

Ripartiamo A in blocchi prendendo come blocchi le sue colonne:

$$A = (\underline{a}_1 \quad \underline{a}_2 \quad \dots \quad \underline{a}_n),$$

e B prendendo come blocchi le sue righe:

$$B = \begin{pmatrix} \underline{s}_1^T \\ \underline{s}_2^T \\ \vdots \\ \underline{s}_n^T \end{pmatrix}.$$

Allora AB puó essere calcolato come prodotto a blocchi:

$$AB = \begin{pmatrix} \underline{a}_1 & \underline{a}_2 & \dots & \underline{a}_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{s}_1^T \\ \underline{s}_2^T \\ \vdots \\ \underline{s}_n^T \end{pmatrix} = \underline{a}_1\underline{s}_1^T + \underline{a}_2\underline{s}_2^T + \ldots + \underline{a}_n\underline{s}_n^T.$$

Si noti che ciascun addendo $\underline{a}_i\underline{s}_i^T$ è una matrice $m \times r$.

LEZIONE 5

Matrici elementari e loro inverse

Si fissi m un numero naturale.

Per ogni $1 \leq i, j \leq m$ con $i \neq j$ siano

– $E_{ij}(c)$ (ove c è uno scalare) la matrice $m \times m$ con tutti gli elementi diagonali uguali ad 1, l'elemento di posto (i, j) uguale a c ed ogni altro elemento nullo.

In simboli: $E_{ij}(c) = [e_{kr}]$ dove $e_{kr} = \begin{cases} 1 & \text{se } k = r \\ c & \text{se } (k, r) = (i, j) \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccc} & & & j & \\ & & & \downarrow & \end{array} \\ i \rightarrow & \boxed{\begin{array}{ccccc} 1 & & & & \\ & 1 & & c & \\ & & \ddots & & \\ & & & 1 & \\ & & & & 1 \end{array}} \end{array} = E_{ij}(c)$$

Si noti che $E_{ij}(c)$ è la matrice che si ottiene da I_m sommando alla i-esima riga di I_m la j-esima riga di I_m moltiplicata per c.

– **se c≠0**, $E_i(c)$ la matrice $m \times m$ diagonale con tutti gli elementi diagonali uguali ad 1 tranne quell di posto (i, i), uguale a c. In simboli: $E_i(c) = [e_{kr}]$ dove

$$e_{kr} = \begin{cases} 1 & \text{se } k = r \neq i \\ c & \text{se } k = r = i \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$\begin{array}{r} \\ \\ \\ i \rightarrow \\ \\ \end{array}\boxed{\begin{matrix} 1 & & & & \\ & 1 & & \mathbb{O} & \\ & & \ddots & & \\ & \mathbb{O} & & c & \\ & & & & 1\end{matrix}} = E_i(c)$$

Si noti $E_i(c)$ è la matrice che si ottiene da I_m moltiplicando la i-esima riga di I_m per c.

– E_{ij} la matrice $m \times m$ che si ottiene da I_m scambiando la i-esima con la j-esima riga. In simboli: $E_{ij} = [e_{kr}]$ dove $e_{kr} = \begin{cases} 1 & \text{se } k = r \notin \{i, j\} \\ 1 & \text{se } (k, r) = (i, j) \\ 1 & \text{se } (k, r) = (j, i) \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$

$$
\begin{array}{r|ccccccccc|l}
 & & & & i & & j & & & & \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow & & & & \\ \cline{2-10}
 & 1 & & & & & & & & & \\
 & & \ddots & & & & & & & & \\
 & & & 1 & & & & & & & \\
i \rightarrow & & & & 0 & \dots & 1 & & & & \\
 & & & & \vdots & \ddots & \vdots & & & & = E_{ij} \\
j \rightarrow & & & & 1 & \dots & 0 & & & & \\
 & & & & & & & 1 & & & \\
 & & & & & & & & \ddots & & \\
 & & & & & & & & & 1 & \\ \cline{2-10}
\end{array}
$$

N.B. In genere si deduce dal contesto quante quante righe (e quindi quante colonne, dal momento che si tratta di matrici quadrate) hanno le matrici elementari.

Def. 1. Si chiama **matrice elementare** ogni matrice del tipo $E_{ij}(c)$, oppure del tipo $E_i(c)$, o infine del tipo E_{ij}.

Un calcolo diretto mostra che

– se $E_{ij}(c)$ è $m \times m$, allora per ogni $1 \leq i, j \leq m$ con $i \neq j$ si ha:

$$E_{ij}(c)E_{ij}(-c) = I_m = E_{ij}(-c)E_{ij}(c).$$

Quindi $E_{ij}(c)$ è non singolare e $E_{ij}(c)^{-1} = E_{ij}(-c)$.

– se $E_i(c)$ è $m \times m$ **e** $c \neq 0$, allora per ogni $1 \leq i \leq m$ si ha:

$$E_i(c)E_i(\frac{1}{c}) = I_m = E_i(\frac{1}{c})E_i(c).$$

Quindi $E_i(c)$ è non singolare e $E_i(c)^{-1} = E_i(\frac{1}{c})$.

– se E_{ij} è $m \times m$, allora per ogni $1 \leq i, j \leq m$ con $i \neq j$ si ha:

$$E_{ij}E_{ij} = I_m.$$

Quindi E_{ij} è non singolare e $E_{ij}^{-1} = E_{ij}$.

Operazioni elementari sulle righe di una matrice $m \times n$

Sia A una matrice $m \times n$.

– $E_{ij}(c)A$ è la matrice che si ottiene da A sommando alla i-esima riga di A la j-esima riga di A moltiplicata per lo scalare c.

Quindi se $A = [a_{kr}]$, $E_{ij}(c)A$ ha tutte le righe diverse dalla i-esima uguali alle corrispondenti righe di A, ed ha come i-esima riga

$$(\, a_{i1} + ca_{j1} \quad a_{i2} + ca_{j2} \quad \dots \quad a_{in} + ca_{jn} \,)\,.$$

– $E_i(c)A$ è la matrice che si ottiene da A moltiplicando la i-esima riga di A per lo scalare c ($c \neq 0$).

Quindi se $A = [a_{kr}]$, $E_i(c)A$ ha tutte le righe diverse dalla i-esima uguali alle corrispondenti righe di A, ed ha come i-esima riga

$$(\, ca_{i1} \quad ca_{i2} \quad \dots \quad ca_{in} \,)\,.$$

– $E_{ij}A$ è la matrice che si ottiene da A scambiando la i-esima riga di A con la j-esima.

Quindi se $A = [a_{kr}]$, $E_{ij}A$ ha tutte le righe diverse dalla i-esima e dalla j-esima uguali alle corrispondenti righe di A, ed ha come i-esima e come j-esima riga rispettivamente:

$$(\, a_{j1} \quad a_{j2} \quad \dots \quad a_{jn} \,) \quad \text{e} \quad (\, a_{i1} \quad a_{i2} \quad \dots \quad a_{in} \,)\,.$$

Def. 2. Si chiamano **operazioni elementari sulle righe di** A le tre seguenti operazioni:

– sommare ad una riga un'altra riga di A moltiplicata per uno scalare,

– moltiplicare una riga di A per uno scalare non nullo,

– scambiare due righe di A.

Ciascuna di esse corrisponde alla premoltiplicazione di A per un'opportuna matrice elementare.

Eliminazione di Gauss senza scambi di righe

Sia A una matrice $m \times n$, con $A \neq \mathbb{O}_{m\times n}$.

Illustriamo ora un algoritmo che consiste in un insieme di operazioni sulle righe di A e che viene chiamato **un'eliminazione di Gauss senza scambi di righe su** A.

L'obiettivo di tale algoritmo è costruire a partire da A una matrice $m \times n$ U con

– le prime k-righe non nulle e le rimanenti $m-k$ righe nulle (dove k è un opportuno numero compreso tra 1 ed m che dipende da A),

– gli elementi non nulli disposti come sopra ad una scala che scende da sinistra a destra, a partire dalla prima riga fino alla k-esima riga, ogni cui gradino è "alto" una riga ed è "lungo" una o piú colonne (la scala ha quindi k gradini),

– gli elementi alla base di ciascun gradino di questa scala uguali ad 1,

ossia una matrice del tipo:

$$\begin{pmatrix} & \underline{|1} & \underline{.} & \underline{.} & \underline{.} & \underline{.} & & & & & & & & \\ & & & & & & \underline{|1} & \underline{.} & \underline{.} & & & & & \\ & & & & & & & & & \underline{|1} & \underline{.} & \underline{.} & \underline{.} & \underline{.} \\ & & & & & & & & & & & & & \end{pmatrix}$$

dove gli elementi al di sotto della scalinata sono tutti nulli, e gli eventuali elementi non nulli si trovano al di sopra della scalinata (in questo disegno la scala ha 3 gradini).

Le operazioni lecite in questo algoritmo sono solo di due tipi:

– sommare ad una riga di A un'altra riga di A moltiplicata per un scalare,

– moltiplicare una riga di A per uno scalare non nullo.

L'applicazione di questo algoritmo facilita la soluzione di alcuni problemi, come ad esempio la risoluzione dei sistemi lineari.

Esistono matrici per cui questo algoritmo fallisce, ossia per le quali questo algoritmo non porta alla costruzione di U.

Per tali matrici introdurremo nella prossima lezione un algoritmo piú ricco (in cui è lecita anche la terza operazione elementare sulle righe di A).

Esempio 1. Per $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ l'eliminazione di Gauss senza scambi di righe fallisce: non è possibile, utilizzando le due operazioni lecite, arrivare ad una matrice del tipo $U = \begin{pmatrix} 1 & * \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, oppure $U = \begin{pmatrix} 1 & * \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, oppure $U = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Supponiamo che la prima riga di A non sia nulla

(per le matrici non nulle con la prima riga nulla l'eliminazione di Gauss senza scambi di righe fallisce).

1^o **Passaggio.** L'obiettivo del 1^o passaggio è trasformare la j_1-esima colonna nella prima colonna di I_m (il numero j_1 è definito nel seguente punto (1)).

(1) Percorrendo la prima riga di A da sinistra a destra, sia a_{1j_1} il primo elemento non nullo (quindi se $j_1 > 1$ allora $a_{11} = a_{12} = \ldots = a_{1,j_1-1} = 0$ e $a_{1j_1} \neq 0$; il piú delle volte, peró, $j_1 = 1$, ossia $a_{11} \neq 0$).

a_{1j_1} è detto **il pivot della 1^a riga**.

Se $a_{1j_1} \neq 1$,

moltiplichiamo la prima riga di A per $a_{1j_1}^{-1}$,

ottenendo cosí una matrice $m \times n$ $A_1 = [a^*_{ij}]$ che ha tutte le righe uguali a quelle di A, tranne la prima, i cui elementi sono gli elementi della prima riga di A moltiplicati per $a_{1j_1}^{-1}$, ossia divisi per a_{1j_1}. In particolare $a_{11}^* = a_{12}^* = \ldots = a_{1,j_1-1}^* = 0$ e $a_{1j_1}^* = 1$.

Poichè l'operazione che abbiamo fatto corrisponde a premoltiplicare A per la matrice elementare $E_1(a_{1j_1}^{-1})$, $m \times m$, scriviamo:

$$A \xrightarrow{E_1(a_{1j_1}^{-1})} A_1.$$

(2) Percorriamo la colonna j_1-esima dall'alto in basso, e tenendo in considerazione solo gli elementi a_{ij_1} che siano diversi da 0, per ciascun $a_{ij_1} \neq 0$ che troviamo, partendo da $i = 2$ e arrivando fino a $i = m$,

sommiamo alla riga i-esima di A_1 la prima riga di A_1 moltiplicata per $-a_{ij_1}$, (per ogni $i = 2, \ldots, m$ tale che $a_{ij_1} \neq 0$).

Otteniamo cosí una matrice $B = [b_{ij}]$ in cui la j_1-esima colonna è la prima colonna di I_m.

Poichè le operazioni che abbiamo fatto corrispondono a premoltiplicare A_1 per il prodotto di matrici elementari

$$E_{m1}(-a_{mj_1})E_{m-1,1}(-a_{m-1,j_1}) \ldots E_{31}(-a_{3j_1})E_{21}(-a_{2j_1}),$$

scriviamo:

$$A_1 \xrightarrow{E_{m1}(-a_{mj_1})E_{m-1,1}(-a_{m-1,j_1})\ldots E_{31}(-a_{3j_1})E_{21}(-a_{2j_1})} B.$$

Esempio 2. Sia $A = \begin{pmatrix} 3 & 6 & -6 & -3 & 15 \\ 2 & 5 & -5 & -1 & 10 \\ 1 & 3 & -3 & 2 & 11 \\ 0 & 5 & -5 & 7 & 6 \end{pmatrix}$.

Poichè $a_{11} \neq 0$, allora $j_1 = 1$. L'operazione richiesta al punto (1) è moltiplicare la prima riga di A per $a_{11}^{-1} = \frac{1}{3}$. La matrice A_1 che si ottiene ha come prima riga

$$\begin{pmatrix} \frac{3}{3} & \frac{6}{3} & \frac{-6}{3} & \frac{-3}{3} & \frac{15}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 1 & 5 \end{pmatrix},$$

e le altre righe uguali alle righe di B, quindi

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & -1 & 5 \\ 2 & 5 & -5 & -1 & 10 \\ 1 & 3 & -3 & 2 & 11 \\ 0 & 5 & -5 & 7 & 6 \end{pmatrix}.$$

Consideriamo la prima (qui $j_1 = 1$) colonna di A_1, $\begin{pmatrix} a_{11}^* \\ a_{21}^* \\ a_{31}^* \\ a_{41}^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Le operazioni richieste al punto (2) sono:

– poiché $a_{21}^* = 2 \neq 0$, sommare alla seconda riga di A_1 la prima riga di A_1 moltiplicata per $-a_{21}^* = -2$,

– poiché $a_{31}^* = 1 \neq 0$, sommare alla terza riga di A_1 la prima riga di A_1 moltiplicata per $-a_{31}^* = -1$.

Non occorrono altre operazioni, poichè $a_{41}^* = 0$.

La matrice B che si ottiene ha come seconda riga

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 & -5 & -1 & 10 \end{pmatrix} + (-2)\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & -1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

ha come terza riga

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -3 & 2 & 11 \end{pmatrix} + (-1)\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & -1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 3 & 6 \end{pmatrix},$$

ed ha la prima e la quarta riga uguali rispettivamente alla prima e alla quarta riga di A_1.

Quindi

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 6 \\ 0 & 5 & -5 & 7 & 6 \end{pmatrix}.$$

Supponiamo che la matrice A da cui siamo partiti sia tale che, dopo aver effettuato sulle sue righe le operazioni descritte nel 1^o passaggio, si ottenga una matrice B in cui se $j_1 > 1$ allora le prime $j_1 - 1$ colonne sono nulle, ed inoltre o tutte le righe diverse dalla prima sono nulle, oppure la seconda riga è non nulla

(per le matrici in cui questa situazione non si presenta, l'eliminazione di Gauss senza scambi di righe fallisce).

Se tutte le righe di B diverse dalla prima sono nulle, l'algoritmo si ferma a B (ossia B è la U cercata).

Altrimenti la seconda riga di B è non nulla e si procede.

2^o **Passaggio.** L'obiettivo del 2^o passaggio è trasformare la j_2-esima colonna in una colonna del tipo $\begin{pmatrix} * \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ (il numero j_2 è definito nel seguente punto (1)).

(1) Percorrendo la seconda riga di B da sinistra a destra, sia b_{2j_2} il primo elemento non nullo (quindi $b_{21} = b_{22} = \ldots = b_{2,j_2-1} = 0$ e $b_{2j_2} \neq 0$).

b_{2j_2} è detto **il pivot della 2^a riga**.

Se $b_{2j_2} \neq 1$,

moltiplichiamo la seconda riga di B per $b_{2j_2}^{-1}$,

ottenendo cosí una matrice $m \times n$ $B_1 = [b_{ij}^*]$ che ha tutte le righe uguali a quelle di B, tranne la seconda, i cui elementi sono gli elementi della seconda riga di B moltiplicati per $b_{2j_2}^{-1}$, ossia divisi per b_{2j_2}. In particolare $b_{21}^* = b_{22}^* = \ldots = b_{2,j_2-1}^* = 0$ e $b_{2j_2}^* = 1$.

Poichè l'operazione che abbiamo fatto corrisponde a premoltiplicare B per la matrice elementare $E_2(b_{2j_2}^{-1})$, $m \times m$, scriviamo:

$$B \xrightarrow{E_2(b_{2j_2}^{-1})} B_1.$$

(2) Percorriamo la colonna j_2-esima dall'alto in basso, e tenendo in considerazione solo gli elementi b_{ij_2} che siano diversi da 0, per ciascun $b_{ij_2} \neq 0$ che troviamo, partendo da $i = 3$ e arrivando fino a $i = m$,

sommiamo alla riga i-esima di B_1 la seconda riga di B_1 moltiplicata per $-b_{ij_2}$, (per ogni $i = 3, \ldots, m$ tale che $b_{ij_2} \neq 0$).

Otteniamo cosí una matrice $C = [c_{ij}]$ in cui la j_2-esima colonna è del tipo: $\begin{pmatrix} * \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, come ci eravamo prefissati.

Poichè le operazioni che abbiamo fatto corrispondono a premoltiplicare B_1 per il prodotto di matrici elementari

$$E_{m2}(-b_{mj_2})E_{m-1,2}(-b_{m-1,j_2}) \ldots E_{32}(-b_{3j_2}),$$

scriviamo:

$$B_1 \xrightarrow{E_{m2}(-b_{mj_2})E_{m-1,2}(-b_{m-1,j_2})\ldots E_{32}(-b_{3j_2})} C.$$

Esempio 3. Riprendiamo la matrice B ottenuta alla fine dell'Esempio 2:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 6 \\ 0 & 5 & -5 & 7 & 6 \end{pmatrix}.$$

Poichè $b_{22} \neq 0$, allora $j_2 = 2$, ma poichè $b_{22} = 1$ non è richiesta alcuna operazione al punto (1), per cui $B_1 = B$.

Consideriamo la seconda (qui $j_2 = 2$) colonna di B_1, $\begin{pmatrix} b_{12}^* \\ b_{22}^* \\ b_{32}^* \\ b_{42}^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$.

Le operazioni richieste al punto (2) sono:

– poiché $b_{31}^* = 1 \neq 0$, sommare alla terza riga di B_1 la seconda riga di B_1 moltiplicata per $-b_{31}^* = -1$,

– poiché $b_{41}^* = 5 \neq 0$, sommare alla quarta riga di B_1 la seconda riga di B_1 moltiplicata per $-b_{41}^* = -5$.

La matrice C che si ottiene ha come terza riga

$$(0 \quad 1 \quad -1 \quad 3 \quad 6) + (-1)(0 \quad 1 \quad -1 \quad 1 \quad 0) = (0 \quad 0 \quad 0 \quad 2 \quad 6),$$

ha come quarta riga

$$(0 \quad 5 \quad -5 \quad 7 \quad 6) + (-5)(0 \quad 1 \quad -1 \quad 1 \quad 0) = (0 \quad 0 \quad 0 \quad 2 \quad 6),$$

ed ha la prima e la seconda riga uguali rispettivamente alla prima e alla srconda riga di B_1.

Quindi

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 6 \end{pmatrix}.$$

Supponiamo che la matrice A da cui siamo partiti sia tale che, dopo aver effettuato sulle sue righe le operazioni descritte nel 2^o passaggio, si ottenga una matrice C in cui se $j_2 > j_1 + 1$ allora TUTTE le colonne comprese tra la $j_1 + 1$-esima e la $j_2 - 1$-esima sono del tipo $\begin{pmatrix} * \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, ed inoltre o tutte le righe diverse dalle prime due sono nulle, oppure la terza riga è non nulla

(per le matrici in cui questa situazione non si presenta, l'eliminazione di Gauss senza scambi di righe fallisce)

Se tutte le righe di C diverse dalle prime due sono nulle, l'algoritmo si ferma a C (ossia C è la U cercata).

Altrimenti la terza riga di C è non nulla e si procede.

3^0**,** $4^0, \dots$**, k-esimo Passaggio.**

Si itera il procedimento illustrato nei primi due passaggi. L'obiettivo del passaggio i-esimo, se $1 \leq i \leq k$, è di trasformare la colonna j_i-esima in una colonna del tipo $\begin{pmatrix} * \\ \vdots \\ * \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, dove il numero 1 sta nella riga i-esima.

Se la matrice A da cui parte è tale che

– dopo aver effettuato il passaggio i-esimo si ottiene che TUTTE le colonne comprese tra la $j_{i-1}+1$-esima e la j_i-1-esima (se ce ne sono) sono del tipo $\begin{pmatrix} * \\ \vdots \\ * \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, (dove il $*$ piú basso sta nella riga $i-1$-esima) ed inoltre o tutte le righe diverse dalle prime i sono nulle, oppure la $i+1$-esima riga è non nulla

(per le matrici in cui questa situazione non si presenta, l'algoritmo di Gauss senza scambi di righe fallisce),

allora l'algoritmo si ferma (ottenendo U) quando si raggiunge una riga nulla, oppure, se non si raggiunge mai una riga nulla, quando si raggiunge l'ultima riga.

Esempio 4. Riprendiamo la matrice C ottenuta alla fine dell'Esempio 3, e mostriamo il procedimento per C.

Poichè la terza riga di C è non nulla, l'algoritmo non si ferma a C.

Il primo elemento non nullo della terza riga di C è d_{34}, quindi $j_3 = 4$.

Si chiama C_1 la matrice che si ottiene da C moltiplicando la terza riga di C per $c_{34}^{-1} = \frac{1}{2}$. Dunque

$$C_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 6 \end{pmatrix}.$$

Per "sistemare"la j_3-esima colonna di C_1, ossia per ottenere a partire da C_1 una matrice con la terza colonna del tipo $\begin{pmatrix} * \\ * \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, basta sommare alla quarta riga di C_1 la terza riga di C_1 moltiplicata per -2. Si ottiene

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Poichè la quarta riga di D è nulla, l'algoritmo si ferma a D, ossia $U = D$.

Per riassumere il procedimento si scrive:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 6 & -6 & -3 & 15 \\ 2 & 5 & -5 & -1 & 10 \\ 1 & 3 & -3 & 2 & 11 \\ 0 & 5 & -5 & 7 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{31}(-1)E_{21}(-2)E_1(\frac{1}{3})} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 6 \\ 0 & 5 & -5 & 7 & 6 \end{pmatrix} \to$$

$$\xrightarrow{E_{42}(-5)E_{32}(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{43}(-2)E_3(\frac{1}{2})} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = U.$$

LEZIONE 6

Eliminazione di Gauss con scambi di righe

Sia $A \neq \mathbb{O}$ una matrice $m \times n$. Abbiamo illustrato nella Lezione 5 un algoritmo che ha come obiettivo quello di costruire a partire da A una matrice U, $m \times n$, che abbia il seguente aspetto

$$U = \begin{pmatrix} & |\underline{1} & \dot{\ } & \dot{\ } & \dot{\ } & \dot{\ } & & & & & & & & & \\ & & & & & & |\underline{1} & \dot{\ } & \dot{\ } & & & & & & \\ & & & & & & & & & |\underline{1} & \dot{\ } & \dot{\ } & \dot{\ } & \dot{\ } \\ & & & & & & & & & & & & & \end{pmatrix},$$

eseguendo sulle righe di A un insieme di operazioni del tipo:

– sommare ad una riga un'altra riga di A moltiplicata per uno scalare,

– moltiplicare una riga di A per uno scalare non nullo.

Def. 1. Una matrice che sia

– o nulla, oppure

– abbia l'aspetto di U,

si dice **una matrice in forma ridotta di Gauss**.

Abbiamo anche visto nell'Esempio 1 della lezione precedente che l' eliminazione di Gauss senza scambi di righe fallisce per certe matrici. Vediamolo con un altro esempio.

Esempio 1. Sia $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Volendo applicare l'eliminazione di Gauss senza scambi di righe ad A, si ottiene che poichè il primo elemento non nullo nella prima riga di A è a_{13}, allora $j_1 = 3$. Ma poichè non è vero che tutte le colonne prima della j_1-esima, ossia prima della terza, sono nulle (la seconda non lo è), allora l'eliminazione di Gauss senza scambi di righe applicata ad A non porta ad una matrice in forma ridotta di Gauss.

Analogamente applicando l'eliminazione di Gauss senza scambi di righe a

$B = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 & 6 \\ 1 & 2 & 1 & 8 \\ 1 & 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$, otteniamo

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 & 6 \\ 1 & 2 & 1 & 8 \\ 1 & 2 & 2 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{31}(-1)E_{21}(-1)E_1(\frac{1}{2})} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

In questo caso $j_2 = 4$. Poichè nelle righe seguenti alla seconda ci sono elementi non nulli che stanno in colonne precedenti alla j_2-esima, allora anche in questo caso l'eliminazione di Gauss senza scambi di righe applicata ad B non porta ad una matrice in forma ridotta di Gauss.

Introduciamo allora un altro algoritmo, che chiamiamo **eliminazione di Gauss con scambi di righe** (o piú semplicemente **eliminazione di Gauss**), che differisce da quello descritto nella Lezione 5 soltanto nel fatto che tutte le volte che è necessario si possa fare anche uno scambio di righe, ossia un algoritmo in cui è lecita anche la terza operazione elementare sulle righe della matrice.

In questo modo si puó arrivare ad una matrice in forma ridotta di Gauss a partire da qualunque matrice $A \neq \mathbb{O}$.

Def. 2. Una matrice in forma ridotta di Gauss che si ottenga a partire da una matrice A applicandovi l'eliminazione di Gauss con o senza scambi di righe si dice **una forma ridotta di Gauss per la matrice** A.

Si dice poi che **la matrice nulla** $m \times n$ **è una forma ridotta di Gauss di sè stessa**.

Esempio 2. Sia $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ la prima matrice considerata nell'Esempio 1.

L'operazione da fare è scambiare la 1^a con la 2^a riga. Poichè ció corrispone a premoltiplicare A per la matrice elementare 2×2 E_{12}, si scrive:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{12}} A^* = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

quindi si procede con l'algoritmo su A^*. Quello che si ottiene è:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{12}} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_1(\frac{1}{2})}$$

$$\to \begin{pmatrix} 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 4 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_2(\frac{1}{4})} \begin{pmatrix} 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{4} \end{pmatrix} = U$$

ed U è una forma ridotta di Gauss per A.

Sia $B = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 & 6 \\ 1 & 2 & 1 & 8 \\ 1 & 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ la seconda matrice considerata nell'Esempio 1. Un'eliminazione di Gauss su B è:

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 & 6 \\ 1 & 2 & 1 & 8 \\ 1 & 2 & 2 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{31}(-1)E_{21}(-1)E_1(\frac{1}{2})} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to$$

$$\xrightarrow{E_{23}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_3(\frac{1}{5})} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \tilde{U}.$$

Sia $C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix}$. In questo caso si puó scegliere:

$$C=\begin{pmatrix}0&0&2\\3&3&3\\2&4&2\end{pmatrix}\xrightarrow{E_{12}}\begin{pmatrix}3&3&3\\0&0&2\\2&4&2\end{pmatrix}\xrightarrow{E_{31}(-2)E_1(\frac{1}{3})}\begin{pmatrix}1&1&1\\0&0&2\\0&2&0\end{pmatrix}\xrightarrow{E_{23}}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&1&1\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}\xrightarrow{E_2(\frac{1}{2})}\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}\xrightarrow{E_3(\frac{1}{2})}\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=U_1;$$

oppure

$$C=\begin{pmatrix}0&0&2\\3&3&3\\2&4&2\end{pmatrix}\xrightarrow{E_{13}}\begin{pmatrix}2&4&2\\3&3&3\\0&0&2\end{pmatrix}\xrightarrow{E_{21}(-3)E_1(\frac{1}{2})}\begin{pmatrix}1&2&1\\0&-3&0\\0&0&2\end{pmatrix}\to$$

$$\xrightarrow{E_2(-\frac{1}{3})}\begin{pmatrix}1&2&1\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}\xrightarrow{E_3(\frac{1}{2})}\begin{pmatrix}1&2&1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=U_2.$$

Entrambe U_1 ed U_2 sono forme ridotte di Gauss per C.

N.B. U_1 ed U_2 sono due matrici diverse, ma entrambe sono forme ridotte di Gauss per la stessa matrice C. Quindi non c'e' in generale un'unica forma ridotta di Gauss per una matrice.

Def. 3. Sia U una matrice $m \times n$ in forma ridotta di Gauss, e siano k le sue righe non nulle (quindi le prime k righe di U sono non nulle e le ultime $m-k$ righe di U sono non nulle). Allora U ha esattamente k colonne che corrispondono all'inizio di ogni gradino:

– la j_1-esima, che è la prima colonna di I_m,

– la j_2-esima, che è del tipo $(* \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad \dots \quad 0)^T$,

– la j_3-esima, che è del tipo $(* \quad * \quad 1 \quad 0 \quad \dots \quad 0)^T$,

– la j_4-esima, che è del tipo $(* \quad * \quad * \quad 1 \quad \dots \quad 0)^T$,

...

– la j_k-esima, che è un vettore riga con m componenti del tipo

$$\begin{matrix}(* & \dots & * & 1 & 0 & \dots & 0)^T\\ & & & \uparrow & & & \\ & & & k & & & \end{matrix}$$

inoltre

– tutte le eventuali colonne comprese tra la j_1+1-esima e la j_2-1-esima sono del tipo $(* \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad \dots \quad 0)^T$,

– tutte le eventuali colonne comprese tra la j_2+1-esima e la j_3-1-esima sono del tipo $(\,*\quad *\quad 0\quad 0\quad \dots\quad 0\,)^T$,

– tutte le eventuali colonne comprese tra la j_3+1-esima e la j_4-1-esima sono del tipo $(\,*\quad *\quad *\quad 0\quad \dots\quad 0\,)^T$,

...

