ALGEBRA LINEARE I (A) PER SCIENZE STATISTICHE, A.A. 2002/03, GEMMA PARMEGGIANI

Università degli Studi di Padova
Dipartimento di Matematica Pura e Applicata
via Belzoni, 7
35131 Padova

Typeset by $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$-TEX

LEZIONE 1

Matrici ed esempi

Def. 1. Una **matrice m×n ad elementi reali** (risp. **ad elementi complessi**) è una tabella di numeri reali (risp. complessi) disposti in m righe ed n colonne.

Una matrice ad elementi reali (risp. complessi) è detta anche una **matrice reale** (risp. **complessa**).

Le matrici vengono indicate con lettere maiuscole.

Esempio 1. Siano $A = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{5} & -3 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 7+i \\ 1-i & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} -3 & \pi & 2 \\ 9 & 6 & 4 \\ 1 & -1 & 5 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 8 & 11i \end{pmatrix}$ ed $E = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$. A è una matrice 2×3 ad elementi reali (oppure: A è una matrice 2×3 reale), B è una matrice 3×2 complessa, C è una matrice 3×3 reale, D è una matrice 1×2 complessa ed E è una matrice 3×1 reale.

N.B. Si puó scrivere indifferentemente $A = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{5} & -3 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, oppure $A = \begin{bmatrix} 1 & \sqrt{5} & -3 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix}$, oppure $A = \begin{matrix} 1 & \sqrt{5} & -3 \\ 4 & 2 & 1 \end{matrix}$.

La 1^a riga di A è $\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{5} & -3 \end{pmatrix}$, la 2^a riga di A è $\begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, la 1^a colonna di A è $\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$, la 2^a colonna di A è $\begin{pmatrix} \sqrt{5} \\ 2 \end{pmatrix}$, la 3^a colonna di A è $\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Def. 2. Data una matrice $m \times n$ reale (risp. complessa) A, il numero che si trova nella i-esima riga e nella j-esima colonna di A, dove $1 \leq i \leq m$ e $1 \leq j \leq n$, si dice l'**elemento di posto** (i, j) **di** A. Esso viene di solito indicato con il simbolo a_{ij}. Si scrive allora:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n-1} & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m-11} & a_{m-12} & \dots & a_{m-1n-1} & a_{m-1n} \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn-1} & a_{mn} \end{pmatrix},$$

oppure, in forma compatta, $A = [a_{ij}]_{i=1,\dots,m; j=1,\dots,n}$ (anche: $A = [a_{ij}]$, $m \times n$).

Quindi se A e B sono le matrici dell'Esempio 1, $a_{11} = 1$, $a_{12} = \sqrt{5}$, ecc., $b_{22} = 1$, $b_{32} = 3$, ecc..

Def. 3. Due **matrici** $A = [a_{ij}]$, $m \times n$, e $B = [b_{ij}]$, $r \times t$, sono **uguali** se

$$\begin{cases} m = r \\ n = t \\ a_{ij} = b_{ij} \text{ per ogni } 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n \end{cases}$$

ossia se hanno uguale numero di righe, uguale numero di colonne, e gli elementi corrispondenti uguali.

Def. 4. Si chiama **matrice nulla** $m \times n$ la matrice $m \times n$ ogni cui elemento è 0. Il simbolo usato per indicarla è $\mathbb{O}_{m\times n}$ (oppure $\mathbb{O}$ quando dal contesto si puó dedurre quante righe e quante colonne ha).

Def. 5. Una matrice con una sola riga ed n colonne si dice **vettore riga con n componenti**.

Ad esempio la matrice D dell'Esempio 1 è un vettore riga con 2 componenti.

Def. 6. Una matrice con una sola colonna ed m righe si dice **vettore colonna con m componenti**.

Ad esempio la matrice E dell'Esempio 1 è un vettore colonna con 3 componenti.

N.B. Per indicare i vettori colonna si preferiscono usare lettere in carattere corsivo minuscolo con un segno sotto: $\underline{e}$ piuttosto che E.

Def. 7. Una **matrice** in cui il numero delle righe è uguale al numero delle colonne si dice **quadrata**. Se A è una matrice quadrata, il numero delle righe di A (che è uguale al numero delle colonne di A) si chiama **l'ordine di A**.

Ad esempio la matrice C dell'Esempio 1 è una matrice quadrata di ordine 3.

Notazioni. L'insieme delle matrici reali $m \times n$ si indica con il simbolo $M_{mn}(\mathbb{R})$, l'insieme delle matrici complesse $m \times n$ si indica con il simbolo $M_{mn}(\mathbb{C})$.

N.B. Si usano

- il simbolo $\mathbb{R}_n$ (risp. $\mathbb{C}_n$) al posto del simbolo $M_{1n}(\mathbb{R})$ (risp. $M_{1n}(\mathbb{C})$),
- il simbolo $\mathbb{R}^m$ (risp. $\mathbb{C}^m$) al posto del simbolo $M_{m1}(\mathbb{R})$ (risp. $M_{m1}(\mathbb{C})$),
- il simbolo $M_m(\mathbb{R})$ (risp. $M_m(\mathbb{C})$) al posto del simbolo $M_{mm}(\mathbb{R})$ (risp. $M_{mm}(\mathbb{C})$).

Quindi se A, B, C, D ed E sono le matrici dell'Esempio 1, allora $A \in M_{23}(\mathbb{R})$, $B \in M_{32}(\mathbb{C})$, $C \in M_3(\mathbb{R})$, $D \in \mathbb{C}_2$ ed $E \in \mathbb{R}^3$.

Def. 8. Sia $A = [a_{ij}]$ una matrice $m \times n$. Gli elementi a_{ii} si chiamano **elementi diagonali** di A.

Ad esempio, se A, B e C sono le matrici dell'Esempio 1, gli elementi diagonali di A sono 1 e 2, gli elementi diagonali di B sono 2 e 1, gli elementi diagonali di C sono -3, 6 e 5.

Def. 9. Una **matrice** quadrata $A = [a_{ij}]$ si dice **diagonale** se $a_{ij} = 0$ per ogni (i, j) con $i \neq j$ (ossia se gli elementi di A che non sono diagonali sono tutti nulli).

Esempio 2. $A = \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ sono matrici diagonali, mentre $D = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}$ ed $E = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ non sono matrici diagonali.

Def. 10. Una **matrice** diagonale si dice **scalare** se i suoi elementi diagonali sono tra loro uguali.

Esempio 3. $A = \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$ è una matrice scalare, mentre $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 7 & 1 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$ e $D = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \end{pmatrix}$ non sono matrici scalari.

Def. 11. Si chiama **matrice identica di ordine m** la matrice scalare $m \times m$ i cui elementi diagonali sono tutti uguali ad 1. Il simbolo usato per indicarla è I_m (oppure I quando dal contesto si puó dedurre il suo numero di righe e di colonne).

La sua colonna i-esima, quando $1 \leq i \leq m$, è indicata con il simbolo $\underline{e}_i$.

Dunque $\underline{e}_i$ è il vettore colonna con m componenti: $\underline{e}_i = \begin{array}{|c|} \hline 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \hline \end{array} \begin{array}{l} \\ \\ \\ \leftarrow i \\ \\ \\ \\ \end{array}$

Prodotto di una matrice per uno scalare

Def. 12. Siano $A = [a_{ij}]$ una matrice complessa (risp. reale) $m \times n$ ed α un numero complesso (risp. reale).

α viene chiamato **scalare**.

Sia $B = [b_{ij}]$ la matrice $m \times n$ definita da

$$b_{ij} = \alpha a_{ij} \quad \text{per ogni } i = 1, \ldots, m; j = 1, \ldots, n,$$

ossia la matrice che si ottiene da A moltiplicando ciascun elemento di A per lo scalare α. Allora B si chiama **il prodotto della matrice A per lo scalare α**.

B viene indicata con il simbolo αA.

Esempio 4. Se B la matrice considerata nell'Esempio 1, allora

$$(1+i)B = (1+i)\begin{pmatrix} 2 & 7+i \\ 1-i & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1+i)2 & (1+i)(7+i) \\ (1+i)(1-i) & (1+i)1 \\ (1+i)0 & (1+i)3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2+2i & 7+7i+i-1 \\ 1^2-i^2 & 1+i \\ 0 & 3+3i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+2i & 6+8i \\ 2 & 1+i \\ 0 & 3+3i \end{pmatrix}.$$

Si definisce così su $M_{mn}(\mathbb{C})$ (risp. su $M_{mn}(\mathbb{R})$) un'**operazione di moltiplicazione di matrici per scalari**

$$\mathbb{C} \times M_{mn}(\mathbb{C}) \to M_{mn}(\mathbb{C}) \quad (\text{risp.} \quad \mathbb{R} \times M_{mn}(\mathbb{R}) \to M_{mn}(\mathbb{R}))$$
$$(\alpha, A) \mapsto \alpha A.$$

Proprietà della moltiplicazione di matrici per scalari

(1) $\alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A$ per ogni scalare α e β ed ogni matrice A,

(2) $1A = A$ per ogni matrice A.

Dimostrazione. Sia $A = [a_{ij}]$ una matrice $m \times n$.

Si ponga $B := \beta A$ e si indichi con b_{ij} l'elemento di posto (i,j) di B (per cui $B = [b_{ij}]$).

Si ponga $C := \alpha B$ e si indichi con c_{ij} l'elemento di posto (i,j) di C (per cui $C = [c_{ij}]$).

Si ponga infine $D := (\alpha\beta)A$ e si indichi con d_{ij} l'elemento di posto (i,j) di D (per cui $D = [d_{ij}]$).

Si noti che B e D sono $m \times n$ essendolo A, e che C è $m \times n$ essendolo B.

Per ogni $1 \le i \le m$ e $1 \le j \le n$ si ha

$$c_{ij} = \alpha b_{ij} = \alpha(\beta a_{ij}) = (\alpha\beta)a_{ij} = d_{ij}$$

quindi $C = D$ ossia $\alpha B = D$. Poichè $B = \beta A$ e $D = (\alpha\beta)A$ si ottiene (1).

Per provare (2) si ponga $E = 1A$ e si indichi con e_{ij} l'elemento di posto (i,j) di E (per cui $E = [e_{ij}]$). E è $m \times n$ essendolo A.

Per ogni $1 \le i \le m$ e $1 \le j \le n$ si ha $e_{ij} = 1a_{ij} = a_{ij}$, quindi $E = A$, ossia $1A = A$.

LEZIONE 2

Somma di due matrici $m \times n$

Def. 1. Siano $A = [a_{ij}]$ e $B = [b_{ij}]$ due matrici (reali o complesse) **ENTRAMBE** $m \times n$. Sia $C = [c_{ij}]$ la matrice $m \times n$ definita da

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \quad \text{per ogni } i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n,$$

(ossia la matrice i cui elementi si ottengono sommando gli elementi corrispondenti di A e B). La matrice C si chiama **la somma delle matrici** A **e** B. Per indicare C si usa il simbolo $A + B$.

Esempio 1. Siano $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & i \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 0 & i & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Allora

$$A + B = \begin{pmatrix} 1+0 & 2+i & i+3 \\ 0+1 & 3+1 & 1+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2+i & 3+i \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

N.B. NON ESISTE la somma di due matrici che non abbiano lo stesso numero di righe oppure che non abbiano lo stesso numero di colonne.

Si definisce così su $M_{mn}(\mathbb{C})$ (risp. su $M_{mn}(\mathbb{R})$) un'**operazione di addizione di matrici**

$$M_{mn}(\mathbb{C}) \times M_{mn}(\mathbb{C}) \to M_{mn}(\mathbb{C}) \quad (\text{risp.} \quad M_{mn}(\mathbb{R}) \times M_{mn}(\mathbb{R}) \to M_{mn}(\mathbb{R}))$$

$$(A, B) \mapsto A + B.$$

Proprietà dell'addizione di matrici

Per ogni $A, B, C \in M_{mn}(\mathbb{C})$ (risp. $M_{mn}(\mathbb{R})$) ed ogni $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ (risp. $\mathbb{R}$) si ha:

(1) associatività: $A + (B + C) = (A + B) + C$;

(2) commutatività: $A + B = B + A$;

(3) elemento neutro: $A + \mathbb{O} = A (= \mathbb{O} + A)$;

(4) matrice opposta: se si indica con $-A$ la matrice $(-1)A$, si ha $A + (-A) = \mathbb{O}$ (la matrice $-A$ si chiama **l'opposta della matrice A**;

(5) $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$;

(6) $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$.

Le proprietà (5) e (6) sono **proprietà ditributive** che "collegano"l'addizione di matrici con la moltiplicazione per scalari.

Dimostrazione. Siano $A = [a_{ij}]$, $B = [b_{ij}]$ e $C = [c_{ij}]$. Per ogni $1 \leq i \leq m$ e $1 \leq j \leq n$ si ha:

$$\begin{array}{llll}
(1): & a_{ij}+(b_{ij}+c_{ij})=(a_{ij}+b_{ij})+c_{ij}; & (2): & a_{ij}+b_{ij}=b_{ij}+a_{ij};\\
(3): & a_{ij}+0=a_{ij}=0+a_{ij}; & (4): & a_{ij}+(-a_{ij})=a_{ij}-a_{ij}=0;\\
(5): & \alpha(a_{ij}+b_{ij})=\alpha a_{ij}+\alpha b_{ij}; & (6): & (\alpha+\beta)a_{ij}=\alpha a_{ij}+\beta a_{ij}.
\end{array}$$

Notazione. Per indicare la somma di A con l'opposta di B si scrive $A-B$, al posto di $A+(-B)$.

Def. 2. Siano $A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ un vettore riga ed un vettore colonna con lo stesso numero di componenti, n. Si chiama **prodotto del vettore riga con n componenti A ed il vettore colonna con n componenti B** il numero

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n = \sum_{1\le i\le n} a_ib_i.$$

N.B.

- Quando si vuole metter in evidenza che i numeri sono matrici 1×1, si scrive $[a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n]$ al posto di $a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n$.
- Nel caso di vettori riga si preferisce scrivere $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \end{pmatrix}$ piuttosto che $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \end{pmatrix}$, ed analogamente per i vettori colonna.

Esempio 2. $\begin{pmatrix} 3 & i & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 \\ 2i \\ 6 \end{pmatrix} = 3\times(-2)+i\times 2i+2\times 6 = -6-2+12 = 4.$

Def. 3. Siano $A=[a_{ij}]$ una matrice $m\times n$ e $B=[b_{ij}]$ una matrice $n\times r$. Il **prodotto delle due matrici, A e B, di cui la prima, A, ha un numero di colonne uguale al numero delle righe della seconda, B,** è la matrice $C=[c_{ij}]$, $m\times r$, ove

$$c_{ij} = \begin{pmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{nj} \end{pmatrix} = a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{in}b_{nj} = \sum_{1\le k\le n} a_{ik}b_{kj},$$

ossia la matrice $m\times r$ il cui elemento di posto (i,j) è il prodotto della i-esima riga di A e la j-esima colonna di B. Per indicare C si usa il simbolo AB.

Esempio 3. Siano $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 6 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 2 \\ -1 & -2 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$. Allora $AB = C = [c_{ij}]$ è la matrice 2×4 ove

$$c_{11} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = 2 \times 1 + 1 \times (-1) + 3 \times 0 = 2 - 1 + 0 = 1,$$

$$c_{12} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = 2 \times 3 + 1 \times (-2) + 3 \times 1 = 6 - 2 + 3 = 7,$$

$$c_{13} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} = 2 \times 0 + 1 \times 4 + 3 \times 0 = 0 + 4 + 0 = 4,$$

$$c_{14} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = 2 \times 2 + 1 \times 1 + 3 \times (-2) = 4 + 1 - 6 = -1,$$

$$c_{21} = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = 6 \times 1 + 0 \times (-1) + 1 \times 0 = 6 + 0 + 0 = 6,$$

$$c_{22} = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = 6 \times 3 + 0 \times (-2) + 1 \times 1 = 18 + 0 + 1 = 19,$$

$$c_{23} = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} = 6 \times 0 + 0 \times 4 + 1 \times 0 = 0 + 0 + 0 = 0,$$

$$c_{24} = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = 6 \times 2 + 0 \times 1 + 1 \times (-2) = 12 + 0 - 2 = 10,$$

ossia $C = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 4 & -1 \\ 6 & 19 & 0 & 10 \end{pmatrix}$.

N.B. Il prodotto AB di due matrici A e B **ESISTE SOLO SE IL NUMERO DELLE COLONNE DI A E' UGUALE AL NUMERO DELLE RIGHE DI B.**

Si definisce così un'**operazione di moltiplicazione di matrici**

$$M_{mn}(\mathbb{C}) \times M_{nr}(\mathbb{C}) \to M_{mr}(\mathbb{C}) \quad (\text{risp.} \quad M_{mn}(\mathbb{R}) \times M_{nr}(\mathbb{R}) \to M_{mr}(\mathbb{R}))$$
$$(A, B) \mapsto AB.$$

Proprietà della moltiplicazione di matrici

(1) associatività: $A(BC) = (AB)C$, se A, B e C sono matrici tali che tutte le moltiplicazioni scritte siano possibili;

(2) distributività rispetto alla somma:

$A(B + C) = AB + AC$, se A, B e C sono matrici tali che tutti i prodotti e tutte le somme scritte siano possibili, e

$(B + C)A = BA + CA$, se A, B e C sono matrici tali che tutti i prodotti e tutte le somme scritte siano possibili;

(3) $\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B)$, se A e B sono matrici tali che il prodotto AB esista ed α è uno scalare;

(4) $I_m A = A = AI_n$ per ogni matrice A, $m \times n$;

(5) $\mathbb{O}_{k\times m}A = \mathbb{O}_{k\times n}$ e $A\mathbb{O}_{n\times k} = \mathbb{O}_{m\times k}$ per ogni matrice A, $m \times n$, ed ogni numero naturale k.

N.B.

- la moltiplicazione di matrici **NON** gode della proprietà **commutativa**: date due matrici A, $m \times n$, e B, $r \times t$,

(1) se esiste AB (ossia se $r = n$) non è detto che esista BA (perchè BA esista occorre che $m = t$).

(2) Se sia AB che BA esistono, ossia se A è $m \times n$, e B è $n \times m$, allora AB è $m \times m$ e BA è $n \times n$. Se $m \neq n$, senz'altro $AB \neq BA$.

(3) Se anche A e B sono entrambe $m \times m$, per cui AB e BA entrambe esistono ed entrambe sono $m \times m$, non è egualmente detto che AB e BA siano uguali. Ad esempio:

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 8 & 1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} -2 & 8 \\ -1 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

- Per la moltiplicazione di matrici **NON** vale la **legge di cancellazione per il prodotto**: esistono matrici A e B, con $A \neq \mathbb{O} \neq B$ e $AB = \mathbb{O}$. Ad esempio:

$$\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 & 6 \\ -4 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Esercizio. Per ogni $a \in \mathbb{R}$ sia $S_a = aI_2 = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$. Si provi:

(1) $S_a A = AS_a$ per ogni $A \in M_2(\mathbb{R})$.

(2) Se $B \in M_2(\mathbb{R})$ è tale che $BA = AB$ per ogni $A \in M_2(\mathbb{R})$, allora $B = S_a$ per un opportuno $a \in \mathbb{R}$.

Svolgimento.

(1) Sia $A \in M_2(\mathbb{R})$. Allora

$$S_a A = (aI_2)A = a(I_2 A) = aA = a(AI_2).$$

Poichè per la proprietà (3) della moltiplicazione di matrici si ha che $a(AI_a) = A(aI_2)$, si conclude che $S_a A = AS_a$.

(2) Sia $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$ tale che

$$(*) \qquad BA = AB \quad \text{per ogni} \quad A \in M_2(\mathbb{R}).$$

In particolare prendendo in $(*)$ come matrice A la matrice $\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, si ottiene:

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Se ne deduce che $b = c = 0$, ossia che la matrice B deve essere una matrice diagonale: $B = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}$.

Tenendo conto del fatto che $B = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}$ e prendendo in $(*)$ come matrice A la matrice $A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ si ottiene:

$$\begin{pmatrix} a & a \\ d & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & d \\ a & d \end{pmatrix}.$$

Se ne deduce che $d = a$, e quindi che

$$B = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} = S_a.$$

Nell'esercizio si è provato che **le matrici reali 2×2 che commutano con ogni matrice reale 2×2 sono esattamente le matrici reali scalari di ordine 2**.

Allo stesso modo si può vedere che le matrici complesse 2×2 che commutano con ogni matrice complessa 2×2 sono esattamente le matrici complesse scalari di ordine 2.

In generale è possibile provare: **le matrici reali (risp. complesse) m×m che commutano con ogni matrice reale (risp. complessa) m×m sono esattamente le matrici reali (risp. complesse) scalari di ordine m**.

Def. 4. Sia A una matrice quadrata. Si definisce **la potenza n-esima di** A, dove $n \geq 1$ è un numero naturale, nel seguente modo:

$$A^0 = I, \qquad A^1 = A, \quad A^2 = AA^1, \quad A^3 = AA^2, \quad \ldots \quad A^n = AA^{n-1}.$$

Come per le potenze dei numeri, si ha la seguente **proprietà delle potenze**: per ogni coppia di numeri naturali m ed n ed ogni matrice quadrata A si ha

$$A^m A^n = A^{m+n} = A^n A^m.$$

Def. 5. Una matrice A si dice **non singolare** (o anche invertibile), se esiste una matrice B tale che $AB = I = BA$. Vedremo che se una tale B esiste, allora è unica. Essa si chiama **l'inversa** di A e si indica con il simbolo A^{-1}.