– tutte le eventuali colonne comprese tra la $j_{k-1}+1$-esima e la j_k-1-esima sono del tipo $(\,*\quad \dots\quad *\quad 0\quad \dots\quad 0\,)^T$ (il numero di $*$ è $k-1$).

Le colonne j_1-esima, j_2-esima, j_3-esima, ..., j_k-esima si chiamano **le colonne dominanti della matrice in forma ridotta di Gauss** U. Le altre colonne di U si chiamano **le colonne libere della matrice in forma ridotta di Gauss** U.

Esempio 3. Siano A, B e C le matrici considerate nell'Esempio 2 e siano U ed $\tilde{U}$ le forme ridotte di Gauss trovate per A e B rispettivamente, ed inoltre U_1 ed U_2 le due forme ridotte di Gauss trovate per C.

– colonne dominanti di U: la 2^a e la 3^a; colonne libere di U: la 1^a e la 4^a;

– colonne dominanti di $\tilde{U}$: la 1^a, la 3^a e la 4^a; unica colonna libera di $\tilde{U}$: la 2^a;

– U_1 ed U_2 hanno tutte le colonne dominanti e nessuna colonna libera.

Def. 4. Una **matrice** U, $m \times n$ si dice **in forma ridotta di Gauss-Jordan** se U è in forma ridotta di Gauss e, se $\underline{u}_1$, $\underline{u}_2$, ... $\underline{u}_k$ sono le colonne dominanti di U allora

$$\underline{u}_1 = \underline{e}_1, \quad \underline{u}_2 = \underline{e}_2, \quad \dots \quad \underline{u}_k = \underline{e}_k,$$

dove $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \dots, \underline{e}_k$ sono le prime k colonne di I_m.

Come ottenere una forma ridotta di Gauss-Jordan di una matrice

Esempio 4. Si trovi una forma ridotta di Gauss-Jordan per $B = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 & 6 \\ 1 & 2 & 1 & 8 \\ 1 & 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$.

1. Troviamo una forma ridotta di Gauss per B, ad esempio, come abbiamo già calcolato nell'Esempio 2, $\tilde{U} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

2. Partendo da $\tilde{U}$ procediamo "a ritroso "nel seguente modo:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{13}(-3)E_{23}(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{12}(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = V.$$

V è una forma ridotta di Gauss-Jordan per B.

LEZIONE 7

Sistemi lineari

Scrittura matriciale di un sistema lineare

Def. 1. Un **sistema** di m equazioni ed n incognite $x_1, x_2, \dots x_n$, si dice **lineare** se tutte le m equazioni sono di 1^0 grado.

Esempio 1.

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 4x_3 = 1 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 = -6 \end{cases} \qquad \text{e} \qquad \begin{cases} 2x_1 + x_2 + 4x_3 = 1 \\ 3x_2 = -6 \end{cases}$$

sono due sistemi lineari, ciascuno con due equazioni e tre incognite; mentre

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2^3 + 4x_3 = 1 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 = -6 \end{cases} \qquad \text{e} \qquad \begin{cases} 2x_1 + x_2 + 4x_3 = 1 \\ 3x_2 x_3 = -6 \end{cases}$$

sono entrambi due sistemi non lineari.

Def. 2. Dato un sistema lineare di m equazioni ed n incognite

$$(*) \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases},$$

la matrice $m \times n$ $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$ si chiama **la matrice dei coefficienti del sistema lineare**, ed il vettore colonna con m componenti $\underline{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$ si chiama **il vettore dei termini noti del sistema**.

Si chiama inoltre **matrice aumentata del sistema** la matrice $B = (A \quad | \quad \underline{b})$. Dunque B è una matrice $m \times (n+1)$.

Ponendo $\underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ ($\underline{x}$ si chiama **il vettore delle n incognite** $x_1, x_2, \dots, x_n$), e calcolando il prodotto righe per colonne della matrice A ed il vettore $\underline{x}$ si ottiene

$$A\underline{x} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \end{pmatrix},$$

per cui $A\underline{x} = \underline{b}$ è una scrittura compatta del sistema lineare $(*)$, che viene detta **scrittura matriciale del sistema lineare (*)**.

Esempio 2.

La scrittura matriciale del primo sistema lineare considerato nell'Esempio 1 è $A\underline{x} = \underline{b}$, ove la matrice dei coefficienti è la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ ed il vettore dei termini noti è il vettore $\underline{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -6 \end{pmatrix}$.

La scrittura matriciale del secondo sistema lineare considerato nell'Esempio 1 è $A\underline{x} = \underline{b}$, ove la matrice dei coefficienti è la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ ed il vettore dei termini noti è uguale a quello del primo sistema lineare.

Def. 3. Un vettore colonna con n componenti $\underline{v}$ si dice **una soluzione del sistema lineare** $A\underline{x} = \underline{b}$, ove A è $m \times n$ (e $\underline{b}$ ha m componenti), se $A\underline{v} = \underline{b}$.

Dato un sistema lineare $A\underline{x} = \underline{b}$, puó accadere che esso non abbia soluzioni; se invece ce ne ha, allora **risolvere il sistema** significa trovare tutte le sue soluzioni.

Def. 4. Due **sistemi lineari**

$$(*) \qquad A\underline{x} = \underline{b} \qquad \text{e} \qquad (**) \qquad \tilde{A}\underline{x} = \tilde{\underline{b}}$$

si dicono **equivalenti** se

– o entrambi non hanno soluzioni,

– oppure le soluzioni dell'uno sono esattamente tutte e sole le soluzioni dell'altro.

Proposizione. Siano $(*)$ $A\underline{x} = \underline{b}$ un sistema lineare, ed $\mathbf{F}$ una matrice **non singolare** tale che esista FA. Allora il sistema lineare $(**)$ $FA\underline{x} = F\underline{b}$ è equivalente al sistema $(*)$.

Dimostrazione.

Sia $\underline{v}$ una soluzione di $(*)$. Allora $A\underline{v} = \underline{b}$. Premoltiplicando ambo i membri dell'uguaglianza per F si ottiene $FA\underline{v} = F\underline{b}$, ossia $\underline{v}$ è una soluzione di $(**)$.

Sia $\underline{w}$ una soluzione di $(**)$. Allora $FA\underline{w} = F\underline{b}$. Premoltiplicando ambo i membri dell'uguaglianza per F^{-1} (che esiste essendo F non singolare) si ottiene $F^{-1}FA\underline{w} = F^{-1}F\underline{b}$. Ma $F^{-1}FA\underline{w} = A\underline{w}$ e $F^{-1}F\underline{b} = \underline{b}$, quindi $A\underline{w} = \underline{b}$, ossia $\underline{w}$ è una soluzione di $(*)$.

Applicazione dell'eliminazione di Gauss CON O SENZA SCAMBI DI RIGHE alla risoluzione di sistemi lineari

Sia $(*) A\underline{x} = \underline{b}$ un sistema lineare di m equazioni in n incognite (ossia A è $m \times n$.)

Sia $(U \mid \underline{d})$ una forma ridotta di Gauss della matrice aumentata $(A \mid \underline{b})$. Sia F il prodotto delle matrici elementari di tipo $E_{ij}(c)$, $E_i(c)$ con $c \neq 0$, ed eventualmente E_{ij} (nel caso che per costruire $(U \mid \underline{d})$ sia necessario effettuare degli scambi di righe su $(A \mid \underline{b})$) che corrispondono alle operazioni elementari fatte sulle righe di $(A \mid \underline{b})$ per ottenere $(U \mid \underline{d})$.

Allora

– F è non singolare, per chè F è un prodotto di matrici elementari, ogni matrice elementare è non singolare e il prodotto di matrici non singolari è una matrice non singolare, e

– $F(A \mid \underline{b}) = (U \mid \underline{d})$. Facendo il prodotto a blocchi si ottiene

$$F(A \mid \underline{b}) = (FA \mid F\underline{b}).$$

Abbiamo visto che essendo F non singolare $(*) A\underline{x} = \underline{b}$ è equivalente a $FA\underline{x} = F\underline{b}$, ossia a $(**) U\underline{x} = \underline{d}$.

Poichè $(**)$ è piú semplice da risolvere, discutiamo $(**)$ al posto di $(*)$.

$\boxed{1^0\text{CASO:}}$ $\underline{d}$ è dominante.

In questo caso l'ultima equazione di $(**)$ è $0 = 1$, che non ha soluzioni. Dunque **(**) non ha soluzioni**.

$\boxed{2^0\text{CASO:}}$ $\underline{d}$ è libera.

Sia k il numero delle righe non nulle di U (e quindi anche di $(U \mid \underline{d})$, essendo $\underline{d}$ libera) e siano $j_1, j_2, \dots, j_k$ le k colonne dominanti di U (e quindi anche di $(U \mid \underline{d})$ essendo $\underline{d}$ libera).

$\boxed{1^0\text{Sottocaso:}}$ $\underline{d}$ è libera e $k = n$,

ossia tutte le colonne di U sono dominanti.

Allora $(**)$ è del tipo

$$(**) \qquad \begin{cases} x_1 + u_{12}x_2 + u_{13}x_3 + \ldots + u_{1,n-1}x_{n-1} + u_{1n}x_n = d_1 \\ \quad x_2 + u_{23}x_3 + \ldots + u_{2,n-1}x_{n-1} + u_{2n}x_n = d_2 \\ \qquad x_3 + \ldots + u_{3,n-1}x_{n-1} + u_{3n}x_n = d_3 \\ \qquad\qquad \vdots \\ \qquad\qquad x_{n-1} + u_{n-1,n}x_n = d_{n-1} \\ \qquad\qquad\qquad x_n = d_n \end{cases} .$$

Si osservi che

– le operazioni fatte nel 1^o passaggio dell'eliminazione di Gauss (cioè un eventuale scambio e la "sistemazione "della j_1-esima colonna) portano all'eliminazione dell'incognita x_{j_1} dalle equazioni sotto alla prima,

– le operazioni fatte nel 2^o passaggio dell'eliminazione di Gauss portano all'eliminazione dell'incognita x_{j_2} dalle equazioni sotto alla seconda,

– le operazioni fatte nel 3^o passaggio dell'eliminazione di Gauss portano all'eliminazione dell'incognita x_{j_3} dalle equazioni sotto alla terza,

– e cosí via.

Il procedimento che illustriamo ora si chiama **sostituzione all'indietro**.

1) Si ricava il valore di x_n dall'ultima equazione, e lo sostituisce in tutte le altre equazioni.

2) Dalla penultima equazione si ricava il valore di x_{n-1} e lo si sotituisce in tutte le altre equazioni.

3) Dalla terzultima equazione si ricava il valore di x_{n-2} e lo si sotituisce in tutte le altre equazioni.

– e cosí via, procedendo a ritroso.

Si ottiene:

$$\begin{cases} x_n = d_n \\ x_{n-1} = d_{n-1} - u_{n-1,n}d_n \\ \vdots \\ x_1 = d_1 - u_{1n}d_n - u_{1,n-1}(d_{n-1} - u_{n-1,n}d_n) - \dots \end{cases},$$

per cui **(**) ha una ed una sola soluzione**, che è il vettore colonna

$$\underline{v} = \begin{pmatrix} d_1 - u_{1n}d_n - u_{1,n-1}(d_{n-1} - u_{n-1,n}d_n) - \dots \\ \vdots \\ d_{n-1} - u_{n-1,n}d_n \\ d_n \end{pmatrix}.$$

$\boxed{2^0\text{Sottocaso:}}$ $\underline{d}$ è libera e $k < n$,

ossia U ha $n-k > 0$ colonne libere.

In tal caso si prendono come parametri le $n-k$ variabili corrispondenti alle colonne libere di U e con la sostituzione all'indietro si ricavano tutte le altre in funzione di questi parametri. Allora **(**) ha ∞^{n-k} soluzioni**.

Riassumendo

$(*)$ ha soluzioni se e solo se $\underline{d}$ è libera.

$(*)$ ha un'unica soluzione se $\underline{d}$ è libera e tutte le colonne di U sono dominanti.

$(*)$ ha infinite soluzioni se $\underline{d}$ è libera ed U ha qualche colonna libera.

Esempio 3. Sia $(*) A\underline{x} = \underline{b}$ il sistema lineare in cui la matrice aumentata

$(\,A \quad | \quad \underline{b}\,) = \begin{pmatrix} 4 & -8 & 4 & | & 0 \\ 1 & -1 & 0 & | & 3 \\ 1 & -1 & 1 & | & 5 \end{pmatrix}$. Dunque si ha

$$(*) \qquad \begin{cases} 4x_1 - 8x_2 + 4x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 = 3 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 5 \end{cases} .$$

Facciamo un'eliminazione di Gauss su $(\,A \quad | \quad \underline{b}\,)$:

$$(\,A \quad | \quad \underline{b}\,) = \begin{pmatrix} 4 & -8 & 4 & | & 0 \\ 1 & -1 & 0 & | & 3 \\ 1 & -1 & 1 & | & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{31}(-1)E_{21}(-1)E_1(\frac{1}{4})} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & | & 0 \\ 0 & 1 & -1 & | & 3 \\ 0 & 1 & 0 & | & 5 \end{pmatrix} \to$$

$$\xrightarrow{E_{32}(-1)} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & | & 0 \\ 0 & 1 & -1 & | & 3 \\ 0 & 0 & 1 & | & 2 \end{pmatrix} = (\,U \quad | \quad \underline{d}\,)$$

per cui il sistema $(*)$ è equivalente al sistema

$$(**) \qquad \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ \quad x_2 - x_3 = 3 \\ \quad\quad x_3 = 2 \end{cases} .$$

Che i due sistemi siano equivalenti poteva essere intuibile: le operazioni fatte sulle righe di $(\,A \quad | \quad \underline{b}\,)$ nell'eliminazione di Gauss senza scambi corrispondono a moltiplicazioni delle equazioni del sistema $(*)$ per numeri non nulli, e a somme di equazioni con altre moltiplicate per numeri non nulli.

Poichè $\underline{d}$ è libera, $(**)$ ha soluzioni.

Poichè tutte le colonne di U sono dominanti, $(**)$ ha esattamente una soluzione.

Con la sostituzione all'indietro otteniamo:

$x_3 = 2$,

$x_2 = x_3 + 3 = 2 + 3 = 5$,

$x_1 = 2x_2 - x_3 = 2 \times 5 - 2 = 8$.

Quindi $(*)$ ha un'unica soluzione che è il vettore $\begin{pmatrix} 8 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Esempio 4. Sia $(*) A\underline{x} = \underline{b}$ il sistema lineare in cui la matrice aumentata $(\,A \quad | \quad \underline{b}\,) = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 & | & 0 \\ 1 & 1 & 3 & | & -1 \\ 3 & 3 & 7 & | & 0 \end{pmatrix}$. Dunque si ha

$$(*) \qquad \begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 = -1 \\ 3x_1 + 3x_2 + 7x_3 = 0 \end{cases} .$$

Facciamo un'eliminazione di Gauss su $(\, A \mid \underline{b}\,)$:

$$(\, A \mid \underline{b}\,)\begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 & | & 0 \\ 1 & 1 & 3 & | & -1 \\ 3 & 3 & 7 & | & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{31}(-3)E_{21}(-1)E_1(\frac{1}{2})} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & -1 \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\xrightarrow{E_{32}(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & -1 \\ 0 & 0 & 0 & | & 1 \end{pmatrix} = (\, U \mid \underline{d}\,)$$

per cui il sistema $(*)$ è equivalente al sistema

$$(**) \qquad \begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 \\ x_3 = -1 \\ 0 = 1 \end{cases} .$$

Poichè $\underline{d}$ è dominante, $(**)$ non ha soluzioni.

Infatti l'ultima equazione di $(**)$ non ha soluzioni. Quindi anche $(*)$, non ha soluzioni.

Esempio 5. Sia $(*) A\underline{x} = \underline{b}$ il sistema lineare in cui la matrice aumentata $(\, A \mid \underline{b}\,)$ è la matrice considerata nella Lezione 5. Quindi

$$(*) \qquad \begin{cases} 3x_1 + 6x_2 - 6x_3 - 3x_4 = 15 \\ 2x_1 + 5x_2 - 5x_3 - x_4 = 10 \\ x_1 + 3x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 11 \\ 5x_2 - 5x_3 + 7x_4 = 6 \end{cases} .$$

Nella Lezione 5 abbiamo fatto un'eliminazione di Gauss senza scambi di righe su $(\, A \mid \underline{b}\,)$, ottenendo la matrice $(\, U \mid \underline{d}\,) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & -1 & | & 5 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$.

Dunque

$$(**) \qquad \begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 - x_4 = 5 \\ x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ x_4 = 3 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

è equivalente a $(*)$.

Il sistema che ora consideriamo consiste in realtà di tre equazioni ($0 = 0$ puó essere tralasciata).

Poichè $\underline{d}$ è libera, $(**)$ ha soluzioni.

Poichè U ha esattamente una colonna libera, la 3^a, $(**)$ ha ∞^1 soluzioni. Prendiamo come parametro la variabile corrispondente alla unica colonna libera di U, ossia poniamo $x_3 = h \in \mathbb{C}$ e con la sostituzione all'indietro ricaviamo x_1, x_2 e x_4, in funzione di h.

Dunque:

$x_3 = h$,

$x_4 = 3$,

$0 = x_2 - x_3 + x_4 = x_2 - h + 3$ per cui $x_2 = h - 3$,

$5 = x_1 + 2x_2 - 2x_3 - x_4 = x_1 + 2 \times (h-3) - 2h - 3 = x_1 - 9$ per cui $x_1 = 14$.

Allora ogni vettore del tipo

$\begin{pmatrix} 14 \\ h-3 \\ h \\ 3 \end{pmatrix}$, al variare di $h \in \mathbb{C}$ è soluzione di $(*)$. Si scrive:

$\left\{ \begin{pmatrix} 14 \\ h-3 \\ h \\ 3 \end{pmatrix} | h \in \mathbb{C} \right\}$ è l'insieme delle soluzioni di $(*)$.

Esempio 6. Sia $(*) A\underline{x} = \underline{b}$ il sistema lineare in cui la matrice aumentata è

$$(\, A \quad | \quad \underline{b}\,) = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 1 & 2 & | & 4 \\ 2 & 6 & -4 & 2 & 5 & | & 10 \\ 1 & 3 & -1 & 3 & 6 & | & 12 \end{pmatrix}.$$

Quindi

$$(*) \qquad \begin{cases} x_1 + 3x_2 - 2x_3 + x_4 + 2x_5 = 4 \\ 2x_1 + 6x_2 - 4x_3 + 2x_4 + 5x_5 = 10 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 + 3x_4 + 6x_5 = 12 \end{cases}.$$

Un'eliminazione di Gauss su $(\, A \quad | \quad \underline{b}\,)$ necessita di scambi di righe:

$$(\, A \quad | \quad \underline{b}\,) = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 1 & 2 & | & 4 \\ 2 & 6 & -4 & 2 & 5 & | & 10 \\ 1 & 3 & -1 & 3 & 6 & | & 12 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{31}(-1)E_{21}(-2)} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 1 & 2 & | & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & | & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 4 & | & 8 \end{pmatrix} \to$$

$$\xrightarrow{E_{23}} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 1 & 2 & | & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 4 & | & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & | & 2 \end{pmatrix} = (\, U \quad | \quad \underline{d}\,).$$

$(*)$ è equivalente al sistema che ha $(\, U \quad | \quad \underline{d}\,)$ come matrice aumentata, ossia

$$(**) \qquad \begin{cases} x_1 + 3x_2 - 2x_3 + x_4 + 2x_5 = 4 \\ \qquad x_3 + 2x_4 + 4x_5 = 8 \\ \qquad\qquad x_5 = 2 \end{cases}.$$

Che i due sistemi siano equivalenti poteva essere intuibile: lo scambio di righe fatto nell'eliminazione di Gauss su $(\, A \quad | \quad \underline{b}\,)$ corrisponde allo scambio di posizione di due equazioni, e le altre operazioni fatte sulle righe di $(A \quad | \quad \underline{b})$ corrispondono, come abbiamo già detto negli esempi precedenti, a moltiplicazioni di un' equazione del sistema per un numero non nullo e alla somma di un'equazione del sistema con un'altra moltiplicata per un numero non nullo.

Poichè $\underline{d}$ è libera, $(**)$ ha soluzioni.

Poichè U ha esattamente due colonne libere (la 2^a e la 4^a), $(**)$ ha ∞^2 soluzioni.

Nella sostituzione all'indietro, **si scelgono come parametri le variabili corrispondenti alle colonne libere di U**

Quindi, poichè le colonne libere di U sono la 2^a e la 4^a, si pone

$$x_2 = h \qquad \text{e} \qquad x_4 = k$$

e con la sostituzione all'indietro si ottiene

$x_5 = 2$,

$8 = x_3 + 2x_4 + 4x_5 = x_3 + 2k + 8$ per cui $x_3 = -2k$,

$4 = x_1 + 3x_2 - 2x_3 + x_4 + 2x_5 = x_1 + 3h - 2 \times (-2k) + k + 4 = x_1 + 3h + 5k + 4$ per cui $x_1 = -3h - 5k$.

Dunque l'insieme delle soluzioni di $(*)$ è

$$\left\{ \begin{pmatrix} -3h-5k \\ h \\ -2k \\ k \\ 2 \end{pmatrix} | h, k \in \mathbb{C} \right\}.$$

LEZIONE 8

Inverse destre, sinistre e bilatere

Def. 1. Si dice che una matrice A, $m \times n$, ha **un'inversa destra** se esiste una matrice R, $n \times m$, tale che $AR = I_m$. In tal caso R si dice una inversa destra di A.

Def. 2. Si dice che una matrice A, $m \times n$, ha **un'inversa sinistra** se esiste una matrice L, $n \times m$, tale che $LA = I_n$. In tal caso L si dice una inversa sinistra di A.

Esempio 1. Siano

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -1 & -5 \\ 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ e } D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Da $AB = I_2 = AC$ segue che sia B che C sono inverse destre di A.

Da $AB = I_2 = DB$ segue che sia A che D sono inverse sinistre di B.

Eempio 2. La matrice $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ non ha un'inversa destra: per ogni scalare α e β si ha

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 2\alpha & 2\beta \end{pmatrix} \neq I_2.$$

Tra le matrici considerate nell'Esempio 1, B e C non hanno un'inversa destra, mentre A e D non hanno un'inversa sinistra.

$\boxed{I}$ Criterio per l'esistenza di una inversa destra e sua costruzione

Sia A una matrice $m \times n$ e sia k il numero di righe non nulle di una forma ridotta di Gauss U per A (quindi k è anche il numero delle colonne dominanti di U).

Vogliamo provare che **A ha un'inversa destra R se e solo se k=m**, inoltre se $k = m$ vogliamo **costruire R**.

(1) Supponiamo che A abbia un'inversa destra R e proviamo che allora $k = m$.

Procediamo per assurdo, supponendo che esista R ma che $k \neq m$.

Essendo sempre $k \leq m$, allora da $k \neq m$ si deduce $k < m$. Quindi l'ultima riga di U è nulla.

Sia F una matrice non singolare tale che $FA = U$ (F è il prodotto delle matrici elementari che corrispondono alle operazioni fatte sulle righe di A per ottenere U). Allora

$$F = FI_m \underset{\substack{\uparrow \\ \boxed{AR = I_m}}}{=} F(AR) = (FA)R \underset{\substack{\uparrow \\ \boxed{FA = U}}}{=} UR,$$

e facendo il prodotto a blocchi di UR si ha che l'ultima riga di UR, ossia l'ultima riga di F, è nulla.

Poichè F è non singolare esiste F^{-1} tale che $FF^{-1} = I_m$. Facendo il prodotto a blocchi FF^{-1}, dal fatto che F ha l'ultima riga nulla si deduce che anche l'ultima riga di FF^{-1}, ossia l'ultima riga di I_m, è nulla.

Questa contraddizione deriva dall'aver supposto $k \neq m$. Dunque si ha (1).

(2) Supponiamo che $k = m$ e costruiamo una matrice R tale che $AR = I_m$.

Sia $(A \quad | \quad I_m)$ la matrice $m \times (n+m)$ che si ottiene affiancando ad A la matrice identica $I_m = (\underline{e}_1 \quad \underline{e}_2 \quad \dots \quad \underline{e}_m)$. $(A \quad | \quad I_m)$ si chiama **matrice pluriaumentata del sistema**. Siano $(U \quad | \quad \underline{d}_1 \quad \underline{d}_2 \quad \dots \quad \underline{d}_m)$ una sua forma ridotta di Gauss ed F una matrice non singolare tale che

$$F (A \quad | \quad I_m) = (U \quad | \quad \underline{d}_1 \quad \underline{d}_2 \quad \dots \quad \underline{d}_m).$$

Poichè sempre è $k \leq n$, da $k = m$ si deduce che $m \leq n$. Inoltre $k = m$ comporta che tutte le colonne $\underline{d}_1$, $\underline{d}_2$,... $\underline{d}_m$ sono libere, per cui tutti i sistemi

$$U\underline{x} = \underline{d}_i, \quad i = 1, \dots, m,$$

hanno soluzione.

Per ogni $i = 1, \dots, m$ sia $\underline{c}_i$ una soluzione di $U\underline{x} = \underline{d}_i$, (ossia $U\underline{c}_i = \underline{d}_i$) e si ponga

$$R = (\underline{c}_1 \quad \underline{c}_2 \quad \dots \quad \underline{c}_m).$$

Facendo il prodotto a blocchi

$$\begin{aligned} (U \quad | \quad \underline{d}_1 \quad \underline{d}_2 \quad \dots \quad \underline{d}_m) &= F (A \quad | \quad \underline{e}_1 \quad \underline{e}_2 \quad \dots \quad \underline{e}_m) = \\ &= (FA \quad | \quad F\underline{e}_1 \quad F\underline{e}_2 \quad \dots \quad F\underline{e}_m) \end{aligned}$$

si ottiene che per ogni $i = 1, \dots, m$ si ha che

$$(U \quad | \quad \underline{d}_i) = F (A \quad | \quad \underline{e}_i)$$

e $(U \quad | \quad \underline{d}_i)$ è una forma ridotta di Gauss per $(A \quad | \quad \underline{e}_i)$.

Quindi

$$A\underline{c}_i = \underline{e}_i, \qquad i = 1, \dots, m.$$

Facendo il prodotto a blocchi

$$AR = A (\underline{c}_1 \quad \underline{c}_2 \quad \dots \quad \underline{c}_m) = (A\underline{c}_1 \quad A\underline{c}_2 \quad \dots \quad A\underline{c}_m) = (\underline{e}_1 \quad \underline{e}_2 \quad \dots \quad \underline{e}_m) = I_m,$$

ossia R è una inversa destra di A.

$\boxed{II}$ Criterio per l'esistenza di una inversa sinistra e sua costruzione

Sia A una matrice $m \times n$ e sia k il numero di righe non nulle di una forma ridotta di Gauss U per A (quindi k è anche il numero delle colonne dominanti di U).

Vogliamo provare che **A ha un'inversa sinistra L se e solo se k=n**, inoltre se $k = n$ vogliamo **costruire L**.

Abbiamo bisogno di un risultato che proveremo piú avanti:

Lemma. Il numero delle righe non nulle di una forma ridotta di Gauss per A^T è uguale a k.

Osserviamo che $LA = I_n$ se e solo se

$$A^T L^T = (LA)^T = I_n^T = I_n,$$

dunque L è un'inversa sinistra di A se e solo se L^T è un'inversa destra di A^T.

Poichè A è $m \times n$, allora A^T è $n \times m$, ed A^T ha un'inversa destra se e solo se il numero delle righe non nulle di una forma ridotta di Gauss per A^T è k. Per il Lemma che abbiamo menzionato il numero delle righe non nulle dper una forma ridotta di Gauss per A^T è uguale a k (cioè al numero delle righe non nulle per una forma ridotta di Gauss per A), quindi A ha un'inversa sinistra se e solo se $k = n$.

Se $k = n$, per costruire una inversa sinistra L di A si procede quindi nel seguente modo:

– si pone $B = A^T$,

– si costruisce una inversa destra $\tilde{R}$ di B seguendo il metodo illustrato nel paragrafo precedente (applicato a B),

– si pone $L = \tilde{R}^T$.

Proposizione. Se A, $m \times n$, ha sia un'inversa destra R che un'inversa sinistra L, allora $R = L$.

Dimostrazione.

$$R = I_n R \underset{\boxed{LA = I_n}}{\overset{}{\underset{\uparrow}{=}}} (LA)R = L(AR) \underset{\boxed{AR = I_m}}{\underset{\uparrow}{=}} LI_m = L.$$

Dalla precedente Proposizione segue che se una matrice A ha un'**inversa (bilatera)**, allora tale inversa **è unica**.

Inoltre dalla precedente Proposizione, $\boxed{I}$ e $\boxed{II}$ segue che:

Corollario. Se A, $m \times n$, ha sia un'inversa destra R che un'inversa sinistra L, allora:

– $m = n$ (ossia A è quadrata),

– A è non singolare ed $A^{-1} = R = L$.

Dimostrazione. Sia k il numero di righe non nulle di una forma ridotta di Gauss per A.

Poichè esiste R tale che $AR = I_m$, allora per $\boxed{I}$ si ha che $k = m$.

Poichè esiste L tale che $LA = I_n$, allora per $\boxed{II}$ si ha che $k = n$.

Dunque $m = n$ e $AR = I_m = LA$.

Dalla Proposizione precedente si ha che $R = L$, quindi $AR = I_m = RA$.

Dunque A è non singolare ed $A^{-1} = R = L$.

Def. 3. Una matrice che non ha un'inversa si dice **singolare**.

Ad esempio, tutte le matrici considerate negli esempi 1 e 2 sono singolari.

Nella Lezione 2 abbiamo visto anche che **il prodotto di due matrici non singolari è una matrice non singolare, e la sua inversa è il prodotto delle inverse dei fattori in ordine scambiato** (cioè $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.)

Proprietà delle matrici non singolari. Sia A una matrice non singolare. Allora:

(1) A^{-1} è non singolare e $(A^{-1})^{-1} = A$;

(2) A^T e A^H sono non singolari, inoltre $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$, e $(A^H)^{-1} = (A^{-1})^H$.

Dimostrazione. Per definizione di A^{-1} si ha che $AA^{-1} = I = A^{-1}A$, e quindi (1).

Per provare (2) ricordiamo che la trasposta (risp. la H-trasposta) di un prodotto è il prodotto delle trasposte (risp. le H-trasposte) in ordine scambiato. Quindi

$$A^T(A^{-1})^T = (A^{-1}A)^T = I^T = I = I^T = (AA^{-1})^T = (A^{-1})^T A^T,$$

ed analogamente $A^H(A^{-1})^H = I = (A^{-1})^H A^H$.

Inverse (bilatere)

Da $\boxed{I}$ e $\boxed{II}$ segue che una matrice A ha un'inversa (bilatera) se e solo se A è $n \times n$ e il numero delle righe non nulle di una forma ridotta di Gauss per A è uguale ad n.

Se A è una matrice $n \times n$ per cui il numero delle righe non nulle di una forma ridotta di Gauss è n, allora una forma ridotta di Gauss U per A ha tutte le colonne dominanti. Quindi la forma di Gauss-Jordan per A è I_n. Esiste quindi una matrice non singolare F (prodotto delle matrici elementari corrispondenti alle operazioni che si fanno sulle righe di A per arrivare ad I_n) tale che

$$F\,(\,A \quad | \quad I_n\,) = F\,(\,A \quad | \quad \underline{e}_1 \quad \underline{e}_2 \quad \dots \quad \underline{e}_n\,) = (\,I_n \quad | \quad \underline{d}_1 \quad \underline{d}_2 \quad \dots \quad \underline{d}_n\,)\,.$$

Seguendo il procedimento illustrato in $\boxed{I}$, si ottiene che l'unica inversa destra di A è

$$R = (\,\underline{d}_1 \quad \underline{d}_2 \quad \dots \quad \underline{d}_n\,)\,,$$

e poichè un'inversa di A è in particolare un'inversa destra di A, allora A ha un'unica inversa A^{-1} ed è

$$A^{-1} = (\,\underline{d}_1 \quad \underline{d}_2 \quad \dots \quad \underline{d}_n\,)\,.$$

Inverse di matrici 2×2

Cominciamo con il fare la seguente osservazione: sia A ua matrice $m \times n$,

se A ha un'inversa destra R ed esiste una matrice B tale che BA=O, allora B=O. Infatti:

$$B = BI_n = B(AR) = (BA)R = \mathbb{O}R = \mathbb{O}.$$

Si faccia molta attenzione a non confondere questo fatto con la la legge di cancellazione per il prodotto, che, come abbiamo già detto nelle prime lezioni, per il prodotto di matrici **NON** vale.

Sia ora $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \neq \mathbb{O}$ una matrice 2×2. Poichè

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ad-bc & 0 \\ 0 & ad-bc \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

si ottiene

– se $ad - bc \neq 0$ allora A è non singolare e

$$A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix};$$

– se $ad - bc = 0$, posto $B = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ si ha che $BA = \mathbb{O}$.

Se fosse A non singolare, in particolare A avrebbe un'inversa destra R, quindi dall'osservazione fatta all'inizio del paragrafo seguirebbe che $B = \mathbb{O}$.

Ma $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \neq \mathbb{O}$ implica che anche $B = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \neq \mathbb{O}$.

Dunque A è singolare.

LEZIONE 9

Decomposizioni A=LU ed A=P^{T}LU

Def. 1. Una **matrice** quadrata si dice **triangolare superiore** (risp. **triangolare inferiore**) se $a_{ij} = 0$ per ogni (i, j) con $i < j$ (risp. $a_{ij} = 0$ per ogni (i, j) con $i > j$) (ossia A è triangolare superiore se gli elementi di A che si trovano "sotto"agli elementi diagonali di A sono nulli, ed A è triangolare inferiore se gli elementi di A che si trovano "sopra"agli elementi diagonali di A sono nulli).

Una **matrice** che sia triangolare superiore oppure triangolare inferiore si dice **triangolare**.

Esempio 1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ è triangolare superiore, $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ e $C = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ sono triangolari inferiori. A, B e C sono triangolari.

Def. 2. Una **matrice** triangolare superiore (risp. triangolare inferiore) si dice **unitriangolare superiore** (rips. **unitriangolare inferiore**) se i suoi elementi diagonali sono uguali ad 1.

Esempio 2. $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ è unitriangolare superiore, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ è unitriangolare inferiore.

DECOMPOSIZIONE A=LU

Sia $A = [a_{ij}]$ una matrice $m \times n$ tale che l'eliminazione di Gauss **SENZA SCAMBI DI RIGHE** applicata ad A porti ad una forma ridotta di Gauss U per A.

Vogliamo provare che esiste una matrice triangolare inferiore non singolare L tale che $A = LU$ dove U è una forma ridotta du Gauss per A.

Applicando l'algoritmo di Gauss senza scambi di righe ad A, chiamiamo:

$B = [b_{ij}]$ la matrice che si costruisce con le operazioni descritte nel 1^o passaggio dell'algorimo (quindi la j_1-esima colonna di B è la 1^a colonna di I_m),

$C = [c_{ij}]$ la matrice che si costruisce con le operazioni descritte nel 2^o passaggio dell'algorimo (quindi la j_1-esima colonna di C è la 1^a colonna di I_m e la j_2-esima colonna di C è un vettore colonna del tipo $\begin{pmatrix} * \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$,)

$D = [d_{ij}]$ la matrice che si costruisce con le operazioni descritte nel 3^o passaggio dell'algorimo (quindi la j_1-esima colonna di D è la 1^a colonna di I_m, la j_2-esima colonna di D è un vettore colonna del tipo $\begin{pmatrix} * \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ e la j_3-esima colonna di D è un vettore colonna del tipo $\begin{pmatrix} * \\ * \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$,)

e cosí via fino ad arrivare, dopo il k-esimo passaggio, ad U, una forma ridotta di Gauss per A.

ALLORA $A = LU$, dove

U è la forma ridotta di Gauss per A che abbiamo calcolato (in particolare U è una matrice $m \times n$, come A), ed

L è la matrice triangolare inferiore non singolare $m \times m$. L si ottiene nel seguente modo:

– la 1^a colonna di L è la colonna j_1-esima di A,

– la 2^a colonna di L è $\begin{pmatrix} 0 \\ b_{2j_2} \\ b_{3j_2} \\ b_{4j_2} \\ \vdots \\ b_{mj_2} \end{pmatrix}$, ossia è il vettore colonna che si ottiene dalla j_2-esima colonna di B mettendo 0 al posto dell'elemento al primo posto,

– la 3^a colonna di L è $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ c_{3j_3} \\ c_{4j_3} \\ \vdots \\ c_{mj_3} \end{pmatrix}$, ossia è il vettore colonna che si ottiene dalla j_3-esima colonna di C mettendo 0 al posto dell'elemento nei primi due posti,

– la 4^a colonna di L è $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ d_{4j_4} \\ \vdots \\ d_{mj_4} \end{pmatrix}$, ossia è il vettore colonna che si ottiene dalla j_4-esima colonna di D mettendo 0 al posto dell'elemento nei primi tre posti,

e cosí via.

In questo modo si costruiscono le prime k colonne di L, dove k è il numero di passaggi effettuati per arrivare ad U. Se $k < m$, le rimanenti $m - k$ colonne di L sono rispettivamente:

– la $k + 1$-esima colonna di I_m,

– la $k + 2$-esima colonna di I_m,

...

– la m-esima (ossia l'ultima) colonna di I_m.

Esempio 3. Si trovi una decomposizione $A = LU$ per la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 6 & -6 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 5 & -5 \\ -2 & -4 & 4 \\ 4 & 7 & -7 \end{pmatrix}$.

Poichè

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{3} & 6 & -6 \\ \boxed{2} & -1 & 1 \\ \boxed{1} & 5 & -5 \\ \boxed{-2} & -4 & 4 \\ \boxed{4} & 7 & -7 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{51}(-4)E_{41}(2)E_{31}(-1)E_{21}(-2)E_1(\frac{1}{3})} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & \boxed{-5} & 5 \\ 0 & \boxed{3} & -3 \\ 0 & \boxed{0} & 0 \\ 0 & \boxed{-1} & 1 \end{pmatrix} \to$$

$$\xrightarrow{E_{52}(1)E_{32}(-3)E_2(\frac{1}{-5})} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = U,$$

allora $L = \begin{pmatrix} \boxed{3} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \boxed{2} & \boxed{-5} & 0 & 0 & 0 \\ \boxed{1} & \boxed{3} & 1 & 0 & 0 \\ \boxed{-2} & \boxed{0} & 0 & 1 & 0 \\ \boxed{4} & \boxed{-1} & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

N.B. Si osservi che la **L** qui trovata **non è** l'**unica** matrice triangolare inferiore non singolare che risolva il nostro problema: ad esempio la matrice $L_1 = \begin{pmatrix} \boxed{3} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \boxed{2} & \boxed{-5} & 0 & 0 & 0 \\ \boxed{1} & \boxed{3} & 1 & 0 & 0 \\ \boxed{-2} & \boxed{0} & 0 & 1 & 0 \\ \boxed{4} & \boxed{-1} & 0 & 0 & 77 \end{pmatrix}$ è una matrice triangolare inferiore non singolare tale che $L_1 U = A$.

Si puó peró dimostrare che **le prime k colonne di L sono univocamente individuate** (quindi nel caso in cui $k = m$ anche L è unica).

Lemma. Sia

$$T = \begin{pmatrix} t_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ t_{21} & t_{22} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ t_{n-1,1} & t_{n-1,2} & t_{n-1,3} & \dots & t_{n-1,n-1} & 0 \\ t_{n1} & t_{n2} & t_{n3} & \dots & t_{n,n} & t_{n,n} \end{pmatrix}$$

una matrice triangolare inferiore con gli elementi diagonali non nulli (ossia con $t_{ii} \neq 0$ per ogni $i = 1, \dots, n$. Allora

$$T = E_1(t_{11})E_{21}(t_{21})E_{31}(t_{31}) \dots E_{n1}(t_{n1})E_2(t_{22})E_{32}(t_{32}) \dots$$

$$\dots E_{n2}(t_{n2}) \dots E_{n-1}(t_{n-1,n-1})E_{n,n-1}(t_{n,n-1})E_n(t_{nn}).$$

N.B. Se in questo prodotto manca un fattore $E_{ij}(t_{ij})$ significa che $E_{ij}(t_{ij}) = I_n$, ossia che $t_{ij} = 0$; se in questo prodotto manca un fattore $E_i(t_{ii})$ significa che $E_i(t_{ii}) = I_n$, ossia che $t_{ii} = 1$.

Dimostriamolo per $n = 3$ (per n qualsiasi si puó fare una dimostrazione simile).

Sia dunque $T = \begin{pmatrix} t_{11} & 0 & 0 \\ t_{21} & t_{22} & 0 \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} \end{pmatrix}$ una matrice 3×3 triangolare inferiore con t_{11}, t_{22}, $t_{33} \neq 0$. Applichiamo l'algoritmo di Gauss senza scambi a T.

$$T = \begin{pmatrix} t_{11} & 0 & 0 \\ t_{21} & t_{22} & 0 \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{31}(-t_{31})E_{21}(-t_{21})E_1(t_{11}^{-1})} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & t_{22} & 0 \\ 0 & t_{32} & t_{33} \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\xrightarrow{E_{32}(-t_{32})E_2(t_{22}^{-1})} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & t_{33} \end{pmatrix} \xrightarrow{E_3(t_{33}^{-1})} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3.$$

Quindi

$$I_3 = E_3(t_{33}^{-1})E_{32}(-t_{32})E_2(t_{22}^{-1})E_{31}(-t_{31})E_{21}(-t_{21})E_1(t_{11}^{-1})T,$$

da cui si ricava

$$\begin{aligned}T &= (E_3(t_{33}^{-1})E_{32}(-t_{32})E_2(t_{22}^{-1})E_{31}(-t_{31})E_{21}(-t_{21})E_1(t_{11}^{-1}))^{-1} = \\ &= E_1(t_{11}^{-1})^{-1}E_{21}(-t_{21})^{-1}E_{31}(-t_{31})^{-1}E_2(t_{22}^{-1})^{-1}E_{32}(-t_{32})^{-1}E_3(t_{33}^{-1})^{-1} = \\ &= E_1(t_{11})E_{21}(t_{21})E_{31}(t_{31})E_2(t_{22})E_{32}(t_{32})E_3(t_{33}).\end{aligned}$$

Esempio 4.

Se $A = E_1(6)E_{31}(7)E_{32}(-4)E_3(4)$ è una matrice 3×3 allora $A = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 7 & -4 & 4 \end{pmatrix}$;

se $B = E_1(6)E_{31}(7)E_{32}(-4)E_3(4)$ è una matrice 4×4 allora $B = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 7 & -4 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Sia ora A una matrice $m \times n$ tale che l'eliminazione di Gauss senza scambi di righe applicata ad A porti ad una forma ridotta di Gauss U per A.

Si ponga $A_0^* = A$, e siano $A_1^* = B$, $A_2^* = C$, $A_3^* = D, \dots, A_k^* = U$, le matrici che si ottengono al $1^0, 2^0, 3^0, \dots k$-esimo passaggio dell'eliminazione di Gauss.

Per ogni $r = 1, \dots, k$ sia F_r il prodotto delle matrici elementari che si premoltiplicano ad $A_{r-1}^* = [v_{ij}]$ per ottenere A_r^* :

$$\begin{aligned}F_r = E_{m,r}(-v_{m,j_r})E_{m-1,r}(-v_{m-1,j_r})E_{m-2,r}(-v_{m-2,j_r})\dots \\ \dots E_{r+2,r}(-v_{r+2,j_r})E_{r+1,r}(-v_{r+1,j_r})E_r(v_{r,j_r}^{-1}).\end{aligned}$$

Allora

$$\begin{aligned}A_1^* &= F_1A_0^* = F_1A, \\ A_2^* &= F_2A_1^* = F_2F_1A, \\ A_3^* &= F_3A_2^* = F_3F_2F_1A, \\ &\dots \\ U = A_k^* &= F_kA_{k-1}^* = F_kF_{k-1}\dots F_3F_2F_1A.\end{aligned}$$

Si ponga $H = F_kF_{k-1}\dots F_3F_2F_1$.

Dall'ultima uguaglianza si ricava che $A = HU$.

Poichè

$$\begin{aligned}H^{-1} &= (F_kF_{k-1}\dots F_3F_2F_1)^{-1} = \\ &= F_1^{-1}F_2^{-1}F_3^{-1}\dots F_{k-1}^{-1}F_k^{-1} = \\ &= E_1(a_{1j_1})E_{21}(a_{2j_1})\dots E_{m-1,1}(a_{m-1,j_1})E_{m1}(a_{mj_1})E_2(b_{2j_2})E_{32}(b_{3j_2})\dots \\ &\dots E_{m-1,2}(b_{m-1,j_2})E_{m2}(b_{mj_2})E_3(c_{3j_3})E_{43}(c_{4j_3})\dots \\ &\dots E_{m-1,3}(c_{m-1,j_3})E_{m3}(c_{mj_3})E_4(d_{4j_4})E_{54}(d_{5j_4})E_{m-1,4}(d_{m-1,j_4})E_{m4}(d_{mj_4})\dots\end{aligned}$$

dal lemma precedente si ottiene che $L = H^{-1}$ è una matrice triangolare inferiore non singolare (ed $A = LU$).

Proposizione. Se L è una matrice triangolare inferiore $m \times m$ non singolare ed U è una matrice in forma ridotta di Gauss $m \times n$, allora U è una forma ridotta di Gauss per la matrice $A = LU$ e si puó costruire a partire da A senza fare scambi di righe su A.

Quindi **una matrice A ammette una decomposizione A=LU se e solo se si puó costruire una forma ridotta di Gauss U per A senza fare scambi di righe su A**.

DECOMPOSIZIONE A=P^{T}LU

Sia ora A una matrice $m \times n$ tale che per ottenere una forma ridotta di Gauss U per A sia necessario fare scambi di righe su A. Si applichi l'eliminazione di Gauss con scambi di righe su A e sia R_1 la matrice elementare corrispondente al primo scambio di righe che si effettua, sia R_2 la matrice elementare corrispondente all' eventuale secondo scambio di righe che si effettua, R_3 quella corrispondente al terzo, ..., R_l quella corrispondente all'ultimo (quindi ciascuna R_s è del tipo E_{i_s,j_s}).

Sia poi U la forma ridotta di Gauss per A che si ottiene.

Si ponga $P = R_l R_{l-1} \dots R_3 R_2 R_1$.

Si puó dimostrare che

– l'eliminazione di Gauss applicata alla matrice $B = PA$ permette di costruire una forma ridotta di Gauss W per B senza fare scambi di righe su B;

– la U che si era ottenuta da A facendo degli scambi sulle righe di A si puó ottenere da B senza fare scambi di righe su B. Quindi $PA = LW = LU$, per un'opportuna matrice triangolare inferiore non singolare L.

La matrice P, essendo un prodotto di matrici del tipo E_{ij}, si ottiene dalla matrice I_m permutandone alcune righe. Essa si chiama **matrice di permutazione**, ed è tale che $P^{-1} = P^T$.

Quindi data una matrice qualunque A, $m \times n$, esistono una matrice di permutazione P ed una matrice triangolare inferiore non singolare L tali che $A = P^T LU$ dove U è una forma ridotta di Gauss per A.

N.B. 1 E' importante ricordare che **l'ordine in cui si moltiplicano le matrici R$_i$ è fondamentale** (si veda l'Esempio 5).

N.B. 2 E' anche importante ricordare che **dall'eliminazione di Gauss fatta su A** si puó ottenere U e si possono ottenere le matrici elementari che permettono di costruire P, ma **non si ottiene L** (si veda l'Esempio 5).

N.B. 3 La decomposizione A=P^{T}LU non è unica (si veda l'Esempio 5).

Esempio 5. Si trovi una decomposizione $A = P^T LU$ per la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 9 & -6 & 0 \\ -2 & -6 & 4 & -1 \\ 0 & 2 & -4 & 0 \\ 1 & 7 & 6 & 0 \\ 1 & -4 & 10 & -4 \end{pmatrix}.$$

Applicando l'algoritmo di Gauss ad A si ottiene:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 9 & -6 & 0 \\ -2 & -6 & 4 & -1 \\ 0 & 2 & -4 & 0 \\ 1 & 7 & 6 & 0 \\ 1 & -4 & 10 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{51}(-1)E_{41}(-1)E_{21}(2)E_1(\frac{1}{3})} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -4 & 0 \\ 0 & 4 & 8 & 0 \\ 0 & -7 & 12 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{23}}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & 8 & 0 \\ 0 & -7 & 12 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{52}(7)E_{42}(-4)E_2(\frac{1}{2})} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 16 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{34}}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 16 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{53}(2)E_3(\frac{1}{16})} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{54}(4)E_4(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Sia

$$P = R_2R_1 = E_{34}E_{23} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Allora

$$PA = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 9 & -6 & 0 \\ -2 & -6 & 4 & -1 \\ 0 & 2 & -4 & 0 \\ 1 & 7 & 6 & 0 \\ 1 & -4 & 10 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 9 & -6 & 0 \\ 0 & 2 & -4 & 0 \\ 1 & 7 & 6 & 0 \\ -2 & -6 & 4 & -1 \\ 1 & -4 & 10 & -4 \end{pmatrix}.$$

Applichiamo l'algoritmo di Gauss senza scambi di righe a PA. Otteniamo una decomposizione LU per PA:

$$PA = \begin{pmatrix} \boxed{3} & 9 & -6 & 0 \\ \boxed{0} & 2 & -4 & 0 \\ \boxed{1} & 7 & 6 & 0 \\ \boxed{-2} & -6 & 4 & -1 \\ \boxed{1} & -4 & 10 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{51}(-1)E_{41}(2)E_{31}(-1)E_1(\frac{1}{3})} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & \boxed{2} & -4 & 0 \\ 0 & \boxed{4} & 8 & 0 \\ 0 & \boxed{0} & 0 & -1 \\ 0 & \boxed{-7} & 12 & -4 \end{pmatrix} \to$$

$$\xrightarrow{E_{52}(7)E_{32}(-4)E_2(\frac{1}{2})} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{16} & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{0} & -1 \\ 0 & 0 & \boxed{-2} & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{53}(2)E_3(\frac{1}{16})} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{-1} \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{-4} \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\xrightarrow{E_{54}(4)E_4(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = U,$$

ed

$$L = \begin{pmatrix} \boxed{3} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \boxed{0} & \boxed{2} & 0 & 0 & 0 \\ \boxed{1} & \boxed{4} & \boxed{16} & 0 & 0 \\ \boxed{-2} & \boxed{0} & \boxed{0} & \boxed{-1} & 0 \\ \boxed{1} & \boxed{-7} & \boxed{-2} & \boxed{-4} & 1 \end{pmatrix}.$$

Dunque $A = P^T LU$ dove

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad L = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 16 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & -7 & -2 & -4 & 1 \end{pmatrix} \text{ e } U = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

SI NOTI:

$\boxed{1}$

$$H = E_{23}E_{34} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \neq P$$

e che facendo un'eliminazione di Gauss su HA si ottiene:

$$HA = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 9 & -6 & 0 \\ -2 & -6 & 4 & -1 \\ 0 & 2 & -4 & 0 \\ 1 & 7 & 6 & 0 \\ 1 & -4 & 10 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 9 & -6 & 0 \\ 1 & 7 & 6 & 0 \\ -2 & -6 & 4 & -1 \\ 0 & 2 & -4 & 0 \\ 1 & -4 & 10 & -4 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\xrightarrow{E_{51}(-1)E_{31}(2)E_{21}(-1)E_1(\frac{1}{3})} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 4 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -4 & 0 \\ 0 & -7 & 12 & -4 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\xrightarrow{E_{52}(7)E_{42}(-2)E_2(\frac{1}{4})} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & 26 & -4 \end{pmatrix}.$$

Dunque HA non ha una decomposizione LU.

Quindi, come osservato nel **N.B. 1**, è fondamentale, per costruire P, l'ordine in cui si moltiplicano le matrici corrispondenti agli scambi di righe effettuati (si parte dall'ultimo procedendo a ritroso).

$\boxed{2}$ Dall'eliminazione di Gauss fatta su A si ottiene che

$$E_{54}(4)E_4(-1)E_{53}(2)E_3(\frac{1}{16})E_{34}E_{52}(7)E_{42}(-4)E_2(\frac{1}{2})E_{23}E_{51}(-1)E_{41}(-1)E_{21}(2)E_1(\frac{1}{3})A = U.$$

Come sottolineato nel **N.B. 2**, la tentazione di intuire L direttamente da questa eliminazione di Gauss è fuorviante: posto

$$B = E_{54}(4)E_4(-1)E_{53}(2)E_3(\frac{1}{16})E_{52}(7)E_{42}(-4)E_2(\frac{1}{2})E_{51}(-1)E_{41}(-1)E_{21}(2)E_1(\frac{1}{3})$$

il prodotto delle matrici elementari diverse da quelle corrispondenti agli scambi di righe, si ha che $BPA \neq U$, e quindi $PA \neq B^{-1}U$, ossia B^{-1} non è un buon candidato per L.

$\boxed{3}$ Mostriamo che esistono una forma ridotta di Gauss $\tilde{U}$ per A, una matrice di permutazione $\tilde{P}$ ed una matrice triangolare inferiore non singolare $\tilde{L}$ tali che

$$\tilde{U} \neq U, \qquad \tilde{P} \neq P, \qquad \tilde{L} \neq L, \qquad \text{ma } A = \tilde{P}^T\tilde{L}\tilde{U} = P^T LU,$$

ossia, come osservato nel **N.B. 3**, la decomposizione $A = P^T LU$ non è unica.

Facciamo una eliminazione di Gauss su A scegliendo degli scambi di riga diverse da quelli scelti nell'eliminazione che abbiamo fatto precedentemente.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 9 & -6 & 0 \\ -2 & -6 & 4 & -1 \\ 0 & 2 & -4 & 0 \\ 1 & 7 & 6 & 0 \\ 1 & -4 & 10 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{51}(-1)E_{41}(-1)E_{21}(2)E_1(\frac{1}{3})} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -4 & 0 \\ 0 & 4 & 8 & 0 \\ 0 & -7 & 12 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{24}}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 4 & 8 & 0 \\ 0 & 2 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -7 & 12 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{52}(7)E_{32}(-2)E_2(\frac{1}{4})} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 26 & -4 \end{pmatrix} \to$$

$$\xrightarrow{E_{53}(26)E_3(\frac{1}{-8})} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{54}(4)E_4(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Sia $\tilde{P} = E_{24} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Allora

$$\tilde{P}A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 9 & -6 & 0 \\ -2 & -6 & 4 & -1 \\ 0 & 2 & -4 & 0 \\ 1 & 7 & 6 & 0 \\ 1 & -4 & 10 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{3} & 9 & -6 & 0 \\ \boxed{1} & 7 & 6 & 0 \\ \boxed{0} & 2 & -4 & 0 \\ \boxed{-2} & -6 & 4 & -1 \\ \boxed{1} & -4 & 10 & -4 \end{pmatrix} \to$$

$$\xrightarrow{E_{51}(-1)E_{41}(2)E_{21}(-1)E_1(\frac{1}{3})} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & \boxed{4} & 8 & 0 \\ 0 & \boxed{2} & -4 & 0 \\ 0 & \boxed{0} & 0 & -1 \\ 0 & \boxed{-7} & 12 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{52}(7)E_{32}(-2)E_2(\frac{1}{4})} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{-8} & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{0} & -1 \\ 0 & 0 & \boxed{26} & -4 \end{pmatrix} \to$$

$$\xrightarrow{E_{53}(26)E_3(\frac{1}{-8})} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{-1} \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{-4} \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{54}(4)E_4(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Quindi $A = \tilde{P}^T \tilde{L} \tilde{U}$ con

$$\tilde{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \neq P, \quad \tilde{U} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \neq U,$$

$$\tilde{L} = \begin{pmatrix} \boxed{3} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \boxed{1} & \boxed{4} & 0 & 0 & 0 \\ \boxed{0} & \boxed{2} & \boxed{-8} & 0 & 0 \\ \boxed{-2} & \boxed{0} & \boxed{0} & \boxed{-1} & 0 \\ \boxed{1} & \boxed{-7} & \boxed{26} & \boxed{-4} & 1 \end{pmatrix} \neq L.$$

LEZIONE 10

Spazi vettoriali reali e complessi. Sottospazi di spazi vettoriali.

Sia $K \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$.

Def. 1. Uno **spazio vettoriale su K** è un insieme non vuoto V tale che siano definite due operazioni

$$V \times V \xrightarrow{+} V \qquad \text{e} \qquad K \times V \xrightarrow{\cdot} V$$

che verifichino le seguenti condizioni:

per ogni $\underline{u}$, $\underline{v}$,$\underline{w} \in V$ (gli elementi di V si chiamano **vettori**, e vengono indicati con lettere sottolineate in carattere corsivo minuscolo),

e per ogni α, $\beta \in K$ (gli elementi di K si chiamano **scalari** e vengono indicati con lettere dell'alfabeto greco oppure dell'alfabeto latino, scritte pure loro in carattere corsivo minuscolo, ma non sottolineate) si ha

$$\begin{array}{llll} (1): & \underline{u} + (\underline{v} + \underline{w}) = (\underline{u} + \underline{v}) + \underline{w}; & (2): & \underline{u} + \underline{v} = \underline{v} + \underline{u}; \\ (3): & \alpha(\beta\underline{v}) = (\alpha\beta)\underline{v}; & (4): & 1\underline{v} = \underline{v}; \\ (5): & (\alpha + \beta)\underline{v} = \alpha\underline{v} + \beta\underline{v}; & (6): & \alpha(\underline{v} + \underline{u}) = \alpha\underline{v} + \alpha\underline{u}, \end{array}$$

inoltre esiste un (unico) elemento di V che viene indicato con il simbolo $\underline{0}$ (e viene chiamato **zero di V** o l'**elemento neutro di V**) tale che

$$(7): \quad \underline{v} + \underline{0} = \underline{v} \qquad (\text{per ogni } \underline{v} \in V),$$

ed anche per ogni $\underline{v} \in V$ esiste un (unico) elemento $\underline{w} \in V$ tale che $\underline{v} + \underline{w} = \underline{0}$. Il vettore $\underline{w}$ si chiama **l'opposto** del vettore $\underline{v}$ e si indica con il simbolo $-\underline{v}$. Dunque

$$(8): \quad \text{per ogni } \underline{v} \in V \text{ esiste } -\underline{v} \in V \text{ tale che } \underline{v} + (-\underline{v}) = \underline{0}.$$

Se $K = \mathbb{R}$ allora V si dice uno **spazio vettoriale reale**;

se $K = \mathbb{C}$ allora V si dice uno **spazio vettoriale complesso**.

N.B.