Osservazione. Se A è non singolare allora sia A che A^{-1} sono quadrate.

Proposizione. Se A e B sono due matrici non singolari tali che esista AB, allora anche il prodotto AB è una matrice non singolare e $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

In generale se $A_1, A_2, \ldots, A_{r-1}, A_r$ sono matrici non singolari tali che esista il prodotto $A_1A_2 \ldots A_{r-1}A_r$, allora anche il prodotto $A_1A_2 \ldots A_{r-1}A_r$ è non singolare e si ha

$$(A_1A_2 \ldots A_{r-1}A_r)^{-1} = A_r^{-1}A_{r-1}^{-1} \ldots A_2^{-1}A_1^{-1}.$$

Dimostrazione. Facciamo la dimostrazione supponendo che il prodotto abbia solo due fattori. Osserviamo innanzitutto che se A e B sono matrici non singolari tali che esista AB, allora A, B, A^{-1} e B^{-1} sono tutte matrici $m \times m$ per un opportuno m.

Si ha poi:

$$(AB)B^{-1}A^{-1} = A(BB^{-1})A^{-1} = AIA^{-1} = AA^{-1} = I,$$
$$(B^{-1}A^{-1})(AB) = B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}IB = B^{-1}B = I.$$

La dimostrazione del risultato quando il numero dei fattori nel prodotto è r è analoga.

LEZIONE 3

Trasposte, coniugate, H-trasposte

Def. 1. Data una matrice $A = [a_{ij}]$, $m \times n$, si chiama **trasposta** di A la matrice $n \times m$ $B = [b_{ij}]$ definita da:

$$b_{ij} = a_{ji} \quad \text{per ogni } 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n.$$

La matrice B si indica con il simbolo A^T.

Esempio 1. Se $A = \begin{pmatrix} 4i & 3 & -2 \\ 1 & 2-5i & 0 \end{pmatrix}$, allora la trasposta di A è $A^T = \begin{pmatrix} 4i & 1 \\ 3 & 2-5i \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$.

Def. 2. Data una matrice $A = [a_{ij}]$, $m \times n$, si chiama **coniugata** di A la matrice $m \times n$ $B = [b_{ij}]$ definita da:

$$b_{ij} = \overline{a}_{ij} \quad \text{per ogni } 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n,$$

ove se $z = a + ib$ è un numero complesso espresso in forma algebrica (cioè a e b sono numeri reali), $\overline{z} = a - ib$ è il suo coniugato. La matrice B si indica con il simbolo $\overline{A}$.

Esempio 2. Se $A = \begin{pmatrix} 4i & 3 & -2 \\ 1 & 2-5i & 0 \end{pmatrix}$, allora la coniugata di A è

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} \overline{4i} & \overline{3} & \overline{-2} \\ \overline{1} & \overline{2-5i} & \overline{0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4i & 3 & -2 \\ 1 & 2+5i & 0 \end{pmatrix}.$$

Def. 3. Data una matrice $A = [a_{ij}]$, $m \times n$, si chiama **H-trasposta** di A la matrice $n \times m$ $B = [b_{ij}]$ definita da:

$$b_{ij} = \overline{a}_{ji} \quad \text{per ogni } 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n.$$

La matrice B si indica con il simbolo A^H.

Si noti che per ottenere la H-trasposta di A si può procedere indifferentemente in uno dei due seguenti modi:

- o si calcola prima la trasposta di A e di quest'ultima si calcola poi la coniugata (ossia $A^H = \overline{A^T}$),
- oppure si calcola prima la coniugata di A e di quest'ultima si calcola poi la trasposta (ossia $A^H = (\overline{A})^T$).

Esempio 3. Se $A = \begin{pmatrix} 4i & 3 & -2 \\ 1 & 2-5i & 0 \end{pmatrix}$, allora la H-trasposta di A è

$$A^H = \overline{A^T} = \begin{pmatrix} \overline{4i} & \overline{1} \\ \overline{3} & \overline{2-5i} \\ \overline{-2} & \overline{0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4i & 1 \\ 3 & 2+5i \\ -2 & 0 \end{pmatrix},$$

ma anche

$$A^H = (\overline{A})^T = \begin{pmatrix} \overline{4i} & \overline{3} & \overline{-2} \\ \overline{1} & \overline{2-5i} & \overline{0} \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} -4i & 3 & -2 \\ 1 & 2+5i & 0 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} -4i & 1 \\ 3 & 2+5i \\ -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Proprietà delle coniugate: Siano A e B matrici per cui siano possibili le operazioni indicate, e sia α uno scalare. Allora si ha:

(1) $\overline{\overline{A}} = A$;

(2) $\overline{(A+B)} = \overline{A} + \overline{B}$, e $\overline{(A-B)} = \overline{A} - \overline{B}$;

(3) $\overline{\alpha A} = \overline{\alpha}\,\overline{A}$;

(4) $\overline{AB} = \overline{A}\,\overline{B}$.

Le proprietà delle coniugate seguono dalla definizione di coniugata di una matrice, e dalle definizioni di prodotto di una matrice per uno scalare e di prodotto di due matrici.

Proprietà delle trasposte e delle H-trasposte: Siano A e B matrici per cui siano possibili le operazioni indicate, e sia α uno scalare. Allora si ha:

$$\begin{array}{lll}
(1): & (A^T)^T = A; & (A^H)^H = A; \\
(2): & (A+B)^T = A^T + B^T; & (A+B)^H = A^H + B^H; \\
 & (A-B)^T = A^T - B^T; & (A-B)^H = A^H - B^H; \\
(3): & (\alpha A)^T = \alpha A^T; & (\alpha A)^H = \overline{\alpha} A^H; \\
(4): & (AB)^T = B^T A^T; & (AB)^H = B^H A^H.
\end{array}$$

Typeset by $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$-TEX

Dimostrazione. Per provare (1),(2) e (3) basta applicare le definizioni di trasposta, di H-trasposta, di somma di matrici e di prodotto di matrici per scalari.

Per provare la prima uguaglianza di (4), supponiamo che $A = [a_{ij}]$ sia $m \times n$ e $B = [b_{ij}]$ sia $n \times r$, e poniamo $AB = C = [c_{ij}]$ e $B^T A^T = D = [d_{ij}]$. Poichè B^T è $r \times n$ ed A^T è $n \times m$, allora D è $r \times m$, come C^T. L'elemento di posto (i,j) di D è il prodotto della i-esima riga di B^T per la j-esima colonna di A^T. Poichè la i-esima riga di B^T è la i-esima colonna di B pensata come vettore riga, e la j-esima colonna di A^T è la j-esima riga di A pensata come vettore colonna, allora $d_{ij} = \begin{pmatrix} b_{1i} & b_{2i} & \dots & b_{ni} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{j1} \\ a_{j2} \\ \dots \\ a_{jn} \end{pmatrix} =$

$$= \sum_{1 \le l \le n} b_{li} a_{jl} = \sum_{1 \le l \le n} a_{jl} b_{li} = \begin{pmatrix} a_{j1} & a_{j2} & \dots & a_{jn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{1i} \\ b_{2i} \\ \dots \\ b_{ni} \end{pmatrix} = c_{ji}.$$

Dalla definizione di trasposta (di C) si ottiene la prima uguaglianza di (4).

Per la seconda, si noti che la definizione di H-trasposta, la proprietà (4) delle coniugate e la proprietà $(AB)^T = B^T A^T$ che abbiamo già dimostrato implicano:

$$(AB)^H = \overline{(AB)}^T = (\overline{A} \quad \overline{B})^T = \overline{B}^T \overline{A}^T = B^H A^H.$$

Definizioni 4,5,6,7 Una matrice A si dice:

- **simmetrica** se coincide con la sua trasposta (ossia se $A = A^T$);
- **hermitiana** se coincide con la sua H-trasposta (ossia se $A = A^H$);
- **anti-simmetrica** se coincide con l'opposta della sua trasposta (ossia se $A = -A^T$, oppure, ed è lo stesso, se $A^T = -A$);
- **anti-hermitiana** se coincide con l'opposta della sua H-trasposta (ossia se $A = -A^H$, oppure, ed è lo stesso, se $A^H = -A$).

Si noti che se A è simmetrica, o hermitiana, o anti-simmetrica, o infine anti-hermitiana, allora A è quadrata.

Esempio 4. Siano

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 2+i \\ 2-i & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 2+i \\ -2+i & 0 \end{pmatrix}.$$

Allora A è simmetrica, B è hermitiana, C è anti-simmetrica e D è anti-hermitiana.

Dalla proprietà (4) della trasposta e della H-trasposta segue che

- **la somma di due matrici simmetriche è una matrice simmetrica**;
- **la somma di due matrici hermitiane è una matrice hermitiana**;
- **la somma di due matrici anti-simmetriche è una matrice anti-simmetrica**;
- **la somma di due matrici anti-hermitiane è una matrice anti-hermitiana**.

Esempio 5. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ sono simmetriche, ma $AB = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ non è simmetrica. Dunque **il prodotto di due matrici simmetriche puó essere una matrice non simmetrica**.

Esempio 6. $A = \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 2 & i \\ -i & 2 \end{pmatrix}$ sono hermitiane, ma $AB = \begin{pmatrix} 3 & 3i \\ -2i & 1 \end{pmatrix}$ non è hermitiana. Dunque **il prodotto di due matrici hermitiane puó essere una matrice non hermitiana**.

Esempio 7. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ è anti-simmetrica, ma $A^2 = AA = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ non è anti-simmetrica. Dunque **il prodotto di due matrici anti-simmetriche puó essere una matrice non anti-simmetrica**.

Esempio 8. $A = \begin{pmatrix} i & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}$ sono anti-hermitiane, ma $AB = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ non è anti-hermitiana. Dunque **il prodotto di due matrici anti-hermitiane puó essere una matrice non anti-hermitiana**.

Esercizio: (Decomposizione di una matrice quadrata nella parte hermitiana ed anti-hermitiana) Sia A una matrice quadrata $m \times m$. Allora esistono

$$B = \frac{1}{2}(A + A^H) \quad \text{e} \quad C = \frac{1}{2}(A - A^H).$$

Si provi che:
- B è hermitiana,
- C è antihermitiana,
- $A = B + C$,
- se D ed E sono due matrici tali che $\begin{cases} D \text{ è hermitiana} \\ E \text{ è anti-hermitiana} \\ D + E = A \end{cases}$

  allora $D = \frac{1}{2}(A + A^H)$ ed $E = \frac{1}{2}(A - A^H)$.

Ossia: **ogni matrice quadrata A si puó scrivere in un modo unico come somma di una matrice hermitiana, $\frac{1}{2}(\mathbf{A}+\mathbf{A}^H)$, ed una matrice anti-hermitiana, $\frac{1}{2}(\mathbf{A}-\mathbf{A}^H)$.**

$\frac{1}{2}(A+A^H)$ si chiama **la parte hermitiana di** A e $\frac{1}{2}(A-A^H)$ si chiama **la parte anti-hermitiana di** A.

Svolgimento. Poichè A è $m \times m$, anche A^H è $m \times m$, per cui esistono sia $A+A^H$ che $A-A^H$, entrambe $m \times m$, e dunque esistono anche $B = \frac{1}{2}(A+A^H)$ e $C = \frac{1}{2}(A-A^H)$. Allora, poichè B e C sono entrambe $m \times m$, esiste $B+C$, ed è:

$$B + C = \frac{1}{2}(A + A^H) + \frac{1}{2}(A - A^H) = \frac{1}{2}A + \frac{1}{2}A^H + \frac{1}{2}A - \frac{1}{2}A^H = A.$$

La matrice B è hermitiana:

$$B^H = (\frac{1}{2}(A + A^H))^H = \overline{\frac{1}{2}}(A + A^H)^H = \frac{1}{2}(A^H + (A^H)^H) = \frac{1}{2}(A^H + A) = B.$$

La matrice C è anti-hermitiana:

$$C^H = (\frac{1}{2}(A - A^H))^H = \overline{\frac{1}{2}}(A - A^H)^H = \frac{1}{2}(A^H - (A^H)^H) = \frac{1}{2}(A^H - A) = -C.$$

Abbiamo quindi visto per ogni matrice quadrata A **esistono** una matrice hermitiana, $\frac{1}{2}(A+A^H)$, ed una matrice antihermitiana $\frac{1}{2}(A-A^H)$ tali che A sia la loro somma.

Vogliamo ora provare che se A è una matrice quadrata e D ed E sono matrici tali che

$$\begin{cases} D \text{ è hermitiana} \\ E \text{ è anti-hermitiana} \\ D + E = A \end{cases}$$

allora $D = \frac{1}{2}(A + A^H)$ ed $E = \frac{1}{2}(A - A^H)$.

Poniamo $B = \frac{1}{2}(A + A^H)$ e $C = \frac{1}{2}(A - A^H)$. Poichè abbiamo visto che $A = B + C$ e stiamo supponendo che $A = D + E$, allora

$$(*) \qquad B + C = D + E.$$

Da (*) segue che anche $(B + C)^H = (D + E)^H$.

Poichè abbiamo visto che $B^H = B$ e $C^H = -C$, allora

$$(B + C)^H = B^H + C^H = B - C.$$

Poichè stiamo supponendo che $D^H = D$ ed $E^H = -E$, allora

$$(D + E)^H = D^H + E^H = D - E.$$

Quindi da $(B + C)^H = (D + E)^H$ segue

$$(**) \qquad B - C = D - E.$$

Sommando membro a membro (*) e (**) otteniamo $2B = 2D$, da cui, moltiplicando entrambi i membri dell'uguaglianza per $\frac{1}{2}$, $D = B = \frac{1}{2}(A + A^H)$.

Sottraendo membro a membro (*) e (**) otteniamo $-2C = -2E$, da cui, moltiplicando entrambi i membri dell'uguaglianza per $-\frac{1}{2}$, $E = C = \frac{1}{2}(A - A^H)$.

Abbiamo quindi provato che data una matrice quadrata A, esistono un'**unica** matrice hermitiana B ed un'**unica** matrice anti-hermitiana C tali che $A = B + C$ (inoltre $B = \frac{1}{2}(A + A^H)$ e $C = \frac{1}{2}(A - A^H)$).

Esempio 9. Se $A = \begin{pmatrix} 1+i & 6i \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$, allora $A^H = \overline{A^T} = \begin{pmatrix} \overline{1+i} & \overline{4} \\ \overline{6i} & \overline{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-i & 4 \\ -6i & 2 \end{pmatrix}$, per cui la parte hermitiana di A è

$$\frac{1}{2}(A + A^H) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1+i+1-i & 6i+4 \\ 4-6i & 2+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2+3i \\ 2-3i & 2 \end{pmatrix},$$

e la parte anti-hermitiana di A è

$$\frac{1}{2}(A - A^H) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1+i-1+i & 6i-4 \\ 4+6i & 2-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i & -2+3i \\ 2+3i & 0 \end{pmatrix}.$$

Quanto detto generalizza ció che già sappiamo per i numeri, ossia le matrici 1×1. Sappiamo infatti che per ogni numero complesso z esistono e sono unici due numeri reali a e b tali che $z = a + ib$ (tale espressione si chiama la forma algebrica di z).

Ogni numero reale a è una matrice 1×1 hermitiana:

$$a^H = \overline{a^T} = \overline{a} = a.$$

Ogni numero immaginario puro ib (ove b è un numero reale) è una matrice 1×1 anti-hermitiana:

$$(ib)^H = \overline{(ib)^T} = \overline{ib} = \overline{i} \quad \overline{b} = (-i)b = -(ib).$$

Quindi la forma algebrica di z, ossia l'espressione $z = a+ib$ con a e b numeri reali, è l'espressione della matrice 1×1 z come somma di una matrice hermitiana, a, ed una matrice anti-hermitiana, ib.

Un calcolo diretto mostra che a e b sono proprio la parte hermitiana e la parte anti-hermitiana di z: poichè $z^H = \overline{z^T} = \overline{z} = a - ib$, allora

$$\frac{1}{2}(z + z^H) = \frac{1}{2}(a + ib + a - ib) = a \quad \text{e} \quad \frac{1}{2}(z - z^H) = \frac{1}{2}(a + ib - a + ib) = ib.$$

LEZIONE 4

Matrici a blocchi

Def. 1. Data una matrice A si chiama **sottomatrice** di A ogni matrice che si ottiene da A sopprimendo alcune righe ed alcune colonne di A.

Esempio 1. Se $A = \begin{pmatrix} 4i & 3 & -2 & 9 & 0 \\ 1 & 5i & 0 & 4 & 2 \\ 6 & 7 & 2 & 8 & 0 \end{pmatrix}$, allora

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 5i & 0 & 2 \\ 6 & 7 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 4i & 3 & 9 \\ 6 & 7 & 8 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad D = \begin{pmatrix} 4i & -2 & 9 & 0 \\ 1 & 0 & 4 & 2 \\ 6 & 2 & 8 & 0 \end{pmatrix}$$

sono tre sottomatrici di A: B si ottiene da A sopprimendo la 1^a riga e la 4^a colonna, C si ottiene da A sopprimendo la 2^a riga, la 3^a e la 5^a colonna, D si ottiene da sopprimendo solo la 2^a colonna.

Ripartire una matrice A **in blocchi** significa tracciare delle linee orizzontali (lunghe tanto quanto lo è la matrice) e delle righe verticali (alte tanto quanto lo è la matrice): i **blocchi** della ripartizione effettuata sono le sottomatrici di A che le linee tracciate delimitano.

Esempio 2. Se $A = \begin{pmatrix} 4i & 3 & -2 & 9 & 0 \\ 1 & 5i & 0 & 4 & 2 \\ 6 & 7 & 2 & 8 & 0 \end{pmatrix}$ è la matrice considerata nell'Esempio 1, allora $A = \begin{pmatrix} 4i & 3 & | & -2 & | & 9 & 0 \\ 1 & 5i & | & 0 & | & 4 & 2 \\ - & - & - & - & - & - & - \\ 6 & 7 & | & 2 & | & 8 & 0 \end{pmatrix}$ è una ripartizione di A in blocchi. I blocchi di questa ripartizione sono:

$$A_{11} = \begin{pmatrix} 4i & 3 \\ 1 & 5i \end{pmatrix}, \quad A_{12} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad A_{13} = \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 4 & 2 \end{pmatrix},$$

$$A_{21} = \begin{pmatrix} 6 & 7 \end{pmatrix}, \quad A_{22} = \begin{pmatrix} 2 \end{pmatrix}, \quad A_{23} = \begin{pmatrix} 8 & 0 \end{pmatrix}.$$

Per indicare che A è stata ripartita nei blocchi $A_{11}, A_{12}, A_{13}, A_{21}, A_{22}$, ed A_{23} si scrive

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \end{pmatrix}.$$

Le notazioni scelte suggeriscono che quando si ripartisce una matrice A in blocchi, si puó pensare ad A come ad una matrice i cui elementi sono i blocchi della ripartizione effettuata.

Quando una matrice è ripartita in blocchi si dice che è una **matrice a blocchi**.

Typeset by $\mathcal{AMS}$-TEX
Typeset by $\mathcal{AMS}$-TEX

Prodotto di una matrice a blocchi per uno scalare

Siano $A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1r} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2r} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{t1} & A_{t2} & \dots & A_{tr} \end{pmatrix}$ una matrice a blocchi ed α uno scalare. Allora

$$\alpha A = \begin{pmatrix} \alpha A_{11} & \alpha A_{12} & \dots & \alpha A_{1r} \\ \alpha A_{21} & \alpha A_{22} & \dots & \alpha A_{2r} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha A_{t1} & \alpha A_{t2} & \dots & \alpha A_{tr} \end{pmatrix}.$$

Esempio 3. Se $A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \end{pmatrix}$ è la matrice a blocchi considerata nell'Esempio 2, ed $\alpha = -i$, allora $\alpha A = -iA = \begin{pmatrix} -iA_{11} & -iA_{12} & -iA_{13} \\ -iA_{21} & -iA_{22} & -iA_{23} \end{pmatrix}$. Poichè

$$-iA_{11} = \begin{pmatrix} 4 & -3i \\ -i & 5 \end{pmatrix}, \quad -iA_{12} = \begin{pmatrix} 2i \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (-i)A_{13} = \begin{pmatrix} -9i & 0 \\ -4i & -2i \end{pmatrix},$$

$$(-i)A_{21} = \begin{pmatrix} -6i & -7i \end{pmatrix}, \quad (-i)A_{22} = \begin{pmatrix} -2i \end{pmatrix}, \quad (-i)A_{23} = \begin{pmatrix} -8i & 0 \end{pmatrix},$$

allora $A = \begin{pmatrix} 4 & -3i & 2i & -9i & 0 \\ -i & 5 & 0 & -4i & -2i \\ -6i & -7i & -2i & -8i & 0 \end{pmatrix}$.

Somma di due matrici a blocchi

Siano $A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ & \dots & \dots & \\ A_{m1} & A_{m2} & \dots & A_{mn} \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & \dots & B_{1s} \\ & \dots & \dots & \\ B_{r1} & B_{r2} & \dots & B_{rs} \end{pmatrix}$ due matrici a blocchi.