– Se $\underline{w} \in V$ verifica la condizione

$$(*) \quad \underline{v} + \underline{w} = \underline{v} \qquad (\text{per ogni } \underline{v} \in V),$$

ossia se $\underline{w}$ ha le stesse funzioni di $\underline{0}$, allora $\underline{w} = \underline{0}$ (in altre parole esiste un unico elemento neutro in V). Infatti:

$$\underline{w} \underset{\substack{\uparrow \\ \boxed{(7) \text{ con } \underline{v} = \underline{w}}}}{=} \underline{w} + \underline{0} \underset{\substack{\uparrow \\ \boxed{(2)}}}{=} \underline{0} + \underline{w} \underset{\substack{\uparrow \\ \boxed{(*) \text{ con } \underline{v} = \underline{0}}}}{=} \underline{0}.$$

– Sia $\underline{v} \in V$. Se $\underline{z} \in V$ verifica la condizione

$$(**) \quad \underline{v} + \underline{z} = \underline{0},$$

ossia se $\underline{z}$ ha le stesse funzioni di $-\underline{v}$, allora $\underline{z} = -\underline{v}$ (in altre parole ogni vettore $\underline{v}$ ha un unico opposto). Infatti:

$$\underline{z} \underset{\boxed{(7)}}{\overset{}{\underset{\uparrow}{=}}} \underline{z} + \underline{0} \quad \underset{\boxed{(8)}}{\uparrow} \quad \underline{z} + (\underline{v} + (-\underline{v})) \underset{\boxed{(1)}}{\underset{\uparrow}{=}} (\underline{z} + \underline{v}) + (-\underline{v}) \underset{\boxed{(2)}}{\underset{\uparrow}{=}}$$

$$= (\underline{v} + \underline{z}) + (-\underline{v}) \underset{\boxed{(**)}}{\underset{\uparrow}{=}} \underline{0} + (-\underline{v}) \underset{\boxed{(2)}}{\underset{\uparrow}{=}} (-\underline{v}) + \underline{0} \underset{\boxed{(7)}}{\underset{\uparrow}{=}} -\underline{v}.$$

L'operazione $+$ si chiama **addizione tra gli elementi di V**, ed associa ad ogni coppia di vettori $(\underline{v}, \underline{u})$ la loro **somma** $\underline{v} + \underline{u}$.

L'operazione $\cdot$ si chiama **moltiplicazione degli elementi di V per gli scalari**, ed associa ad ogni coppia $(\alpha, \underline{u})$, ove α è uno scalare e $\underline{v}$ è un vettore, il **prodotto** $\alpha\underline{v}$.

Esempio 1. L'insieme $M_{mn}(\mathbb{R})$ con l'operazione di addizione definita nella Lezione 2 e l'operazione di moltiplicazione per gli elementi di $\mathbb{R}$ definita nella Lezione 1 è uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$.

Analogamente, l'insieme $M_{mn}(\mathbb{C})$ con l'operazione di addizione definita nella Lezione 2 e l'operazione di moltiplicazione per gli elementi di $\mathbb{C}$ definita nella Lezione 1 è uno spazio vettoriale su $\mathbb{C}$.

In particolare l'insieme $\mathbb{R}^n$ dei vettori colonna con n componenti reali e l'insieme $\mathbb{R}_n$ dei vettori riga con n componenti reali sono spazi vettoriali su $\mathbb{R}$; l'insieme $\mathbb{C}^n$ dei vettori colonna con n componenti complesse e l'insieme $\mathbb{C}_n$ dei vettori riga con n componenti complesse sono spazi vettoriali su $\mathbb{C}$.

Proposizione.

(i) $0\underline{v} = \underline{0}$ per ogni $\underline{v} \in V$;

(ii) $(-\alpha)\underline{v} = -(\alpha\underline{v})$ per ogni $\underline{v} \in V$ ed ogni $\alpha \in K$;

(iii) $\alpha\underline{0} = \underline{0}$ per ogni $\alpha \in K$.

Dimostrazione.

Per dimostrare (i): da

$$0\underline{v} \underset{\boxed{0+0=0 \text{ in } K}}{\underset{\uparrow}{=}} (0+0)\underline{v} \underset{\boxed{(5)}}{\underset{\uparrow}{=}} 0\underline{v} + 0\underline{v}$$

segue

$$\underline{0} \underset{\substack{\uparrow \\ \boxed{(8)}}}{=} 0\underline{v} + (-0\underline{v}) = 0\underline{v} + 0\underline{v} + (-0\underline{v}) \underset{\substack{\uparrow \\ \boxed{(8)}}}{=} 0\underline{v} + \underline{0} \underset{\substack{\uparrow \\ \boxed{(7)}}}{=} 0\underline{v}$$

Per dimostrare (ii): poichè si ha

$$\underline{0} \underset{\substack{\uparrow \\ \boxed{(i)}}}{=} 0\underline{v} \underset{\substack{\uparrow \\ \boxed{\alpha + (-\alpha) = 0 \text{ in } K}}}{=} (\alpha + (-\alpha))\underline{v} \underset{\substack{\uparrow \\ \boxed{(5)}}}{=} \alpha\underline{v} + (-\alpha)\underline{v},$$

allora per l'unicità dell'opposto di $\alpha\underline{v}$ si ha $(-\alpha)\underline{v} = -\alpha\underline{v}$, ossia (ii).

Per dimostrare (iii): da

$$\alpha\underline{0} \underset{\substack{\uparrow \\ \boxed{(7)}}}{=} \alpha(\underline{0} + \underline{0}) \underset{\substack{\uparrow \\ \boxed{(6)}}}{=} \alpha\underline{0} + \alpha\underline{0}$$

segue

$$\underline{0} \underset{\substack{\uparrow \\ \boxed{(8)}}}{=} \alpha\underline{0} + (-\alpha\underline{0}) = \alpha\underline{0} + \alpha\underline{0} + (-\alpha\underline{0}) \underset{\substack{\uparrow \\ \boxed{(8)}}}{=} \alpha\underline{0} + \underline{0} \underset{\substack{\uparrow \\ \boxed{(7)}}}{=} \alpha\underline{0}.$$

Def. 2. Siano $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_n \in V$. Un vettore $\underline{v} \in V$ si dice una **combinazione lineare** dei vettori $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_n \in V$, se esistono $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in K$ tali che

$$\underline{v} = \alpha_1\underline{v}_1 + \alpha_2\underline{v}_2 + \ldots + \alpha_n\underline{v}_n.$$

Gli scalari $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ si chiamano i **coefficienti (o pesi) della combinazione lineare**.

Esempio 2. In $V = \mathbb{R}^4$ il vettore $\underline{v} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -8 \\ 3 \end{pmatrix}$ è una combinazione lineare dei vettori $\underline{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\underline{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\underline{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, poichè

$$2\underline{v}_1 + 3\underline{v}_2 - 4\underline{v}_3 = 2\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - 4\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -8 \\ 3 \end{pmatrix} = \underline{v}.$$

I coefficienti della combinazione sono $2, 3$ e -4.

Def. 3. Un sottoinsieme non vuoto W di V si dice un **sottospazio (vettoriale) di V** se sono verificate le seguenti due condizioni:

$$\begin{aligned} (a): &\quad \underline{w}_1 + \underline{w}_2 \in W \quad \text{per ogni } \underline{w}_1, \underline{w}_2 \in W, \\ (b): &\quad \alpha\underline{w} \in W \quad \text{per ogni } \underline{w} \in W \quad \text{ed ogni } \alpha \in K. \end{aligned}$$

Si noti che **se W è un sottospazio di V, allora** $\underline{0}$ $\in$W.

Infatti:

– si fissi $\underline{w} \in W$ (esiste almeno un $\underline{w} \in W$ poichè per ipotesi W non è vuoto),

– per il punto (ii) della Proposizione e per (4) si ha che

$$(-1)\underline{w} = -(1\underline{w}) = -\underline{w},$$

– essendo W un sottospazio di V, $\underline{w} \in W$ e $\alpha = -1 \in K$ per la condizione (b) si ha che anche $(-1)\underline{w} \in W$.

– Dunque $\underline{w}$ e $-\underline{w} \in W$, ed essendo W un sottospazio di V per la condizione (a) si ha (prendendo $\underline{w}_1 = \underline{w}$ e $\underline{w}_2 = -\underline{w}$) che $\underline{w} - \underline{w} \in W$.

– Ma per (8) $\underline{w} - \underline{w} = \underline{0}$, quindi $\underline{0} \in W$.

Esempio 3. Per ogni spazio vettoriale V, $\{\underline{0}\}$ è un sottospazio di V, poichè $\underline{0}+\underline{0} = \underline{0}$ e $\alpha\underline{0} = \underline{0}$ per ogni $\alpha \in K$.

Def. 4. $\{\underline{0}\}$ si chiama **il sottospazio nullo** di V.

Esempio 4. Sia $V = M_n(\mathbb{C})$, e siano

$\mathcal{W}_1$ l'insieme delle matrici complesse $n \times n$ diagonali,

$\mathcal{W}_2$ l'insieme delle matrici complesse $n \times n$ triangolari superiori,

$\mathcal{W}_3$ l'insieme delle matrici complesse $n \times n$ triangolari inferiori,

$\mathcal{W}_4$ l'insieme delle matrici complesse $n \times n$ simmetriche.

Allora $\mathcal{W}_1$, $\mathcal{W}_2$, $\mathcal{W}_3$ e $\mathcal{W}_4$ sono sottospazi di V.

Esempio 5. Sia $V = M_n(\mathbb{C})$, e siano

$\mathcal{Z}_1$ l'insieme delle matrici complesse $n \times n$ unitriangolari superiori,

$\mathcal{Z}_2$ l'insieme delle matrici complesse $n \times n$ unitriangolari inferiori,

$\mathcal{Z}_3$ l'insieme delle matrici complesse $n \times n$ hermitiane,

$\mathcal{Z}_4$ l'insieme delle matrici complesse $n \times n$ antihermitiane.

Allora nessuno tra $\mathcal{Z}_1$, $\mathcal{Z}_2$, $\mathcal{Z}_3$ e $\mathcal{Z}_4$ è un sottospazio di V.

Esempio 6. $W = \{ \begin{pmatrix} a \\ a \\ b \end{pmatrix} | a, b \in \mathbb{R}\}$ è un sottospazio di $V = \mathbb{R}^3$. Infatti:

(1) per ogni $a, b_1, a_2, b_2 \in \mathbb{R}$ esistono $a_3, b_3 \in \mathbb{R}$ tali che

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2 \\ a_2 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_3 \\ a_3 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

(si prende $a_3 = a_1 + a_2$ e $b_3 = b_1 + b_2$);

(2) per ogni $a, b, \alpha \in \mathbb{R}$ esistono $a_1, b_1 \in \mathbb{R}$ tali che

$$\alpha \begin{pmatrix} a \\ a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_1 \\ b_1 \end{pmatrix}$$

(si prende $a_1 = \alpha a$ e $b_1 = \alpha b$).

Proposizione. Un sottoinsieme non vuoto W di V è un sottospazio di V se e solo se è verificata la seguente condizione:

$$(*) \qquad \alpha_1 \underline{w}_1 + \alpha_2 \underline{w}_2 \in W \quad \text{per ogni } \underline{w}_1, \underline{w}_2 \in W \quad \text{ed ogni } \alpha_1, \alpha_2 \in K.$$

Dimostrazione. Supponiamo dapprima che W sia un sottospazio di V (ossia che siano verificate le condizioni (a) e (b)) e proviamo che allora vale $(*)$.

Siano $\underline{w}_1, \underline{w}_2 \in W$ ed $\alpha_1, \alpha_2 \in K$. Per (b), da $\underline{w}_1 \in W$ ed $\alpha_1 \in K$ segue che $\alpha_1 \underline{w}_1 \in W$, ed analogamente da $\underline{w}_2 \in W$ ed $\alpha_2 \in K$ segue che $\alpha_2 \underline{w}_2 \in W$.

Per (a) da $\alpha_1 \underline{w}_1 \in W$ ed $\alpha_2 \underline{w}_2 \in W$ segue che anche $\alpha_1 \underline{w}_1 + \alpha_2 \underline{w}_2 \in W$, ossia $(*)$.

Supponiamo ora che W sia un sottoinsieme non vuoto di V che verifichi la condizione $(*)$, e proviamo che allora W è un sottospazio di V, ossia che sono verificate entrambe le condizioni (a) e (b).

Siano $\underline{w}_1$ e $\underline{w}_2 \in W$. Applicando $(*)$ con $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$ si ottiene

$$\underline{w}_1 + \underline{w}_2 = 1\underline{w}_1 + 1\underline{w}_2 \in W,$$

ossia (a).

Se poi $\underline{w} \in W$ ed $\alpha \in K$, applicando $(*)$ con $\underline{w}_1 = \underline{w}$, $\alpha_1 = \alpha$ ed $\alpha_2 = 0$ si ottiene (b).

Si osservi che la condizione $(*)$ è equivalente alla condizione

$$(**) \quad \alpha_1\underline{w}_1 + \alpha_2\underline{w}_2 + \ldots + \alpha_n\underline{w}_n \in W \quad \text{per ogni } \underline{w}_1, \ldots, \underline{w}_n \in W, \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in K,$$

poichè $(*)$ è $(**)$ con $n = 2$, e $(**)$ si ottiene da $(*)$ iterandola.

$(**)$ si esprime dicendo che combinazioni lineari di elementi di W sono elementi di W. Dunque:

Un sottoinsieme non vuoto W di uno spazio vettoriale V è un sottospazio di V se e solo se ogni combinazione lineare di elementi di W è un elemento di W.

Si dice anche che **W è chiuso alle combinazioni lineari di suoi elementi**.

In particolare, **se S è un sottoinsieme di V, l'insieme delle combinazioni lineari di elementi di S è un sottospazio vettoriale di V**.

Def. 5 Se S è un sottoinsieme di V, l'insieme delle combinazioni lineari di elementi di S si chiama lo **spazio generato da S**, e si indica con il simbolo $\langle \mathbf{S} \rangle$.

I sottospazi fondamentali di una matrice

Sia A una matrice $m \times n$ reale (risp. complessa).

Siano $\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_n$ le colonne di A (quindi ciascun $\underline{a}_i$, per $i = 1, \ldots, n$, è un vettore colonna con m componenti).

Siano $\underline{r}_1^T, \ldots, \underline{r}_m^T$ le righe di A (quindi ciascun $\underline{r}_i^T$, per $i = 1, \ldots, m$, è un vettore riga con n componenti, e dunque ciascun $\underline{r}_i$ è un vettore colonna con n componenti).

(1) L'insieme delle combinazioni lineari delle colonne di A è un sottospazio di $\mathbb{R}^m$ (risp. di $\mathbb{C}^m$). Esso si chiama **lo spazio delle colonne di A** e si indica con il simbolo **C(A)**. Dunque

$$C(A) = \{\alpha_1\underline{a}_1 + \alpha_2\underline{a}_2 + \ldots + \alpha_n\underline{a}_n | \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R} \quad (\text{ risp. } \mathbb{C})\}.$$

(2) L'insieme delle combinazioni lineari dei vettori colonna $\underline{r}_i$, $i = 1, \ldots, m$, che si ottengono trasponendo le righe di A, è un sottospazio di $\mathbb{R}^n$ (risp. di $\mathbb{C}^n$). Esso si chiama **lo spazio delle righe di A** e si indica con il simbolo **R(A)**. Dunque

$$R(A) = \{\alpha_1\underline{r}_1 + \alpha_2\underline{r}_2 + \ldots + \alpha_n\underline{r}_n | \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R} \quad (\text{ risp. } \mathbb{C})\}.$$

(3) Un sistema lineare $A\underline{x} = \underline{b}$ in cui $\underline{b} = \underline{0}$ si chiama un **sistema** lineare **omogeneo**.

L'insieme di tutte le soluzioni del sistema omogeneo $A\underline{x} = \underline{0}$ (ossia l'insieme di tutti i vettori colonna con n componenti $\underline{v}$ tali che $A\underline{v} = \underline{0} \in \mathbb{R}^m$) è un sottospazio di $\mathbb{R}^n$ (risp. $\mathbb{C}^n$). Esso si chiama **lo spazio nullo di A** e si indica con il simbolo **N(A)**.

(4) L'insieme di tutte le soluzioni del sistema omogeneo $A^T \underline{x} = \underline{0}$ (ossia l'insieme di tutti i vettori colonna con m componenti $\underline{w}$ tali che $A^T \underline{w} = \underline{0} \in \mathbb{R}^n$) è un sottospazio di $\mathbb{R}^m$ (risp. $\mathbb{C}^m$). Esso è lo spazio nullo della trasposta di A, $\mathbf{N(A^T)}$, e si chiama **lo spazio nullo sinistro di A**. Poichè

$$(\underline{w}^T A)^T = A^T \underline{w} = \underline{0}$$

se e solo se $\underline{w}^T A = \underline{0}$, allora lo spazio nullo sinistro di A coincide con l'insieme dei vettori $\underline{w} \in \mathbb{R}^m$ (risp. $\mathbb{C}^m$) tali che $\underline{w}^T A = \underline{0}$.

LEZIONE 11

Insiemi di generatori. Insiemi linearmente indipendenti e insiemi linearmente dipendenti.

Sia V uno spazio vettoriale su K ($K \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$).

Def. 1. Un sottoinsieme $S = \{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_n\}$ di elementi di V si dice un **insieme di generatori** di V se lo spazio vettoriale generato da S coincide con V (in simboli $\langle S \rangle = V$). Quindi S è un insieme di generatori di V se ogni elemento di V è una combinazione lineare di elementi di S, ossia se per ogni $\underline{v} \in V$ esistono α_1, α_2, …, $\alpha_n \in K$ tali che

$$\underline{v} = \alpha_1 \underline{v}_1 + \alpha_2 \underline{v}_2 + \ldots + \alpha_n \underline{v}_n.$$

Esempio 1. Siano $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \ldots, \underline{e}_n$ le colonne della matrice identica I_n. L'insieme $S = \{\underline{e}_1, \underline{e}_2, \ldots, \underline{e}_n\}$ è un insieme di generatori di $\mathbb{R}^n$. Infatti un generico elemento di $\mathbb{R}^n$ è del tipo $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ con $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$, e per ogni $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ si ha:

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = a_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \ldots + a_n \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = a_1 \underline{e}_1 + a_2 \underline{e}_2 + \ldots + a_n \underline{e}_n.$$

Esempio 2. Siano $V = \mathbb{R}^2$ ed $S = \{\underline{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \underline{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\}$. S è un insieme di generatori di V. Per dimostrarlo, ricordando che un generico elemento $\underline{v}$ è del tipo $\underline{v} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, per opportuni $a, b \in \mathbb{R}$, ci chiediamo se dati comunque $a, b \in \mathbb{R}$ esistano α_1 ed $\alpha_2 \in \mathbb{R}$ tali che

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \underline{v} = \alpha_1 \underline{v}_1 + \alpha_2 \underline{v}_2 = \alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ 2\alpha_1 + \alpha_2 \end{pmatrix}.$$

Poichè prendendo $\alpha_1 = a$ e $\alpha_2 = b - 2a$ l'uguaglianza è verificata (ossia α_1 ed α_2 esistono qualunque siano a e b reali), allora S è un insieme di generatori di $\mathbb{R}^2$.

Esempio 3. Siano $V = \mathbb{R}^3$ ed $S = \{\underline{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \underline{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \underline{v}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}\}$. S non è un insieme di generatori di V. Per dimostrarlo, ricordando che un generico elemento $\underline{v}$ è del tipo $\underline{v} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$, per opportuni $a, b, c \in \mathbb{R}$, ci chiediamo se dati comunque $a, b, c \in \mathbb{R}$

esistano α_1, α_2, ed $\alpha_3 \in \mathbb{R}$ tali che

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \underline{v} = \alpha_1\underline{v}_1 + \alpha_2\underline{v}_2 + \alpha_3\underline{v}_3 = \alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 + 3\alpha_3 \\ 2\alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3 \\ \alpha_1 + 3\alpha_3 \end{pmatrix}.$$

In particolare $a = \alpha_1 + 3\alpha_3 = c$. Quindi un vettore $\underline{v}$ con $a \neq c$, ad esempio $\underline{v} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, non è combinazione lineare degli elementi di S, per cui S non è un insieme di generatori di V.

Def. 2. Un sottoinsieme finito $S = \{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_n\}$ di elementi di V si dice **linearmente indipendente** (L.I.) se l'unica combinazione lineare nulla di elementi di S ha tutti i coefficienti uguali a 0, ossia se imponendo la condizione

$$\alpha_1\underline{v}_1 + \alpha_2\underline{v}_2 + \dots + \alpha_n\underline{v}_n = \underline{0},$$

con $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in K$, si deduce che $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$.

Esempio 4. Siano $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \dots, \underline{e}_n$ le colonne della matrice identica I_n. L'insieme $S = \{\underline{e}_1, \underline{e}_2, \dots, \underline{e}_n\}$ è un sottoinsieme linearmente indipendente (L.I.) di $\mathbb{R}^n$. Siano infatti $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ tali che

$$\underline{0} = \alpha_1\underline{e}_1 + \alpha_2\underline{e}_2 + \dots + \alpha_n\underline{e}_n = \alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \dots + \alpha_n \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}.$$

Allora $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$.

Esempio 5. L'insieme S dell'Esempio 2 è linearmente indipendente (L.I.): da

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \underline{0} = \alpha_1\underline{v}_1 + \alpha_2\underline{v}_2 = \alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ 2\alpha_1 + \alpha_2 \end{pmatrix}$$

segue $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$.

Def. 3. Un sottoinsieme finito $S = \{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_n\}$ di elementi di V si dice **linearmente dipendente** (L.D.) se non è linearmente indipendente, ossia se esistono scalari $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ non tutti nulli tali che

$$\alpha_1\underline{v}_1 + \alpha_2\underline{v}_2 + \dots + \alpha_n\underline{v}_n = \underline{0}.$$

Esempio 6. L'insieme S dell'Esempio 3 è linearmente dipendente (L.D.):

$$3\underline{v}_1 - 4\underline{v}_2 - \underline{v}_3 = \underline{0}.$$

Proposizione.

(1) Se $S = \{\underline{v}\}$, allora S è linearmente indipendente (L.I.) se e solo se $\underline{v} \neq \underline{0}$.

(2) Sottoinsiemi non vuoti di insiemi linearmente indipendendenti (L.I.) sono linearmente indipendenti (L.I.).

(3) Un sottoinsieme S con almeno due elementi è linearmente dipendente (L.D.) se e solo se esiste un elemento di S che è combinazione lineare dei rimanenti elementi di S.

Dimostrazione

(1) Provare

$$(*) \quad S = \{\underline{v}\} \quad \text{è} \quad L.I. \Longleftrightarrow \underline{v} \neq \underline{0}$$

equivale a provare

$$(**) \quad \text{non } [S = \{\underline{v}\} \quad \text{è} \quad L.I.] \Longleftrightarrow \text{ non } [\underline{v} \neq \underline{0}],$$

ossia

$$(**) \quad S = \{\underline{v}\} \quad \text{è} \quad L.D. \Longleftrightarrow \underline{v} = \underline{0},$$

per cui proviamo $(**)$.

Se $S = \{\underline{v}\}$ L.D., allora esiste uno scalare $\alpha \neq 0$ tale che $\alpha\underline{v} = \underline{0}$. Moltiplicando ambo i membri dell'uguaglianza per α^{-1} (che esiste essendo $\alpha \neq 0$), si ottiene

$$\underline{v} = 1\underline{v} = \alpha^{-1}\alpha\underline{v} = \alpha^{-1}\underline{0} = \underline{0}.$$

Viceversa se $\underline{v} = \underline{0}$, allora $1\underline{v} = \underline{v} = \underline{0}$ è una combinazione lineare nulla degli elementi di S con coefficienti non tutti nulli, ossia S è un insieme L.D.

(2) Siano S un insieme L.I. ed S_0 un sottoinsieme non vuoto di S. Sia

$$\alpha_1\underline{v}_1 + \alpha_2\underline{v}_2 + \ldots + \alpha_n\underline{v}_n = \underline{0}$$

una combinazione lineare nulla di elementi di S_0 ($\alpha_i \in K$ per ogni $i = 1, \ldots, n$). Poichè gli elementi di S_0 sono elementi di S, allora

$$\alpha_1\underline{v}_1 + \alpha_2\underline{v}_2 + \ldots + \alpha_n\underline{v}_n = \underline{0}$$

è una combinazione lineare nulla di elementi di S. Poichè S è un insieme L.I., allora $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0$. Dunque S_0 è L.I.

(3) Sia $S = \{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_n\}$, $n \geq 2$, un insieme L.D.

Allora esistono $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ non tutti nulli tali che

$$(*) \quad \alpha_1\underline{v}_1 + \alpha_2\underline{v}_2 + \ldots + \alpha_n\underline{v}_n = \underline{0}.$$

Si fissi un $\alpha_i \neq 0$. Da $(*)$ si ricava

$$\alpha_i \underline{v}_i = -\alpha_1 \underline{v}_1 - \alpha_2 \underline{v}_2 - \ldots - \alpha_{i-1}\underline{v}_{i-1} - \alpha_{i+1}\underline{v}_{i+1} - \ldots - \alpha_n \underline{v}_n$$

e quindi, moltiplicando ambo i membri per α_i^{-1} (che esiste essendo $\alpha_i \neq 0$)

$$\underline{v}_i = -\alpha_i^{-1}\alpha_1 \underline{v}_1 - \alpha_i^{-1}\alpha_2 \underline{v}_2 - \ldots - \alpha_i^{-1}\alpha_{i-1}\underline{v}_{i-1} - \alpha_i^{-i}\alpha_{i+1}\underline{v}_{i+1} - \ldots - \alpha_i^{-1}\alpha_n \underline{v}_n.$$

Quindi esiste $\underline{v}_i \in S$ che è combinazione lineare dei rimanenti elementi di S.

Viceversa se $\underline{v}_i \in S = \{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_n\}$ è combinazione lineare degli altri elementi di S, allora esistono $\beta_1, \ldots, \beta_{i-1}, \beta_{i+1}, \ldots, \beta_n \in K$ tali che

$$\underline{v}_i = \beta_1 \underline{v}_1 + \beta_2 \underline{v}_2 + \ldots + \beta_{i-1}\underline{v}_{i-1} + \beta_{i+1}\underline{v}_{i+1} + \ldots + \beta_n \underline{v}_n.$$

Da ció si ricava che

$$\beta_1 \underline{v}_1 + \beta_2 \underline{v}_2 + \ldots + \beta_{i-1}\underline{v}_{i-1} - \underline{v}_i + \beta_{i+1}\underline{v}_{i+1} + \ldots + \beta_n \underline{v}_n = \underline{0}$$

è una combinazione lineare nulla degli elementi di S con coefficienti non tutti nulli (il coefficiente di $\underline{v}_i$ è -1). Quindi S è un insieme L.D.

Esercizio. Siano V uno spazio vettoriale, $S = \{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_n\}$ un sottoinsieme linearmente indipendente di V e $\underline{v} \in V$. Si supponga che $S \cup \{\underline{v}\}$ sia linearmente dipendente. Allora $\underline{v}$ è combinazione lineare degli elementi di S (ossia $\underline{v} \in \langle S \rangle$).

Svolgimento. Sia $S = \{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_n\}$.

Poichè $S \cup \{\underline{v}\}$ è linearmente dipendente, esistono scalari $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \beta$ non tutti nulli tali che

$$(*) \qquad \alpha_1 \underline{v}_1 + \alpha_2 \underline{v}_2 + \ldots + \alpha_n \underline{v}_n + \beta \underline{v} = \underline{0}.$$

Se fosse $\beta = 0$, da $(*)$ seguirebbe $\alpha_1 \underline{v}_1 + \alpha_2 \underline{v}_2 + \ldots + \alpha_n \underline{v}_n = \underline{0}$, e quindi, essendo S linearmente indipendente, si avrebbe $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0$, mentre non tutti gli scalari $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \beta$ sono nulli.

Dunque $\beta \neq 0$ ed esiste β^{-1}.

Da $(*)$ si deduce

$$\underline{v} = -\beta^{-1}\alpha_1 \underline{v}_1 - \beta^{-1}\alpha_2 \underline{v}_2 - \ldots - \beta^{-1}\alpha_n \underline{v}_n,$$

per cui $\underline{v}$ è combinazione lineare di $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_n$ (con coefficienti $\delta_1 = -\beta^{-1}\alpha_1$, $\delta_2 = -\beta^{-1}\alpha_2$, ..., $\delta_n = -\beta^{-1}\alpha_n$).

LEZIONE 12

Lemma della scrematura.

Sia V uno spazio vettoriale su K ($K \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$).

Proposizione. Supponiamo che $S = \{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_n\}$ sia un insieme di generatori di V e che $\underline{v}_i \in S$ sia combinazione lineare dei rimanenti elementi di S.

Allora $S' = S \setminus \{\underline{v}_i\}$ è ancora un insieme di generatori di V.

Dimostrazione.

Dobbiamo provare che ogni $\underline{v} \in V$ è combinazione lineare degli elementi di $S' = \{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_{i-1}, \underline{v}_{i+1}, \dots, \underline{v}_n\}$, ossia che

per ogni $\underline{v} \in V$ esistono $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{i-1}, \gamma_{i+1}, \dots, \gamma_n \in K$, tali che

$$\underline{v} = \gamma_1 \underline{v}_1 + \gamma_2 \underline{v}_2 + \dots + \gamma_{i-1} \underline{v}_{i-1} + \gamma_{i+1} \underline{v}_{i+1} + \dots + \gamma_n \underline{v}_n.$$

Sia dunque $\underline{v} \in V$.

Poichè $S = \{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_n\}$ è un insieme di generatori di V,

esistono $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in K$, tali che

$$(*) \quad \underline{v} = \alpha_1 \underline{v}_1 + \alpha_2 \underline{v}_2 + \dots + \alpha_n \underline{v}_n.$$

Poichè $\underline{v}_i$ è combinazione lineare degli elementi di $S' = \{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_{i-1}, \underline{v}_{i+1}, \dots, \underline{v}_n\}$, esistono $\beta_1, \dots, \beta_{i-1}, \beta_{i+1}, \dots, \beta_n \in K$ tali che

$$(**) \quad \underline{v}_i = \beta_1 \underline{v}_1 + \dots + \beta_{i-1} \underline{v}_{i-1} + \beta_{i+1} \underline{v}_{i+1} + \dots + \beta_n \underline{v}_n.$$

Sostituendo $(**)$ in $(*)$ si ottiene:

$$\underline{v} = \alpha_1 \underline{v}_1 + \dots + \alpha_{i-1} \underline{v}_{i-1} + \alpha_i (\beta_1 \underline{v}_1 + \dots + \beta_{i-1} \underline{v}_{i-1} + \beta_{i+1} \underline{v}_{i+1} + \dots$$

$$\dots + \beta_n \underline{v}_n) + \alpha_{i+1} \underline{v}_{i+1} + \dots + \alpha_n \underline{v}_n =$$

$$= (\alpha_1 + \alpha_i \beta_1) \underline{v}_1 + \dots + (\alpha_{i-1} + \alpha_i \beta_{i-1}) \underline{v}_{i-1} + (\alpha_{i+1} + \alpha_i \beta_{i+1}) \underline{v}_{i+1} + \dots + (\alpha_n + \alpha_i \beta_n) \underline{v}_n.$$

Quindi basta prendere $\gamma_j = \alpha_j + \alpha_i \beta_j$ per ogni $j \neq i$.

Lemma della scrematura. Siano $V \neq \{\underline{0}\}$ ed $S = \{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_n\}$ un insieme di generatori di V. Allora esiste un sottoinsieme S_0 contenuto in S che è sia linearmente indipendente, sia un insieme di generatori di V.

Dimostrazione. Sia

$$S_1 = \begin{cases} S \setminus \{\underline{0}\} & \text{se} \quad \underline{0} \in S \\ S & \text{se} \quad \underline{0} \notin S \end{cases}$$

Poichè $V \neq \{\underline{0}\}$ e $V = \langle S \rangle$ allora $S_1 \neq \emptyset$.

Per ogni $\underline{v} \in S$ si ha $\underline{0} = 0\underline{v}$, ossia $\underline{0}$ è combinazione lineare degli elementi di S, quindi per la Proposizione precedente si ha $\langle S_1 \rangle = \langle S \rangle$.

Sia $S_1 = \{\underline{w}_1, \underline{w}_2, \dots, \underline{w}_m\}$ $(m = n-1$ se $\underline{0} \in S$, $m = n$ se $\underline{0} \notin S)$.

Si ponga:

$$A_1 = \{\underline{w}_1\},$$

e si noti che essendo $\underline{w}_1 \neq \underline{0}$ si ha che A_1 è linearmente indipendente (L.I.);

$$A_2 = \begin{cases} A_1 & \text{se} \quad A_1 \cup \{\underline{w}_2\} \quad \text{è linearmente dipendente (L.D.)} \\ A_1 \cup \{\underline{w}_2\} & \text{se} \quad A_1 \cup \{\underline{w}_2\} \quad \text{è linearmente indipendente (L.I.)} \end{cases}$$

$$A_3 = \begin{cases} A_2 & \text{se} \quad A_2 \cup \{\underline{w}_3\} \quad \text{è} \quad L.D. \\ A_2 \cup \{\underline{w}_3\} & \text{se} \quad A_2 \cup \{\underline{w}_3\} \quad \text{è} \quad L.I. \end{cases}$$

Cosí procedendo, per ogni $1 < k \leq m$, con si ponga

$$A_k = \begin{cases} A_{k-1} & \text{se} \quad A_{k-1} \cup \{\underline{w}_k\} \quad \text{è} \quad L.D. \\ A_{k-1} \cup \{\underline{w}_k\} & \text{se} \quad A_{k-1} \cup \{\underline{w}_k\} \quad \text{è} \quad L.I. \end{cases}$$

Per costruzione ciascun A_k è $L.I.$

Inoltre per ogni k si ha

$$(*) \quad \langle A_k \rangle = \langle A_{k-1} \cup \{\underline{w}_k\} \rangle.$$

Infatti se $A_{k-1} \cup \{\underline{w}_k\}$ è $L.D.$, allora $A_k = A_{k-1}$ ed inoltre per l'esercizio in fondo alla Lezione 11, essendo A_{k-1} $L.I.$, si ha $\underline{w}_k \in \langle A_{k-1} \rangle$, quindi

$$\langle A_{k-1} \cup \{\underline{w}_k\} \rangle \quad \underset{\substack{\uparrow \\ \boxed{\underline{w}_k \in \langle A_{k-1} \rangle}}}{=} \quad \langle A_{k-1} \rangle \quad \underset{\substack{\uparrow \\ \boxed{A_{k-1} = A_k}}}{=} \quad \langle A_k \rangle$$

se invece $A_{k-1} \cup \{\underline{w}_k\}$ è $L.I.$, allora $A_k = A_{k-1} \cup \{\underline{w}_k\}$ e quindi anche

$$\langle A_k \rangle = \langle A_{k-1} \cup \{\underline{w}_k\} \rangle.$$

Se ne deduce:

$$\langle A_m \rangle = \langle A_{m-1} \cup \{\underline{w}_m\} \rangle = \langle A_{m-2} \cup \{\underline{w}_{m-1}, \underline{w}_m\} \rangle = \dots$$

$$\dots = \langle A_1 \cup \{\underline{w}_2, \dots, \underline{w}_{m-1}, \underline{w}_m\} \rangle = \langle \underline{w}_1, \underline{w}_2, \dots, \underline{w}_{m-1}, \underline{w}_m \rangle = \langle S_1 \rangle = \langle S \rangle = V,$$

ossia $S_0 = A_m$ è un insieme di generatori di V, ed è linearmente indipendente.

Def. 1. Un sottoinsieme di elementi di V che sia

– sia un insieme di generatori di V,

– sia linearmente indipendente,

si chiama **una base di V**.

Il Lemma della scrematura prova che **ogni insieme di generatori di V contiene una base di V**.

Esempio 1. Si trovi una base $\mathcal{B}$ di $\mathbb{R}^2$ contenuta nell'insieme di generatori di $\mathbb{R}^2$

$$S = \{\underline{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \underline{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \underline{v}_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix}, \underline{v}_4 = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}, \underline{v}_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \underline{v}_6 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}\}.$$

$$S_1 = S \setminus \{\underline{0}\} = \{\underline{w}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \underline{w}_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix}, \underline{w}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}, \underline{w}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \underline{w}_5 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}\}.$$

$$A_1 = \{\underline{w}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\}$$

$A_1 \cup \{\underline{w}_2\} = \{\underline{w}_1, \underline{w}_2\}$ è un insieme L.D. (perchè $5\underline{w}_1 - \underline{w}_2 = \underline{0}$), allora $A_2 = A_1 = \{\underline{w}_1\}$.

$A_2 \cup \{\underline{w}_3\} = \{\underline{w}_1, \underline{w}_3\}$ è un insieme L.D. (perchè $3\underline{w}_1 - \underline{w}_3 = \underline{0}$), allora $A_3 = A_2 = A_1 = \{\underline{w}_1\}$.

$A_3 \cup \{\underline{w}_4\} = \{\underline{w}_1, \underline{w}_4\}$ è un insieme L.I., perchè

$$\underline{0} = \alpha\underline{w}_1 + \beta\underline{w}_4 = \alpha\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \alpha + \beta \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \alpha = \beta = 0.$$

Allora $A_4 = A_3 \cup \{\underline{w}_4\} = \{\underline{w}_1, \underline{w}_4\}$.

$A_4 \cup \{\underline{w}_5\} = \{\underline{w}_1, \underline{w}_4, \underline{w}_5\}$ è un insieme L.D. (perchè $3\underline{w}_1 - \underline{w}_4 - \underline{w}_5 = \underline{0}$), allora $A_5 = A_4 = \{\underline{w}_1, \underline{w}_4\}$.

$\mathcal{B} = A_5 = \{\underline{w}_1, \underline{w}_4\}$ è una base di $\mathbb{R}^2$ contenuta in S.

ESERCIZIO TIPO 1

Risolvere il sistema lineare $A\underline{x} = \underline{b}$ dove

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 9 & 6 \\ 1 & -1 & 7 & 4 \\ 1 & -1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \underline{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Troviamo una forma ridotta di Gauss della matrice aumentata del sistema.

$$(A \mid \underline{b}) = \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & -3 & 9 & 6 & 6 \\ 1 & -1 & 7 & 4 & 4 \\ 1 & -1 & 3 & 2 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{E_{31}(-1)E_{21}(-1)E_1(\frac{1}{3})}$$

$$\to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{E_2(\frac{1}{4})} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) = (U \mid \underline{d}).$$

Il sistema $A\underline{x} = \underline{b}$ è equivalente al sistema $U\underline{x} = \underline{d}$ che è una forma compatta per

$$(*) \qquad \begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 2 \\ x_3 + \frac{1}{2}x_4 = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Poichè $\underline{d}$ è libera, $U\underline{x} = \underline{d}$ ammette soluzioni.

Poichè U ha esattamente due colonne libere, $U\underline{x} = \underline{d}$ ha ∞^2 soluzioni.

Scegliamo come parametri le variabili corrispondenti alle colonne libere di U (la 2^a e la 4^a) e con la sostituzione all'indietro da $(*)$ otteniamo

$$\begin{cases} x_2 = h \\ x_4 = k \\ x_3 = -\dfrac{1}{2}x_4 + \dfrac{1}{2} = -\dfrac{1}{2}k + \dfrac{1}{2} \\ x_1 = x_2 - 3x_3 - 2x_4 + 2 = h - 3(-\dfrac{1}{2}k + \dfrac{1}{2}) - 2k + 2 = h - \dfrac{1}{2}k + \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

L'insieme delle soluzioni del sistema $U\underline{x} = \underline{d}$ (e quindi l'insieme delle soluzioni del sistema $A\underline{x} = \underline{b}$) è

$$\left\{ \begin{pmatrix} h - \frac{1}{2}k + \frac{1}{2} \\ h \\ -\frac{1}{2}k + \frac{1}{2} \\ k \end{pmatrix} | h, k \in \mathbb{C} \right\}.$$

ESERCIZIO TIPO 2

Siano $A(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & \alpha - i & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & \alpha - i & \alpha + i \\ -\alpha - i & -\alpha^2 - 1 & 0 \end{pmatrix}$ una matrice 4×3 ad elementi complessi e $\underline{b}(\alpha) = \begin{pmatrix} \alpha - i \\ \alpha^2 + 1 \\ 2\alpha \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^4$. Per ogni $\alpha \in \mathbb{C}$ si dica se il sistema $A(\alpha)\underline{x} = \underline{b}(\alpha)$ ammette soluzioni, e quante.

Troviamo una forma ridotta di Gauss della matrice aumentata del sistema.

$$(A(\alpha) \quad | \quad \underline{b}(\alpha)) = \begin{pmatrix} 1 & \alpha - i & 0 & | & \alpha - i \\ 0 & 1 & 0 & | & \alpha^2 + 1 \\ 1 & \alpha - i & \alpha + i & | & 2\alpha \\ -\alpha - i & -\alpha^2 - 1 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{41}(\alpha+i)E_{31}(-1)}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & \alpha - i & 0 & | & \alpha - i \\ 0 & 1 & 0 & | & \alpha^2 + 1 \\ 0 & 0 & \alpha + i & | & \alpha + i \\ 0 & 0 & 0 & | & \alpha^2 + 1 \end{pmatrix} = (B(\alpha) \quad | \quad \underline{c}(\alpha)) .$$

$\boxed{1^0 \text{ CASO}}$ $\qquad \alpha = -i \qquad (B(-i) \quad | \quad \underline{c}(-i)) = \begin{pmatrix} 1 & -2i & 0 & | & -2i \\ 0 & 1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$ è una forma ridotta di Gauss per $(A(-i) \quad | \quad \underline{b}(-i))$, quindi $A(-i)\underline{x} = \underline{b}(-i)$ è equivalente a $B(-i)\underline{x} = \underline{c}(-i)$ che è una forma compatta per

$$(*) \qquad \begin{cases} x_1 - 2ix_2 & = -2i \\ x_2 & = 0 \end{cases}$$

Poichè $\underline{c}(-i)$ è libera, $B(-i)\underline{x} = \underline{c}(-i)$ ammette soluzioni.

Poichè $B(-i)$ ha esattamente una colonna libera, $B(-i)\underline{x} = \underline{c}(-i)$ ha ∞^1 soluzioni.

Scegliamo come parametro la variabile corrispondente alla colonna libera di $B(-i)$ (la 3^a) e con la sostituzione all'indietro da $(*)$ otteniamo

$$\begin{cases} x_3 = h \\ x_2 = 0 \\ x_1 = 2ix_2 - 2i = -2i \end{cases}$$

L'insieme delle soluzioni del sistema $B(-i)\underline{x} = \underline{c}(-i)$ (e quindi l'insieme delle soluzioni del sistema $A(-i)\underline{x} = \underline{b}(-i)$) è

$$\left\{ \begin{pmatrix} -2i \\ 0 \\ h \end{pmatrix} | h \in \mathbb{C} \right\}.$$

$\boxed{2^0 \text{ CASO}}$ $\qquad \alpha \neq -i$

$$(B(\alpha) \quad | \quad \underline{c}(\alpha)) = \begin{pmatrix} 1 & \alpha - i & 0 & | & \alpha - i \\ 0 & 1 & 0 & | & \alpha^2+1 \\ 0 & 0 & \alpha + i & | & \alpha + i \\ 0 & 0 & 0 & | & \alpha^2+1 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_3(\frac{1}{\alpha+i})}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & \alpha - i & 0 & | & \alpha - i \\ 0 & 1 & 0 & | & \alpha^2+1 \\ 0 & 0 & 1 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & | & \alpha^2+1 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_4(\frac{1}{\alpha+i})} \begin{pmatrix} 1 & \alpha - i & 0 & | & \alpha - i \\ 0 & 1 & 0 & | & \alpha^2+1 \\ 0 & 0 & 1 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & | & \alpha - i \end{pmatrix} = (C(\alpha) | \quad \underline{d}(\alpha)) .$$

$\boxed{1^0 \text{ Sottocaso}}$ $\qquad \alpha = i \qquad (C(i) \quad | \quad \underline{d}(i)) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$ è una forma ridotta di Gauss per $(A(i) \quad | \quad \underline{b}(i))$, quindi $A(i)\underline{x} = \underline{b}(i)$ è equivalente a $C(i)\underline{x} = \underline{d}(i)$ che è una forma compatta per

$$(*) \qquad \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 1 \end{cases}$$

Poichè $\underline{d}(i)$ è libera, $C(i)\underline{x} = \underline{d}(i)$ ammette soluzioni.

Poichè tutte le colonne di $C(i)$ sono dominanti, $C(i)\underline{x} = \underline{d}(i)$ ammette un'unica soluzione. L'unica soluzione di $C(i)\underline{x} = \underline{d}(i)$ (e quindi di $A(i)\underline{x} = \underline{b}(i)$) è

$$\underline{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

$\boxed{2^0 \text{ Sottocaso}}$ $\qquad \alpha \notin \{i -i\} \qquad (C(\alpha) | \quad \underline{d}(\alpha)) = \begin{pmatrix} 1 & \alpha - i & 0 & | & \alpha - i \\ 0 & 1 & 0 & | & \alpha^2+1 \\ 0 & 0 & 1 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & | & \alpha - i \end{pmatrix} \xrightarrow{E_4(\frac{1}{\alpha-i})}$

$\begin{pmatrix} 1 & \alpha - i & 0 & | & \alpha - i \\ 0 & 1 & 0 & | & \alpha^2+1 \\ 0 & 0 & 1 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & | & 1 \end{pmatrix} = (D(\alpha) | \quad \underline{e}(\alpha))$ è una forma ridotta di Gauss per $(A(\alpha) \quad | \quad \underline{b}(\alpha))$.

Poichè $\underline{e}(\alpha)$ è dominante, $D(\alpha)\underline{x} = \underline{e}(\alpha)$ (e quindi di $A(\alpha)\underline{x} = \underline{b}(\alpha)$) non ammette soluzioni.

ESERCIZIO TIPO 3

Sia $\quad A(\alpha)=\begin{pmatrix}\alpha & 1 & \alpha\\ \alpha & 1 & 1\\ 0 & 2 & 1\end{pmatrix}, \quad$ dove $\alpha\in\mathbb{C}$.

Per quegli $\alpha\in\mathbb{C}$ per cui $A(\alpha)$ è non singolare, si calcoli $A(\alpha)^{-1}$.

$$(\,A(\alpha)\quad|\quad I_3\,)=\left(\begin{array}{ccc|ccc}\alpha & 1 & \alpha & 1 & 0 & 0\\ \alpha & 1 & 1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)\xrightarrow[\qquad\qquad\qquad\qquad]{E_{21}(-\alpha)E_1(\frac{1}{\alpha})\quad \boxed{\alpha\neq 0: A(0)\text{ è singolare}}}$$

$$\to\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & \frac{1}{\alpha} & 1 & \frac{1}{\alpha} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1-\alpha & -1 & 1 & 0\\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)\xrightarrow{E_{23}}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & \frac{1}{\alpha} & 1 & \frac{1}{\alpha} & 0 & 0\\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1-\alpha & -1 & 1 & 0\end{array}\right)\to$$

$$\xrightarrow{E_2(\frac{1}{2})}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & \frac{1}{\alpha} & 1 & \frac{1}{\alpha} & 0 & 0\\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2}\\ 0 & 0 & 1-\alpha & -1 & 1 & 0\end{array}\right)\xrightarrow[\qquad\qquad\qquad\qquad]{E_3(\frac{1}{1-\alpha})\quad \boxed{\alpha\neq 1: A(1)\text{ è singolare}}}$$

$$\to\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & \frac{1}{\alpha} & 1 & \frac{1}{\alpha} & 0 & 0\\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2}\\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{1-\alpha} & \frac{1}{1-\alpha} & 0\end{array}\right)\xrightarrow{E_{23}(-\frac{1}{2})}$$

$$\to\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & \frac{1}{\alpha} & 1 & \frac{1}{\alpha} & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2(1-\alpha)} & -\frac{1}{2(1-\alpha)} & \frac{1}{2}\\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{1-\alpha} & \frac{1}{1-\alpha} & 0\end{array}\right)\xrightarrow{E_{13}(-1)}$$

$$\to\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & \frac{1}{\alpha} & 0 & \frac{1}{\alpha(1-\alpha)} & -\frac{1}{1-\alpha} & 0\\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2(1-\alpha)} & -\frac{1}{2(1-\alpha)} & \frac{1}{2}\\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{1-\alpha} & \frac{1}{1-\alpha} & 0\end{array}\right)\xrightarrow{E_{12}(-\frac{1}{\alpha})}$$

$$\to\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 0 & \frac{1}{2\alpha(1-\alpha)} & \frac{-2\alpha+1}{2\alpha(1-\alpha)} & -\frac{1}{2\alpha}\\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2(1-\alpha)} & -\frac{1}{2(1-\alpha)} & \frac{1}{2}\\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{1-\alpha} & \frac{1}{1-\alpha} & 0\end{array}\right)=(\,I_3\quad|\quad A(\alpha)^{-1}\,).$$

Se $\boxed{\alpha\notin\{0,1\}}$ $\qquad A(\alpha)^{-1}=\frac{1}{2\alpha(1-\alpha)}\begin{pmatrix}1 & -2\alpha+1 & -1+\alpha\\ \alpha & -\alpha & \alpha(1-\alpha)\\ -2\alpha & 2\alpha & 0\end{pmatrix}.$

ESERCIZIO TIPO 4

Si trovino tutte le inverse destre della matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

Un'inversa destra di A è una matrice 3×2 R tale che se $R = (\, \underline{c}_1 \quad | \quad \underline{c}_2 \,)$, allora

$\underline{c}_1$ è soluzione di (1) $A\underline{x} = \underline{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e

$\underline{c}_2$ è soluzione di (2) $A\underline{x} = \underline{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Cerchiamo tutte le soluzioni di (1) e (2).

$$(\, A \quad | \quad I_2 \,) = \left(\begin{array}{ccc|cc} 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{E_{21}(-1)E_1(\frac{1}{2})} \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 3 & -\frac{1}{2} & 1 \end{array}\right) \to$$

$$\xrightarrow{E_2(-2)} \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & -6 & 1 & -2 \end{array}\right) = (\, U \quad | \quad \underline{b}_1 \quad \underline{b}_2 \,).$$

(1) è equivalente a (1′) $U\underline{x} = \underline{b}_1$ che è una forma compatta per

$$\begin{cases} x_1 + \frac{1}{2}x_2 \quad = \frac{1}{2} \\ x_2 - 6x_3 = 1 \end{cases}$$

Scegliamo come parametro la variabile corrispondente all'unica colonna libera di U (la 3^a) e con la sostituzione all'indietro otteniamo

$$\begin{cases} x_3 = h \\ x_2 = 6x_3 + 1 = 6h + 1 \\ x_1 = -\dfrac{1}{2}x_2 + \dfrac{1}{2} = -\dfrac{1}{2}(6h+1) + \dfrac{1}{2} = -3h \end{cases}$$

L'insieme delle soluzioni di (1) è

$$\left\{ \begin{pmatrix} -3h \\ 6h+1 \\ h \end{pmatrix} | h \in \mathbb{C} \right\}.$$

(2) è equivalente a (2′) $U\underline{x} = \underline{b}_2$ che è una forma compatta per

$$\begin{cases} x_1 + \frac{1}{2}x_2 \quad = 0 \\ x_2 - 6x_3 = -2 \end{cases}$$

Scegliamo come parametro la variabile corrispondente all'unica colonna libera di U (la 3^a) e con la sostituzione all'indietro otteniamo

$$\begin{cases} x_3 = k \\ x_2 = 6x_3 - 2 = 6k - 2 \\ x_1 = -\dfrac{1}{2}x_2 = -\dfrac{1}{2}(6k-2) = -3k + 1 \end{cases}$$

L'insieme delle soluzioni di (2) è

$$\left\{ \begin{pmatrix} -3k+1 \\ 6k-2 \\ k \end{pmatrix} | k \in \mathbb{C} \right\}.$$

Per ogni $h, k \in \mathbb{C}$, $R(h,k) = \begin{pmatrix} -3h & -3k+1 \\ 6h+1 & 6k-2 \\ h & k \end{pmatrix}$ è un'inversa destra di A.

ESERCIZIO TIPO 5

Sia $A(\alpha) = \begin{pmatrix} \alpha & 3\alpha & 2\alpha & -2\alpha \\ 0 & 0 & \alpha^2+9 & \alpha^2+9 \\ 2 & 6 & 4 & -3+\alpha \\ 1 & 3 & 1 & -6-3\alpha \\ \alpha+1 & 3\alpha+3 & 2\alpha+1 & -1 \end{pmatrix}$, dove $\alpha \in \mathbb{C}$.

Per ogni $\alpha \notin \{0, 3i, -3i\}$ trovare una decomposizione $A(\alpha) = L(\alpha)U(\alpha)$, scrivendo anche $L(\alpha)$ come prodotto di matrici elementari.

$$A(\alpha) = \begin{pmatrix} \boxed{\alpha} & 3\alpha & 2\alpha & -2\alpha \\ \boxed{0} & 0 & \alpha^2+9 & \alpha^2+9 \\ \boxed{2} & 6 & 4 & -3+\alpha \\ \boxed{1} & 3 & 1 & -6-3\alpha \\ \boxed{\alpha+1} & 3\alpha+3 & 2\alpha+1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[E_{51}(-\alpha-1)E_{41}(-1)E_{31}(-2)E_1(\frac{1}{\alpha})]{} \boxed{\alpha \neq 0}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & \boxed{\alpha^2+9} & \alpha^2+9 \\ 0 & 0 & \boxed{0} & \alpha+1 \\ 0 & 0 & \boxed{-1} & -3\alpha-4 \\ 0 & 0 & \boxed{-1} & 2\alpha+1 \end{pmatrix} \xrightarrow[E_{52}(1)E_{42}(1)E_2(\frac{1}{\alpha^2+9})]{} \boxed{\alpha \notin \{3i, -3i\}}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha+1 \\ 0 & 0 & 0 & -3\alpha-3 \\ 0 & 0 & 0 & 2\alpha+2 \end{pmatrix} = B(\alpha)$$

$\boxed{1^o CASO}$ $\alpha \neq -1$ (nonchè $\alpha \neq 0, 3i, -3i$)

$$B(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{\alpha+1} \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{-3\alpha-3} \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{2\alpha+2} \end{pmatrix} \xrightarrow[E_{53}(-2\alpha-2)E_{43}(3\alpha+3)E_3(\frac{1}{\alpha+1})]{} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = U(\alpha)$$

Posto $H(\alpha) =$

$$= E_{53}(-2\alpha-2)E_{43}(3\alpha+3)E_3(\frac{1}{\alpha+1})E_{52}(1)E_{42}(1)E_2(\frac{1}{\alpha^2+9})E_{51}(-\alpha-1)E_{41}(-1)E_{31}(-2)E_1(\frac{1}{\alpha})$$

si ha che $H(\alpha)A(\alpha) = U(\alpha)$, e quindi $A(\alpha) = H(\alpha)^{-1}U(\alpha)$.

Si puó prendere come $L(\alpha)$ la matrice $H(\alpha)^{-1}$, ossia

$H(\alpha)^{-1} = (E_{53}(-2\alpha-2)E_{43}(3\alpha+3)E_3(\frac{1}{\alpha+1})E_{52}(1)E_{42}(1)E_2(\frac{1}{\alpha^2+9})E_{51}(-\alpha-1)$

$E_{41}(-1)E_{31}(-2)E_1(\frac{1}{\alpha}))^{-1} =$

$= E_1(\frac{1}{\alpha})^{-1}E_{31}(-2)^{-1}E_{41}(-1)^{-1}E_{51}(-\alpha-1)^{-1}E_2(\frac{1}{\alpha^2+9})^{-1}E_{42}(1)^{-1}E_{52}(1)^{-1}E_3(\frac{1}{\alpha+1})^{-1}$
$E_{43}(3\alpha+3)^{-1}E_{53}(-2\alpha-2)^{-1} =$
$= E_1(\alpha)E_{31}(2)E_{41}(1)E_{51}(\alpha+1)E_2(\alpha^2+9)E_{42}(-1)E_{52}(-1)E_3(\alpha+1)E_{43}(-3\alpha-3)$
$E_{53}(2\alpha+2) =$

$$= \begin{pmatrix} \boxed{\alpha} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \boxed{0} & \boxed{\alpha^2+9} & 0 & 0 & 0 \\ \boxed{2} & \boxed{0} & \boxed{\alpha+1} & 0 & 0 \\ \boxed{1} & \boxed{-1} & \boxed{-3\alpha-3} & 1 & 0 \\ \boxed{\alpha+1} & \boxed{-1} & \boxed{2\alpha+2} & 0 & 1 \end{pmatrix} = L(\alpha)$$

$\boxed{2^o CASO}$ $\quad \alpha = -1$

$$B(-1) = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = U(-1)$$

$$E_{52}(1)E_{42}(1)E_2(\frac{1}{1+9})E_{51}(1-1)E_{41}(-1)E_{31}(-2)E_1(\frac{1}{-1})A(-1) = U(-1)$$

Si puó prendere come $L(-1)$ la matrice

$$(E_{52}(1)E_{42}(1)E_2(\frac{1}{1+9})E_{51}(1-1)E_{41}(-1)E_{31}(-2)E_1(\frac{1}{-1}))^{-1} =$$
$$= E_1(-1)E_{31}(2)E_{41}(1)E_{51}(0)E_2(10)E_{42}(-1)E_{52}(-1) =$$

$$= \begin{pmatrix} \boxed{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \boxed{0} & \boxed{10} & 0 & 0 & 0 \\ \boxed{2} & \boxed{0} & 1 & 0 & 0 \\ \boxed{1} & \boxed{-1} & 0 & 1 & 0 \\ \boxed{0} & \boxed{-1} & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = L(-1).$$

$\boxed{N.B.}$ Nell'Esercizio Tipo 5, se $\alpha \in \{0, 3i, -3i\}$ non è possibile trovare una forma ridotta di Gauss di $A(\alpha)$ senza fare scambi di righe, quindi $A(\alpha)$ **NON** ha una decomposizione $L(\alpha)U(\alpha)$.

ESERCIZIO TIPO 6

Sia $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Si trovi una decomposizione $A = P^T LU$.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[E_{12}]{} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[E_{23}]{} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[E_2(\frac{1}{3})]{}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[E_{43}(-1)E_3(\frac{1}{2})]{} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = U,$$

$$P = E_{23}E_{12} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$PA = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 & 0 & 1 \\ \boxed{0} & \boxed{3} & 6 & 3 \\ \boxed{0} & \boxed{0} & 2 & 4 \\ \boxed{0} & \boxed{0} & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[E_2(\frac{1}{3})]{}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & \boxed{2} & 4 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[E_{43}(-1)E_3(\frac{1}{2})]{} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = U$$

$$L = \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 & 0 \\ \boxed{0} & \boxed{3} & 0 & 0 \\ \boxed{0} & \boxed{0} & \boxed{2} & 0 \\ \boxed{0} & \boxed{0} & \boxed{1} & 1 \end{pmatrix}, \quad P^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \qquad PA = LU, \quad A = P^T LU.$$

$\boxed{N.B.}$ $\quad \tilde{P} = E_{12}E_{23} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ e $\tilde{P}A$ **NON** ha una decomposizione LU.

ESERCIZIO TIPO 7

Siano $\underline{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\underline{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\underline{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Si dica se $\mathcal{S} = \{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3\} \subset \mathbb{R}^4$ è linearmente dipendente o linearmente indipendente.