Se

$$\begin{cases} m = r \\ n = s \\ \text{esiste } A_{ij} + B_{ij} \text{ per ogni } 1 \le i \le m, 1 \le j \le n \end{cases}$$

(l'ultima condizione è verificata se e solo se A_{ij} ha lo stesso numero di righe e lo stesso numero di colonne di B_{ij}, per ogni $1 \le i \le m, 1 \le j \le n$), allora

$$A + B = \begin{pmatrix} A_{11} + B_{11} & A_{12} + B_{12} & \dots & A_{1n} + B_{1n} \\ & \dots & \dots & \\ A_{m1} + B_{m1} & A_{m2} + B_{m2} & \dots & A_{mn} + B_{mn} \end{pmatrix}.$$

Esempio 4. Se $A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}$ sono le matrici a blocchi con blocchi

$$A_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}, A_{12} = B_{12} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, B_{21} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \end{pmatrix}, A_{22} = \begin{pmatrix} 0 \end{pmatrix}, B_{22} = \begin{pmatrix} 3 \end{pmatrix},$$

$B_{11} = \mathbb{O}_{2\times 2}$ e $A_{21} = \mathbb{O}_{1\times 2}$, allora

$$A + B = \begin{pmatrix} A_{11} + B_{11} & A_{12} + B_{12} \\ A_{21} + B_{21} & A_{22} + B_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & 2A_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 3 & -1 & 2 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

Prodotto di due matrici a blocchi

Siano $A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ & \dots & \dots & \\ A_{m1} & A_{m2} & \dots & A_{mn} \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & \dots & B_{1s} \\ & \dots & \dots & \\ B_{r1} & B_{r2} & \dots & B_{rs} \end{pmatrix}$ due matrici a blocchi.

Se $r = n$ allora $AB = C$ è la matrice a blocchi $C = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & \dots & C_{1s} \\ & \dots & \dots & \\ C_{m1} & C_{m2} & \dots & C_{ms} \end{pmatrix}$ con

$$C_{ij} = A_{i1}B_{1j} + A_{i2}B_{2j} + \dots + A_{in}B_{nj} = \sum_{1\le k\le n} A_{ik}B_{kj},$$

A CONDIZIONE CHE TUTTE LE OPERAZIONI SCRITTE SIANO DEFINITE.

Esempio 5. Se A è la matrice 4×2 a blocchi $A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$ con $A_{11} = I_2$,$A_{12} = 2I_2$,$A_{21} = 3I_2$,$A_{22} = 4I_2$, e B è la matrice 4×2 a blocchi $B = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}$ con $B_{11} = B_{12} = B_{21} = B_{22} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ allora $AB = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix} =$

$$= \begin{pmatrix} A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} & A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22} \\ A_{21}B_{11} + A_{22}B_{21} & A_{21}B_{12} + A_{22}B_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_2B_{11} + 2I_2B_{21} & I_2B_{12} + 2I_2B_{22} \\ 3I_2B_{11} + 4I_2B_{21} & 3I_2B_{12} + 4I_2B_{22} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 3B_{11} & 3B_{11} \\ 7B_{11} & 7B_{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & | & 3 \\ 6 & | & 6 \\ - & - & - \\ 7 & | & 7 \\ 14 & | & 14 \end{pmatrix}.$$

Typeset by $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$-TEX
Typeset by $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$-TEX

Applicazione del prodotto a blocchi al prodotto di due matrici

(1) Ripartizione della seconda matrice in colonne.

Siano A e B due matrici tali che esista il loro prodotto AB (quindi se A è una matrice $m \times n$ allora B è una matrice $n \times r$).

Ripartiamo B in blocchi prendendo come blocchi le sue colonne:

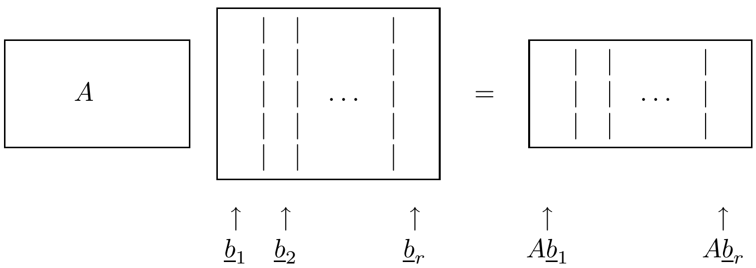
$$B = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & \dots & B_{1r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{b}_1 & \underline{b}_2 & \dots & \underline{b}_r \end{pmatrix}$$

dove $B_{1j} = \underline{b}_j$ è la j-esima colonna di B per ogni $1 \leq j \leq r$.

Si puó allora calcolare il prodotto AB pensando A come ad un unico blocco, e si ottiene

$$AB = A \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & \dots & B_{1r} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \underline{b}_1 & \underline{b}_2 & \dots & \underline{b}_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A\underline{b}_1 & A\underline{b}_2 & \dots & A\underline{b}_r \end{pmatrix}.$$

Per ogni $1 \leq j \leq r$, $A\underline{b}_j$ è un vettore colonna con m componenti, ed è la j-esima colonna di AB.



(2) Ripartizione della prima matrice in righe.

Come in (1), siano A e B due matrici tali che esista il loro prodotto AB (quindi se A è una matrice $m \times n$ allora B è una matrice $n \times r$).

Ripartiamo A in blocchi prendendo come blocchi le sue righe:

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} \\ A_{21} \\ \vdots \\ A_{m1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{r}_1^T \\ \underline{r}_2^T \\ \vdots \\ \underline{r}_m^T \end{pmatrix}$$

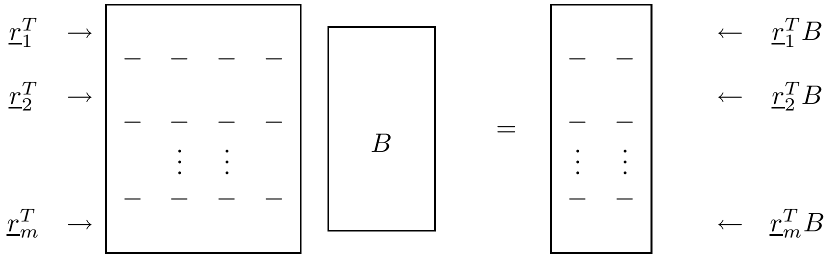
dove $A_{1i} = \underline{r}_i^T$ è la i-esima riga di A per ogni $1 \leq i \leq m$.

Si noti che indicando con $\underline{r}_i^T$ un vettore riga con n componenti, ossia una matrice $1 \times n$, stiamo indicando con $\underline{r}_i$ un vettore colonna con n componenti, ossia una matrice $n \times 1$.

Si puó allora calcolare il prodotto AB pensando B come ad un unico blocco, e si ottiene

$$AB = \begin{pmatrix} A_{11} \\ A_{21} \\ \vdots \\ A_{m1} \end{pmatrix} B = \begin{pmatrix} \underline{r}_1^T \\ \underline{r}_2^T \\ \vdots \\ \underline{r}_m^T \end{pmatrix} B = \begin{pmatrix} \underline{r}_1^T B \\ \underline{r}_2^T B \\ \vdots \\ \underline{r}_m^T B \end{pmatrix}.$$

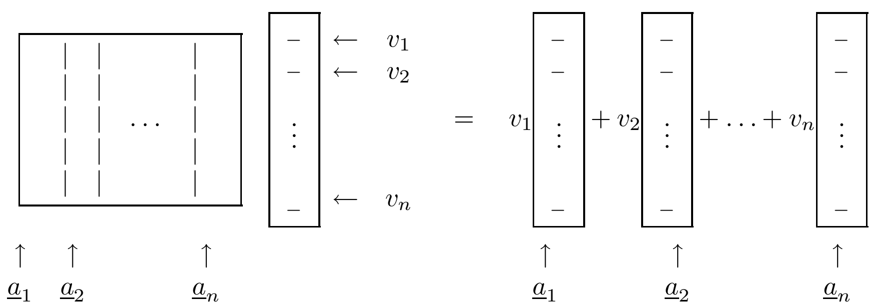
Per ogni $1 \leq i \leq m$, $\underline{r}_i^T B$ è un vettore riga con r componenti, ed è la i-esima riga di AB.



(3) Il prodotto di una matrice per un vettore colonna.

Siano A una matrice $m \times n$ e $\underline{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$ un vettore colonna con n componenti. Allora esiste $A\underline{v}$ e puó essere calcolato come prodotto a blocchi, pensando A ripartita nei suoi blocchi colonna $A = (\, \underline{a}_1 \quad \underline{a}_2 \quad \dots \quad \underline{a}_n \,)$ e $\underline{v}$ ripartito nei suoi blocchi riga (quindi $\underline{v}$ ha n blocchi riga, ciascuno dei quali è una matrice 1×1, ossia un numero v_j):

$$A\underline{b} = (\, \underline{a}_1 \quad \underline{a}_2 \quad \dots \quad \underline{a}_n \,) \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = v_1\underline{a}_1 + v_2\underline{a}_2 + \ldots + v_n\underline{a}_n.$$



N.B. In particolare $A\underline{e}_i =$ **i-esima colonna di A ($\underline{e}_i$ è la i-esima colonna di I_n).**

(4) Il prodotto di vettore riga per una matrice.

Siano B una matrice $n \times r$ e $\underline{w}^T = (\, w_1 \quad w_2 \quad \dots \quad w_n \,)$ un vettore riga con n componenti. Allora esiste $\underline{w}^T B$ e puó essere calcolato come prodotto a blocchi, pensando B ripartita nei suoi blocchi riga $B = \begin{pmatrix} \underline{s}_1^T \\ \underline{s}_2^T \\ \vdots \\ \underline{s}_n^T \end{pmatrix}$ e $\underline{w}^T$ ripartito nei suoi blocchi colonna (quindi $\underline{w}^T$ ha n blocchi colonna, ciascuno dei quali è una matrice 1×1, ossia un numero w_j):

$$\underline{w}^T B = \begin{pmatrix} w_1 & w_2 & \dots & w_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{s}_1^T \\ \underline{s}_2^T \\ \vdots \\ \underline{s}_n^T \end{pmatrix} = w_1 \underline{s}_1^T + w_2 \underline{s}_2^T + \ldots + w_n \underline{s}_n^T .$$

$$[\, w_1 | \quad w_2 | \qquad \dots \qquad | w_n \,] \boxed{\begin{matrix} - & - & - \\ - & - & - \\ & \vdots & \\ - & - & - \end{matrix}} \begin{matrix} \leftarrow \ \underline{s}_1^T \\ \leftarrow \ \underline{s}_2^T \\ \\ \leftarrow \ \underline{s}_n^T \end{matrix} \quad = \quad w_1 \boxed{\quad \underline{s}_1^T \quad} + w_2 \boxed{\quad \underline{s}_2^T \quad} + \ldots + w_n \boxed{\quad \underline{s}_n^T \quad}$$

N.B. In particolare $\underline{e}_i^T B = i$ **-esima riga di** B ($\underline{e}_i$ **è la** i**-esima colonna di** I_n).

Siano A una matrice $m \times n$ e B una matrice $n \times r$.

Da (3) si ricava che la j-esima colonna di AB è

$$(AB)\underline{e}_j \underset{\substack{\uparrow \\ \text{propr. assoc.}}}{=} A(B\underline{e}_j) \underset{\substack{\uparrow \\ 3}}{=} A\underline{b}_j \underset{\substack{\uparrow \\ 3}}{=} b_{1j}\underline{a}_1 + b_{2j}\underline{a}_2 + \ldots + b_{nj}\underline{a}_n$$

dove $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \ldots \underline{a}_n$ sono le colonne di A e $\underline{b}_j = \begin{pmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{nj} \end{pmatrix}$ è la j-esima colonna di B.

Da (4) si ricava che la i-esima riga di AB è

$$\underline{e}_i^T (AB) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{propr. assoc.}}}{=} (e_i^T A)B \underset{\substack{\uparrow \\ 4}}{=} \underline{r}_i^T B \underset{\substack{\uparrow \\ 4}}{=} a_{i1}\underline{s}_1^T + a_{i2}\underline{s}_2^T + \ldots + a_{in}\underline{s}_n^T$$

dove $\underline{s}_1^T, \underline{s}_2^T, \ldots \underline{s}_n^T$ sono le righe di B e $\underline{r}_i^T = \begin{pmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \end{pmatrix}$ è la i-esima riga di A.

(5) Ripartizione della prima matrice in colonne e della seconda in righe.

Siano A e B due matrici tali che esista il loro prodotto AB (quindi se A è una matrice $m \times n$ allora B è una matrice $n \times r$).

Ripartiamo A in blocchi prendendo come blocchi le sue colonne:

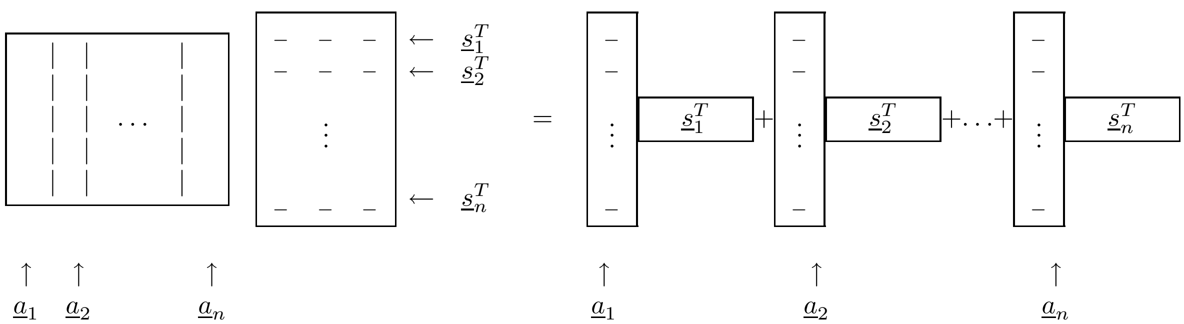
$$A = \begin{pmatrix} \underline{a}_1 & \underline{a}_2 & \dots & \underline{a}_n \end{pmatrix},$$

e B prendendo come blocchi le sue righe:

$$B = \begin{pmatrix} \underline{s}_1^T \\ \underline{s}_2^T \\ \vdots \\ \underline{s}_n^T \end{pmatrix}.$$

Allora AB puó essere calcolato come prodotto a blocchi:

$$AB = \begin{pmatrix} \underline{a}_1 & \underline{a}_2 & \dots & \underline{a}_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{s}_1^T \\ \underline{s}_2^T \\ \vdots \\ \underline{s}_n^T \end{pmatrix} = \underline{a}_1\underline{s}_1^T + \underline{a}_2\underline{s}_2^T + \ldots + \underline{a}_n\underline{s}_n^T.$$



Si noti che ciascun addendo $\underline{a}_i\underline{s}_i^T$ è una matrice $m \times r$.

ESERCIZIO TIPO 1

Definizione Sia A una matrice quadrata. Un numero λ si dice un **autovalore** di A se esiste un vettore $\underline{v} \neq \underline{0}$ tale che $A\underline{v} = \lambda\underline{v}$ (**N.B.** $\underline{v} \neq \underline{0}$!). In tal caso $\underline{v}$ si dice un **autovettore** di A relativo all'autovalore λ.

ESERCIZIO Siano $A = \begin{pmatrix} a & | & \underline{b}^T \\ - & - & - \\ & | & \\ \underline{0} & | & D \\ & | & \end{pmatrix}$ una matrice complessa $n \times n$ ripartita in blocchi

$$a \in \mathbb{C}, \quad \underline{0}, \underline{b} \in \mathbb{C}^{n-1} \quad (\text{per cui } \underline{b}^T \in \mathbb{C}_{n-1}), \quad D \in M_{n-1}(\mathbb{C}).$$

Si provi:

1. a è un autovalore di A.
2. Se A possiede un autovalore $\lambda \neq a$ e

$$\underline{v} = \begin{pmatrix} x \\ -- \\ \\ \underline{w} \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^n, \quad \text{ove } x \in \mathbb{C} \quad \text{e } \underline{w} \in \mathbb{C}^{n-1},$$

è un autovettore di A relativo all'autovalore λ, allora λ è anche un autovalore di D e $\underline{w}$ è un autovettore di D relativo a λ (dunque $\underline{v}$ è un vettore colonna con n componenti, ripartito in due blocchi, dei quali quello superiore è un numero, e quello inferiore è $\underline{w}$).

1. Per provare che a è un autovalore di A dobbiamo trovare un vettore $\underline{z} \neq \underline{0}$ tale che $A\underline{z} = a\underline{z}$.

Osserviamo che la prima colonna di A è il vettore $\begin{pmatrix} a \\ -- \\ \\ \underline{0} \end{pmatrix}$, ossia, per definizione di prodotto per uno scalare, il vettore $a \begin{pmatrix} 1 \\ -- \\ \\ \underline{0} \end{pmatrix} = a\underline{e}_1$, ove $\underline{e}_1$ è la prima colonna della matrice identica I_n.

Ricordiamo (il N.B. del punto (3) nella Lezione 4) che la i-esima colonna di A è $A\underline{e}_i$, e quindi, in particolare, la prima colonna di A è $A\underline{e}_1$.

Dunque $A\underline{e}_1 = a\underline{e}_1$, e poichè $\underline{e}_1 \neq \underline{0}$, si puó prendere $\underline{z} = \underline{e}_1$.

2. Poichè $\underline{v}$ è un autovettore di A relativo a λ allora

$$\underline{v} \neq \underline{0} \quad \text{e} \quad A\underline{v} = \lambda\underline{v}.$$

Calcolando i prodotti $A\underline{v}$ e $\lambda\underline{v}$ a blocchi si ottiene:

$$A\underline{v} = \left(\begin{array}{c|c} a & \underline{b}^T \\ \hline \underline{0} & D \end{array}\right)\begin{pmatrix} x \\ \hline \underline{w} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + \underline{b}^T\underline{w} \\ \hline \underline{0}x + D\underline{w} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + \underline{b}^T\underline{w} \\ \hline D\underline{w} \end{pmatrix},$$

$$\lambda\underline{v} = \lambda\begin{pmatrix} x \\ \hline \underline{w} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x \\ \hline \lambda\underline{w} \end{pmatrix};$$

per cui dall'uguaglianza $A\underline{v} = \lambda\underline{v}$ ricaviamo

$$\begin{array}{ll} (I) & ax + \underline{b}^T\underline{w} = \lambda x \\ (II) & D\underline{w} = \lambda\underline{w}. \end{array}$$

(II) comporta: $\left[\begin{array}{c} \lambda \quad \text{è un autovalore di } D \quad \text{e} \\ \underline{w} \quad \text{è un autovettore di} \quad D \quad \text{relativo a} \quad \lambda \end{array}\right] \iff \underline{w} \neq \underline{0}.$

Supponiamo per assurdo $\underline{w} = \underline{0}$.

Allora $\underline{b}^T\underline{w} = \underline{b}^T\underline{0} = 0$ e da (I) ricaviamo $ax = \lambda x - 0 = \lambda x$.

Inoltre $\underline{w} = \underline{0}$ implica $\underline{v} = \begin{pmatrix} x \\ \hline \underline{w} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ \hline \underline{0} \end{pmatrix}$.

Poichè $\underline{v} \neq \underline{0}$, allora $x \neq 0$, per cui esiste x^{-1}. Moltiplicando ambo i membri dell'uguaglianza $ax = \lambda x$ per x^{-1} otteniamo $a = \lambda$, mentre per ipotesi $\lambda \neq a$.

La contraddizione deriva dall'aver supposto $\underline{w} = \underline{0}$. Dunque $\underline{w} \neq \underline{0}$, ossia λ è un autovalore di D e $\underline{w}$ è un autovettore di D relativo a λ.

LEZIONE 5

Operazioni elementari sulle righe di una matrice

Sia A una matrice $m \times n$.

Def. 1. Si chiamano **operazioni elementari sulle righe di** A le tre seguenti operazioni:

- sommare ad una riga un'altra riga di A moltiplicata per uno scalare,
- moltiplicare una riga di A per uno scalare non nullo,
- scambiare due righe di A.

Notazioni

- Sia B la matrice che si ottiene da A sommando alla i-esima riga di A la j-esima riga di A moltiplicata per lo scalare c, ossia sia $B = [b_{kr}]$ la matrice con tutte le righe diverse dalla i-esima uguali alle corrispondenti righe di $A = [a_{kr}]$, e con i-esima riga il vettore riga

$$\begin{pmatrix} b_{i1} & b_{i2} & \dots & b_{in} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{i1} + ca_{j1} & a_{i2} + ca_{j2} & \dots & a_{in} + ca_{jn} \end{pmatrix}.$$

Per indicare che B è la matrice ottenuta dalla matrice A eseguendo l'operazione elementare "sommare alla i-esima riga la j-esima riga moltiplicata per lo scalare c", scriviamo:

$$A \xrightarrow{E_{ij}(c)} B.$$

- Sia B la matrice che si ottiene da A moltiplicando la i-esima riga di A per lo scalare c ($c \neq 0$), ossia sia $B = [b_{kr}]$ la matrice con tutte le righe diverse dalla i-esima uguali alle corrispondenti righe di $A = [a_{kr}]$, ed con i-esima riga il vettore riga

$$\begin{pmatrix} b_{i1} & b_{i2} & \dots & b_{in} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ca_{i1} & ca_{i2} & \dots & ca_{in} \end{pmatrix}.$$

Per indicare che B è la matrice ottenuta dalla matrice A eseguendo l'operazione elementare "moltiplicare la i-esima riga per lo scalare (non nullo) c", scriviamo:

$$A \xrightarrow{E_{i}(c)} B.$$

- Sia B la matrice che si ottiene da A scambiando la i-esima riga di A con la j-esima, ossia sia $B = [b_{kr}]$ la matrice con tutte le righe diverse dalla i-esima e dalla j-esima uguali alle corrispondenti righe di A, e con i-esima e j-esima riga rispettivamente:

$$\begin{pmatrix} b_{i1} & b_{i2} & \dots & b_{in} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{j1} & a_{j2} & \dots & a_{jn} \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} b_{j1} & b_{j2} & \dots & b_{jn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \end{pmatrix}.$$

Per indicare che B è la matrice ottenuta dalla matrice A eseguendo l'operazione elementare "scambiare la i-esima riga con la j-esima riga", scriviamo:

$$A \xrightarrow{E_{ij}} B.$$

N.B. I simboli $E_{ij}(c), E_i(c)$ e E_{ij} rappresentano in realtà opportune matrici, dette matrici elementari. Abbiamo scelto, con abuso di notazione, di indicare le operazioni elementari sulle righe di una matrice con gli stessi simboli con cui vengono indicate le matrici elementari poichè, come si vedrà in un corso superiore, vi è tra esse una stretta connessione.

Eliminazione di Gauss senza scambi di righe

Sia A una matrice $m \times n$, con $A \neq \mathbb{O}_{m\times n}$.

Illustriamo ora un algoritmo che consiste in un insieme di operazioni sulle righe di A e che viene chiamato **un'eliminazione di Gauss senza scambi di righe su** A.

L'obiettivo di tale algoritmo è costruire a partire da A una matrice $m \times n$ U con

– le prime k-righe non nulle e le rimanenti $m - k$ righe nulle (dove k è un opportuno numero compreso tra 1 ed m che dipende da A),

– gli elementi non nulli disposti come sopra ad una scala che scende da sinistra a destra, a partire dalla prima riga fino alla k-esima riga, ogni cui gradino è "alto" una riga ed è "lungo" una o piú colonne (la scala ha quindi k gradini),

– gli elementi alla base di ciascun gradino di questa scala uguali ad 1,

ossia una matrice del tipo:

$$\begin{pmatrix} & |\underline{1} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & & & & & & & \\ & & & & & & |\underline{1} & \cdot & \cdot & & & & & \\ & & & & & & & & & |\underline{1} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & & & & & & & & & & & & \end{pmatrix}$$

dove gli elementi al di sotto della scalinata sono tutti nulli, e gli eventuali elementi non nulli si trovano al di sopra della scalinata (in questo disegno la scala ha 3 gradini).

Le operazioni lecite in questo algoritmo sono solo di due tipi:

– sommare ad una riga di A una riga di A **che la precede** moltiplicata per un scalare,

– moltiplicare una riga di A per uno scalare non nullo.

Esistono matrici per cui questo algoritmo fallisce, ossia per le quali questo algoritmo non porta alla costruzione di U**.**

Esempio 1. Per $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ l'eliminazione di Gauss senza scambi di righe fallisce: non è possibile, utilizzando le due operazioni lecite, arrivare ad una matrice del tipo $U = \begin{pmatrix} 1 & * \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, oppure $U = \begin{pmatrix} 1 & * \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, oppure $U = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Per tali matrici introdurremo nella prossima lezione un algoritmo piú ricco (in cui è lecita anche la terza operazione elementare sulle righe di A).

Applicazioni. L'algoritmo descritto in questa lezione e la sua generalizzazione esposta nella successiva, hanno diverse applicazioni.

In questo corso verranno utilizzati per la risoluzione di sistemi lineari, per il calcolo del rango di una matrice e di basi di spazi delle righe e delle colonne.

In un corso successivo, verranno utilizzati per il calcolo di decomposizioni $A = P^T LU$, e per quello di "decomposizioni a rango pieno".

Supponiamo che la prima riga di A non sia nulla

(per le matrici non nulle con la prima riga nulla l'eliminazione di Gauss senza scambi di righe fallisce).

1^o **Passaggio.** L'obiettivo del 1^o passaggio è trasformare la j_1-esima colonna nella prima colonna di I_m (il numero j_1 è definito nel seguente punto (1)).

(1) Percorrendo la prima riga di A da sinistra a destra, sia a_{1j_1} il primo elemento non nullo (quindi se $j_1 > 1$ allora $a_{11} = a_{12} = \ldots = a_{1,j_1-1} = 0$ e $a_{1j_1} \neq 0$; il piú delle volte, peró, $j_1 = 1$, ossia $a_{11} \neq 0$).

a_{1j_1} è detto **il pivot della 1^a riga**.

Se $a_{1j_1} \neq 1$,

moltiplichiamo la prima riga di A per $a_{1j_1}^{-1}$,

ottenendo cosí una matrice $m \times n$ $A_1 = [a^*_{ij}]$ che ha tutte le righe uguali a quelle di A, tranne la prima, i cui elementi sono gli elementi della prima riga di A moltiplicati per $a_{1j_1}^{-1}$, ossia divisi per a_{1j_1}. In particolare $a^*_{11} = a^*_{12} = \ldots = a^*_{1,j_1-1} = 0$ e $a^*_{1j_1} = 1$.

Scriviamo:

$$A \xrightarrow{E_1(a_{1j_1}^{-1})} A_1.$$

(2) Percorriamo la colonna j_1-esima dall'alto in basso, e tenendo in considerazione solo gli elementi a_{ij_1} che siano diversi da 0, per ciascun $a_{ij_1} \neq 0$ che troviamo, partendo da $i = 2$ e arrivando fino a $i = m$,

sommiamo alla riga i-esima di A_1 la prima riga di A_1 moltiplicata per $-a_{ij_1}$, (per ogni $i = 2, \ldots, m$ tale che $a_{ij_1} \neq 0$).

Otteniamo cosí una matrice $B = [b_{ij}]$ in cui la j_1-esima colonna è la prima colonna di I_m. Scriviamo:

$$A_1 \xrightarrow{E_{m1}(-a_{mj_1})E_{m-1,1}(-a_{m-1,j_1})\ldots E_{31}(-a_{3j_1})E_{21}(-a_{2j_1})} B.$$

Esempio 2. Sia $A = \begin{pmatrix} 3 & 6 & -6 & -3 & 15 \\ 2 & 5 & -5 & -1 & 10 \\ 1 & 3 & -3 & 2 & 11 \\ 0 & 5 & -5 & 7 & 6 \end{pmatrix}$.

Poichè $a_{11} \neq 0$, allora $j_1 = 1$. L'operazione richiesta al punto (1) è moltiplicare la prima riga di A per $a_{11}^{-1} = \frac{1}{3}$. La matrice A_1 che si ottiene ha come prima riga

$$\begin{pmatrix} \frac{3}{3} & \frac{6}{3} & \frac{-6}{3} & \frac{-3}{3} & \frac{15}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 1 & 5 \end{pmatrix},$$

e le altre righe uguali alle righe di B, quindi

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & -1 & 5 \\ 2 & 5 & -5 & -1 & 10 \\ 1 & 3 & -3 & 2 & 11 \\ 0 & 5 & -5 & 7 & 6 \end{pmatrix}.$$

Consideriamo la prima (qui $j_1 = 1$) colonna di A_1, $\begin{pmatrix} a_{11}^* \\ a_{21}^* \\ a_{31}^* \\ a_{41}^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Le operazioni richieste al punto (2) sono:

– poiché $a_{21}^* = 2 \neq 0$, sommare alla seconda riga di A_1 la prima riga di A_1 moltiplicata per $-a_{21}^* = -2$,

– poiché $a_{31}^* = 1 \neq 0$, sommare alla terza riga di A_1 la prima riga di A_1 moltiplicata per $-a_{31}^* = -1$.

Non occorrono altre operazioni, poichè $a_{41}^* = 0$.

La matrice B che si ottiene ha come seconda riga

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 & -5 & -1 & 10 \end{pmatrix} + (-2)\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & -1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

ha come terza riga

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -3 & 2 & 11 \end{pmatrix} + (-1)\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & -1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 3 & 6 \end{pmatrix},$$

ed ha la prima e la quarta riga uguali rispettivamente alla prima e alla quarta riga di A_1.

Quindi

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 6 \\ 0 & 5 & -5 & 7 & 6 \end{pmatrix}.$$

Supponiamo che la matrice A da cui siamo partiti sia tale che, dopo aver effettuato sulle sue righe le operazioni descritte nel 1^o passaggio, si ottenga una matrice B in cui se $j_1 > 1$ allora le prime $j_1 - 1$ colonne sono nulle, ed inoltre o tutte le righe diverse dalla prima sono nulle, oppure la seconda riga è non nulla

(per le matrici in cui questa situazione non si presenta, l'eliminazione di Gauss senza scambi di righe fallisce).

Se tutte le righe di B diverse dalla prima sono nulle, l'algoritmo si ferma a B (ossia B è la U cercata).

Altrimenti la seconda riga di B è non nulla e si procede.

2^o **Passaggio.** L'obiettivo del 2^o passaggio è trasformare la j_2-esima colonna in una colonna del tipo $\begin{pmatrix} * \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ (il numero j_2 è definito nel seguente punto (1)).

(1) Percorrendo la seconda riga di B da sinistra a destra, sia b_{2j_2} il primo elemento non nullo (quindi $b_{21} = b_{22} = \ldots = b_{2,j_2-1} = 0$ e $b_{2j_2} \neq 0$).

b_{2j_2} è detto **il pivot della 2^a riga**.

Se $b_{2j_2} \neq 1$,

moltiplichiamo la seconda riga di B per $b_{2j_2}^{-1}$,

ottenendo cosí una matrice $m \times n$ $B_1 = [b_{ij}^*]$ che ha tutte le righe uguali a quelle di B, tranne la seconda, i cui elementi sono gli elementi della seconda riga di B moltiplicati per $b_{2j_2}^{-1}$, ossia divisi per b_{2j_2}. In particolare $b_{21}^* = b_{22}^* = \ldots = b_{2,j_2-1}^* = 0$ e $b_{2j_2}^* = 1$.

Scriviamo:

$$B \xrightarrow{E_2(b_{2j_2}^{-1})} B_1.$$

(2) Percorriamo la colonna j_2-esima dall'alto in basso, e tenendo in considerazione solo gli elementi b_{ij_2} che siano diversi da 0, per ciascun $b_{ij_2} \neq 0$ che troviamo, partendo da $i = 3$ e arrivando fino a $i = m$,

sommiamo alla riga i-esima di B_1 la seconda riga di B_1 moltiplicata per $-b_{ij_2}$, (per ogni $i = 3, \ldots, m$ tale che $b_{ij_2} \neq 0$).

Otteniamo cosí una matrice $C = [c_{ij}]$ in cui la j_2-esima colonna è del tipo: $\begin{pmatrix} * \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, come ci eravamo prefissati. Scriviamo:

$$B_1 \xrightarrow{E_{m2}(-b_{mj_2})E_{m-1,2}(-b_{m-1,j_2})\ldots E_{32}(-b_{3j_2})} C.$$

Esempio 3. Riprendiamo la matrice B ottenuta alla fine dell'Esempio 2:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 6 \\ 0 & 5 & -5 & 7 & 6 \end{pmatrix}.$$

Poichè $b_{22} \neq 0$, allora $j_2 = 2$, ma poichè $b_{22} = 1$ non è richiesta alcuna operazione al punto (1), per cui $B_1 = B$.

Consideriamo la seconda (qui $j_2 = 2$) colonna di B_1, $\begin{pmatrix} b^*_{12} \\ b^*_{22} \\ b^*_{32} \\ b^*_{42} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$.

Le operazioni richieste al punto (2) sono:

– poiché $b^*_{31} = 1 \neq 0$, sommare alla terza riga di B_1 la seconda riga di B_1 moltiplicata per $-b^*_{31} = -1$,

– poiché $b^*_{41} = 5 \neq 0$, sommare alla quarta riga di B_1 la seconda riga di B_1 moltiplicata per $-b^*_{41} = -5$.

La matrice C che si ottiene ha come terza riga

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 3 & 6 \end{pmatrix} + (-1) \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 & 6 \end{pmatrix},$$

ha come quarta riga

$$\begin{pmatrix} 0 & 5 & -5 & 7 & 6 \end{pmatrix} + (-5) \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 & 6 \end{pmatrix},$$

ed ha la prima e la seconda riga uguali rispettivamente alla prima e alla srconda riga di B_1.

Quindi

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 6 \end{pmatrix}.$$

Supponiamo che la matrice A da cui siamo partiti sia tale che, dopo aver effettuato sulle sue righe le operazioni descritte nel 2^o passaggio, si ottenga una matrice C in cui se $j_2 > j_1 + 1$ allora TUTTE le colonne comprese tra la $j_1 + 1$-esima e la $j_2 - 1$-esima sono del tipo $\begin{pmatrix} * \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, ed inoltre o tutte le righe diverse dalle prime due sono nulle, oppure la terza riga è non nulla

(per le matrici in cui questa situazione non si presenta, l'eliminazione di Gauss senza scambi di righe fallisce)

Se tutte le righe di C diverse dalle prime due sono nulle, l'algoritmo si ferma a C (ossia C è la U cercata).

Altrimenti la terza riga di C è non nulla e si procede.

3^0, 4^0, . . ., **k-esimo Passaggio.**

Si itera il procedimento illustrato nei primi due passaggi. L'obiettivo del passaggio i-esimo, se $1 \leq i \leq k$, è di trasformare la colonna j_i-esima in una colonna del tipo $\begin{pmatrix} * \\ \vdots \\ * \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, dove il numero

1 sta nella riga i-esima.

Se la matrice A da cui parte è tale che

– dopo aver effettuato il passaggio i-esimo si ottiene che TUTTE le colonne comprese tra la $j_{i-1}+1$-esima e la j_i-1-esima (se ce ne sono) sono del tipo $\begin{pmatrix} * \\ \vdots \\ * \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, (dove il $*$ piú basso sta nella riga $i-1$-esima) ed inoltre o tutte le righe diverse dalle prime i sono nulle, oppure la $i+1$-esima riga è non nulla

(per le matrici in cui questa situazione non si presenta, l'algoritmo di Gauss senza scambi di righe fallisce),

allora l'algoritmo si ferma (ottenendo U) quando si raggiunge una riga nulla, oppure, se non si raggiunge mai una riga nulla, quando si raggiunge l'ultima riga.

Esempio 4. Riprendiamo la matrice C ottenuta alla fine dell'Esempio 3, e mostriamo il procedimento per C.

Poichè la terza riga di C è non nulla, l'algoritmo non si ferma a C.

Il primo elemento non nullo della terza riga di C è d_{34}, quindi $j_3 = 4$.

Si chiama C_1 la matrice che si ottiene da C moltiplicando la terza riga di C per $c_{34}^{-1} = \frac{1}{2}$. Dunque

$$C_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 6 \end{pmatrix}.$$

Per "sistemare"la j_3-esima colonna di C_1, ossia per ottenere a partire da C_1 una matrice con la terza colonna del tipo $\begin{pmatrix} * \\ * \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, basta sommare alla quarta riga di C_1 la terza riga di C_1 moltiplicata per -2. Si ottiene

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Poichè la quarta riga di D è nulla, l'algoritmo si ferma a D, ossia $U = D$.

Per riassumere il procedimento si scrive:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 6 & -6 & -3 & 15 \\ 2 & 5 & -5 & -1 & 10 \\ 1 & 3 & -3 & 2 & 11 \\ 0 & 5 & -5 & 7 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{31}(-1)E_{21}(-2)E_1(\frac{1}{3})} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 6 \\ 0 & 5 & -5 & 7 & 6 \end{pmatrix} \to$$

$$\xrightarrow{E_{42}(-5)E_{32}(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{43}(-2)E_{3}(\frac{1}{2})} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = U.$$

LEZIONE 6

Eliminazione di Gauss con scambi di righe

Sia $A \neq \mathbb{O}$ una matrice $m \times n$. Abbiamo illustrato nella Lezione 5 un algoritmo che ha come obiettivo quello di costruire a partire da A una matrice U, $m \times n$, che abbia il seguente aspetto

$$U = \begin{pmatrix} & |\underline{1} & \underline{.} & \underline{.} & \underline{.} & \underline{.} & & & & & & & & & \\ & & & & & & |\underline{1} & \underline{.} & \underline{.} & & & & & & \\ & & & & & & & & & |\underline{1} & \underline{.} & \underline{.} & \underline{.} & \underline{.} \\ & & & & & & & & & & & & & \end{pmatrix},$$

eseguendo sulle righe di A un insieme di operazioni del tipo:

– sommare ad una riga di A una riga **che la precede** moltiplicata per uno scalare,

– moltiplicare una riga di A per uno scalare non nullo.

Def. 1. Una matrice che sia

– o nulla, oppure

– abbia l'aspetto di U,

si dice **una matrice in forma ridotta di Gauss**.

Abbiamo anche visto nell'Esempio 1 della lezione precedente che l' eliminazione di Gauss senza scambi di righe fallisce per certe matrici. Vediamolo con un altro esempio.

Esempio 1. Sia $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Volendo applicare l'eliminazione di Gauss senza scambi di righe ad A, si ottiene che poichè il primo elemento non nullo nella prima riga di A è a_{13}, allora $j_1 = 3$. Ma poichè non è vero che tutte le colonne prima della j_1-esima, ossia prima della terza, sono nulle (la seconda non lo è), allora l'eliminazione di Gauss senza scambi di righe applicata ad A non porta ad una matrice in forma ridotta di Gauss.

Analogamente applicando l'eliminazione di Gauss senza scambi di righe a

$B = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 & 6 \\ 1 & 2 & 1 & 8 \\ 1 & 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$, otteniamo

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 & 6 \\ 1 & 2 & 1 & 8 \\ 1 & 2 & 2 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{31}(-1)E_{21}(-1)E_1(\frac{1}{2})} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

In questo caso $j_2 = 4$. Poichè nelle righe seguenti alla seconda ci sono elementi non nulli che stanno in colonne precedenti alla j_2-esima, allora anche in questo caso l'eliminazione di Gauss senza scambi di righe applicata ad B non porta ad una matrice in forma ridotta di Gauss.

Introduciamo allora un altro algoritmo, che chiamiamo **eliminazione di Gauss con scambi**

di righe (o piú semplicemente **eliminazione di Gauss**), che differisce da quello descritto nella Lezione 5 soltanto nel fatto che tutte le volte che è necessario si possa fare anche uno scambio di righe, ossia un algoritmo in cui è lecita anche la terza operazione elementare sulle righe della matrice.

In questo modo si puó arrivare ad una matrice in forma ridotta di Gauss a partire da qualunque matrice $A \neq \mathbb{O}$.

Def. 2. Una matrice in forma ridotta di Gauss che si ottenga a partire da una matrice A applicandovi l'eliminazione di Gauss con o senza scambi di righe si dice **una forma ridotta di Gauss per la matrice** A.

Si dice poi che **la matrice nulla** $m \times n$ **è una forma ridotta di Gauss di sè stessa**.

Esempio 2. Sia $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ la prima matrice considerata nell'Esempio 1.

L'operazione da fare è scambiare la 1^a con la 2^a riga:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{12}} A^* = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 3 \end{pmatrix},$$

quindi si procede con l'algoritmo su A^*. Quello che si ottiene è:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{12}} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_1(\frac{1}{2})}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 4 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_2(\frac{1}{4})} \begin{pmatrix} 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{4} \end{pmatrix} = U$$

ed U è una forma ridotta di Gauss per A.

Sia $B = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 & 6 \\ 1 & 2 & 1 & 8 \\ 1 & 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ la seconda matrice considerata nell'Esempio 1. Un'eliminazione di Gauss su B è:

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 & 6 \\ 1 & 2 & 1 & 8 \\ 1 & 2 & 2 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{31}(-1)E_{21}(-1)E_1(\frac{1}{2})} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\xrightarrow{E_{23}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_3(\frac{1}{5})} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \tilde{U}.$$

Sia $C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix}$. In questo caso si puó scegliere:

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{12}} \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{31}(-2)E_1(\frac{1}{3})} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{23}}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_2(\frac{1}{2})} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_3(\frac{1}{2})} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = U_1;$$

oppure

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{13}} \begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{21}(-3)E_1(\frac{1}{2})} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\xrightarrow{E_2(-\frac{1}{3})} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_3(\frac{1}{2})} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = U_2.$$

Entrambe U_1 ed U_2 sono forme ridotte di Gauss per C.

N.B. U_1 ed U_2 sono due matrici diverse, ma entrambe sono forme ridotte di Gauss per la stessa matrice C. Quindi non c'e' in generale un'unica forma ridotta di Gauss per una matrice.

Def. 3. Sia U una matrice $m \times n$ in forma ridotta di Gauss, e siano k le sue righe non nulle (quindi le prime k righe di U sono non nulle e le ultime $m-k$ righe di U sono nulle). Allora U ha esattamente k colonne che corrispondono all'inizio di ogni gradino:

– la j_1-esima, che è la prima colonna di I_m,

– la j_2-esima, che è del tipo $(* \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad \dots \quad 0)^T$,

– la j_3-esima, che è del tipo $(* \quad * \quad 1 \quad 0 \quad \dots \quad 0)^T$,

– la j_4-esima, che è del tipo $(* \quad * \quad * \quad 1 \quad \dots \quad 0)^T$,

...