Siano $\alpha, \beta, \delta \in \mathbb{R}$ tali che

$$\underline{0} = \alpha\underline{v}_1 + \beta\underline{v}_2 + \delta\underline{v}_3 = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + \delta \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha + 2\beta + \delta \\ \beta + \delta \\ 3\alpha + 4\beta + \delta \\ -\alpha + \delta \end{pmatrix}.$$

Allora (1) $\begin{cases} \alpha + 2\beta + \delta = 0 \\ \beta + \delta = 0 \\ 3\alpha + 4\beta + \delta = 0 \\ -\alpha + \delta \end{cases}$ Facendo una eliminazione di Gauss sulla matrice aumentata del sistema lineare (1) ($\alpha, \beta, \delta, \gamma$ sono le incognite del sistema) si ottiene

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[E_{41}(1)E_{31}(-3)]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \end{array}\right) \to$$

$$\xrightarrow[E_{42}(-2)E_{32}(2)]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) = (U \quad | \quad \underline{0})$$

Dunque (1) è equivalente ad (1′) $\begin{cases} \alpha + 2\beta + \delta = 0 \\ \beta + \delta = 0 \end{cases}$

Scegliendo come parametro la variabile corrispondente all'unica colonna non dominante di U (la 3^a), con la sostituzione all'indietro si ottiene $\begin{cases} \delta = h \\ \beta = -\delta = -h \\ \alpha = -2\beta - \delta = -2(-h) - h = h \end{cases}$

Il sistema (1′) ha ∞^1 soluzioni: tutti gli elementi dell'insieme $\left\{ \begin{pmatrix} h \\ -h \\ h \end{pmatrix} | h \in \mathbb{R} \right\}$.

Prendendo ad esempio $h = 1$ si ottiene $\alpha = \delta = 1$ e $\beta = -1$ e $\underline{v}_1 - \underline{v}_2 + \underline{v}_3 = \underline{0}$.

Quindi $\{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3\}$ è linearmente dipendente.

ESERCIZIO TIPO 8

Sia $\mathcal{S} = \{\underline{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \underline{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \underline{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \underline{v}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \underline{v}_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\}$.

(1) Si provi che $\mathcal{S}$ è un insieme di generatori di $\mathbb{R}^3$.

(2) Si trovi una base di $\mathbb{R}^3$ contenuta in $\mathcal{S}$.

(1) Per provare che $\mathcal{S}$ è un insieme di generatori di $\mathbb{R}^3$ occorre provare che per ogni $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ esistono $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5 \in \mathbb{R}$ tali che

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \alpha_1\underline{v}_1 + \alpha_2\underline{v}_2 + \alpha_3\underline{v}_3 + \alpha_4\underline{v}_4 + \alpha_5\underline{v}_5 =$$

$$= \alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_4 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \alpha_5 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3 \\ \alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_4 \\ \alpha_3 - \alpha_4 + \alpha_5 \end{pmatrix},$$

ossia se il sistema lineare

$$(*) \quad \begin{cases} \alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3 = a \\ \alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_4 = b \\ \alpha_3 - \alpha_4 + \alpha_5 = c \end{cases}$$

nelle incognite $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5$ ha soluzione **qualunque** siano $a, b, c \in \mathbb{R}$.

Facendo una eliminazione di Gauss sulla matrice aumentata del sistema si ottiene

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & a \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & c \end{array}\right) \xrightarrow[E_{21}(-1)]{} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & b-a \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & c \end{array}\right) \to$$

$$\xrightarrow[E_{32}(-1)E_2(-1)]{} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & a-b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & c+b-a \end{array}\right) = (U \quad | \quad \underline{d}).$$

Poichè $\underline{d}$è libera qualunque siano $a, b, c \in \mathbb{R}$, allora $(*)$ ha soluzione qualunque siano $a, b, c \in \mathbb{R}$, per cui $\mathcal{S}$ è un insieme di generatori di $\mathbb{R}^3$.

(2) Applichiamo il “Lemma della scrematura”.

– Poichè $\underline{v}_1 \neq \underline{0}$, allora $\{\underline{v}_1\}$ è linearmente indipendente (L.I.).

Teniamo $\underline{v}_1$.

– Poichè $\underline{v}_2 = 2\underline{v}_1$, allora $\{\underline{v}_1, \underline{v}_2\}$ è linearmente dipendente (L.D.), quindi $\langle \underline{v}_1, \underline{v}_2 \rangle = \langle \underline{v}_1 \rangle$.

Buttiamo via $\underline{v}_2$.

– $\{\underline{v}_1, \underline{v}_3\}$ è linearmente indipendente (L.I.):

$$\underline{0} = \alpha\underline{v}_1 + \beta\underline{v}_3 = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha+\beta \\ \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \alpha = \beta = 0.$$

Quindi $\langle \underline{v}_1, \underline{v}_3 \rangle > \langle \underline{v}_1 \rangle$.

Teniamo $\underline{v}_3$.

– $\{\underline{v}_1, \underline{v}_3, \underline{v}_4\}$ è linearmente dipendente (L.D.):

$$\underline{0} = \alpha\underline{v}_1 + \beta\underline{v}_3 + \delta v_4 = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \delta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha+\beta \\ \alpha+\delta \\ \beta-\delta \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad (*) \begin{cases} \alpha+\beta = 0 \\ \alpha+\delta = 0 \\ \beta-\delta = 0 \end{cases}$$

Facendo una eliminazione di Gauss sulla matrice aumentata di $(*)$ si ottiene:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[E_{21}(-1)]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[E_{32}(-1)E_2(-1)]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right),$$

per cui $(*)$ è equivalente a $(*)'$ $\begin{cases} \alpha+\beta = 0 \\ \beta-\delta = 0 \end{cases}$ che ha ∞^1 soluzioni, in particolare una soluzione non nulla.

Quindi $\langle \underline{v}_1, \underline{v}_3, \underline{v}_4 \rangle = \langle \underline{v}_1, \underline{v}_3 \rangle$.

Buttiamo via $\underline{v}_4$.

– $\{\underline{v}_1, \underline{v}_3, \underline{v}_5\}$ è linearmente indipendente (L.I.):

$$\underline{0} = \alpha\underline{v}_1 + \beta\underline{v}_3 + \delta v_5 = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \delta \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha+\beta \\ \alpha \\ \beta+\delta \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \alpha = \beta = \delta = 0.$$

Quindi $\langle \underline{v}_1, \underline{v}_3, \underline{v}_5 \rangle > \langle \underline{v}_1, \underline{v}_3 \rangle$.

Dunque $\mathbb{R}^3 = \langle \mathcal{S} \rangle = \langle \underline{v}_1, \underline{v}_3, \underline{v}_5 \rangle$ e poichè $\{\underline{v}_1, \underline{v}_3, \underline{v}_5\}$ è linearmente indipendente, allora $\{\underline{v}_1, \underline{v}_3, \underline{v}_5\}$ è una base di $\mathbb{R}^3$.

ESERCIZIO TIPO 9

Sia $\quad A_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \alpha & 4 \\ 1 & \alpha+2 & 2\alpha+2 & 4 \\ 2 & 0 & \alpha^2+2\alpha-4 & \alpha^2+4 \\ 0 & \alpha+2 & \alpha^2+\alpha-2 & \alpha^2+\alpha-4 \end{pmatrix}, \quad$ dove $\alpha \in \mathbb{C}$.

Per ogni $\alpha \in \mathbb{C}$ si dica qual è $rk(A_\alpha)$ e si trovino una base $\mathcal{B}_\alpha$ di $C(A_\alpha)$ ed una base $\mathcal{D}_\alpha$ di $R(A_\alpha)$.

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \alpha & 4 \\ 1 & \alpha+2 & 2\alpha+2 & 4 \\ 2 & 0 & \alpha^2+2\alpha-4 & \alpha^2+4 \\ 0 & \alpha+2 & \alpha^2+\alpha-2 & \alpha^2+\alpha-4 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\xrightarrow{E_{31}(-2)E_{21}(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \alpha & 4 \\ 0 & \alpha+2 & \alpha+2 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha^2-4 & \alpha^2-4 \\ 0 & \alpha+2 & \alpha^2+\alpha-2 & \alpha^2+\alpha-4 \end{pmatrix} = B_\alpha$$

$\boxed{1^o CASO}$ $\quad \alpha \neq -2$

$$B_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \alpha & 4 \\ 0 & \alpha+2 & \alpha+2 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha^2-4 & \alpha^2-4 \\ 0 & \alpha+2 & \alpha^2+\alpha-2 & \alpha^2+\alpha-4 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\xrightarrow{E_{42}(-\alpha-2)E_2(\frac{1}{\alpha+2})} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \alpha & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha^2-4 & \alpha^2-4 \\ 0 & 0 & \alpha^2-4 & \alpha^2+\alpha-4 \end{pmatrix} = C_\alpha$$

$\boxed{1^o Sottocaso}$ $\quad \alpha \neq -2, 2$

$$C_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \alpha & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha^2-4 & \alpha^2-4 \\ 0 & 0 & \alpha^2-4 & \alpha^2+\alpha-4 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{43}(-\alpha^2+4)E_3(\frac{1}{\alpha^2-4})} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \alpha & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix} = D_\alpha$$

$\boxed{1^o Sotto-sottocaso}$ $\quad \alpha \neq -2, 2, 0$

$$D_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \alpha & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix} \xrightarrow{E_4(\frac{1}{\alpha})} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \alpha & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = U_\alpha$$

$$rk(A_\alpha) = 4, \qquad \mathcal{D}_\alpha = \{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \alpha \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \}$$

$$\mathcal{B}_\alpha = \{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha+2 \\ 0 \\ \alpha+2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \alpha \\ 2\alpha+2 \\ \alpha^2+2\alpha-4 \\ \alpha^2+\alpha-2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ \alpha^2+4 \\ \alpha^2+\alpha-4 \end{pmatrix} \}$$

$\boxed{2^o Sotto-sottocaso}$ $\quad \alpha = 0$

$$D_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = U_0$$

$$rk(A_0) = 3, \qquad \mathcal{D}_0 = \{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \} \qquad \mathcal{B}_0 = \{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix} \}$$

$\boxed{2^o Sottocaso}$ $\quad \alpha = 2$

$$C_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_3(\frac{1}{2})E_{34}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = U_2$$

$$rk(A_2) = 3, \qquad \mathcal{D}_2 = \{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \} \qquad \mathcal{B}_2 = \{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 8 \\ 2 \end{pmatrix} \}$$

$\boxed{2^o CASO}$ $\quad \alpha = -2$

$$B_{-2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_2(\frac{-1}{2})E_{24}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = U_{-2}$$

$$rk(A_{-2}) = 2, \qquad \mathcal{D}_{-2} = \{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \} \qquad \mathcal{B}_{-2} = \{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 8 \\ -2 \end{pmatrix} \}$$

ESERCIZIO TIPO 10

Sia W il sottospazio di $\mathbb{R}^4$ generato da

$$\mathcal{S} = \{\underline{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \underline{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \underline{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \underline{v}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \underline{v}_5 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}\}.$$

Si trovi una base $\mathcal{B}$ di W con $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{S}$.

$$A = (\underline{v}_1 \quad \underline{v}_2 \quad \underline{v}_3 \quad \underline{v}_4 \quad \underline{v}_5) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & -2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{41}(-2)}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & -2 & -2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{42}(2)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{43}(2)}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = U$$

Una base $\mathcal{B}$ di $C(A) = \langle \mathcal{S} \rangle = W$ è l'insieme che ha come elementi le colonne di A corrispondenti alle colonne dominanti di U.

Poichè le colonne dominanti di U sono la 1^a, la 2^a e la 4^a, allora $\mathcal{B} = \{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_4\}$.

ESERCIZIO TIPO 11

Si trovi una base dello spazio nullo $N(A)$ della matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{21}(-2)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = U$$

U è una forma ridotta di Gauss per A. Per il teorema "nullità + rango"si ha

$$(\text{ dim N(A) = numero delle colonne di A - rk(A)}) = 4 - 2 = 2.$$

Poichè $N(A) = N(U) = \{\underline{x} \in \mathbb{C}^4 | U\underline{x} = \underline{0}\}$, allora

$$\underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in N(A) \Longleftrightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

Scegliendo come parametri le variabili corrispondenti alle colonne libere di U (la 2^a e la 4^a) con la sostituzione all'indietro si ottiene

$$\begin{cases} x_2 = h \\ x_4 = k \\ x_3 = -x_4 = -k \\ x_1 = -2x_2 - x_3 = -2h - (-k) = -2h + k \end{cases}$$

Quindi

$$N(A) = N(U) = \{ \begin{pmatrix} -2h + k \\ h \\ -k \\ k \end{pmatrix} | h, k \in \mathbb{C}\}$$

e chiamando $\underline{v}_1$ l'elemento di $N(A)$ che si ottiene ponendo $h = 1$ e $k = 0$, e $\underline{v}_2$ l'elemento di $N(A)$ che si ottiene ponendo $h = 0$ e $k = 1$, si ha che una base di $N(A)$ è

$$\{\underline{v}_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \underline{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\}.$$

ESERCIZIO TIPO 12

Si consideri la trasformazione lineare $f : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^2$ definita da

$$f(\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} a_0 + a_2 \\ 2a_0 + a_1 \end{pmatrix}.$$

Si determini la matrice A associata ad f rispetto alle basi ordinate

$$\mathcal{B} = \{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \} \quad \text{e} \quad \mathcal{D} = \{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \}$$

su dominio e codominio rispettivamente.

La matrice che cerchiamo è

$$A = \begin{pmatrix} C_{\mathcal{D}}(f(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix})) & C_{\mathcal{D}}(f(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix})) & C_{\mathcal{D}}(f(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix})) \end{pmatrix}$$

Poichè

$$f(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}) \underset{\boxed{\begin{array}{l} a_0 = 1 \\ a_1 = 0 \\ a_2 = 1 \end{array}}}{\overset{\uparrow}{=}} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad f(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}) \underset{\boxed{\begin{array}{l} a_0 = 2 \\ a_1 = 1 \\ a_2 = 0 \end{array}}}{\overset{\uparrow}{=}} \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix},$$

$$f(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}) \underset{\boxed{\begin{array}{l} a_0 = 1 \\ a_1 = 0 \\ a_2 = -1 \end{array}}}{\overset{\uparrow}{=}} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix},$$

allora

$$A = \begin{pmatrix} C_{\mathcal{D}}(\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}) & C_{\mathcal{D}}(\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}) & C_{\mathcal{D}}(\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}) \end{pmatrix}$$

Piuttosto che calcolare separatamente $C_{\mathcal{D}}(\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix})$, $C_{\mathcal{D}}(\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix})$ e $C_{\mathcal{D}}(\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix})$, calcoliamo $C_{\mathcal{D}}(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix})$ per un generico vettore $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2$, e specializziamo la formula ottenuta ai tre diversi vettori $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Poichè

$$C_{\mathcal{D}}(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \quad | \quad \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

allora

$$C_{\mathcal{D}}(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \quad | \quad \begin{pmatrix} \alpha+\beta \\ \alpha-\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

ossia α e β sono tali che $\begin{cases} \alpha+\beta = a \\ \alpha-\beta = b \end{cases}$, per cui $\begin{cases} \alpha = (a+b)/2 \\ \beta = (a-b)/2 \end{cases}$

Quindi

$$C_{\mathcal{D}}(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} (a+b)/2 \\ (a-b)/2 \end{pmatrix}$$

Dunque

$$C_{\mathcal{D}}(\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}) \underset{\boxed{\begin{matrix} a=2 \\ b=2 \end{matrix}}}{\overset{\uparrow}{=}} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad C_{\mathcal{D}}(\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}) \underset{\boxed{\begin{matrix} a=2 \\ b=5 \end{matrix}}}{\overset{\uparrow}{=}} \begin{pmatrix} \frac{7}{2} \\ -\frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

$$C_{\mathcal{D}}(\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}) \underset{\boxed{\begin{matrix} a=0 \\ b=2 \end{matrix}}}{\overset{\uparrow}{=}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

e quindi

$$A = \begin{pmatrix} 2 & \frac{7}{2} & 1 \\ 0 & -\frac{3}{2} & -1 \end{pmatrix}.$$

ESERCIZIO TIPO 13

Sia $A = \begin{pmatrix} 2 & \frac{7}{2} & 1 \\ 0 & -\frac{3}{2} & -1 \end{pmatrix}$ la matrice associata ad una trasformazione lineare $f : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^2$ rispetto alle basi ordinate

$$\mathcal{B} = \{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \} \quad \text{e} \quad \mathcal{D} = \{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \}$$

su dominio e codominio rispettivamente. Si determini la matrice A' associata ad f rispetto alle basi ordinate

$$\mathcal{B}' = \{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \} \quad \text{e} \quad \mathcal{D}' = \{ \underline{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} ; \underline{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \}$$

su dominio e codominio rispettivamente.

La matrice che cerchiamo è

$$A' = S^{-1} A P$$

dove S è la matrice di passaggio da $\mathcal{D}'$ a $\mathcal{D}$, e P è la matrice di passaggio da $\mathcal{B}'$ a $\mathcal{B}$.

Nell'esercizio precedente abbiamo visto che

$$C_{\mathcal{D}}(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} (a+b)/2 \\ (a-b)/2 \end{pmatrix}$$

quindi

$$S = (\, C_{\mathcal{D}}(\underline{e}_1) \quad C_{\mathcal{D}}(\underline{e}_2) \,) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

e

$$S^{-1} = \frac{1}{\frac{1}{2}(-\frac{1}{2}) - \frac{1}{2}\frac{1}{2}} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = (-2) \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Calcoliamo

$$P = \begin{pmatrix} C_{\mathcal{B}}(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}) & C_{\mathcal{B}}(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}) & C_{\mathcal{B}}(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}) \end{pmatrix}.$$

Per farlo, piuttosto che calcolare separatamente $C_{\mathcal{B}}(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix})$, $C_{\mathcal{B}}(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix})$ e $C_{\mathcal{B}}(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix})$, calcoliamo $C_{\mathcal{B}}(\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix})$ per un generico vettore $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^3$, e specializziamo la formula ottenuta ai tre diversi vettori $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Poichè

$$C_{\mathcal{B}}(\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \delta \end{pmatrix} \quad | \quad \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \delta \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

allora

$$C_{\mathcal{B}}(\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \delta \end{pmatrix} \quad | \quad \begin{pmatrix} \alpha + 2\beta + \delta \\ \beta \\ \alpha - \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

ossia α, β e δ sono tali che

$$\begin{cases} \alpha + 2\beta + \delta = a \\ \beta = b \\ \alpha - \delta = c \end{cases} \implies \begin{cases} \alpha + \delta = a - 2b \\ \beta = b \\ \alpha - \delta = c \end{cases} \implies \begin{cases} \alpha = (a - 2b + c)/2 \\ \beta = b \\ \delta = (a - 2b - c)/2 \end{cases}$$

, per cui

$$C_{\mathcal{B}}(\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} (a - 2b + c)/2 \\ b \\ (a - 2b - c)/2 \end{pmatrix}$$

Dunque

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & -1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

e quindi

$$A' = S^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & \frac{7}{2} & 1 \\ 0 & -\frac{3}{2} & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & -1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & -1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

ESERCIZIO TIPO 14

Si verifichi che $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ definita da $\phi(\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix}) = |a_0 + a_1| + |a_0 - a_1|$ è una norma.

$\boxed{1}$ $\phi(\underline{0}) = \phi(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}) = |0+0| + |0-0| = 0.$

Sia $\underline{v} = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix}$. Poichè $\phi(\underline{v}) \geq 0$, per provare che

$$\underline{v} \neq \underline{0} \qquad \Longrightarrow \qquad \phi(\underline{v}) > 0$$

basta provare che

$$\underline{v} \neq \underline{0} \qquad \Longrightarrow \qquad \phi(\underline{v}) \neq 0,$$

ossia basta provare che

$$\phi(\underline{v}) = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \underline{v} = \underline{0}.$$

Ora:

$$\left.\begin{array}{r} \phi(\underline{v}) = 0 \\ \underline{v} = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} \end{array}\right\} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} |a_0 + a_1| = 0 \\ |a_0 - a_1| = 0 \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} a_0 + a_1 = 0 \\ a_0 - a_1 = 0 \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad a_0 = a_1 = 0 \quad \Longrightarrow \quad \underline{v} = \underline{0}.$$

$\boxed{2}$

$$\begin{aligned} \phi(\alpha\underline{v}) &= \phi(\alpha \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix}) = \phi(\begin{pmatrix} \alpha a_0 \\ \alpha a_1 \end{pmatrix}) = |\alpha a_0 + \alpha a_1| + |\alpha a_0 - \alpha a_1| = \\ &= |\alpha||a_0 + a_1| + |\alpha||a_0 - a_1| = |\alpha|(|a_0 + a_1| + |a_0 - a_1|) = |\alpha|\phi(\underline{v}). \end{aligned}$$

$\boxed{3}$ Siano $\underline{v} = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix}$ e $\underline{w} = \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned} \phi(\underline{v} + \underline{w}) &= \phi(\begin{pmatrix} a_0 + b_0 \\ a_1 + b_1 \end{pmatrix}) = |(a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)| + |(a_0 + b_0) - (a_1 + b_1)| = \\ &= |(a_0 + a_1) + (b_0 + b_1)| + |(a_0 - a_1) + (b_0 - b_1)| \leq \\ &\leq |a_0 + a_1| + |b_0 + b_1| + |a_0 - a_1| + |b_0 - b_1| = \phi(\underline{v}) + \phi(\underline{w}). \end{aligned}$$

ESERCIZIO TIPO 15

Si verifichi che $\quad (\cdot,\cdot\,) : \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C} \quad$ definita da

$$\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) = \overline{x}_1 y_1 + 2\overline{x}_2 y_2$$

è un prodotto scalare.

$\boxed{1}$ Siano $\underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ e $\underline{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$.

$$\overline{(\underline{y}, \underline{x})} \stackrel{?}{=} (\underline{x}, \underline{y})$$

$$\overline{(\underline{y}, \underline{x})} \quad = \quad \overline{\overline{y}_1 x_1 + 2\overline{y}_2 x_2} \quad = \quad y_1 \overline{x}_1 + 2 y_2 \overline{x}_2 \quad = \quad (\underline{x}, \underline{y}).$$

$\boxed{2}$ Siano $\underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, $\underline{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$, $\underline{z} = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$, $\underline{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$.

$$\bullet \quad (\alpha \underline{x} + \beta \underline{z}, \underline{y}) \stackrel{?}{=} \overline{\alpha}(\underline{x}, \underline{y}) + \overline{\beta}(\underline{z}, \underline{y})$$

$$\bullet\bullet \quad (\underline{x}, \alpha \underline{y} + \beta \underline{w}) \stackrel{?}{=} \alpha(\underline{x}, \underline{y}) + \beta(\underline{x}, \underline{w})$$

$$\begin{aligned} \bullet \quad (\alpha \underline{x} + \beta \underline{z}, \underline{y}) &= \overline{(\alpha x_1 + \beta z_1)} y_1 + 2\overline{(\alpha x_2 + \beta z_2)} y_2 = \\ &= (\overline{\alpha x_1} + \overline{\beta} \overline{z_1}) y_1 + 2(\overline{\alpha x_2} + \overline{\beta} \overline{z_2}) y_2 = \\ &= \overline{\alpha}(\overline{x_1} y_1 + 2\overline{x_2} y_2) + \overline{\beta}(\overline{z_1} y_1 + 2\overline{z_2} y_2) = \\ &= \overline{\alpha}(\underline{x}, \underline{y}) + \overline{\beta}(\underline{z}, \underline{y}). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet\bullet \quad (\underline{x}, \alpha \underline{y} + \beta \underline{w}) &= \overline{x_1}(\alpha y_1 + \beta w_1) + 2\overline{x_2}(\alpha y_2 + \beta w_2) = \\ &= \alpha \overline{x_1} y_1 + \beta \overline{x_1} w_1 + 2\alpha \overline{x_2} y_2 + 2\beta \overline{x_2} w_2 = \\ &= \alpha(\overline{x_1} y_1 + 2\overline{x_2} y_2) + \beta(\overline{x_1} w_1 + 2\overline{x_2} w_2) = \\ &= \alpha(\underline{x}, \underline{y}) + \beta(\underline{x}, \underline{w}). \end{aligned}$$

$\boxed{3}$

$$\bullet \quad (\underline{0}, \underline{0}) \stackrel{?}{=} 0$$

$$\bullet\bullet \quad \underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \neq \underline{0} \quad \stackrel{?}{\Longrightarrow} \quad (\underline{x}, \underline{x}) \in \mathbb{R}^+_{>0}$$

$$\bullet \quad (\underline{0}, \underline{0}) \quad = \quad 0 + 2 \times 0 \quad = \quad 0$$

$$\bullet\bullet \quad (\underline{x}, \underline{x}) \quad = \quad \overline{x}_1 x_1 + 2\overline{x}_2 x_2 \quad = \quad |x_1|^2 + 2|x_2|^2$$

Essendo $\underline{x} \neq \underline{0}$, si ha che $x_1 \neq 0$ oppure $x_2 \neq 0$, per cui $|x_1|^2 \in \mathbb{R}^+_{>0}$ oppure $|x_2|^2 \in \mathbb{R}^+_{>0}$.
Quindi

$$|x_1|^2 + 2|x_2|^2 \in \mathbb{R}^+_{>0}.$$

ESERCIZIO TIPO 16

Siano $\underline{z} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}$ ed $S = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^2 \quad | \quad ||\underline{x}-\underline{z}||_\infty \leq 1\}$. Si provi che esistono $\underline{x}_0, \underline{x}_1 \in S$ tali che

$$||\underline{x}_0||_2 \quad \leq \quad ||\underline{x}||_2 \quad \leq \quad ||\underline{x}_1||_2 \quad \text{per ogni } \underline{x} \in S,$$

e si calcolino $||\underline{x}_0||_2$ e $||\underline{x}_1||_2$.

$$\begin{aligned} S \quad &= \quad \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \quad | \quad \max\{|x_1-5|, |x_2-4|\} \leq 1 \quad \right\} = \\ &= \quad \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \quad | \quad -1 \leq x_1 - 5 \leq 1 \quad \text{e} \quad -1 \leq x_2 - 4 \leq 1 \quad \right\} = \\ &= \quad \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \quad | \quad 4 \leq x_1 \leq 6 \quad \text{e} \quad 3 \leq x_2 \leq 5 \quad \right\} \end{aligned}$$

Quindi se $\underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in S$ allora $||\underline{x}||_2 = \sqrt{|x_1|^2 + |x_2|^2} \geq \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$, e poichè $\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} \in S$ e $|| \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} ||_2 = 5$, allora $\underline{x}_0 = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ (e $||\underline{x}_0||_2 = 5$).

Inoltre se $\underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in S$ allora $||\underline{x}||_2 = \sqrt{|x_1|^2 + |x_2|^2} \leq \sqrt{6^2 + 5^2} = \sqrt{61}$, e poichè $\begin{pmatrix} 6 \\ 5 \end{pmatrix} \in S$ e $|| \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \end{pmatrix} ||_2 = \sqrt{61}$, allora $\underline{x}_1 = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \end{pmatrix}$ (e $||\underline{x}_1||_2 = \sqrt{61}$).

ESERCIZIO TIPO 17

Si trovi una base ortonormale di

$$V = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ i \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ i \end{pmatrix} \right\rangle \leq \mathbb{C}^4.$$

$\boxed{1}$ Troviamo una base $\mathcal{B}_1$ di V.

Poniamo

$$\underline{w}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ i \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \underline{w}_2 = \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \underline{w}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \underline{w}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ i \end{pmatrix}$$

e costruiamo la matrice $A = (\underline{w}_1 \quad \underline{w}_2 \quad \underline{w}_3 \quad \underline{w}_4)$, ossia una matrice tale che $C(A) = V$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & i & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ i & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & i \end{pmatrix} \xrightarrow[E_{31}(-i)]{} \begin{pmatrix} 1 & i & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & i \end{pmatrix} \xrightarrow[E_{42}(1)E_{32}(-1)]{} \begin{pmatrix} 1 & i & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\xrightarrow[E_{34}]{} \begin{pmatrix} 1 & i & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[E_3(-i)]{} \begin{pmatrix} 1 & i & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = U$$

Dunque $\mathcal{B}_1 = \{\underline{w}_1, \underline{w}_2, \underline{w}_4\}$ è una base di $C(A) = V$.