– la j_k-esima, che è un vettore riga con m componenti del tipo

$$(* \quad \dots \quad * \quad \underset{\substack{\uparrow \\ k}}{1} \quad 0 \quad \dots \quad 0)^T$$

inoltre

– tutte le eventuali colonne comprese tra la j_1+1-esima e la j_2-1-esima sono del tipo $(* \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad \dots \quad 0)^T$,

– tutte le eventuali colonne comprese tra la j_2+1-esima e la j_3-1-esima sono del tipo $(* \quad * \quad 0 \quad 0 \quad \dots \quad 0)^T$,

– tutte le eventuali colonne comprese tra la j_3+1-esima e la j_4-1-esima sono del tipo $(* \quad * \quad * \quad 0 \quad \dots \quad 0)^T$,

...

– tutte le eventuali colonne comprese tra la $j_{k-1}+1$-esima e la $j_k - 1$-esima sono del tipo $(* \quad \dots \quad * \quad 0 \quad \dots \quad 0)^T$ (il numero di $*$ è $k-1$).

Le colonne j_1-esima, j_2-esima, j_3-esima, ..., j_k-esima si chiamano **le colonne dominanti della matrice in forma ridotta di Gauss** U. Le altre colonne di U si chiamano **le colonne libere della matrice in forma ridotta di Gauss** U.

Esempio 3. Siano A, B e C le matrici considerate nell'Esempio 2 e siano U ed $\tilde{U}$ le forme ridotte di Gauss trovate per A e B rispettivamente, ed inoltre U_1 ed U_2 le due forme ridotte di Gauss trovate per C.

– colonne dominanti di U: la 2^a e la 3^a; colonne libere di U: la 1^a e la 4^a;

– colonne dominanti di $\tilde{U}$: la 1^a, la 3^a e la 4^a; unica colonna libera di $\tilde{U}$: la 2^a;

– U_1 ed U_2 hanno tutte le colonne dominanti e nessuna colonna libera.

N.B.

E' possibile provare che se U è una forma ridotta di Gauss per A allora esiste una matrice **non singolare** F tale che $U = FA$.

Osservazione. Il numero delle colonne dominanti di una matrice in forma ridotta di Gauss U è uguale al numero delle sue righe non nulle.

Def. 4. Una **matrice** U, $m \times n$ si dice **in forma ridotta di Gauss-Jordan** se U è in forma ridotta di Gauss e, se $\underline{u}_1$, $\underline{u}_2$, ... $\underline{u}_k$ sono le colonne dominanti di U allora

$$\underline{u}_1 = \underline{e}_1, \quad \underline{u}_2 = \underline{e}_2, \quad \dots \quad \underline{u}_k = \underline{e}_k,$$

dove $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \dots, \underline{e}_k$ sono le prime k colonne di I_m.

Come ottenere una forma ridotta di Gauss-Jordan di una matrice

Esempio 4. Si trovi una forma ridotta di Gauss-Jordan per $B = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 & 6 \\ 1 & 2 & 1 & 8 \\ 1 & 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$.

1. Troviamo una forma ridotta di Gauss per B, ad esempio, come abbiamo già calcolato nell'Esempio 2, $\tilde{U} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

In questa prima parte del procedimento, come sappiamo, è lecita l'operazione elementare $E_{ij}(c)$ solo quando $i > j$.

2. Partendo da $\tilde{U}$ procediamo "a ritroso "nel seguente modo:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{13}(-3)E_{23}(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{12}(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = V.$$

V è una forma ridotta di Gauss-Jordan per B.

Dunque in questa seconda parte del procedimento stiamo permettendo anche l'operazione elementare $E_{ij}(c)$ quando $i < j$.

ESERCIZIO TIPO 2

Sia $\quad A_\alpha = \begin{pmatrix} -\alpha & -1 & 1 & 1 \\ -3\alpha & 2\alpha & -\alpha & 3 \\ 0 & \alpha & \alpha & 0 \end{pmatrix}, \quad$ dove $\alpha \in \mathbb{R}$.

Per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ si trovi una forma ridotta di Gauss U_α per A_α e si dica quali sono le colonne dominanti e quali sono le colonne libere di U_α.

$\boxed{1^o CASO}$ $\quad \alpha \neq 0$

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} -\alpha & -1 & 1 & 1 \\ -3\alpha & 2\alpha & -\alpha & 3 \\ 0 & \alpha & \alpha & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{21}(3\alpha)E_1(-1/\alpha)} \begin{pmatrix} 1 & 1/\alpha & -1/\alpha & -1/\alpha \\ 0 & 2\alpha+3 & -\alpha-3 & 0 \\ 0 & \alpha & \alpha & 0 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\xrightarrow{E_{23}} \begin{pmatrix} 1 & 1/\alpha & -1/\alpha & -1/\alpha \\ 0 & \alpha & \alpha & 0 \\ 0 & 2\alpha+3 & -\alpha-3 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{32}(-2\alpha-3)E_2(1/\alpha)} \begin{pmatrix} 1 & 1/\alpha & -1/\alpha & -1/\alpha \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3(\alpha+2) & 0 \end{pmatrix} = B_\alpha$$

$\boxed{1^o \quad \text{sottocaso del} \quad 1^0 \quad \text{caso}}$ $\quad \alpha = -2 \qquad B_{-2} = \begin{pmatrix} 1 & -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = U_{-2}$

Le colonne dominanti di U_{-2} sono la 1^a e la 2^a, quelle libere la 3^a e la 4^a.

$\boxed{2^o \quad \text{sottocaso del} \quad 1^0 \quad \text{caso}}$ $\quad \alpha \neq 0 \quad$ e $\quad \alpha \neq -2$

$$B_\alpha \xrightarrow{E_3(-\frac{1}{3(\alpha+2)})} \begin{pmatrix} 1 & 1/\alpha & -1/\alpha & -1/\alpha \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = U_\alpha$$

Le colonne dominanti di U_α (per $\alpha \neq 0, -2$) sono la 1^a, la 2^a e la 3^a; l'unica libera è la 4^a.

$\boxed{2^o CASO}$ $\quad \alpha = 0$

$$A_0 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_1(-1)} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_2(1/3)} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = U_0$$

Le colonne dominanti di U_0 sono la 2^a e la 4^a, quelle libere la 1^a e la 3^a.

ESERCITAZIONI* 1

$\boxed{1}$ Siano $A = \begin{pmatrix} 1+2i & 0 \\ 5 & -i \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 18i & 0 \\ -1-9i & -1 \\ i & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1-i & 3 \\ 0 & -2 \\ 2 & -i \end{pmatrix}$ e $D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -i & -1 & 0 \end{pmatrix}$.
Si calcoli $-2A + D(CA + iB)$.

$\boxed{2}$ Siano $A = \begin{pmatrix} 2-3i & 1+i \\ 0 & i \\ 1-i & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 1+i \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 3+5i \\ 6 \\ 2-2i \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 7+i & 2+3i \\ 3-2i & 0 \end{pmatrix}$.

(a) Di ciascuna delle precedenti matrici si calcolino la trasposta, la coniugata e la H-trasposta.

(b) Si calcoli $(A^H\overline{C} + iB^T)\overline{B} + (1+3i)D^H$.

$\boxed{3}$ Sia $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Si trovino tutte le matrici reali 2×2 $B = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ tali che $\begin{cases} AB = \mathbb{O} \\ BA = \mathbb{O} \end{cases}$.

$\boxed{4}$ Sia $A = \left(\begin{array}{c|c} \underline{0}^T & -1 \\ \hline I_{n-1} & \underline{v} \end{array}\right)$, dove $\underline{0}$ è il vettore colonna con $n-1$ componenti uguali a 0 e $\underline{v}$ è il vettore colonna con $n-1$ componenti uguali a -1 (quindi A ha tutte le componenti dell'ultima colonna uguali a -1). Sia B una matrice $n \times n$ in cui la prima colonna ha tutte le componenti uguali a -1. Si provi che la matrice AB ha 1 come autovalore, ed $\underline{e}_1$ come autovettore ad esso relativo. (Suggerimento: si suddivida B a blocchi mettendo in evidenza la sua ultima riga e la sua prima colonna e si calcoli il prodotto AB a blocchi).

$\boxed{5}$ Siano $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 4 & 0 \\ 3 & -3 & 10 & 8 \\ 2 & -2 & 2 & -4 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$. Si trovino forme ridotte di Gauss per A e B.

$\boxed{6}$ Sia $A_\alpha = \begin{pmatrix} i & 0 & -i & i\alpha \\ 1 & \alpha^2+4 & 0 & \alpha \\ 1 & \alpha^2+4 & 0 & 2\alpha \end{pmatrix}$, dove $\alpha \in \mathbb{C}$. Per ogni $\alpha \in \mathbb{C}$ si trovi una forma ridotta di Gauss U_α per A_α e si dica quali sono le colonne dominanti e quali sono le colonne libere di U_α.

Svolgimento ESERCITAZIONI* 1

$\boxed{1}$ Siano $A = \begin{pmatrix} 1+2i & 0 \\ 5 & -i \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 18i & 0 \\ -1-9i & -1 \\ i & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1-i & 3 \\ 0 & -2 \\ 2 & -i \end{pmatrix}$ e $D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -i & -1 & 0 \end{pmatrix}$.
Si calcoli $-2A + D(CA + iB)$.

$$-2A = -2\begin{pmatrix} 1+2i & 0 \\ 5 & -i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2-4i & 0 \\ -10 & 2i \end{pmatrix}$$

$$CA = \begin{pmatrix} 1-i & 3 \\ 0 & -2 \\ 2 & -i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1+2i & 0 \\ 5 & -i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1-i)(1+2i)+3\times 5 & (1-i)\times 0+3\times(-i) \\ 0\times(1+2i)-2\times 5 & 0\times 0-2\times(-i) \\ 2\times(1+2i)-i\times 5 & 2\times 0-i\times(-i) \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} 1-i+2i+2+15 & -3i \\ -10 & 2i \\ 2+4i-5i & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18+i & -3i \\ -10 & 2i \\ 2-i & -1 \end{pmatrix}$$

$$iB = i\begin{pmatrix} 18i & 0 \\ -1-9i & -1 \\ i & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -18 & 0 \\ 9-i & -i \\ -1 & i \end{pmatrix}$$

$$CA + iB = \begin{pmatrix} 18+i & -3i \\ -10 & 2i \\ 2-i & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -18 & 0 \\ 9-i & -i \\ -1 & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i & -3i \\ -1-i & i \\ 1-i & -1+i \end{pmatrix}$$

$$D(CA+iB) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -i & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} i & -3i \\ -1-i & i \\ 1-i & -1+i \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} 1\times i+1\times(-1-i)+2\times(1-i) & 1\times(-3i)+1\times i+2\times(-1+i) \\ -i\times i-1\times(-1-i)+0\times(1-i) & -i\times(-3i)-1\times i+0\times(-1+i) \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} i-1-i+2-2i & -3i+i-2+2i \\ 1+1+i & -3-i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-2i & -2 \\ 2+i & -3-i \end{pmatrix}$$

$$-2A + D(CA+iB) = \begin{pmatrix} -2-4i & 0 \\ -10 & 2i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1-2i & -2 \\ 2+i & -3-i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1-6i & -2 \\ -8+i & -3+i \end{pmatrix}$$

$\boxed{2}$ Siano $\quad A = \begin{pmatrix} 2-3i & 1+i \\ 0 & i \\ 1-i & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1+i \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 3+5i \\ 6 \\ 2-2i \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 7+i & 2+3i \\ 3-2i & 0 \end{pmatrix}.$

(a) Di ciascuna delle precedenti matrici si calcolino la trasposta, la coniugata e la H-trasposta.

(b) Si calcoli $(A^H\overline{C} + iB^T)\overline{B} + (1+3i)D^H$.

$$A^T = \begin{pmatrix} 2-3i & 0 & 1-i \\ 1+i & i & 1 \end{pmatrix} \qquad \overline{A} = \begin{pmatrix} 2+3i & 1-i \\ 0 & -i \\ 1+i & 1 \end{pmatrix} \qquad A^H = \begin{pmatrix} 2+3i & 0 & 1+i \\ 1-i & -i & 1 \end{pmatrix}$$

$$B^T = \begin{pmatrix} 2 \\ 1+i \end{pmatrix} \qquad \overline{B} = \begin{pmatrix} 2 & 1-i \end{pmatrix} \qquad B^H = \begin{pmatrix} 2 \\ 1-i \end{pmatrix}$$

$$C^T = \begin{pmatrix} 3+5i & 6 & 2-2i \end{pmatrix} \qquad \overline{C} = \begin{pmatrix} 3-5i \\ 6 \\ 2+2i \end{pmatrix} \qquad C^H = \begin{pmatrix} 3-5i & 6 & 2+2i \end{pmatrix}$$

$$D^T = \begin{pmatrix} 7+i & 3-2i \\ 2+3i & 0 \end{pmatrix} \qquad \overline{D} = \begin{pmatrix} 7-i & 2-3i \\ 3+2i & 0 \end{pmatrix} \qquad D^H = \begin{pmatrix} 7-i & 3+2i \\ 2-3i & 0 \end{pmatrix}$$

$$(A^H\overline{C} + iB^T)\overline{B} + (1+3i)D^H =$$

$$= (\begin{pmatrix} 2+3i & 0 & 1+i \\ 1-i & -i & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3-5i \\ 6 \\ 2+2i \end{pmatrix} + i\begin{pmatrix} 2 \\ 1+i \end{pmatrix})\begin{pmatrix} 2 & 1-i \end{pmatrix} + (1+3i)\begin{pmatrix} 7-i & 3+2i \\ 2-3i & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= (\begin{pmatrix} (2+3i)(3-5i)+(1+i)(2+2i) \\ (1-i)(3-5i)-6i+2+2i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2i \\ i(1+i) \end{pmatrix})\begin{pmatrix} 2 & 1-i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} (1+3i)(7-i) & (1+3i)(3+2i) \\ (1+3i)(2-3i) & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 6+9i-10i+15+2+2i+2i-2 \\ 3-3i-5i-5-6i+2+2i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ -1+i \end{pmatrix})\begin{pmatrix} 2 & 1-i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7+21i-i+3 & 3+9i+2i-6 \\ 2+6i-3i+9 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= (\begin{pmatrix} 21+3i \\ -12i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2i \\ -1+i \end{pmatrix})\begin{pmatrix} 2 & 1-i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 10+20i & -3+11i \\ 11+3i & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 21+5i \\ -1-11i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1-i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 10+20i & -3+11i \\ 11+3i & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2(21+5i) & (21+5i)(1-i) \\ 2(-1-11i) & (-1-11i)(1-i) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 10+20i & -3+11i \\ 11+3i & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 42+10i & 21+5i-21i+5 \\ -2-22i & -1-11i+i-11 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 10+20i & -3+11i \\ 11+3i & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 42+10i & 26-16i \\ -2-22i & -12-10i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 10+20i & -3+11i \\ 11+3i & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 52+30i & 23-5i \\ 9-19i & -12-10i \end{pmatrix}$$

$\boxed{3}$ Sia $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Si trovino tutte le matrici reali 2×2 $B = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ tali che $\begin{cases} AB = \mathbb{O} \\ BA = \mathbb{O} \end{cases}$.

Sia $B = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ una matrice reale 2×2. Poichè

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-z & y-t \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e}$$

$$BA = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & -x \\ z & -z \end{pmatrix},$$

la condizione $AB = \mathbb{O}$ equivale a $\begin{cases} x-z=0 \\ y-t=0 \end{cases}$, ossia a $\begin{cases} z=x \\ t=y \end{cases}$

e la condizione $BA = \mathbb{O}$ equivale a $\begin{cases} x=0 \\ z=0 \end{cases}$.

Dunque le matrici 2×2 reali B tali che $AB = \mathbb{O} = BA$ sono tutte e sole le matrici del tipo

$$B = \begin{pmatrix} 0 & y \\ 0 & y \end{pmatrix}, \qquad \text{dove} \qquad y \in \mathbb{R}.$$

$\boxed{4}$ Sia $A = \begin{pmatrix} \underline{0}^T & \vert & -1 \\ - & - & - \\ I_{n-1} & \vert & \underline{v} \end{pmatrix}$, dove $\underline{0}$ è il vettore colonna con $n-1$ componenti uguali a 0 e $\underline{v}$ è il vettore colonna con $n-1$ componenti uguali a -1 (quindi A ha tutte le componenti dell'ultima colonna uguali a -1). Sia B una matrice $n \times n$ in cui la prima colonna ha tutte le componenti uguali a -1. Si provi che la matrice AB ha 1 come autovalore, ed $\underline{e_1}$ come autovettore ad esso relativo. (Suggerimento: si suddivida B a blocchi mettendo in evidenza la sua ultima riga e la sua prima colonna e si calcoli il prodotto AB a blocchi).

Seguendo il suggerimento, suddividiamo la matrice B a blocchi mettendo in evidenza la sua ultima riga e la sua prima colonna:

$$B = \begin{pmatrix} \underline{v} & \vert & D \\ - & \vert & - \; - \; - \\ -1 & \vert & \underline{b}^T \end{pmatrix}.$$

Vogliamo innanzitutto vedere che con tale suddivisione **è possibile** calcolare il prodotto AB a blocchi. Poichè entrambe A e B sono matrici con 2 righe di blocchi e 2 colonne di blocchi, allora, se il prodotto a blocchi di A per B si puó fare, anche AB avrà 2 righe di blocchi e 2 colonne di blocchi:

$$AB = \begin{pmatrix} X & \vert & Y \\ - & - & - \\ Z & \vert & T \end{pmatrix}.$$

Il problema è dunque verificare:

1. se esiste $\underline{0}^T\underline{v} + (-1)(-1)$, e in tal caso porlo al posto di X;
2. se esiste $\underline{0}^T D + (-1)\underline{b}^T$, e in tal caso porlo al posto di Y;
3. se esiste $I_{n-1}\underline{v} + (-1)\underline{v}$, e in tal caso porlo al posto di Z;
4. se esiste $I_{n-1}D + \underline{v}\underline{b}^T$, e in tal caso porlo al posto di T;

inoltre, perchè X, Y, Z, T siano effettivamente blocchi di una ripartizione di AB, occorre verificare che:

5. il numero delle righe di $\underline{0}^T\underline{v}+(-1)(-1)$ sia uguale al numero delle righe di $\underline{0}^T D+(-1)\underline{b}^T$,
6. il numero delle righe di $I_{n-1}\underline{v} + (-1)\underline{v}$ sia uguale al numero delle righe di $I_{n-1}D + \underline{v}\underline{b}^T$,
7. il numero delle colonne di $\underline{0}^T\underline{v} + (-1)(-1)$ sia uguale al numero delle colonne di $I_{n-1}\underline{v} + (-1)\underline{v}$,
8. il numero delle colonne di $\underline{0}^T D+(-1)\underline{b}^T$ sia uguale al numero delle colonne di $I_{n-1}D+\underline{v}\underline{b}^T$.

Poichè $\underline{0}^T$ e $\underline{b}^T \in \mathbb{C}_{n-1}$, $\underline{v} \in \mathbb{C}^{n-1}$, D e $I_{n-1} \in M_{n-1}(\mathbb{C})$, -1 è un numero, allora si ha:

a) $\underline{0}^T \underline{v} + (-1)(-1)$ esiste ed è un numero (ossia 1×1),

b) $\underline{0}^T D + (-1)\underline{b}^T$ esiste ed è $1 \times (n-1)$,

c) $I_{n-1}\underline{v} + (-1)\underline{v}$ esiste ed è $(n-1) \times 1$,

d) $I_{n-1}D + \underline{v}\underline{b}^T$ esiste ed è $(n-1) \times (n-1)$.

Dunque il prodotto a blocchi si puó fare e si ottiene:

$$AB = \left(\begin{array}{c|c} \underline{0}^T & -1 \\ \hline I_{n-1} & \underline{v} \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c} \underline{v} & D \\ \hline -1 & \underline{b}^T \end{array}\right) =$$

$$= \left(\begin{array}{c|c} \underline{0}^T \underline{v} + (-1)(-1) & \underline{0}^T D + (-1)\underline{b}^T \\ \hline I_{n-1}\underline{v} + (-1)\underline{v} & I_{n-1}D + \underline{v}\underline{b}^T \end{array}\right) =$$

$$= \left(\begin{array}{c|c} 1 & -\underline{b}^T \\ \hline \underline{0} & D + \underline{v}\underline{b}^T \end{array}\right)$$

Come nell'ESERCIZIO TIPO 1, poichè $AB\underline{e}_1 = 1^a$ colonna di $AB = \underline{e}_1 = 1\underline{e}_1$, allora 1 è un autovalore di AB ed $\underline{e}_1$ è un autovettore di AB relativo all'autovalore 1.

$\boxed{5}$ Siano $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 4 & 0 \\ 3 & -3 & 10 & 8 \\ 2 & -2 & 2 & -4 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$. Si trovino forme ridotte di Gauss per A e B.

Facendo un'eliminazione di Gauss su A si ottiene:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 4 & 0 \\ 3 & -3 & 10 & 8 \\ 2 & -2 & 2 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{31}(-2)E_{21}(-3)E_1(1/2)} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 8 \\ 0 & 0 & -2 & -4 \end{pmatrix} \to$$

$$\xrightarrow{E_{32}(2)E_2(1/4)} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = U_1$$

ed U_1 è una forma ridotta di Gauss per A.

Le colonne dominanti di U_1 sono la 1^a e la 3^a, le colonne libere la 2^a e la 4^a.

Facendo un'eliminazione di Gauss su B si ottiene:

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{31}(-1)E_{21}(-1)E_1(1/2)} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{23}} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = U_2$$

ed U_2 è una forma ridotta di Gauss per B.

Entrambe le colonne di U_2 sono dominanti.

$\boxed{6}$ Sia $A_\alpha = \begin{pmatrix} i & 0 & -i & i\alpha \\ 1 & \alpha^2+4 & 0 & \alpha \\ 1 & \alpha^2+4 & 0 & 2\alpha \end{pmatrix}$, dove $\alpha \in \mathbb{C}$. Per ogni $\alpha \in \mathbb{C}$ si trovi una forma ridotta di Gauss U_α per A_α e si dica quali sono le colonne dominanti e quali sono le colonne libere di U_α.

Facciamo un'eliminazione di Gauss su A_α:

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} i & 0 & -i & i\alpha \\ 1 & \alpha^2+4 & 0 & \alpha \\ 1 & \alpha^2+4 & 0 & 2\alpha \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{31}(-1)E_{21}(-1)E_1(-i)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & \alpha \\ 0 & \alpha^2+4 & 1 & 0 \\ 0 & \alpha^2+4 & 1 & \alpha \end{pmatrix} = B_\alpha$$

$\boxed{1^o CASO}$ $\alpha^2 + 4 \neq 0$ ossia $\alpha \neq 2i$ ed $\alpha \neq -2i$.

$$B_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & \alpha \\ 0 & \alpha^2+4 & 1 & 0 \\ 0 & \alpha^2+4 & 1 & \alpha \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{32}(-\alpha^2-4)E_2(\frac{1}{\alpha^2+4})} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & \alpha \\ 0 & 1 & 1/(\alpha^2+4) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix} = C_\alpha$$

$\boxed{1^o \quad \text{sottocaso del} \quad 1^0 \quad \text{caso}}$ $\quad \alpha \neq 2i, \quad \alpha \neq -2i, \quad \alpha \neq 0$

$$C_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & \alpha \\ 0 & 1 & 1/(\alpha^2+4) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix} \xrightarrow{E_3(1/\alpha)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & \alpha \\ 0 & 1 & 1/(\alpha^2+4) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = U_\alpha$$

U_α è una forma ridotta di Gauss per A_α, le colonne dominanti sono la 1^a, la 2^a e la 4^a, l'unica colonna libera è la 3^a.

$\boxed{2^o \quad \text{sottocaso del} \quad 1^0 \quad \text{caso}}$ $\quad \alpha = 0 \qquad C_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = U_0$ è una forma ridotta di Gauss per A_0, le colonne dominanti sono la 1^a e la 2^a, quelle libere la 3^a e la 4^a.

$\boxed{2^o CASO}$ $\quad \alpha^2 + 4 = 0$ ossia $\alpha = 2i$ oppure $\alpha = -2i$.

$$B_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & \alpha \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \alpha \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{32}(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & \alpha \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix} \xrightarrow{E_3(1/\alpha) \quad (\alpha \neq 0)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & \alpha \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = U_\alpha$$

U_α è una forma ridotta di Gauss per A_α, le colonne dominanti sono la 1^a, la 3^a e la 4^a, l'unica colonna libera è la 2^a.

LEZIONE 7

Sistemi lineari

Scrittura matriciale di un sistema lineare

Def. 1. Un **sistema** di m equazioni ed n incognite $x_1, x_2, \dots x_n$, si dice **lineare** se tutte le m equazioni sono di 1^0 grado.

Esempio 1.

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 4x_3 & = 1 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 & = -6 \end{cases} \qquad \text{e} \qquad \begin{cases} 2x_1 + x_2 + 4x_3 & = 1 \\ 3x_2 & = -6 \end{cases}$$

sono due sistemi lineari, ciascuno con due equazioni e tre incognite; mentre

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2^3 + 4x_3 & = 1 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 & = -6 \end{cases} \qquad \text{e} \qquad \begin{cases} 2x_1 + x_2 + 4x_3 & = 1 \\ 3x_2x_3 & = -6 \end{cases}$$

sono entrambi due sistemi non lineari.

Def. 2. Dato un sistema lineare di m equazioni ed n incognite

$$(*) \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases},$$

la matrice $m \times n$ $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$ si chiama **la matrice dei coefficienti del sistema lineare**, ed il vettore colonna con m componenti $\underline{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$ si chiama **il vettore dei termini noti del sistema**.

Si chiama inoltre **matrice aumentata del sistema** la matrice $B = (\, A \quad | \quad \underline{b}\,)$. Dunque B è una matrice $m \times (n+1)$.

Ponendo $\underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ ($\underline{x}$ si chiama **il vettore delle n incognite** $x_1, x_2, \dots, x_n$), e calcolando il prodotto righe per colonne della matrice A ed il vettore $\underline{x}$ si ottiene

$$A\underline{x} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \end{pmatrix},$$

per cui $A\underline{x} = \underline{b}$ è una scrittura compatta del sistema lineare $(*)$, che viene detta **scrittura matriciale del sistema lineare (*)**.

Esempio 2.

La scrittura matriciale del primo sistema lineare considerato nell'Esempio 1 è $A\underline{x} = \underline{b}$, ove la matrice dei coefficienti è la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ ed il vettore dei termini noti è il vettore $\underline{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -6 \end{pmatrix}$.

La scrittura matriciale del secondo sistema lineare considerato nell'Esempio 1 è $A\underline{x} = \underline{b}$, ove la matrice dei coefficienti è la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ ed il vettore dei termini noti è uguale a quello del primo sistema lineare.

Def. 3. Un vettore colonna con n componenti $\underline{v}$ si dice **una soluzione del sistema lineare** $A\underline{x} = \underline{b}$, ove A è $m \times n$ (e $\underline{b}$ ha m componenti), se $A\underline{v} = \underline{b}$.

Dato un sistema lineare $A\underline{x} = \underline{b}$, puó accadere che esso non abbia soluzioni; se invece ce ne ha, allora **risolvere il sistema** significa trovare tutte le sue soluzioni.

Def. 4. Due **sistemi lineari**

$$(*) \qquad A\underline{x} = \underline{b} \qquad \text{e} \qquad (**) \qquad \tilde{A}\underline{x} = \tilde{\underline{b}}$$

si dicono **equivalenti** se

– o entrambi non hanno soluzioni,

– oppure le soluzioni dell'uno sono esattamente tutte e sole le soluzioni dell'altro.

Proposizione. Siano $(*)$ $A\underline{x} = \underline{b}$ un sistema lineare, ed **F** una matrice **non singolare** tale che esista FA. Allora il sistema lineare $(**)$ $FA\underline{x} = F\underline{b}$ è equivalente al sistema $(*)$.

Dimostrazione.

Sia $\underline{v}$ una soluzione di $(*)$. Allora $A\underline{v} = \underline{b}$. Premoltiplicando ambo i membri dell'uguaglianza per F si ottiene $FA\underline{v} = F\underline{b}$, ossia $\underline{v}$ è una soluzione di $(**)$.

Sia $\underline{w}$ una soluzione di $(**)$. Allora $FA\underline{w} = F\underline{b}$. Premoltiplicando ambo i membri dell'uguaglianza per F^{-1} (che esiste essendo F non singolare) si ottiene $F^{-1}FA\underline{w} = F^{-1}F\underline{b}$. Ma $F^{-1}FA\underline{w} = A\underline{w}$ e $F^{-1}F\underline{b} = \underline{b}$, quindi $A\underline{w} = \underline{b}$, ossia $\underline{w}$ è una soluzione di $(*)$.

Applicazione dell'eliminazione di Gauss CON O SENZA SCAMBI DI RIGHE alla risoluzione di sistemi lineari

Sia $(*) A\underline{x} = \underline{b}$ un sistema lineare di m equazioni in n incognite (ossia A è $m \times n$.)

Sia $(U \quad | \quad \underline{d})$ una forma ridotta di Gauss della matrice aumentata $(A \quad | \quad \underline{b})$. Per il N.B. della Lezione 6, esiste una matrice non singolare F tale che

$$F (A \quad | \quad \underline{b}) = (U \quad | \quad \underline{d}) .$$

Facendo il prodotto a blocchi si ottiene

$$F (A \quad | \quad \underline{b}) = (FA \quad | \quad F\underline{b}) ,$$

quindi $FA = U$ e $F\underline{b} = \underline{d}$.

Abbiamo visto che essendo F non singolare, il sistema $(*) A\underline{x} = \underline{b}$ è equivalente al sistema $FA\underline{x} = F\underline{b}$, ossia a $(**) U\underline{x} = \underline{d}$.

Che i due sistemi siano equivalenti poteva essere intuibile: le operazioni elementari che si fanno sulle righe della matrice $(A \quad | \quad \underline{b})$ per ottenere la matrice $(U \quad | \quad \underline{d})$ corrispondono a

• sommare un' equazione del sistema con un'altra moltiplicata per uno scalare c (quando si effettua un'operazione del tipo $E_{ij}(c)$),

• moltiplicare un' equazione del sistema per uno scalare $c \neq 0$ (quando si effettua un'operazione del tipo $E_i(c)$),

• scambiare di posto due equazioni (quando si effettua un'operazione del tipo E_{ij}).

Poichè $(**)$ è piú semplice da risolvere, discutiamo $(**)$ al posto di $(*)$.

$\boxed{1^0\text{CASO:}}$ $\underline{d}$ è dominante.

In questo caso l'ultima equazione di $(**)$ è $0 = 1$, che non ha soluzioni. Dunque **(**) non ha soluzioni**.

$\boxed{2^0\text{CASO:}}$ $\underline{d}$ è libera.

Sia k il numero delle righe non nulle di U (e quindi anche di $(U \quad | \quad \underline{d})$, essendo $\underline{d}$ libera) e siano $\underline{u}_{j_1}, \underline{u}_{j_2}, \ldots, \underline{u}_{j_k}$ le k colonne dominanti di U (e quindi anche di $(U \quad | \quad \underline{d})$ essendo $\underline{d}$ libera).

$\boxed{1^0\text{Sottocaso:}}$ $\underline{d}$ è libera e $k = n$,

ossia tutte le colonne di U sono dominanti.

In particolare $j_1 = 1, j_2 = 2, j_3 = 3, \ldots, j_k = j_n = n$.

Allora $(**)$ è del tipo

$$(**) \qquad \begin{cases} x_1 + u_{12}x_2 + u_{13}x_3 + \ldots + u_{1,n-1}x_{n-1} + u_{1n}x_n & = d_1 \\ \qquad x_2 + u_{23}x_3 + \ldots + u_{2,n-1}x_{n-1} + u_{2n}x_n & = d_2 \\ \qquad\qquad x_3 + \ldots + u_{3,n-1}x_{n-1} + u_{3n}x_n & = d_3 \\ \qquad\qquad\qquad \vdots & \\ \qquad\qquad\qquad x_{n-1} + u_{n-1,n}x_n & = d_{n-1} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad x_n & = d_n \end{cases} .$$

Si osservi che

– le operazioni fatte nel 1^o passaggio dell'eliminazione di Gauss (cioè un eventuale scambio e la "sistemazione "della j_1-esima colonna, ossia la prima) portano all'eliminazione dell'incognita $x_{j_1} = x_1$ dalle equazioni sotto alla prima,

– le operazioni fatte nel 2^o passaggio dell'eliminazione di Gauss portano all'eliminazione dell'incognita $x_{j_2} = x_2$ dalle equazioni sotto alla seconda,

– le operazioni fatte nel 3^o passaggio dell'eliminazione di Gauss portano all'eliminazione dell'incognita $x_{j_3} = x_3$ dalle equazioni sotto alla terza,

– e cosí via.

Il procedimento che illustriamo ora si chiama **sostituzione all'indietro**.

1) Si ricava il valore di x_n dall'ultima equazione, e lo sostituisce in tutte le altre equazioni.

2) Dalla penultima equazione si ricava il valore di x_{n-1} e lo si sotituisce in tutte le altre equazioni.

3) Dalla terzultima equazione si ricava il valore di x_{n-2} e lo si sotituisce in tutte le altre equazioni.

– e cosí via, procedendo a ritroso.

Si ottiene:

$$\begin{cases} x_n = d_n \\ x_{n-1} = d_{n-1} - u_{n-1,n}d_n \\ \vdots \\ x_1 = d_1 - u_{1n}d_n - u_{1,n-1}(d_{n-1} - u_{n-1,n}d_n) - \dots \end{cases},$$

per cui **(**) ha una ed una sola soluzione**, che è il vettore colonna

$$\underline{v} = \begin{pmatrix} d_1 - u_{1n}d_n - u_{1,n-1}(d_{n-1} - u_{n-1,n}d_n) - \dots \\ \vdots \\ d_{n-1} - u_{n-1,n}d_n \\ d_n \end{pmatrix}.$$

$\boxed{2^0\text{Sottocaso:}}$ $\underline{d}$ è libera e $k < n$,

ossia U ha $n - k > 0$ colonne libere.

In tal caso si prendono come parametri le $n - k$ variabili corrispondenti alle colonne libere di U e con la sostituzione all'indietro si ricavano tutte le altre in funzione di questi parametri. Allora **(**) ha ∞^{n-k} soluzioni**.

Riassumendo

$(*)$ ha soluzioni se e solo se $\underline{d}$ è libera.

$(*)$ ha un'unica soluzione se $\underline{d}$ è libera e tutte le colonne di U sono dominanti.

$(*)$ ha infinite soluzioni se $\underline{d}$ è libera ed U ha qualche colonna libera.

Esempio 3. Sia $(*) A\underline{x} = \underline{b}$ il sistema lineare in cui la matrice aumentata $(\, A \quad | \quad \underline{b}\,) = \begin{pmatrix} 4 & -8 & 4 & | & 0 \\ 1 & -1 & 0 & | & 3 \\ 1 & -1 & 1 & | & 5 \end{pmatrix}$. Dunque si ha

$$(*) \qquad \begin{cases} 4x_1 - 8x_2 + 4x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 = 3 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 5 \end{cases} .$$

Facciamo un'eliminazione di Gauss su $(\, A \quad | \quad \underline{b}\,)$:

$$(\, A \quad | \quad \underline{b}\,) = \begin{pmatrix} 4 & -8 & 4 & | & 0 \\ 1 & -1 & 0 & | & 3 \\ 1 & -1 & 1 & | & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{31}(-1)E_{21}(-1)E_1(\frac{1}{4})} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & | & 0 \\ 0 & 1 & -1 & | & 3 \\ 0 & 1 & 0 & | & 5 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\xrightarrow{E_{32}(-1)} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & | & 0 \\ 0 & 1 & -1 & | & 3 \\ 0 & 0 & 1 & | & 2 \end{pmatrix} = (\, U \quad | \quad \underline{d}\,)$$

per cui il sistema $(*)$ è equivalente al sistema

$$(**) \qquad \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 & = 0 \\ \qquad x_2 - x_3 & = 3 \\ \qquad\qquad x_3 & = 2 \end{cases} .$$

Che i due sistemi siano equivalenti poteva essere intuibile: le operazioni fatte sulle righe di $(\, A \quad | \quad \underline{b}\,)$ nell'eliminazione di Gauss senza scambi corrispondono a moltiplicazioni delle equazioni del sistema $(*)$ per numeri non nulli, e a somme di equazioni con altre moltiplicate per numeri non nulli.

Poichè $\underline{d}$ è libera, $(**)$ ha soluzioni.

Poichè tutte le colonne di U sono dominanti, $(**)$ ha esattamente una soluzione.

Con la sostituzione all'indietro otteniamo:

$x_3 = 2$,

$x_2 = x_3 + 3 = 2 + 3 = 5$,

$x_1 = 2x_2 - x_3 = 2 \times 5 - 2 = 8$.

Quindi $(*)$ ha un'unica soluzione che è il vettore $\begin{pmatrix} 8 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Esempio 4. Sia $(*) A\underline{x} = \underline{b}$ il sistema lineare in cui la matrice aumentata $(\, A \quad | \quad \underline{b}\,) = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 & | & 0 \\ 1 & 1 & 3 & | & -1 \\ 3 & 3 & 7 & | & 0 \end{pmatrix}$. Dunque si ha

$$(*) \qquad \begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 = -1 \\ 3x_1 + 3x_2 + 7x_3 = 0 \end{cases}.$$

Facciamo un'eliminazione di Gauss su $(\, A \quad | \quad \underline{b}\,)$:

$$(\, A \quad | \quad \underline{b}\,) \begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 & | & 0 \\ 1 & 1 & 3 & | & -1 \\ 3 & 3 & 7 & | & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{31}(-3)E_{21}(-1)E_1(\frac{1}{2})} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & -1 \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\xrightarrow{E_{32}(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & -1 \\ 0 & 0 & 0 & | & 1 \end{pmatrix} = (\, U \quad | \quad \underline{d}\,)$$

per cui il sistema $(*)$ è equivalente al sistema

$$(**) \qquad \begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 & = 0 \\ \qquad\qquad x_3 & = -1 \\ \qquad\qquad 0 & = 1 \end{cases}.$$

Poichè $\underline{d}$ è dominante, $(**)$ non ha soluzioni.

Infatti l'ultima equazione di $(**)$ non ha soluzioni. Quindi anche $(*)$, non ha soluzioni.

Esempio 5. Sia $(*) A\underline{x} = \underline{b}$ il sistema lineare in cui la matrice aumentata $(\, A \quad | \quad \underline{b}\,)$ è la matrice considerata nella Lezione 5. Quindi

$$(*) \qquad \begin{cases} 3x_1 + 6x_2 - 6x_3 - 3x_4 = 15 \\ 2x_1 + 5x_2 - 5x_3 - x_4 = 10 \\ x_1 + 3x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 11 \\ 5x_2 - 5x_3 + 7x_4 = 6 \end{cases}.$$

Nella Lezione 5 abbiamo fatto un'eliminazione di Gauss senza scambi di righe su $(\, A \quad | \quad \underline{b}\,)$, ottenendo la matrice $(\, U \quad | \quad \underline{d}\,) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & -1 & | & 5 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$.

Dunque

$$(**) \qquad \begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 - x_4 & = 5 \\ \qquad x_2 - x_3 + x_4 & = 0 \\ \qquad\qquad\qquad x_4 & = 3 \\ \qquad\qquad\qquad 0 & = 0 \end{cases}$$

è equivalente a $(*)$.

Il sistema che ora consideriamo consiste in realtà di tre equazioni ($0 = 0$ puó essere tralasciata).

Poichè $\underline{d}$ è libera, $(**)$ ha soluzioni.

Poichè U ha esattamente una colonna libera, la 3^a, $(**)$ ha ∞^1 soluzioni. Prendiamo come parametro la variabile corrispondente alla unica colonna libera di U, ossia poniamo $x_3 = h \in \mathbb{C}$ e con la sostituzione all'indietro ricaviamo x_1, x_2 e x_4, in funzione di h.

Dunque:

$x_3 = h$,

$x_4 = 3$,

$0 = x_2 - x_3 + x_4 = x_2 - h + 3$ per cui $x_2 = h - 3$,

$5 = x_1 + 2x_2 - 2x_3 - x_4 = x_1 + 2 \times (h - 3) - 2h - 3 = x_1 - 9$ per cui $x_1 = 14$.

Allora ogni vettore del tipo

$\begin{pmatrix} 14 \\ h-3 \\ h \\ 3 \end{pmatrix}$, al variare di $h \in \mathbb{C}$ è soluzione di $(*)$. Si scrive:

$\left\{ \begin{pmatrix} 14 \\ h-3 \\ h \\ 3 \end{pmatrix} | h \in \mathbb{C} \right\}$ è l'insieme delle soluzioni di $(*)$.

Esempio 6. Sia $(*) A\underline{x} = \underline{b}$ il sistema lineare in cui la matrice aumentata è

$$(A \mid \underline{b}) = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 1 & 2 & | & 4 \\ 2 & 6 & -4 & 2 & 5 & | & 10 \\ 1 & 3 & -1 & 3 & 6 & | & 12 \end{pmatrix}.$$

Quindi

$$(*) \qquad \begin{cases} x_1 + 3x_2 - 2x_3 + x_4 + 2x_5 = 4 \\ 2x_1 + 6x_2 - 4x_3 + 2x_4 + 5x_5 = 10 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 + 3x_4 + 6x_5 = 12 \end{cases}.$$

Un'eliminazione di Gauss su $(A \mid \underline{b})$ necessita di scambi di righe:

$$(A \mid \underline{b}) = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 1 & 2 & | & 4 \\ 2 & 6 & -4 & 2 & 5 & | & 10 \\ 1 & 3 & -1 & 3 & 6 & | & 12 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{31}(-1)E_{21}(-2)} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 1 & 2 & | & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & | & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 4 & | & 8 \end{pmatrix} \to$$

$$\xrightarrow{E_{23}} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 1 & 2 & | & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 4 & | & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & | & 2 \end{pmatrix} = (U \mid \underline{d}).$$

$(*)$ è equivalente al sistema che ha $(U \quad | \quad \underline{d})$ come matrice aumentata, ossia

$$(**) \qquad \begin{cases} x_1 + 3x_2 - 2x_3 + x_4 + 2x_5 & = 4 \\ \qquad\qquad x_3 + 2x_4 + 4x_5 & = 8 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad x_5 & = 2 \end{cases} .$$

Che i due sistemi siano equivalenti poteva essere intuibile: lo scambio di righe fatto nell'eliminazione di Gauss su $(A \quad | \quad \underline{b})$ corrisponde allo scambio di posizione di due equazioni, e le altre operazioni fatte sulle righe di $(A \quad | \quad \underline{b})$ corrispondono, come abbiamo già detto negli esempi precedenti, a moltiplicazioni di un' equazione del sistema per un numero non nullo e alla somma di un'equazione del sistema con un'altra moltiplicata per un numero non nullo.