$\boxed{2}$ Troviamo una base ortogonale $\mathcal{B}_2$ di V: poniamo $\underline{v}_1 = \underline{w}_1, \underline{v}_2 = \underline{w}_2$ e $\underline{v}_3 = \underline{w}_4$, e applichiamo l'algoritmo di Gram-Schmidt a $\{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3\}$.

$$\underline{u}_1 = \underline{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ i \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\underline{u}_2 = \underline{v}_2 - \alpha_{12}\underline{u}_1, \qquad \underline{u}_1 \neq \underline{0} \implies \alpha_{12} = \frac{(\underline{u}_1, \underline{v}_2)}{(\underline{u}_1, \underline{u}_1)}$$

$$(\underline{u}_1, \underline{v}_2) = \underline{u}_1^H \underline{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = i$$

$$(\underline{u}_1, \underline{u}_1) = \underline{u}_1^H \underline{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ i \\ 0 \end{pmatrix} = 2$$

$$\implies \alpha_{12} = i/2$$

$$\begin{aligned} \underline{u}_2 &= \underline{v}_2 - \alpha_{12}\underline{u}_1 = \\ &= \underline{v}_2 - \frac{i}{2}\underline{u}_1 = \\ &= \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} - \frac{i}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ i \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{i}{2} \\ 1 \\ \frac{1}{2} \\ -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\underline{u}_3 = \underline{v}_3 - \alpha_{13}\underline{u}_1 - \alpha_{23}\underline{u}_2,$$

$$\underline{u}_1 \neq \underline{0} \implies \alpha_{13} = \frac{(\underline{u}_1, \underline{v}_3)}{(\underline{u}_1, \underline{u}_1)}$$

$$(\underline{u}_1, \underline{v}_3) = \underline{u}_1^H \underline{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ i \end{pmatrix} = 0$$

$$\implies \alpha_{13} = 0$$

$$\underline{u}_2 \neq \underline{0} \implies \alpha_{23} = \frac{(\underline{u}_2, \underline{v}_3)}{(\underline{u}_2, \underline{u}_2)}$$

$$(\underline{u}_2, \underline{v}_3) = \underline{u}_2^H \underline{v}_3 = \begin{pmatrix} -\frac{i}{2} & 1 & \frac{1}{2} & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ i \end{pmatrix} = -i$$

$$(\underline{u}_2, \underline{u}_2) = \underline{u}_2^H \underline{u}_2 = \begin{pmatrix} -\frac{i}{2} & 1 & \frac{1}{2} & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{i}{2} \\ 1 \\ \frac{1}{2} \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{5}{2}$$

$$\implies \alpha_{23} = -\frac{2}{5}i$$

$$\begin{aligned} \underline{u}_3 &= \underline{v}_3 - \alpha_{13}\underline{u}_1 - \alpha_{23}\underline{u}_2 = \\ &= \underline{v}_3 + \frac{2i}{5}\underline{u}_2 = \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ i \end{pmatrix} + \frac{2i}{5} \begin{pmatrix} \frac{i}{2} \\ 1 \\ \frac{1}{2} \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -1 \\ 2i \\ i \\ 3i \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$\mathcal{B}_2 = \{\underline{u}_1, \underline{u}_2, \underline{u}_3\}$, dove

$$\underline{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ i \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \underline{u}_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} i \\ 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \underline{u}_3 = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -1 \\ 2i \\ i \\ 3i \end{pmatrix},$$

è una base ortogonale di V.

$\boxed{3}$ Troviamo una base ortonormale $\mathcal{B}$ di V, normalizzando gli elementi di $\mathcal{B}_2$.

$$||\underline{u}_1||_2 = \sqrt{(\underline{u}_1, \underline{u}_1)} = \sqrt{2}$$
$$||\underline{u}_2||_2 = \sqrt{(\underline{u}_2, \underline{u}_2)} = \sqrt{5/2}$$
$$||\underline{u}_3||_2 = \sqrt{(\underline{u}_3, \underline{u}_3)} = \sqrt{\underline{u}_3^H \underline{u}_3} = \sqrt{\frac{1}{5}\begin{pmatrix} -1 & -2i & -i & -3i \end{pmatrix}\frac{1}{5}\begin{pmatrix} -1 \\ 2i \\ i \\ 3i \end{pmatrix}} = \frac{\sqrt{15}}{5}$$

$\mathcal{B} = \{\frac{\underline{u}_1}{||\underline{u}_1||_2}, \frac{\underline{u}_2}{||\underline{u}_2||_2}, \frac{\underline{u}_3}{||\underline{u}_3||_2}\}$, dove

$$\frac{\underline{u}_1}{||\underline{u}_1||_2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ i \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \frac{\underline{u}_2}{||\underline{u}_2||_2} = \frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix} i \\ 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \frac{\underline{u}_3}{||\underline{u}_3||_2} = \frac{1}{\sqrt{15}}\begin{pmatrix} -1 \\ 2i \\ i \\ 3i \end{pmatrix},$$

è una base ortonormale di V.

ESERCIZIO TIPO 18

Si calcolino la matrice di proiezione su $V = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle \leq \mathbb{C}^3$ e la proiezione ortogonale di $\underline{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}$ su V.

$\boxed{1}$ Troviamo una base ortonormale di V.

Siano $\underline{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 0 \end{pmatrix}$ e $\underline{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Allora $V = \langle \underline{v}_1, \underline{v}_2 \rangle$. Poichè

$$A = \begin{pmatrix} \underline{v}_1 & \underline{v}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[E_{21}(-i)]{} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1-i \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[E_2(\frac{1}{2}+\frac{i}{2})]{} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = U,$$

allora $dim(V) = dim(C(A)) = rk(A) = 2$, quindi $\{\underline{v}_1, \underline{v}_2\}$ è una base di V.

Applichiamo l'algoritmo di Gram-Schmidt a $\{\underline{v}_1, \underline{v}_2\}$ per trovare una base ortogonale di V.

$$\underline{u}_1 = \underline{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\underline{u}_2 = \underline{v}_2 - \alpha_{12}\underline{u}_1, \qquad \underline{u}_1 \neq \underline{0} \implies \alpha_{12} = \frac{(\underline{u}_1, \underline{v}_2)}{(\underline{u}_1, \underline{u}_1)}$$

$$(\underline{u}_1, \underline{v}_2) = \underline{u}_1^H \underline{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 & -i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1 - i$$

$$(\underline{u}_1, \underline{u}_1) = \underline{u}_1^H \underline{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 & -i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 0 \end{pmatrix} = 2$$

$$\implies \alpha_{12} = \frac{1-i}{2}$$

$$\begin{aligned} \underline{u}_2 &= \underline{v}_2 - \alpha_{12}\underline{u}_1 = \\ &= \underline{v}_2 - \frac{1-i}{2}\underline{u}_1 = \\ &= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1-i}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1+i \\ 1-i \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$\{\underline{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 0 \end{pmatrix}, \underline{u}_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1+i \\ 1-i \\ 0 \end{pmatrix}\}$ è una base ortogonale di V.

$$||\underline{u}_1||_2 = \sqrt{(\underline{u}_1, \underline{u}_1)} = \sqrt{2}$$

$$||\underline{u}_2||_2 = \sqrt{(\underline{u}_2, \underline{u}_2)} = \sqrt{\underline{u}_2^H \underline{u}_2} = \sqrt{\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1-i & 1+i & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1+i \\ 1-i \\ 0 \end{pmatrix}} = \frac{1}{2}\sqrt{4} = 1$$

$\{\frac{\underline{u}_1}{||\underline{u}_1||_2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{\underline{u}_2}{||\underline{u}_2||_2} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1+i \\ 1-i \\ 0 \end{pmatrix}\}$ è una base ortonormale di V.

$\boxed{2}$ Calcoliamo una matrice Q che abbia come colonne gli elementi della base ortonormale di V trovata al punto 1.

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{\underline{u}_1}{||\underline{u}_1||_2} & \frac{\underline{u}_2}{||\underline{u}_2||_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1+i}{2} \\ \frac{i}{\sqrt{2}} & \frac{1-i}{2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sqrt{2} & 1+i \\ i\sqrt{2} & 1-i \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$\boxed{3}$ $P = QQ^H$, dove Q è la matrice trovata al punto 2, è la matrice di proiezione di $\mathbb{C}^3$ su V. Dunque

$$P = QQ^H = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} \sqrt{2} & 1+i \\ i\sqrt{2} & 1-i \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sqrt{2} & -i\sqrt{2} & 0 \\ 1-i & 1+i & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$\boxed{4}$ La proiezione ortogonale di $\underline{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}$ su V è $P\underline{v}$, dove P è la matrice è la matrice di proiezione di $\mathbb{C}^3$ su V (trovata al punto 3). Dunque la proiezione ortogonale di $\underline{v}$ su V è

$$P\underline{v} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

ESERCIZIO TIPO 19

Si trovino una decomposizione Q_0R_0-non-normalizzata ed una decomposizione QR-normalizzata per la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -5 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -5 \\ -1 & 5 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

$\boxed{1}$ Poniamo

$$\underline{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \underline{v}_2 = \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad \underline{v}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \underline{v}_4 = \begin{pmatrix} -3 \\ -5 \\ -1 \end{pmatrix}$$

e applichiamo l'algoritmo di Gram-Schimdt a $\{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3, \underline{v}_4\}$.

Otterremo 4 vettori, $\underline{u}_1, \underline{u}_2, \underline{u}_3, \underline{u}_4$. Per sapere se alcuni degli $\underline{u}_i$ saranno nulli, e in tal caso quali, troviamo innanzitutto una forma ridotta di Gauss U di A: le eventuali colonne libere di U corrisponderanno agli $\underline{u}_i$ nulli.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -5 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -5 \\ -1 & 5 & -1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{31}(1)} \begin{pmatrix} 1 & -5 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 2 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{32}(-2)}$$
$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -5 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_3(\frac{1}{6})} \begin{pmatrix} 1 & -5 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = U$$

Poichè U ha come unica colonna libera la 2^a, allora applicando l'algoritmo di Gram-Schimdt a $\{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3, \underline{v}_4\}$ otterremo $\underline{u}_2 = \underline{0}$.

$$\boxed{\underline{u}_1 = \underline{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}}$$

$$\underline{u}_2 = \underline{v}_2 - \alpha_{12}\underline{u}_1, \qquad \underline{u}_1 \neq \underline{0} \quad \Longrightarrow \quad \alpha_{12} = \frac{(\underline{u}_1, \underline{v}_2)}{(\underline{u}_1, \underline{u}_1)}$$

$$(\underline{u}_1, \underline{v}_2) = \underline{u}_1^H \underline{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} = -10$$

$$(\underline{u}_1, \underline{u}_1) = \underline{u}_1^H \underline{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = 2$$

$$\Longrightarrow \quad \boxed{\alpha_{12} = -10/2 = -5}$$

$$\begin{aligned} \underline{u}_2 &= \underline{v}_2 - \alpha_{12}\underline{u}_1 = \\ &= \underline{v}_2 + 5\underline{u}_1 = \\ &= \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} + 5 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \boxed{\underline{0} = \underline{u}_2} \end{aligned}$$

$$\underline{u}_3 = \underline{v}_3 - \alpha_{13}\underline{u}_1 - \alpha_{23}\underline{u}_2,$$

$$\underline{u}_1 \neq \underline{0} \quad \Longrightarrow \quad \alpha_{13} = \frac{(\underline{u}_1, \underline{v}_3)}{(\underline{u}_1, \underline{u}_1)}$$

$$(\underline{u}_1, \underline{v}_3) = \underline{u}_1^H \underline{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 4$$

$$\Longrightarrow \quad \boxed{\alpha_{13} = 4/2 = 2}$$

$$\underline{u}_2 = \underline{0} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{\alpha_{23} = 0}$$

$$\begin{aligned} \underline{u}_3 &= \underline{v}_3 - \alpha_{13}\underline{u}_1 - \alpha_{23}\underline{u}_2 = \\ &= \underline{v}_3 - 2\underline{u}_1 = \\ &= \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \underline{u}_3} \end{aligned}$$

$\underline{u}_4 = \underline{v}_4 - \alpha_{14}\underline{u}_1 - \alpha_{24}\underline{u}_2 - \alpha_{34}\underline{u}_3,$

$$\underline{u}_1 \neq \underline{0} \quad \Longrightarrow \quad \alpha_{14} = \frac{(\underline{u}_1, \underline{v}_4)}{(\underline{u}_1, \underline{u}_1)}$$

$$(\underline{u}_1, \underline{v}_4) = \underline{u}_1^H \underline{v}_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 \\ -5 \\ -1 \end{pmatrix} = -2$$

$$\Longrightarrow \quad \boxed{\alpha_{14} = -2/2 = -1}$$

$$\underline{u}_2 = \underline{0} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{\alpha_{24} = 0}$$

$$\underline{u}_3 \neq \underline{0} \quad \Longrightarrow \quad \alpha_{34} = \frac{(\underline{u}_3, \underline{v}_4)}{(\underline{u}_3, \underline{u}_3)}$$

$$(\underline{u}_3, \underline{v}_4) = \underline{u}_3^H \underline{v}_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 \\ -5 \\ -1 \end{pmatrix} = -9$$

$$(\underline{u}_3, \underline{u}_3) = \underline{u}_3^H \underline{u}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 3$$

$$\Longrightarrow \quad \boxed{\alpha_{34} = -9/3 = -3}$$

$$\begin{aligned} \underline{u}_4 &= \underline{v}_4 - \alpha_{14}\underline{u}_1 - \alpha_{24}\underline{u}_2 = -\alpha_{34}\underline{u}_3 = \\ &= \underline{v}_4 + \underline{u}_1 + 3\underline{u}_3 = \\ &= \begin{pmatrix} -3 \\ -5 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \underline{u}_4} \end{aligned}$$

$\boxed{2}$ Poniamo

$$Q_0 = \begin{pmatrix} \underline{u}_1 & \underline{u}_2 & \underline{u}_3 & \underline{u}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R_0 = \begin{pmatrix} 1 & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \alpha_{14} \\ 0 & 1 & \alpha_{23} & \alpha_{24} \\ 0 & 0 & 1 & \alpha_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -5 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$A = Q_0R_0$ è una decomposizione Q_0R_0-non-normalizzata per A.

$\boxed{3}$ Sia Q_1 la matrice che si ottiene dalla matrice Q_0, ottenuta al punto (2), togliendo tutte le (eventuali) colonne nulle di Q_0. In questo caso Q_0 ha un'unica colonna nulla, la 2^a, quindi

$$Q_1 = \begin{pmatrix} \underline{u}_1 & \underline{u}_3 & \underline{u}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Sia R_1 la matrice che si ottiene dalla matrice R_0, ottenuta al punto (2), togliendo le righe di R_0 che corrispondono alle colonne che sono state tolte da Q_0 per ottenere Q_1.

In questo caso, poichè per ottenere Q_1 è stata tolta da Q_0 la 2^a colonna, allora per ottenere R_1 si toglie da R_0 la 2^a riga. Dunque

$$R_1 = \begin{pmatrix} 1 & -5 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$\boxed{4}$ Costruiamo la matrice diagonale D che ha sulla diagonale la norma euclidea delle colonne di Q_1 (ossia delle colonne non nulle di Q_0), e calcoliamo D^{-1}.

Poichè

$||\underline{u}_1||_2 = \sqrt{(\underline{u}_1, \underline{u}_1)} = \sqrt{2}$,

$||\underline{u}_3||_2 = \sqrt{(\underline{u}_3, \underline{u}_3)} = \sqrt{3}$,

$$||\underline{u}_4||_2 = \sqrt{(\underline{u}_4, \underline{u}_4)} = \sqrt{\underline{u}_4^H \underline{u}_4} = \sqrt{\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}} = \sqrt{6},$$

allora

$$D = \begin{pmatrix} ||\underline{u}_1||_2 & 0 & 0 \\ 0 & ||\underline{u}_3||_2 & 0 \\ 0 & 0 & ||\underline{u}_4||_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{6} \end{pmatrix}.$$

Quindi

$$D^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}.$$

$\boxed{5}$ Poniamo

$$Q = Q_1 D^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & -2\frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}.$$

$$R = DR_1 = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{6} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -5 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & -5\sqrt{2} & 2\sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ 0 & 0 & \sqrt{3} & -3\sqrt{3} \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{6} \end{pmatrix}.$$

Allora $A = QR$ è una decomposizione QR-normalizzata di A.

ESERCIZIO TIPO 20

Si calcoli il determinante della matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 0 \\ 1 & i & 0 \end{pmatrix}$.

$\boxed{1^0 modo}$ Si puó il determinante di A sviluppandolo rispetto alla 1^a riga di A, oppure rispetto alla 2^a riga di A, oppure rispetto alla 3^a riga di A; si puó però calcolarlo anche sviluppandolo rispetto alla 1^a colonna di A, oppure rispetto alla 2^a colonna di A, od infine rispetto alla 3^a colonna di A. Qualunque scelta si faccia tra queste sei, si ottiene lo stesso risultato.

(1) Scegliendo di svilupparlo rispetto alla 3^a colonna (in questo caso è la scelta piú conveniente, poichè la 3^a colonna di A ha molti zeri) si ha:

$$Det(A) = (-1)^{1+3} \times 1 \times Det \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & i \end{pmatrix} = 2i - 4.$$

(2) Scegliendo di svilupparlo, ad esempio, rispetto alla 2^a riga si ha:

$$\begin{aligned} Det(A) &= (-1)^{2+1} \times 2 \times Det \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ i & 0 \end{pmatrix} + (-1)^{2+2} \times 4 \times Det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \\ &= -2 \times (-i) + 4 \times (-1) = 2i - 4. \end{aligned}$$

$\boxed{2^0 modo}$ Si puó il determinante di A facendo un'eliminazione di Gauss su A.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 0 \\ 1 & i & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{31}(-1)E_{21}(-2)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & i-2 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{23}}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & i-2 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_3(-\frac{1}{2})E_2(\frac{1}{i-2})} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1/(i-2) \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = U$$

Quindi $U = FA$ dove $F = E_3(-\frac{1}{2})E_2(\frac{1}{i-2})E_{23}E_{31}(-1)E_{21}(-2)$.

Poichè $A = F^{-1}U$, allora

$$\begin{aligned} Det(A) &= Det(F^{-1}U) = (DetF^{-1})(DetU) = (DetF)^{-1} = \\ &= ((DetE_3(-\frac{1}{2})) \times (DetE_2(\frac{1}{i-2})) \times (DetE_{23}) \times (DetE_{31}(-1)) \times (DetE_{21}(-2))^{-1} = \\ &= ((DetE_3(-\frac{1}{2})) \times (DetE_2(\frac{1}{i-2})) \times (DetE_{23}) \times 1 \times 1)^{-1} = \\ &= (-\frac{1}{2} \times \frac{1}{i-2} \times (-1))^{-1} = 2(i-2) = 2i - 4. \end{aligned}$$

ESERCIZIO TIPO 21 (dal 4^o appello 1995/96, prof. Salce)

Sia $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Per ogni $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, sia $A_n = [a_{ij}]$ la matrice $n \times n$ definita da:

$$\begin{cases} a & \text{se} \quad |i-j| \leq 1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

(a) Si provi che per ogni $n \geq 3$ si ha

$$DetA_n = aDetA_{n-1} - a^2 DetA_{n-2}.$$

(b) Si dica per quali valori di $n \leq 7$ la matrice A_n è singolare.

(a)

$$A_n = \begin{pmatrix} a & a & & & & & & \\ a & a & a & & & & & \\ & a & a & a & & \mathbb{O} & & \\ & & a & a & a & & & \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & & & a & a & a & \\ & \mathbb{O} & & & & a & a & a \\ & & & & & & a & a & a \\ & & & & & & & a & a \end{pmatrix}$$

Sviluppiamo $DetA_n$ rispetto alla 1^a colonna di A_n.

Poichè

1. la matrice che si ottiene da A_n sopprimendo la 1^a riga e la 1^a colonna è A_{n-1},

2. la matrice che si ottiene da A_n sopprimendo la 2^a riga e la 1^a colonna è la matrice $(n-1) \times (n-1)$

$$B_{n-1} = \begin{pmatrix} a & | & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ - & | & - & - & - & - & - \\ a & | & & & & & \\ 0 & | & & & & & \\ 0 & | & & & A_{n-2} & & \\ \vdots & | & & & & & \\ 0 & | & & & & & \end{pmatrix},$$

allora

$$\begin{aligned} DetA_n &= (-1)^{1+1} aDetA_{n-1} + (-1)^{2+1} aDetB_{n-1} = \\ &= aDetA_{n-1} - aDetB_{n-1}. \end{aligned}$$

Sviluppando $DetB_{n-1}$ rispetto alla 1^a riga di B_{n-1} si ottiene

$$DetB_{n-1} = (-1)^{1+1} aDetA_{n-2} = aDetA_{n-2}.$$

Quindi $DetA_n = aDetA_{n-1} - a^2 DetA_{n-2}$.

(b)

$$A_1 = (\,a\,) \quad \Longrightarrow \quad DetA_1 = a \neq 0 \quad \Longrightarrow \quad A_1 \text{ non sing.}$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} a & a \\ a & a \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad DetA_2 = a^2 - a^2 = 0 \quad \Longrightarrow \quad A_2 \text{ sing.}$$

$$n = 3: \quad DetA_3 = aDetA_2 - a^2 DetA_1 = -a^3 \neq 0 \quad \Longrightarrow \quad A_3 \text{ non sing.}$$

$$n = 4: \quad DetA_4 = aDetA_3 - a^2 DetA_2 = -a^4 \neq 0 \quad \Longrightarrow \quad A_4 \text{ non sing.}$$

$$n = 5: \quad DetA_5 = aDetA_4 - a^2 DetA_3 = 0 \quad \Longrightarrow \quad A_5 \text{ sing.}$$

$$n = 6: \quad DetA_6 = aDetA_5 - a^2 DetA_4 = a^6 \neq 0 \quad \Longrightarrow \quad A_6 \text{ non sing.}$$

$$n = 7: \quad DetA_7 = aDetA_6 - a^2 DetA_5 = a^7 \neq 0 \quad \Longrightarrow \quad A_7 \text{ non sing.}$$

Quindi se $n \leq 7$, A_n è singolare per $n = 2, 5$.

ESERCIZIO TEORICO 1

Si provi che le colonne dominanti di una matrice in forma ridotta di Gauss diversa dalla matrice nulla sono linearmente indipendenti.

Sia $U \neq \mathbb{O}$ una matrice $m \times n$ in forma ridotta di Gauss. Siano $\underline{u}_{j_1}, \underline{u}_{j_2}, \dots, \underline{u}_{j_k}$ le sue colonne dominanti. Ciascuna di esse è un vettore colonna con m componenti, inoltre

$$\underline{u}_{j_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \text{ è la prima colonna di } I_m \qquad \underline{u}_{j_2} \text{ è del tipo } \begin{pmatrix} * \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\dots\dots\dots \qquad \underline{u}_{j_{k-2}} \text{ è del tipo } \begin{array}{c} \begin{pmatrix} * \\ * \\ * \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \leftarrow k-2 \\ \\ \\ \\ \\ \end{array}$$

$$\underline{u}_{j_{k-1}} \text{ è del tipo } \begin{pmatrix} * \\ * \\ * \\ \vdots \\ * \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \\ \leftarrow k-1 \\ \\ \\ \\ \end{array} \qquad \underline{u}_{j_k} \text{ è del tipo } \begin{pmatrix} * \\ * \\ * \\ \vdots \\ * \\ * \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \leftarrow k \\ \\ \\ \end{array}$$

Siano $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{k-2}, \alpha_{k-1}, \alpha_k$, degli scalari tali che

$$(\bullet) \quad \alpha_1 \underline{u}_{j_1} + \alpha_2 \underline{u}_{j_2} + \dots + \alpha_{k-2} \underline{u}_{j_{k-2}} + \alpha_{k-1} \underline{u}_{j_{k-1}} + \alpha_k \underline{u}_{j_k} = \underline{0}.$$

Allora

$$\begin{pmatrix}0\\0\\0\\\vdots\\0\\0\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}=\alpha_1\begin{pmatrix}1\\0\\0\\\vdots\\0\\0\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}+\alpha_2\begin{pmatrix}*\\1\\0\\\vdots\\0\\0\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}+\ldots+\alpha_{k-2}\begin{pmatrix}*\\*\\*\\\vdots\\1\\0\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}+\alpha_{k-1}\begin{pmatrix}*\\*\\*\\\vdots\\*\\1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}+\alpha_k\begin{pmatrix}*\\*\\*\\\vdots\\*\\*\\1\\\vdots\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}*\\*\\*\\\vdots\\*\\*\\\alpha_k\\\vdots\\0\end{pmatrix}\begin{array}{l}\\\\\\\\\\\\\leftarrow k\\\\\\\end{array}.$$

Quindi $\alpha_k = 0$. Sostituendo $\alpha_k = 0$ in $(\bullet)$ si ricava

$$(\bullet\bullet)\quad \alpha_1\underline{u}_{j_1}+\alpha_2\underline{u}_{j_2}+\ldots+\alpha_{k-2}\underline{u}_{j_{k-2}}+\alpha_{k-1}\underline{u}_{j_{k-1}}=\underline{0}.$$

Allora

$$\begin{pmatrix}0\\0\\0\\\vdots\\0\\0\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}=\alpha_1\begin{pmatrix}1\\0\\0\\\vdots\\0\\0\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}+\alpha_2\begin{pmatrix}*\\1\\0\\\vdots\\0\\0\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}+\ldots+\alpha_{k-2}\begin{pmatrix}*\\*\\*\\\vdots\\1\\0\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}+\alpha_{k-1}\begin{pmatrix}*\\*\\*\\\vdots\\*\\1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}*\\*\\*\\\vdots\\*\\\alpha_{k-1}\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}\begin{array}{l}\\\\\\\\\\\leftarrow k-1\\\\\\\\\end{array}.$$

Quindi anche $\alpha_{k-1} = 0$. Sostituendo $\alpha_{k-1} = 0$ in $(\bullet\bullet)$ si ricava

$$(\bullet\bullet\bullet)\quad \alpha_1\underline{u}_{j_1}+\alpha_2\underline{u}_{j_2}+\ldots+\alpha_{k-2}\underline{u}_{j_{k-2}}=\underline{0}.$$

Allora

$$\begin{pmatrix}0\\0\\0\\\vdots\\0\\0\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}=\alpha_1\begin{pmatrix}1\\0\\0\\\vdots\\0\\0\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}+\alpha_2\begin{pmatrix}*\\1\\0\\\vdots\\0\\0\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}+\ldots+\alpha_{k-2}\begin{pmatrix}*\\*\\*\\\vdots\\1\\0\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}*\\*\\*\\\vdots\\\alpha_{k-2}\\0\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}\begin{array}{l}\\\\\\\\\leftarrow k-2\\\\\\\\\\\end{array}.$$

Quindi $\alpha_{k-2} = 0$. Cosí procedendo si ottiene che $\alpha_k = \alpha_{k-1} = \alpha_{k-2} = \ldots = \alpha_2 = \alpha_1 = 0$, ossia le colonne dominanti di U, $\underline{u}_{j_1}, \underline{u}_{j_2}, \ldots, \underline{u}_{j_k}$, sono linearmente indipendenti.

ESERCIZIO TEORICO 2

Si provi che le righe non nulle di una matrice in forma ridotta di Gauss diversa dalla matrice nulla sono linearmente indipendenti.

Sia $U \neq \mathbb{O}$ una matrice $m \times n$ in forma ridotta di Gauss. Siano $\underline{r}_1^T, \underline{r}_2^T, \dots, \underline{r}_k^T$ le sue righe non nulle. Ciascuna di esse è un vettore riga con n componenti, inoltre

$\underline{r}_1^T$ è del tipo

$$\begin{array}{ccccccccccc} & & & j_1 & & & & & & & \\ & & & \downarrow & & & & & & & \\ [0 & \dots & 0 & 1 & * & \dots & * & \dots & \dots & \dots & *] \end{array}$$

$\underline{r}_2^T$ è del tipo

$$\begin{array}{ccccccccccc} & & & & & & j_2 & & & & \\ & & & & & & \downarrow & & & & \\ [0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 & * & \dots & \dots & *] \end{array}$$

$\dots, \underline{r}_k^T$ è del tipo

$$\begin{array}{ccccccccccc} & & & & & & & & j_k & & \\ & & & & & & & & \downarrow & & \\ [0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 & * & \dots] \end{array}$$

Siano $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{k-1}, \alpha_k$, degli scalari tali che

$$(\bullet) \quad \alpha_1 \underline{r}_1^T + \alpha_2 \underline{r}_2^T + \dots + \alpha_k \underline{r}_k^T = \underline{0}^T.$$

Allora

$$\begin{array}{ccccccccccccc} & & & & j_1 & & & & & & & & \\ & & & & \downarrow & & & & & & & & \\ \alpha_1 & [0 & \dots & 0 & 1 & * & \dots & * & \dots & \dots & \dots & *]+ & \\ \alpha_2 & [0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 & * & \dots & \dots & *]+ & \\ & & & & & & \dots & & & & & & \\ \alpha_k & [0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 & * & \dots] = & \\ & [0 & \dots & 0 & \alpha_1 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & * & \dots] & \end{array}$$

è il vettore riga nullo (con n componenti). Quindi $\alpha_1 = 0$ e sostiuendo $\alpha_1 = 0$ in$(\bullet)$ si ottiene

$$(\bullet\bullet) \quad \alpha_2 \underline{r}_2^T + \dots + \alpha_k \underline{r}_k^T = \underline{0}^T.$$

Allora

$$\begin{array}{cccccccccc} & & & & & j_2 & & & & \\ & & & & & \downarrow & & & & \\ \alpha_2 & [0 & \dots & \dots & 0 & 1 & * & & \dots & *]+ \\ & & & & \dots & \dots & & & & \\ \alpha_k & [0 & \dots & & & \dots & 0 & 1 & * & \dots] = \\ & [0 & \dots & \dots & 0 & \alpha_2 & * & \dots & & *] \end{array}$$

è il vettore riga nullo (con n componenti). Quindi $\alpha_2 = 0$ e sostiuendo $\alpha_2 = 0$ in $(\bullet\bullet)$ si ottiene

$$(\bullet\bullet\bullet) \quad \alpha_3 \underline{r}_3^T + \ldots + \alpha_k \underline{r}_k^T = \underline{0}^T.$$

Cosí procedendo si ottiene che $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \ldots = \alpha_{k-1} = \alpha_k = 0$, ossia le righe non nulle di U, $\underline{r}_1^T, \underline{r}_2^T, \ldots, \underline{r}_k^T$, sono linearmente indipendenti.

ESERCIZIO TEORIC0 3

Siano V, W e Z spazi vettoriali su K ($K = \mathbb{R}$ o $K = \mathbb{C}$). Siano $f : V \to W$ e $g : W \to Z$ due trasformazioni lineari. Sia $g \circ f : V \to Z$ definita da $(g \circ f)(\underline{v}) = g(f(\underline{v}))$ per ogni $\underline{v} \in V$.

(1) Si provi che $g \circ f$ è una trasformazione lineare.

(2) Si provi che $N(f) \subseteq N(g \circ f)$.

(3) Sia ora $W = V = Z$ e $dim(V) = n$. Si indichi con f^2 la trasformazione lineare $f \circ f$, e per ogni numero intero positivo k con f^{k+1} la trasformazione lineare $f \circ f^k$.