Poichè $\underline{d}$ è libera, $(**)$ ha soluzioni.

Poichè U ha esattamente due colonne libere (la 2^a e la 4^a), $(**)$ ha ∞^2 soluzioni.

Nella sostituzione all'indietro, **si scelgono come parametri le variabili corrispondenti alle colonne libere di U**

Quindi, poichè le colonne libere di U sono la 2^a e la 4^a, si pone

$$x_2 = h \qquad \text{e} \qquad x_4 = k$$

e con la sostituzione all'indietro si ottiene

$x_5 = 2$,

$8 = x_3 + 2x_4 + 4x_5 = x_3 + 2k + 8$ per cui $x_3 = -2k$,

$4 = x_1 + 3x_2 - 2x_3 + x_4 + 2x_5 = x_1 + 3h - 2 \times (-2k) + k + 4 = x_1 + 3h + 5k + 4$ per cui $x_1 = -3h - 5k$.

Dunque l'insieme delle soluzioni di $(*)$ è $\left\{ \begin{pmatrix} -3h - 5k \\ h \\ -2k \\ k \\ 2 \end{pmatrix} | h, k \in \mathbb{C} \right\}$.

ESERCIZIO TIPO 3

Risolvere il sistema lineare $A\underline{x} = \underline{b}$ dove

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 9 & 6 \\ 1 & -1 & 7 & 4 \\ 1 & -1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \underline{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Troviamo una forma ridotta di Gauss della matrice aumentata del sistema.

$$(\,A \quad | \quad \underline{b}\,) = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 9 & 6 & | & 6 \\ 1 & -1 & 7 & 4 & | & 4 \\ 1 & -1 & 3 & 2 & | & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{31}(-1)E_{21}(-1)E_1(\frac{1}{3})}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 2 & | & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 2 & | & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_2(\frac{1}{4})} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 2 & | & 2 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & | & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} = (\,U \quad | \quad \underline{d}\,).$$

Il sistema $A\underline{x} = \underline{b}$ è equivalente al sistema $U\underline{x} = \underline{d}$ che è una forma compatta per

$$(*) \qquad \begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 + 2x_4 & = 2 \\ \qquad\qquad x_3 + \frac{1}{2}x_4 & = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Poichè $\underline{d}$ è libera, $U\underline{x} = \underline{d}$ ammette soluzioni.

Poichè U ha esattamente due colonne libere, $U\underline{x} = \underline{d}$ ha ∞^2 soluzioni.

Scegliamo come parametri le variabili corrispondenti alle colonne libere di U (la 2^a e la 4^a) e con la sostituzione all'indietro da $(*)$ otteniamo

$$\begin{cases} x_2 = h \\ x_4 = k \\ x_3 = -\dfrac{1}{2}x_4 + \dfrac{1}{2} = -\dfrac{1}{2}k + \dfrac{1}{2} \\ x_1 = x_2 - 3x_3 - 2x_4 + 2 = h - 3(-\dfrac{1}{2}k + \dfrac{1}{2}) - 2k + 2 = h - \dfrac{1}{2}k + \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

L'insieme delle soluzioni del sistema $U\underline{x} = \underline{d}$ (e quindi l'insieme delle soluzioni del sistema $A\underline{x} = \underline{b}$) è

$$\left\{ \begin{pmatrix} h - \frac{1}{2}k + \frac{1}{2} \\ h \\ -\frac{1}{2}k + \frac{1}{2} \\ k \end{pmatrix} | h, k \in \mathbb{C} \right\}.$$

ESERCIZIO TIPO 4

Siano $A(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & \alpha - i & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & \alpha - i & \alpha + i \\ -\alpha - i & -\alpha^2 - 1 & 0 \end{pmatrix}$ una matrice 4×3 ad elementi complessi e $\underline{b}(\alpha) = \begin{pmatrix} \alpha - i \\ \alpha^2 + 1 \\ 2\alpha \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^4$. Per ogni $\alpha \in \mathbb{C}$ si dica se il sistema $A(\alpha)\underline{x} = \underline{b}(\alpha)$ ammette soluzioni, e quante.

Troviamo una forma ridotta di Gauss della matrice aumentata del sistema.

$$(A(\alpha) \quad | \quad \underline{b}(\alpha)) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \alpha - i & 0 & \alpha - i \\ 0 & 1 & 0 & \alpha^2 + 1 \\ 1 & \alpha - i & \alpha + i & 2\alpha \\ -\alpha - i & -\alpha^2 - 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{E_{41}(\alpha+i)E_{31}(-1)}$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \alpha - i & 0 & \alpha - i \\ 0 & 1 & 0 & \alpha^2 + 1 \\ 0 & 0 & \alpha + i & \alpha + i \\ 0 & 0 & 0 & \alpha^2 + 1 \end{array}\right) = (B(\alpha) \quad | \quad \underline{c}(\alpha)) .$$

$\boxed{1^0 \text{ CASO}}$ $\quad \alpha = -i \quad$ $(B(-i) \quad | \quad \underline{c}(-i)) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2i & 0 & -2i \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$ è una forma ridotta di Gauss per $(A(-i) \quad | \quad \underline{b}(-i))$, quindi $A(-i)\underline{x} = \underline{b}(-i)$ è equivalente a $B(-i)\underline{x} = \underline{c}(-i)$ che è una forma compatta per

$$(*) \qquad \begin{cases} x_1 - 2ix_2 & = -2i \\ \qquad\quad x_2 & = 0 \end{cases}$$

Poichè $\underline{c}(-i)$ è libera, $B(-i)\underline{x} = \underline{c}(-i)$ ammette soluzioni.

Poichè $B(-i)$ ha esattamente una colonna libera, $B(-i)\underline{x} = \underline{c}(-i)$ ha ∞^1 soluzioni.

Scegliamo come parametro la variabile corrispondente alla colonna libera di $B(-i)$ (la 3^a) e con la sostituzione all'indietro da $(*)$ otteniamo

$$\begin{cases} x_3 = h \\ x_2 = 0 \\ x_1 = 2ix_2 - 2i = -2i \end{cases}$$

L'insieme delle soluzioni del sistema $B(-i)\underline{x} = \underline{c}(-i)$ (e quindi l'insieme delle soluzioni del sistema $A(-i)\underline{x} = \underline{b}(-i)$) è

$$\left\{ \begin{pmatrix} -2i \\ 0 \\ h \end{pmatrix} | h \in \mathbb{C} \right\}.$$

$\boxed{2^0 \text{ CASO}}$ $\quad \alpha \neq -i$

$$(B(\alpha) \quad | \quad \underline{c}(\alpha)) = \begin{pmatrix} 1 & \alpha - i & 0 & | & \alpha - i \\ 0 & 1 & 0 & | & \alpha^2 + 1 \\ 0 & 0 & \alpha + i & | & \alpha + i \\ 0 & 0 & 0 & | & \alpha^2 + 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_3(\frac{1}{\alpha+i})}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & \alpha - i & 0 & | & \alpha - i \\ 0 & 1 & 0 & | & \alpha^2 + 1 \\ 0 & 0 & 1 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & | & \alpha^2 + 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_4(\frac{1}{\alpha+i})} \begin{pmatrix} 1 & \alpha - i & 0 & | & \alpha - i \\ 0 & 1 & 0 & | & \alpha^2 + 1 \\ 0 & 0 & 1 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & | & \alpha - i \end{pmatrix} = (C(\alpha) | \quad \underline{d}(\alpha)) .$$

$\boxed{1^0 \text{ Sottocaso}}$ $\alpha = i$ $\quad (C(i) \quad | \quad \underline{d}(i)) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$ è una forma ridotta di Gauss per $(A(i) \quad | \quad \underline{b}(i))$, quindi $A(i)\underline{x} = \underline{b}(i)$ è equivalente a $C(i)\underline{x} = \underline{d}(i)$ che è una forma compatta per

$$(*) \qquad \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 1 \end{cases}$$

Poichè $\underline{d}(i)$ è libera, $C(i)\underline{x} = \underline{d}(i)$ ammette soluzioni.

Poichè tutte le colonne di $C(i)$ sono dominanti, $C(i)\underline{x} = \underline{d}(i)$ ammette un'unica soluzione. L'unica soluzione di $C(i)\underline{x} = \underline{d}(i)$ (e quindi di $A(i)\underline{x} = \underline{b}(i)$) è

$$\underline{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

$\boxed{2^0 \text{ Sottocaso}}$ $\alpha \notin \{i, -i\}$ $\quad (C(\alpha) | \quad \underline{d}(\alpha)) = \begin{pmatrix} 1 & \alpha - i & 0 & | & \alpha - i \\ 0 & 1 & 0 & | & \alpha^2 + 1 \\ 0 & 0 & 1 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & | & \alpha - i \end{pmatrix} \xrightarrow{E_4(\frac{1}{\alpha-i})}$

$\begin{pmatrix} 1 & \alpha - i & 0 & | & \alpha - i \\ 0 & 1 & 0 & | & \alpha^2 + 1 \\ 0 & 0 & 1 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & | & 1 \end{pmatrix} = (D(\alpha) | \quad \underline{e}(\alpha))$ è una forma ridotta di Gauss per $(A(\alpha) \quad | \quad \underline{b}(\alpha))$.

Poichè $\underline{e}(\alpha)$ è dominante, $D(\alpha)\underline{x} = \underline{e}(\alpha)$ (e quindi di $A(\alpha)\underline{x} = \underline{b}(\alpha)$) non ammette soluzioni.

LEZIONE 8

Inverse destre, sinistre e bilatere

Def. 1. Si dice che una matrice A, $m \times n$, ha **un'inversa destra** se esiste una matrice R, $n \times m$, tale che $AR = I_m$. In tal caso R si dice una inversa destra di A.

Def. 2. Si dice che una matrice A, $m \times n$, ha **un'inversa sinistra** se esiste una matrice L, $n \times m$, tale che $LA = I_n$. In tal caso L si dice una inversa sinistra di A.

Esempio 1. Siano

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -1 & -5 \\ 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ e } D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Da $AB = I_2 = AC$ segue che sia B che C sono inverse destre di A.

Da $AB = I_2 = DB$ segue che sia A che D sono inverse sinistre di B.

Eempio 2. La matrice $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ non ha un'inversa destra: per ogni scalare α e β si ha

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 2\alpha & 2\beta \end{pmatrix} \neq I_2.$$

Tra le matrici considerate nell'Esempio 1, B e C non hanno un'inversa destra, mentre A e D non hanno un'inversa sinistra.

$\boxed{I}$ Criterio per l'esistenza di una inversa destra e sua costruzione

Sia A una matrice $m \times n$ e sia k il numero di righe non nulle di una forma ridotta di Gauss U per A (quindi k è anche il numero delle colonne dominanti di U).

Vogliamo provare che **A ha un'inversa destra R se e solo se k=m**, inoltre se $k = m$ vogliamo **costruire R**.

(1) Supponiamo che A abbia un'inversa destra R e proviamo che allora $k = m$.

Procediamo per assurdo, supponendo che esista R ma che $k \neq m$.

Essendo sempre $k \leq m$, allora da $k \neq m$ si deduce $k < m$. Quindi l'ultima riga di U è nulla.

Per il N.B. della Lezione 6 esiste una matrice **non singolare** F tale che $FA = U$.

Allora

$$F = FI_m \underset{\substack{\uparrow \\ \boxed{AR = I_m}}}{=} F(AR) = (FA)R \underset{\substack{\uparrow \\ \boxed{FA = U}}}{=} UR.$$

Facendo il prodotto UR a blocchi come nel caso (2) della Lezione 4, dal fatto che l'ultima riga di U è nulla otteniamo che anche l'ultima riga di UR, e quindi l'ultima riga di F, è nulla.

Poichè F è non singolare esiste F^{-1} tale che $FF^{-1} = I_m$. Di nuovo, facendo il prodotto a blocchi FF^{-1}, dal fatto che F ha l'ultima riga nulla si deduce che anche l'ultima riga di FF^{-1}, ossia l'ultima riga di I_m, è nulla.

Questa contraddizione deriva dall'aver supposto $k \neq m$. Dunque si ha (1).

(2) Supponiamo che $k = m$ e costruiamo una matrice R tale che $AR = I_m$.

Sia $(A \quad | \quad I_m)$ la matrice $m \times (n+m)$ che si ottiene affiancando ad A la matrice identica $I_m = (\underline{e}_1 \quad \underline{e}_2 \quad \dots \quad \underline{e}_m)$. $(A \quad | \quad I_m)$ si chiama **matrice pluriaumentata del sistema**. Sia $(U \quad | \quad \underline{d}_1 \quad \underline{d}_2 \quad \dots \quad \underline{d}_m)$ una sua forma ridotta di Gauss. Per il N.B. della Lezione 6 esiste una matrice non singolare F tale che

$$F (A \quad | \quad I_m) = (U \quad | \quad \underline{d}_1 \quad \underline{d}_2 \quad \dots \quad \underline{d}_m) .$$

Poichè

$$k = \text{numero delle righe non nulle di U},$$

dall'ipotesi $k = m$ segue che tutte le righe di U sono non nulle, quindi tutte le colonne $\underline{d}_1$, $\underline{d}_2$,... $\underline{d}_m$ sono libere. Pertanto tutti i sistemi

$$U\underline{x} = \underline{d}_i, \quad i = 1, \dots, m,$$

hanno soluzione.

Per ogni $i = 1, \dots, m$ sia $\underline{c}_i$ una soluzione di $U\underline{x} = \underline{d}_i$, (ossia $U\underline{c}_i = \underline{d}_i$) e si ponga

$$R = (\underline{c}_1 \quad \underline{c}_2 \quad \dots \quad \underline{c}_m) .$$

Facendo il prodotto a blocchi

$$\begin{aligned} (U \quad | \quad \underline{d}_1 \quad \underline{d}_2 \quad \dots \quad \underline{d}_m) &= F (A \quad | \quad \underline{e}_1 \quad \underline{e}_2 \quad \dots \quad \underline{e}_m) = \\ &= (FA \quad | \quad F\underline{e}_1 \quad F\underline{e}_2 \quad \dots \quad F\underline{e}_m) \end{aligned}$$

si ottiene che per ogni $i = 1, \dots, m$ si ha che

$$(U \quad | \quad \underline{d}_i) = F (A \quad | \quad \underline{e}_i)$$

e $(U \quad | \quad \underline{d}_i)$ è una forma ridotta di Gauss per $(A \quad | \quad \underline{e}_i)$.

Quindi per ogni $i = 1, \dots, m$ il sistema $U\underline{x} = \underline{d}_i$ è equivalente al sistema $A\underline{x} = \underline{e}_i$. Dunque, poichè $\underline{c}_i$ è soluzione di $U\underline{x} = \underline{d}_i$, $\underline{c}_i$ è anche soluzione di $A\underline{x} = \underline{e}_i$:

$$A\underline{c}_i = \underline{e}_i, \qquad i = 1, \dots, m.$$

Facendo il prodotto a blocchi

$$AR = A (\underline{c}_1 \quad \underline{c}_2 \quad \dots \quad \underline{c}_m) = (A\underline{c}_1 \quad A\underline{c}_2 \quad \dots \quad A\underline{c}_m) = (\underline{e}_1 \quad \underline{e}_2 \quad \dots \quad \underline{e}_m) = I_m,$$

ossia R è una inversa destra di A.

Esempio 3. Si considerino le matrici A, B, C e D dell'Esempio 1.

Sia per A che per D si ha $m = 2 = k$, quindi, come già sapevamo avendo osservato che $AB = I_2 = DB$, sia A che D hanno un'inversa destra.

Sia per B che per C si ha $m = 3$ e $k \leq 2 < 3$ (infatti $k = 2$), quindi $m \neq k$ e sia B che C non hanno un'inversa destra.

$\boxed{II}$ Criterio per l'esistenza di una inversa sinistra e sua costruzione

Sia A una matrice $m \times n$ e sia k il numero di righe non nulle di una forma ridotta di Gauss U per A (quindi k è anche il numero delle colonne dominanti di U).

Vogliamo provare che **A ha un'inversa sinistra L se e solo se k=n**, inoltre se $k = n$ vogliamo **costruire L**.

Abbiamo bisogno di un risultato che proveremo piú avanti:

Lemma. Il numero delle righe non nulle di una forma ridotta di Gauss per A^T è uguale a k.

Osserviamo che $LA = I_n$ se e solo se

$$A^T L^T = (LA)^T = I_n^T = I_n,$$

dunque L è un'inversa sinistra di A se e solo se L^T è un'inversa destra di A^T.

Poichè A è $m \times n$, allora A^T è $n \times m$, ed A^T ha un'inversa destra se e solo se il numero delle righe non nulle di una forma ridotta di Gauss per A^T è k. Per il Lemma che abbiamo menzionato il numero delle righe non nulle per una forma ridotta di Gauss per A^T è uguale a k (cioè al numero delle righe non nulle per una forma ridotta di Gauss per A), quindi A ha un'inversa sinistra se e solo se $k = n$.

Se $k = n$, per costruire una inversa sinistra L di A si procede quindi nel seguente modo:

– si pone $B = A^T$,

– si costruisce una inversa destra $\tilde{R}$ di B seguendo il metodo illustrato nel paragrafo precedente (applicato a B),

– si pone $L = \tilde{R}^T$.

Esempio 4. Si considerino le matrici A, B, C e D degli Esempi 1 e 3.

Sia per A che per D si ha $k = 2 \neq 3 = n$, quindi sia A che D non hanno un'inversa sinistra.

Sia per B che per C si ha $k = 2 = n$, quindi sia B che C hanno un'inversa sinistra.

Proposizione. Se A, $m \times n$, ha sia un'inversa destra R che un'inversa sinistra L, allora $R = L$.

Dimostrazione.

$$R = I_n R \underset{\substack{\uparrow \\ \boxed{LA = I_n}}}{=} (LA)R = L(AR) \underset{\substack{\uparrow \\ \boxed{AR = I_m}}}{=} LI_m = L.$$

Dalla precedente Proposizione segue che se una matrice A ha un'**inversa (bilatera)**, allora tale inversa **è unica**.

Inoltre dalla precedente Proposizione, $\boxed{I}$ e $\boxed{II}$ segue che:

Corollario. Se A, $m \times n$, ha sia un'inversa destra R che un'inversa sinistra L, allora:

– $m = n$ (ossia A è quadrata),

– A è non singolare ed $A^{-1} = R = L$.

Dimostrazione. Sia k il numero di righe non nulle di una forma ridotta di Gauss per A.

Poichè esiste R tale che $AR = I_m$, allora per $\boxed{I}$ si ha che $k = m$.

Poichè esiste L tale che $LA = I_n$, allora per $\boxed{II}$ si ha che $k = n$.

Dunque $m = n$ e $AR = I_m = LA$.

Dalla Proposizione precedente si ha che $R = L$, quindi $AR = I_m = RA$.

Dunque A è non singolare ed $A^{-1} = R = L$.

Nella Lezione 2 abbiamo visto anche che **il prodotto di due matrici non singolari è una matrice non singolare, e la sua inversa è il prodotto delle inverse dei fattori in ordine scambiato** (cioè $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.)

Proprietà delle matrici non singolari.

Sia A una matrice non singolare. Allora:

(1) A^{-1} è non singolare e $(A^{-1})^{-1} = A$;

(2) A^T e A^H sono non singolari, inoltre $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$, e $(A^H)^{-1} = (A^{-1})^H$.

Dimostrazione. Per definizione di A^{-1} si ha che $AA^{-1} = I = A^{-1}A$, e quindi (1).

Per provare (2) ricordiamo che la trasposta (risp. la H-trasposta) di un prodotto è il prodotto delle trasposte (risp. le H-trasposte) in ordine scambiato. Quindi

$$A^T(A^{-1})^T = (A^{-1}A)^T = I^T = I = I^T = (AA^{-1})^T = (A^{-1})^T A^T,$$

ed analogamente $A^H(A^{-1})^H = I = (A^{-1})^H A^H$.

Inverse (bilatere)

Da $\boxed{I}$ e $\boxed{II}$ segue che una matrice A ha un'inversa (bilatera) se e solo se A è $n \times n$ e il numero delle righe non nulle di una forma ridotta di Gauss per A è uguale ad n.