Si provi che esiste un numero intero $m \leq n+2$ tale che $N(f^m) = N(f^{m+1})$.

(1)

IPOTESI: $f : V \to W$ e $g : W \to Z$ trasformazioni lineari

TESI: $g \circ f : V \to Z$ è una trasformazione lineare.

DIMOSTRAZIONE: Poichè f è una trasformazione lineare, allora

(i) $f(\underline{v}_1 + \underline{v}_2) = f(\underline{v}_1) + f(\underline{v}_2)$ per ogni $\underline{v}_1, \underline{v}_2 \in V$

(ii) $f(\alpha \underline{v}) = \alpha f(\underline{v})$ per ogni $\underline{v} \in V$ ed ogni $\alpha \in K$.

Poichè g è una trasformazione lineare, allora

$(i)'$ $g(\underline{w}_1 + \underline{w}_2) = g(\underline{w}_1) + g(\underline{w}_2)$ per ogni $\underline{w}_1, \underline{w}_2 \in W$

$(ii)'$ $g(\alpha \underline{w}) = \alpha g(\underline{w})$ per ogni $\underline{w} \in W$ ed ogni $\alpha \in K$.

Dobbiamo provare:

(I) $(g \circ f)(\underline{v}_1 + \underline{v}_2) = (g \circ f)(\underline{v}_1) + (g \circ f)(\underline{v}_2)$ per ogni $\underline{v}_1, \underline{v}_2 \in V$

(II) $(g \circ f)(\alpha \underline{v}) = \alpha (g \circ f)(\underline{v})$ per ogni $\underline{v} \in V$ ed ogni $\alpha \in K$.

(I): Siano $\underline{v}_1, \underline{v}_2 \in V$.

$$(g \circ f)(\underline{v}_1 + \underline{v}_2) \underset{\boxed{\text{def. di } g \circ f}}{\overset{\uparrow}{=}} g(f(\underline{v}_1 + \underline{v}_2)) \underset{\boxed{(i)}}{\overset{\uparrow}{=}} g(f(\underline{v}_1) + f(\underline{v}_2)) =$$

$$\underset{\boxed{\begin{array}{c}(i)' \text{ con} \\ \underline{w}_1 = f(\underline{v}_1) \text{ e} \\ \underline{w}_2 = f(\underline{v}_2)\end{array}}}{\overset{\uparrow}{=}} g(f(\underline{v}_1)) + g(f(\underline{v}_2)) \underset{\boxed{\text{def. di } g \circ f}}{\overset{\uparrow}{=}} (g \circ f)(\underline{v}_1) + (g \circ f)(\underline{v}_2)$$

(II): Siano $\underline{v} \in V$ ed $\alpha \in K$.

$$(g \circ f)(\alpha \underline{v}) \underset{\boxed{\text{def. di } g \circ f}}{\overset{\uparrow}{=}} g(f(\alpha \underline{v})) \underset{\boxed{(ii)}}{\overset{\uparrow}{=}} g(\alpha f(\underline{v})) =$$

$$\underset{\underset{\boxed{\begin{array}{c}(ii)' \text{ con}\\ \underline{w}=f(\underline{v})\end{array}}}{\uparrow}}{=} \quad \alpha g(f(\underline{v})) \quad \underset{\underset{\boxed{\text{def. di } g\circ f}}{\uparrow}}{=} \quad \alpha(g\circ f)(\underline{v})$$

(2) Sia $\underline{v} \in N(f)$.

$$\underline{v} \in N(f) \quad \underset{\underset{\boxed{\text{def. di } N(f)}}{\uparrow}}{\Longrightarrow} \quad f(\underline{v}) = \underline{0} \quad \underset{\underset{\boxed{\text{applicando } g}}{\uparrow}}{\Longrightarrow} \quad g(f(\underline{v})) = g(\underline{0})$$

Quindi

$$(g\circ f)(\underline{v}) \quad \underset{\underset{\boxed{\text{def. di } g\circ f}}{\uparrow}}{=} \quad g(f(\underline{v})) \quad \underset{\underset{\boxed{f(\underline{v}) = \underline{0}}}{\uparrow}}{=} \quad g(\underline{0}) \quad \underset{\underset{\boxed{g \text{ trasf. lineare}}}{\uparrow}}{=} \quad \underline{0}$$

da cui, per definizione di $N(g\circ f)$, si ottiene che $\underline{v} \in N(g\circ f)$.

(3) Applicando ripetutamente (2) con $g = f$ si ottiene

$$(\bullet) \quad N(f) \subseteq N(f^2) \subseteq N(f^3) \subseteq \cdots \subseteq N(f^k) \subseteq \ldots$$

Per ogni intero k, si ha che $N(f^k)$ è un sottospazio di V. Da $(\bullet)$ segue in particolare

$$(\bullet\bullet) \quad N(f) \subseteq N(f^2) \subseteq N(f^3) \subseteq \cdots \subseteq N(f^n) \subseteq N(f^{n+1}) \subseteq N(f^{n+2}) \subseteq V$$

dove $n = dim(V)$. Se fosse

$$N(f) < N(f^2) < N(f^3) < \cdots < N(f^n) < N(f^{n+1}) < N(f^{n+2}),$$

si avrebbe

$$(\bullet\bullet\bullet) \quad dim(N(f)) < dim(N(f^2)) < dim(N(f^3)) < \cdots < dim(N(f^{n+1})) < dim(N(f^{n+2})).$$

Poichè $dim(U) \leq dim(V) = n$ per ogni sottospazio U di V, per ogni intero $k \leq n+2$ si ha che $dim(N(f^k))$ è un numero minore od uguale ad n. $(\bullet\bullet\bullet)$ sarebbe quindi una successione strettamente crescente di $n+2$ numeri minori od uguali ad n, e una tale successione non esiste.

L'assurdo deriva dall'aver supposto che in $(\bullet\bullet)$ la catena dei sottospazi $N(f^k)$ di V, per $k \leq n+2$, sia strettamente crescente.

Allora esiste un intero $m \leq n+2$ tale che $N(f^m) = N(f^{m+1})$.

ESERCIZIO TEORIC0 4

Sia P una matrice complessa $n \times n$ tale che $P^2 = P$. Si provi che $\mathbb{C}^n = C(P) \oplus N(P)$.

Ricordiamo innanzitutto che

$$N(P) = \{\underline{z} \in \mathbb{C}^n \quad | \quad P\underline{z} = \underline{0}\},$$

e che $C(P)$ è lo spazio generato dalle colonne di P, per cui se $P = (\, \underline{a}_1 \quad \underline{a}_2 \quad \dots \quad \underline{a}_n \,)$, si ha

$$C(P) = \{\alpha_1\underline{a}_1 + \alpha_2\underline{a}_2 + \ldots + \alpha_n\underline{a}_n \quad | \quad \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{C}\}.$$

Poichè

$$\alpha_1\underline{a}_1 + \alpha_2\underline{a}_2 + \ldots + \alpha_n\underline{a}_n = (\, \underline{a}_1 \quad \underline{a}_2 \quad \dots \quad \underline{a}_n \,) \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix},$$

allora

$$C(P) = \{P \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \quad | \quad \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{C}\} = \{P\underline{u} \quad | \quad \underline{u} \in \mathbb{C}^n\}.$$

Per la definizione di $\oplus$, dobbiamo provare i due seguenti fatti:

(a) $\mathbb{C}^n = C(P) + N(P)$,

(b) $C(P) \cap N(P) = \{\underline{0}\}$.

(a) Poichè $C(P) \leq \mathbb{C}^n$ ed $N(P) \leq \mathbb{C}^n$ (P è $n \times n$) allora $C(P) + N(P) \leq \mathbb{C}^n$.

Ció che occorre provare è l'inclusione $\mathbb{C}^n \leq C(P) + N(P)$. Per farlo, occorre provare che dato comunque $\underline{v} \in \mathbb{C}^n$ si ha che $\underline{v} \in C(P) + N(P)$, ossia esistono $\underline{v}_1 \in C(P)$ e $\underline{v}_2 \in N(P)$ tali che $\underline{v} = \underline{v}_1 + \underline{v}_2$.

Sia dunque $\underline{v} \in \mathbb{C}^n$.

Poichè $P = P^2$ allora $P\underline{v} = P^2\underline{v} = P(P\underline{v})$, da cui segue

$$\underline{0} = P\underline{v} - P(P\underline{v}) = P(\underline{v} - P\underline{v}).$$

Dunque $(\underline{v} - P\underline{v}) \in N(P)$. Poniamo $\underline{v} - P\underline{v} = \underline{v}_2$. Poichè $\underline{v} = P\underline{v} + \underline{v}_2$ e poichè $P\underline{v} \in C(P)$, poniamo $\underline{v}_1 = P\underline{v}$. Abbiamo trovato $\underline{v}_1 \in C(P)$ e $\underline{v}_2 \in N(P)$ tali che $\underline{v} = \underline{v}_1 + \underline{v}_2$.

Questo conclude la dimostrazione di (a).

(b) Per provare che $C(P) \cap N(P) = \{\underline{0}\}$, proviamo che se $\underline{w} \in C(P) \cap N(P)$ allora $\underline{w} = \underline{0}$.

Sia dunque $\underline{w} \in C(P) \cap N(P)$.

Poichè $\underline{w} \in C(P)$, allora esistono $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{C}$ tali che

$$\underline{w} = \alpha_1\underline{a}_1 + \alpha_2\underline{a}_2 + \ldots + \alpha_n\underline{a}_n = \begin{pmatrix} \underline{a}_1 & \underline{a}_2 & \ldots & \underline{a}_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix},$$

ossia esiste $\underline{v} \in \mathbb{C}^n$ tale che $\boxed{\underline{w} = P\underline{v}}$ (si prende $\underline{v} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$.)

Poichè $\underline{w} \in N(P)$, allora $\boxed{P\underline{w} = \underline{0}}$.

Quindi

$$P\underline{v} \underset{\substack{\uparrow \\ \boxed{P = P^2}}}{=} P^2\underline{v} = P(P\underline{v}) \underset{\substack{\uparrow \\ \boxed{P\underline{v} = \underline{w}}}}{=} P\underline{w} \underset{\substack{\uparrow \\ \boxed{\underline{w} \in N(P)}}}{=} \underline{0}$$

per cui $\underline{w} = P\underline{v} = \underline{0}$.

Questo conclude la dimostrazione di (b).

N.B. Sappiamo che se A è una matrice $n \times m$ qualunque, allora in $\mathbb{C}^n$ si ha che $C(A)^\perp = N(A^H)$, e quindi in particolare $\mathbb{C}^n = C(A) \oplus N(A^H)$.

In questo esercizio abbiamo due ipotesi sulla matrice A (che qui si chiama P):

1. è quadrata (ossia $m = n$),

2. coincide con il suo quadrato: $P^2 = P$ (le matrici che coincidono con il proprio quadrato si chiamano idempotenti).

Ma non è possibile dedurre da $\mathbb{C}^n = C(P) \oplus N(P^H)$ (che è ció che sappiamo in generale) la tesi di questo esercizio. Si consideri ad esempio la matrice $P = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$. P è quadrata e

$$P^2 = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = P.$$

Ma $N(P) \neq N(P^H)$: da

$$P = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{21}(1)E_1(\frac{1}{2})} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = U$$

segue che

$$N(P) = N(U) = \{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2 \quad | \quad x_1 + x_2 = 0\} = \{\begin{pmatrix} -h \\ h \end{pmatrix} | h \in \mathbb{C}\};$$

e da

$$P^H = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{21}(-2)E_1(\frac{1}{2})} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = U_1$$

segue che

$$N(P^H) = N(U_1) = \{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2 \quad | \quad x_1 - \frac{1}{2}x_2 = 0\} = \{ \begin{pmatrix} h/2 \\ h \end{pmatrix} |h \in \mathbb{C}\}.$$

ESERCIZIO TEORIC0 5

Sia A una matrice complessa $m \times n$. Si provi che $N(AA^H) = N(A^H)$.

Osserviamo innanzitutto che A^H è una matrice complessa $n \times m$ e che AA^H è una matrice complessa $m \times m$.

Ricordiamo che

$$N(A^H) = \{\underline{x} \in \mathbb{C}^m \quad | \quad A^H\underline{x} = \underline{0} \in \mathbb{C}^n\} \quad \text{e}$$

$$N(AA^H) = \{\underline{x} \in \mathbb{C}^m \quad | \quad AA^H\underline{x} = \underline{0} \in \mathbb{C}^n\}.$$

Poichè

$$\underline{x} \in N(A^H) \underset{\boxed{\begin{array}{c}\text{def. di}\\ N(A^H)\end{array}}}{\underset{\uparrow}{\Longrightarrow}} A^H\underline{x} = \underline{0} \underset{\boxed{\begin{array}{c}\text{premoltipl.}\\ \text{per } A\end{array}}}{\underset{\uparrow}{\Longrightarrow}}$$

$$\Longrightarrow \quad AA^H\underline{x} = A\underline{0} = \underline{0} \underset{\boxed{\begin{array}{c}\text{def. di}\\ N(AA^H)\end{array}}}{\underset{\uparrow}{\Longrightarrow}} \underline{x} \in N(AA^H)$$

allora $N(A^H) \subseteq N(AA^H)$.

Viceversa

$$\underline{x} \in N(AA^H) \underset{\boxed{\begin{array}{c}\text{def. di}\\ N(AA^H)\end{array}}}{\underset{\uparrow}{\Longrightarrow}} AA^H\underline{x} = \underline{0} \underset{\boxed{\begin{array}{c}\text{premoltipl.}\\ \text{per } \underline{x}^H\end{array}}}{\underset{\uparrow}{\Longrightarrow}}$$

$$\Longrightarrow \quad 0 = \underline{x}^H\underline{0} = \underline{x}^H AA^H\underline{x} = (A^H\underline{x})^H(A^H\underline{x}) = ||A^H\underline{x}||_2^2,$$

da cui segue che $||A^H\underline{x}||_2 = 0$. Dalla proprietà (1) delle norme (in questo caso di $||\cdot||_2$) si deduce che $A^H\underline{x} = \underline{0}$, ossia, per definizione di $N(A^H)$, che $\underline{x} \in N(A^H)$.

Dunque anche $N(AA^H) \subseteq N(A^H)$, e per l'inclusione precedentemente provata si ha che $N(AA^H) = N(A^H)$.

N.B. A potrebbe non avere inversa sinistra, quindi non si puó premoltiplicare $AA^H\underline{x} = \underline{0}$ per un'inversa sinistra di A, che potrebbe non esistere, per ottenere $A^H\underline{x} = \underline{0}$.

$\boxed{6}$ Sia A una matrice $m \times n$. Si supponga che esista una inversa destra R di A tale che RA sia hermitiana.

Si provi che allora $R = A^H(AA^H)^{-1}$.

IPOTESI: A $m \times n$, esiste R tale che $AR = I$ ed $RA = (RA)^H$.

TESI: $R = A^H(AA^H)^{-1}$

DIMOSTRAZIONE:

Occorre innanzitutto provare che AA^H è non singolare (ossia che esiste $(AA^H)^{-1}$).

Poichè

$$(AA^H)(R^HR) = A(A^HR^H)R = A(RA)^HR \underset{\substack{\uparrow \\ \boxed{(RA)^H = RA}}}{=} ARAR \underset{\substack{\uparrow \\ \boxed{AR = I}}}{=} I$$

allora AA^H ha un'inversa destra (R^HR è un'inversa destra di AA^H).

Quindi $rk(AA^H)$ = numero delle righe di AA^H = numero delle righe di $A = m$.

Poichè AA^H è $m \times m$ e $rk(AA^H) = m$, allora AA^H è non singolare, ossia esiste $(AA^H)^{-1}$, ed inoltre $(AA^H)^{-1} = R^HR$.

Quindi

$$A^H(AA^H)^{-1} \underset{\substack{\uparrow \\ \boxed{(AA^H)^{-1} = R^HR}}}{=} A^HR^HR = (RA)^HR \underset{\substack{\uparrow \\ \boxed{(RA)^H = RA}}}{=} RAR \underset{\substack{\uparrow \\ \boxed{AR = I}}}{=} R$$

ESERCITAZIONI* 1

Testi

$\boxed{1}$ Siano $A = \begin{pmatrix} 1-2i & 5 \\ 0 & i \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1+i & 0 & 2 \\ 3 & -2 & i \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} -18i & -1+9i & -i \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ e $D = \begin{pmatrix} 1 & i \\ 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$. Si calcoli $(AB - iC)D + 2A$.

$\boxed{2}$ Siano $A = \begin{pmatrix} 2-3i & 1+i \\ 0 & i \\ 1-i & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 1+i \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 3+5i \\ 6 \\ 2-2i \end{pmatrix}$ e $D = \begin{pmatrix} 7+i & 2+3i \\ 3-2i & 0 \end{pmatrix}$.

(a) Di ciascuna delle precedenti matrici si calcolino la trasposta, la coniugata e la H-trasposta.

(b) Si calcoli $(A^H\overline{C} + iB^T)\overline{B} + (1+3i)D^H$.

$\boxed{3}$ Si trovino tutte le matrici reali simmetriche 2×2 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ tali che $A^2 = I$.

$\boxed{4}$ Si risolva il sistema lineare $A\underline{x} = \underline{b}$ dove

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 & -2 \\ 3 & 6 & 0 & -6 \\ 1 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \underline{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

$\boxed{5}$ Si risolva il sistema lineare dipendente dal parametro reale α $A(\alpha)\underline{x} = \underline{b}(\alpha)$ dove

$$A(\alpha) = \begin{pmatrix} 2 & 2\alpha & 2 \\ 1 & \alpha+1 & \alpha+1 \\ 1 & \alpha & \alpha \\ 0 & 2 & 2\alpha \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \underline{b}(\alpha) = \begin{pmatrix} 2\alpha \\ \alpha+1 \\ \alpha \\ \alpha^2+1 \end{pmatrix}.$$

ESERCITAZIONI* 2

Testi

$\boxed{1}$ Siano $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ i & 1 \end{pmatrix}$. Si calcoli A^{-1}.

$\boxed{2}$ Sia $\quad A(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & \alpha+2 & \alpha+3 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & \alpha+4 \end{pmatrix}, \quad$ dove $\alpha \in \mathbb{R}$.

Per quegli $\alpha \in \mathbb{R}$ per cui $A(\alpha)$ è non singolare, si calcoli $A(\alpha)^{-1}$.

$\boxed{3}$ Si provi che una matrice che abbia un'inversa destra hermitiana è non singolare.

$\boxed{4}$ Si provi che una matrice quadrata che abbia un'unica inversa destra è non singolare.

$\boxed{5}$ Si trovino tutte le inverse destre della matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & i & 1 \\ -i & 1 & i \end{pmatrix}$.

$\boxed{6}$ Sia $\quad A(\alpha) = \begin{pmatrix} \alpha+1 & \alpha^2+\alpha & -\alpha^2-\alpha \\ 3 & 4\alpha & -2\alpha+2 \\ 2\alpha & 2\alpha^2+1 & -2\alpha^2+\alpha \end{pmatrix}, \quad$ dove $\alpha \in \mathbb{R}$.

Per quegli $\alpha \in \mathbb{R}$ per cui è possibile, si trovi una decom[osizione $A(\alpha) = L(\alpha)U(\alpha)$, scrivendo anche $L(\alpha)$ come prodotto di matrici elementari.

$\boxed{7}$ Sia $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & 4 & -2 & 7 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & -2 & 6 \\ 0 & 1 & 3 & -4 \end{pmatrix}$. Si trovi una decomposizione $A = P^T LU$.

ESERCITAZIONI* 3

Testi

$\boxed{1}$ Si dica quale dei seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{R}^3$ è linearmente indipendente:

$$(1)\quad \{\underline{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \underline{v}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \underline{v}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\},$$

$$(2)\quad \{\underline{w}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \underline{w}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \underline{w}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}\}.$$

$\boxed{2}$ Sia V uno spazio vettoriale reale (risp. complesso) e sia $\mathcal{S} = \{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3\}$ un sottoinsieme linearmente indipendente di V.

Si dica quale dei seguenti sottoinsiemi di V è linearmente indipendente:

$$(1)\quad \mathcal{S}_1 = \{\underline{v}_1 + \underline{v}_2, \underline{v}_1 + \underline{v}_3, \underline{v}_1 + \underline{v}_2 + \underline{v}_3\},$$
$$(2)\quad \mathcal{S}_2 = \{\underline{v}_1 + \underline{v}_2, \underline{v}_1 + 2\underline{v}_3, \underline{v}_2 - 2\underline{v}_3\}.$$

$\boxed{3}$ Sia W l'insieme delle matrici 2×2 reali simmetriche.

(a) Si provi che W è un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale delle matrici 2×2 reali.

(b) Sia $\mathcal{B} = \{B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, B_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\}$.

Si provi che $\mathcal{B}$ è una base di W.

(c) Sia

$$\mathcal{S} = \{A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, A_5 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\}.$$

Si provi che $\mathcal{S}$ è un insieme di generatori di W.

(d) Si trovi una base di W contenuta in $\mathcal{S}$.

$\boxed{4}$ Si provi che $\mathcal{S} = \{\underline{v}_1 = \begin{pmatrix} i \\ i \\ i \end{pmatrix}, \underline{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \underline{v}_3 = \begin{pmatrix} 1+i \\ 1-i \\ i \end{pmatrix}, \underline{v}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1-2i \\ 0 \end{pmatrix}\}$ non è un insieme di generatori di $\mathbb{C}^3$.

ESERCITAZIONI* 4

Testi

$\boxed{1}$ Sia $\quad A_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & -\alpha^2 & 1 & 1 \\ 1 & 7 & 2 & \alpha+1 \\ 2 & -2\alpha^2 & 2 & \alpha+2 \end{pmatrix}, \quad$ dove $\alpha \in \mathbb{C}$.

(a) Per ogni $\alpha \in \mathbb{C}$ si dica qual è $rk(A_\alpha)$ e si trovino una base $\mathcal{B}_\alpha$ di $C(A_\alpha)$ ed una base $\mathcal{D}_\alpha$ di $R(A_\alpha)$.

(b) Sia $A = A_0$ la matrice che si ottiene ponendo $\alpha = 0$. Si trovi una base dello spazio nullo $N(A)$ di A.

$\boxed{2}$ Sia V il sottospazio di $\mathbb{R}^4$ generato da $\mathcal{S} = \{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\}$.

Si calcoli la dimensione di V e si trovi una base di V contenuta in $\mathcal{S}$.

$\boxed{3}$ Siano $\underline{w}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \underline{w}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \underline{w}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \underline{w}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \underline{z}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$ $\underline{z}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \underline{z}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \underline{z}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(a) Si provi che $\mathcal{B} = \{\underline{w}_1; \underline{w}_2; \underline{w}_3; \underline{w}_4\}$ e $\mathcal{B}' = \{\underline{z}_1; \underline{z}_2; \underline{z}_3; \underline{z}_4\}$ sono due basi ordinate di $\mathbb{R}^4$.

(b) Si scriva la matrice di passaggio da $\mathcal{B}'$ a $\mathcal{B}$.

$\boxed{4}$ Sia $f : M_2(\mathbb{C}) \to \mathbb{R}^2$ definita da $f(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} a+b \\ a+c \end{pmatrix}$.

(a) Si provi che f è una trasformazione lineare.

(b) Si determini la matrice A associata ad f rispetto alle basi ordinate $\mathcal{B} = \{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\}$ e $\mathcal{D} = \{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\}$ su dominio e codominio rispettivamente.

$\boxed{5}$ Sia $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ la matrice associata ad una trasformazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ rispetto alle basi ordinate $\mathcal{B} = \{\underline{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \underline{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \underline{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\}$ e $\mathcal{D} = \{\underline{w}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}; \underline{w}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\}$ su dominio e codominio rispettivamente. Si determini la matrice A' associata ad f rispetto alle basi ordinate $\mathcal{B}' = \{\underline{v}'_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \underline{v}'_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}; \underline{v}'_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\}$

e $\mathcal{D}' = \{\underline{w}'_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} ; \underline{w}'_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\}$ su dominio e codominio rispettivamente.

ESERCITAZIONI* 5

Testi

$\boxed{1}$ Si verifichi che $\phi : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ definita da $\phi(\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}) = |a-b| + |a-c| + |b+c|$ è una norma.

$\boxed{2}$ Sia $V = \{\begin{pmatrix} a \\ a \end{pmatrix} \quad | \quad a \in \mathbb{C}\}$.

(a) Si provi che V è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{C}^2$.

(b) Si verifichi che $(\cdot, \cdot) : V \times V \to \mathbb{C}$ definito da $(\begin{pmatrix} a \\ a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b \\ b \end{pmatrix}) = 3\overline{a}b$ è un prodotto scalare.

$\boxed{3}$ Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{C}$ e sia $(\cdot, \cdot) : V \times V \to \mathbb{C}$ un prodotto scalare su V. Per quali $\alpha \in \mathbb{C}$ la funzione

$$(\cdot, \cdot)_\alpha : V \times V \to \mathbb{C}$$

definita da

$$(\underline{v}, \underline{w})_\alpha = \alpha(\underline{v}, \underline{w}) \quad \text{per ogni} \quad \underline{v}, \underline{w} \in V$$

è un prodotto scalare ?

$\boxed{4}$ Sia V l'insieme delle matrici 2×2 reali simmetriche. V è uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ e

$$(\cdot, \cdot) : V \times V \to \mathbb{R}$$

definita da

$$(\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a' & b' \\ b' & c' \end{pmatrix}) = aa' + 2bb' + cc'$$

è un prodotto scalare su V.

(a) Si determini l'angolo α tra $A = \begin{pmatrix} 1 & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}$ e I_2.

(b) Sia $W = \langle \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \rangle \leq V$. Si determini $W^\perp$ in V.

$\boxed{5}$ Siano $\underline{z} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$ ed $S = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^2 \quad | \quad ||\underline{x} - \underline{z}||_1 \leq 3\}$.

Si provi che esiste $\underline{y} \in S$ tale che $||\underline{x}||_\infty \leq ||\underline{y}||_\infty$ per ogni $\underline{x} \in S$ e si calcoli $||\underline{y}||_\infty$.

ESERCITAZIONI* 6

Testi

$\boxed{1}$ Si trovi una base ortonormale di

$$V = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 1 \\ i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i \\ -1 \\ i \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle \leq \mathbb{C}^4.$$

$\boxed{2}$ Si trovi una base di $V^\perp$ nei seguenti casi:

(a) $\quad V = \langle \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \rangle \leq \mathbb{C}^3,$

(b) $\quad V = \langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1-i \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \rangle \leq \mathbb{C}^4,$

(c) $\quad V = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 1 \\ i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i \\ -1 \\ i \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle \leq \mathbb{C}^4.$

$\boxed{3}$ Si calcolino la matrice di proiezione su $V = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle \leq \mathbb{C}^3$ e la proiezione ortogonale di $\underline{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ su V.

$\boxed{4}$ Si trovino una decomposizione Q_0R_0-non-normalizzata ed una decomposizione QR-normalizzata della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & i & 2 & i \\ i & -1 & 2i & -1 \\ 2 & 2i & 1 & 2i \end{pmatrix}.$$

$\boxed{5}$ Siano $\underline{0} \neq \underline{v} \in \mathbb{R}^m$ ed $\alpha \in \mathbb{R}$. Si trovino una decomposizione Q_0R_0-non-normalizzata ed una decomposizione QR-normalizzata della matrice $A_\alpha = (\underline{v} \quad \alpha\underline{v})$.

ESERCITAZIONI* 7

Testi

$\boxed{1}$ Si calcoli il determinante delle seguenti matrici:

$$A = \begin{pmatrix} 1-i & 1 & 0 \\ 2 & 1+i & 3 \\ i & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1+i & 1 \\ i & 2 & 1 \\ 1 & 1 & i \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1+i \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

$\boxed{2}$ Per quali $z \in \mathbb{C}$ la matrice $A(z) = \begin{pmatrix} 5 & 0 & z \\ \overline{z} & 2 & 1 \\ \overline{z} & 1 & 1 \end{pmatrix}$ ha determinante 1 ?

$\boxed{3}$ Sia $a \in \mathbb{R}$. Per ogni $n \in \mathbb{N}$ sia $A_n = [a_{ij}]$ la matrice $n \times n$ definita da:

$$a_{ij} = \begin{cases} a & \text{se} \quad i = j \\ 1 & \text{se} \quad i = 1 \text{ e } j \geq 2 \\ 1 & \text{se} \quad i \geq 2 \text{ e } j = 1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

(i) Si provi per induzione su n che se $n \geq 2$ allora $DetA_n = a^n - (n-1)a^{n-2}$ (suggerimento: si sviluppi $DetA_n$ rispetto all'ultima riga di A_n).

(ii) Sia $a \neq 0$. Per quali valori di a si ha che A_n è singolare ?

$\boxed{4}$ Per ciascuna delle seguenti matrici si calcolino il polinomio caratteristico, gli autovalori e le loro molteplicità (algebriche):

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4i & 3 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 8 \\ 0 & 3 & 2 \\ -2 & -2 & 11 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 \\ 1 & 5 & -1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

$\boxed{5}$ Sia $A = \left(\begin{array}{c|ccc} a & & \underline{b}^T & \\ - & - & - & - \\ & & & \\ \underline{0} & & B & \\ & & & \end{array}\right)$ una matrice $n \times n$ a blocchi dove $a \in \mathbb{C}$, $\underline{b} \in \mathbb{C}^n$ e B è una matrice $(n-1) \times (n-1)$ complessa. Si provi che:

(i) se X_A e X_B denotano rispettivamente l'insieme degli autovalori di A e l'insieme degli autovalori di B, allora si ha $X_A = \{a\} \cup X_B$;

(ii) per ogni $m \in \mathbb{N}$, a^m è un autovalore di A^m.