Se A è una matrice $n \times n$ per cui il numero delle righe non nulle di una forma ridotta di Gauss è n, allora una forma ridotta di Gauss U per A ha tutte le colonne dominanti. Quindi la forma di Gauss-Jordan per A è $U = I_n$. Per il N.B. della Lezione 6 esiste una matrice non singolare F

tale che

$$\begin{aligned} F\,(\,A \quad | \quad I_n\,) &= F\,(\,A \quad | \quad \underline{e}_1 \quad \underline{e}_2 \quad \dots \quad \underline{e}_n\,) = \\ &= (\,U \quad | \quad \underline{d}_1 \quad \underline{d}_2 \quad \dots \quad \underline{d}_n\,) = \\ &= (\,I_n \quad | \quad \underline{d}_1 \quad \underline{d}_2 \quad \dots \quad \underline{d}_n\,)\,. \end{aligned}$$

Seguendo il procedimento illustrato in $\boxed{I}$, si ottiene che ogni inversa destra di A è del tipo $R = (\,\underline{c}_1 \quad \underline{c}_2 \quad \dots \quad \underline{c}_m\,)$, dove $m = n$ e $\underline{c}_i$ è soluzione del sistema $U\underline{x} = \underline{d}_i$, ossia $U\underline{c}_i = \underline{d}_i$ per ogni $i = 1, \dots, n$. Poichè in questo caso $U = I_n$, allora si ha

$$\underline{d}_i = U\underline{c}_i = I_n\underline{c}_i = \underline{c}_i,$$

per ogni $i = 1, \dots, n$. Dunque esiste un'unica inversa destra R di A:

$$R = (\,\underline{d}_1 \quad \underline{d}_2 \quad \dots \quad \underline{d}_n\,)\,,$$

e poichè un'inversa di A è in particolare un'inversa destra di A, allora A ha un'unica inversa A^{-1} ed è

$$A^{-1} = (\,\underline{d}_1 \quad \underline{d}_2 \quad \dots \quad \underline{d}_n\,)\,.$$

Inverse di matrici 2×2

Cominciamo con il fare la seguente osservazione: sia A ua matrice $m \times n$,

se A ha un'inversa destra R ed esiste una matrice B tale che BA=O, allora B=O. Infatti:

$$B = BI_n = B(AR) = (BA)R = \mathbb{O}R = \mathbb{O}.$$

Si faccia molta attenzione a non confondere questo fatto con la la legge di cancellazione per il prodotto, che, come abbiamo già detto nelle prime lezioni, per il prodotto di matrici **NON** vale.

Sia ora $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \neq \mathbb{O}$ una matrice 2×2. Poichè

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ad-bc & 0 \\ 0 & ad-bc \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

si ottiene

– se $ad - bc \neq 0$ allora A è non singolare e

$$A^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix};$$

– se $ad - bc = 0$, posto $B = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ si ha che $BA = \mathbb{O}$.

Se fosse A non singolare, in particolare A avrebbe un'inversa destra R, quindi dall'osservazione fatta all'inizio del paragrafo seguirebbe che $B = \mathbb{O}$.

Ma $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \neq \mathbb{O}$ implica che anche $B = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \neq \mathbb{O}$, dunque A non ha un'inversa.

ESERCIZIO TIPO 5

Si trovino tutte le inverse destre della matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

Un'inversa destra di A è una matrice 3×2 R tale che se $R = (\underline{c}_1 \quad | \quad \underline{c}_2)$, allora

$\underline{c}_1$ è soluzione di (1) $A\underline{x} = \underline{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e

$\underline{c}_2$ è soluzione di (2) $A\underline{x} = \underline{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Cerchiamo tutte le soluzioni di (1) e (2).

$$(A \quad | \quad I_2) = \left(\begin{array}{ccc|cc} 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{E_{21}(-1)E_1(\frac{1}{2})} \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 3 & -\frac{1}{2} & 1 \end{array}\right) \to$$

$$\xrightarrow{E_2(-2)} \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & -6 & 1 & -2 \end{array}\right) = (U \quad | \quad \underline{b}_1 \quad \underline{b}_2).$$

(1) è equivalente a (1′) $U\underline{x} = \underline{b}_1$ che è una forma compatta per

$$\begin{cases} x_1 + \frac{1}{2}x_2 \qquad = \frac{1}{2} \\ \quad x_2 - 6x_3 = 1 \end{cases}$$

Scegliamo come parametro la variabile corrispondente all'unica colonna libera di U (la 3^a) e con la sostituzione all'indietro otteniamo

$$\begin{cases} x_3 = h \\ x_2 = 6x_3 + 1 = 6h + 1 \\ x_1 = -\dfrac{1}{2}x_2 + \dfrac{1}{2} = -\dfrac{1}{2}(6h+1) + \dfrac{1}{2} = -3h \end{cases}$$

L'insieme delle soluzioni di (1) è

$$\left\{ \begin{pmatrix} -3h \\ 6h+1 \\ h \end{pmatrix} | h \in \mathbb{C} \right\}.$$

(2) è equivalente a (2′) $U\underline{x} = \underline{b}_2$ che è una forma compatta per

$$\begin{cases} x_1 + \frac{1}{2}x_2 \qquad = 0 \\ \quad x_2 - 6x_3 = -2 \end{cases}$$

Scegliamo come parametro la variabile corrispondente all'unica colonna libera di U (la 3^a) e con la sostituzione all'indietro otteniamo

$$\begin{cases} x_3 = k \\ x_2 = 6x_3 - 2 = 6k - 2 \\ x_1 = -\dfrac{1}{2}x_2 = -\dfrac{1}{2}(6k-2) = -3k + 1 \end{cases}$$

L'insieme delle soluzioni di (2) è

$$\left\{ \begin{pmatrix} -3k+1 \\ 6k-2 \\ k \end{pmatrix} | k \in \mathbb{C} \right\}.$$

Per ogni $h, k \in \mathbb{C}$, $R(h,k) = \begin{pmatrix} -3h & -3k+1 \\ 6h+1 & 6k-2 \\ h & k \end{pmatrix}$ è un'inversa destra di A.

ESERCIZIO TIPO 6

Sia $\quad A(\alpha)=\begin{pmatrix}\alpha & 1 & \alpha\\ \alpha & 1 & 1\\ 0 & 2 & 1\end{pmatrix}, \quad$ dove $\alpha\in\mathbb{C}$.

Per quegli $\alpha\in\mathbb{C}$ per cui $A(\alpha)$ è non singolare, si calcoli $A(\alpha)^{-1}$.

$$(\,A(\alpha)\quad|\quad I_3\,)=\begin{pmatrix}\alpha & 1 & \alpha & | & 1 & 0 & 0\\ \alpha & 1 & 1 & | & 0 & 1 & 0\\ 0 & 2 & 1 & | & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\xrightarrow{E_{21}(-\alpha)E_1(\frac{1}{\alpha})\quad\boxed{\alpha\neq 0:\ A(0)\text{ non ha inversa}}}$$

$$\to\begin{pmatrix}1 & \frac{1}{\alpha} & 1 & | & \frac{1}{\alpha} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1-\alpha & | & -1 & 1 & 0\\ 0 & 2 & 1 & | & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\xrightarrow{E_{23}}\begin{pmatrix}1 & \frac{1}{\alpha} & 1 & | & \frac{1}{\alpha} & 0 & 0\\ 0 & 2 & 1 & | & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1-\alpha & | & -1 & 1 & 0\end{pmatrix}\to$$

$$\xrightarrow{E_2(\frac{1}{2})}\begin{pmatrix}1 & \frac{1}{\alpha} & 1 & | & \frac{1}{\alpha} & 0 & 0\\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & | & 0 & 0 & \frac{1}{2}\\ 0 & 0 & 1-\alpha & | & -1 & 1 & 0\end{pmatrix}\xrightarrow{E_3(\frac{1}{1-\alpha})\quad\boxed{\alpha\neq 1:\ A(1)\text{ non ha inversa}}}$$

$$\to\begin{pmatrix}1 & \frac{1}{\alpha} & 1 & | & \frac{1}{\alpha} & 0 & 0\\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & | & 0 & 0 & \frac{1}{2}\\ 0 & 0 & 1 & | & -\frac{1}{1-\alpha} & \frac{1}{1-\alpha} & 0\end{pmatrix}\xrightarrow{E_{23}(-\frac{1}{2})}$$

$$\to\begin{pmatrix}1 & \frac{1}{\alpha} & 1 & | & \frac{1}{\alpha} & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & | & \frac{1}{2(1-\alpha)} & -\frac{1}{2(1-\alpha)} & \frac{1}{2}\\ 0 & 0 & 1 & | & -\frac{1}{1-\alpha} & \frac{1}{1-\alpha} & 0\end{pmatrix}\xrightarrow{E_{13}(-1)}$$

$$\to\begin{pmatrix}1 & \frac{1}{\alpha} & 0 & | & \frac{1}{\alpha(1-\alpha)} & -\frac{1}{1-\alpha} & 0\\ 0 & 1 & 0 & | & \frac{1}{2(1-\alpha)} & -\frac{1}{2(1-\alpha)} & \frac{1}{2}\\ 0 & 0 & 1 & | & -\frac{1}{1-\alpha} & \frac{1}{1-\alpha} & 0\end{pmatrix}\xrightarrow{E_{12}(-\frac{1}{\alpha})}$$

$$\to\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & | & \frac{1}{2\alpha(1-\alpha)} & \frac{-2\alpha+1}{2\alpha(1-\alpha)} & -\frac{1}{2\alpha}\\ 0 & 1 & 0 & | & \frac{1}{2(1-\alpha)} & -\frac{1}{2(1-\alpha)} & \frac{1}{2}\\ 0 & 0 & 1 & | & -\frac{1}{1-\alpha} & \frac{1}{1-\alpha} & 0\end{pmatrix}=(\,I_3\quad|\quad A(\alpha)^{-1}\,).$$

Se $\boxed{\alpha\notin\{0,1\}}$ $\qquad A(\alpha)^{-1}=\frac{1}{2\alpha(1-\alpha)}\begin{pmatrix}1 & -2\alpha+1 & -1+\alpha\\ \alpha & -\alpha & \alpha(1-\alpha)\\ -2\alpha & 2\alpha & 0\end{pmatrix}.$

ESERCITAZIONI* 2

$\boxed{1}$ Si risolva il sistema lineare $A\underline{x} = \underline{b}$ dove

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 3 & -3 \\ 3 & 6 & 3 & -6 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \underline{b} = \begin{pmatrix} 9 \\ 6 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

$\boxed{2}$ Si risolva il sistema lineare $A(\alpha)\underline{x} = \underline{b}(\alpha)$ dipendente dal parametro reale α dove

$$A(\alpha) = \begin{pmatrix} 2 & 2\alpha & 2 \\ 1 & \alpha+1 & \alpha+1 \\ 1 & \alpha & \alpha \\ 0 & 2 & 2\alpha \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \underline{b}(\alpha) = \begin{pmatrix} 2\alpha \\ \alpha+1 \\ \alpha \\ \alpha^2+1 \end{pmatrix}.$$

$\boxed{3}$ Sia $A = \begin{pmatrix} 3 & i \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Si calcoli A^{-1}.

$\boxed{4}$ Dire per quali $\alpha \in \mathbb{C}$ la matrice $A(\alpha) = \begin{pmatrix} \alpha+2i & \alpha \\ \alpha+2i & i \end{pmatrix}$ è non singolare. Per tali α, trovare l'inversa di $A(\alpha)$.

$\boxed{5}$ Sia $A(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & \alpha+2 & \alpha+3 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & \alpha+4 \end{pmatrix}$ dove $\alpha \in \mathbb{R}$. Per quegli $\alpha \in \mathbb{R}$ per cui $A(\alpha)$ è non singolare, si calcoli $A(\alpha)^{-1}$.

$\boxed{6}$ Si trovino tutte le inverse destre della matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & i & 1 \\ -i & 1 & i \end{pmatrix}$.

$\boxed{7}$ Si trovino tutte le inverse sinistre della matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -i \\ i & 1 \\ 1 & i \end{pmatrix}$.

Svolgimento ESERCITAZIONI* 2

$\boxed{1}$ Si risolva il sistema lineare $A\underline{x} = \underline{b}$ dove

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 3 & -3 \\ 3 & 6 & 3 & -6 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad \underline{b} = \begin{pmatrix} 9 \\ 6 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Troviamo una forma ridotta di Gauss per la matrice aumentata del sistema.

$$(\, A \quad | \quad \underline{b}\,) = \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 6 & 3 & -3 & 9 \\ 3 & 6 & 3 & -6 & 6 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & -1 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow{E_{41}(-1)E_{31}(-1)E_{21}(-3)E_1(\frac{1}{3})}$$

$$\to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{E_{32}(-1)E_2(-\frac{1}{3})}$$

$$\to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) = (\, U \quad | \quad \underline{d}\,).$$

Il sistema $A\underline{x} = \underline{b}$ è equivalente al sistema $U\underline{x} = \underline{d}$ che è una forma compatta per

$$(*) \qquad \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 & = 3 \\ \phantom{x_1 + 2x_2 + x_3 - {}} x_4 & = 1 \end{cases}$$

Poichè $\underline{d}$ è libera, $U\underline{x} = \underline{d}$ ammette soluzioni.

Poichè U ha esattamente due colonne libere, $U\underline{x} = \underline{d}$ ha ∞^2 soluzioni.

Scegliamo come parametri le variabili corrispondenti alle colonne libere di U (la 2^a e la 3^a) e con la sostituzione all'indietro da $(*)$ otteniamo

$$\begin{cases} x_2 = h \\ x_3 = k \\ x_4 = 1 \\ x_1 = -2x_2 - x_3 + x_4 + 3 = -2h - k + 1 + 3 = -2h - k + 4 \end{cases}$$

L'insieme delle soluzioni del sistema $U\underline{x} = \underline{d}$ (e quindi l'insieme delle soluzioni del sistema $A\underline{x} = \underline{b}$) è:

$$\left\{ \begin{pmatrix} -2h - k + 4 \\ h \\ k \\ 1 \end{pmatrix} | h, k \in \mathbb{C} \right\}.$$

$\boxed{2}$ Si risolva il sistema lineare $A(\alpha)\underline{x} = \underline{b}(\alpha)$ dipendente dal parametro reale α dove

$$A(\alpha) = \begin{pmatrix} 2 & 2\alpha & 2 \\ 1 & \alpha+1 & \alpha+1 \\ 1 & \alpha & \alpha \\ 0 & 2 & 2\alpha \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \underline{b}(\alpha) = \begin{pmatrix} 2\alpha \\ \alpha+1 \\ \alpha \\ \alpha^2+1 \end{pmatrix}.$$

Troviamo una forma ridotta di Gauss della matrice aumentata del sistema.

$$(\,A(\alpha) \quad | \quad \underline{b}(\alpha)\,) = \begin{pmatrix} 2 & 2\alpha & 2 & | & 2\alpha \\ 1 & \alpha+1 & \alpha+1 & | & \alpha+1 \\ 1 & \alpha & \alpha & | & \alpha \\ 0 & 2 & 2\alpha & | & \alpha^2+1 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{31}(-1)E_{21}(-1)E_1(\frac{1}{2})}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & \alpha & 1 & | & \alpha \\ 0 & 1 & \alpha & | & 1 \\ 0 & 0 & \alpha-1 & | & 0 \\ 0 & 2 & 2\alpha & | & \alpha^2+1 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{42}(-2)}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & \alpha & 1 & | & \alpha \\ 0 & 1 & \alpha & | & 1 \\ 0 & 0 & \alpha-1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & \alpha^2-1 \end{pmatrix} = (\,B(\alpha) \quad | \quad \underline{c}(\alpha)\,).$$

$\boxed{1^0 \text{ CASO}}$ $\qquad \alpha = 1 \qquad (\,B(1) \quad | \quad \underline{c}(1)\,) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 1 \\ 0 & 1 & 1 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$ è una forma ridotta di Gauss per $(\,A(1) \quad | \quad \underline{b}(1)\,)$, quindi $A(1)\underline{x} = \underline{b}(1)$ è equivalente a $B(1)\underline{x} = \underline{c}(1)$ che è una forma compatta per

$$(*) \qquad \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 & = 1 \\ \qquad x_2 + x_3 & = 1 \end{cases}$$

Poichè $\underline{c}(1)$ è libera, $B(1)\underline{x} = \underline{c}(1)$ ammette soluzioni.

Poichè $B(1)$ ha esattamente una colonna libera, $B(1)\underline{x} = \underline{c}(1)$ ha ∞^1 soluzioni.

Scegliamo come parametro la variabile corrispondente alla colonna libera di $B(1)$ (la 3^a) e con la sostituzione all'indietro da $(*)$ otteniamo

$$\begin{cases} x_3 = h \\ x_2 = -x_3 + 1 = -h + 1 \\ x_1 = -x_2 - x_3 + 1 = -(-h+1) - h + 1 = 0 \end{cases}$$

L'insieme delle soluzioni del sistema $B(1)\underline{x} = \underline{c}(1)$ (e quindi l'insieme delle soluzioni del sistema $A(1)\underline{x} = \underline{b}(1)$) è

$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ -h+1 \\ h \end{pmatrix} |h \in \mathbb{C} \right\}.$$

$\boxed{2^0 \text{ CASO}}$ $\qquad \alpha \neq 1$

$$\left(\,B(\alpha)\quad|\quad \underline{c}(\alpha)\,\right) = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & 1 & | & \alpha \\ 0 & 1 & \alpha & | & 1 \\ 0 & 0 & \alpha-1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & \alpha^2-1 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_3(\frac{1}{\alpha-1})}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & \alpha & 1 & | & \alpha \\ 0 & 1 & \alpha & | & 1 \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & \alpha^2-1 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_4(\frac{1}{\alpha-1})}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & \alpha & 1 & | & \alpha \\ 0 & 1 & \alpha & | & 1 \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & \alpha+1 \end{pmatrix} = \left(\,C(\alpha)|\quad \underline{d}(\alpha)\,\right).$$

$\boxed{1^0 \text{ Sottocaso}}$ $\qquad \alpha = -1 \qquad \left(\,C(-1)\quad|\quad \underline{d}(-1)\,\right) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & | & -1 \\ 0 & 1 & -1 & | & 1 \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$ è una forma ridotta di Gauss per $\left(\,A(-1)\quad|\quad \underline{b}(-1)\,\right)$, quindi $A(-1)\underline{x} = \underline{b}(-1)$ è equivalente a $C(-1)\underline{x} = \underline{d}(-1)$ che è una forma compatta per

$$(*) \qquad \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 & = -1 \\ \qquad x_2 - x_3 & = 1 \\ \qquad\qquad x_3 & = 0 \end{cases}$$

Poichè $\underline{d}(-1)$ è libera, $C(-1)\underline{x} = \underline{d}(-1)$ ammette soluzioni.

Poichè tutte le colonne di $C(-1)$ sono dominanti, $C(-1)\underline{x} = \underline{d}(-1)$ ammette un'unica soluzione. Con la sostituzione all'indietro da $(*)$ otteniamo

$$\begin{cases} x_3 = 0 \\ x_2 = x_3 + 1 = 1 \\ x_1 = x_2 - x_3 - 1 = 1 - 1 = 0 \end{cases}$$

L'unica soluzione di $C(-1)\underline{x} = \underline{d}(-1)$ (e quindi di $A(-1)\underline{x} = \underline{b}(-1)$) è

$$\underline{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$\boxed{2^0 \text{ Sottocaso}}$ $\qquad \alpha \notin \{1, -1\}$

$$\left(\,C(\alpha)|\quad \underline{d}(\alpha)\,\right) = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & 1 & | & \alpha \\ 0 & 1 & \alpha & | & 1 \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & \alpha+1 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_4(\frac{1}{\alpha+1})}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & \alpha & 1 & | & \alpha \\ 0 & 1 & \alpha & | & 1 \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 1 \end{pmatrix} = \left(\,D(\alpha)|\quad \underline{e}(\alpha)\,\right)$$

è una forma ridotta di Gauss per $(A(\alpha) \quad | \quad \underline{b}(\alpha))$. Poichè $\underline{e}(\alpha)$ è dominante, $D(\alpha)\underline{x} = \underline{e}(\alpha)$ (e quindi di $A(\alpha)\underline{x} = \underline{b}(\alpha)$) non ammette soluzioni.

$\boxed{3}$ Sia $A = \begin{pmatrix} 3 & i \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Si calcoli A^{-1}.

Ricordando che

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \qquad \text{se} \qquad ad - bc \neq 0,$$

si ha:

$$A^{-1} = \frac{1}{3-i} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Poichè

$$\frac{1}{3-i} = \frac{1}{3-i} \times \frac{\overline{3-i}}{\overline{3-i}} = \frac{3+i}{(3-i)(3+i)} = \frac{3+i}{9-i^2} = \frac{3+i}{10} = \frac{3}{10} + i\frac{1}{10},$$

allora

$$A^{-1} = (\frac{3}{10} + i\frac{1}{10}) \begin{pmatrix} 1 & -i \\ -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

$\boxed{4}$ Dire per quali $\alpha \in \mathbb{C}$ la matrice $A(\alpha) = \begin{pmatrix} \alpha + 2i & \alpha \\ \alpha + 2i & i \end{pmatrix}$ è non singolare. Per tali α, trovare l'inversa di $A(\alpha)$.

Ricordando che $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ è non singolare se e solo se $ad - bc \neq 0$ ed in tal caso si ha

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix},$$

allora $A(\alpha)$ è non singolare se e solo se

$$(\alpha + 2i)i - \alpha(\alpha + 2i) = (\alpha + 2i)(i - \alpha) \neq 0,$$

ossia se e solo se $\alpha \notin \{-2i, i\}$, ed in tal caso si ha:

$$A(\alpha)^{-1} = \frac{1}{(\alpha + 2i)(i - \alpha)} \begin{pmatrix} i & -\alpha \\ -\alpha - 2i & \alpha + 2i \end{pmatrix}.$$

$\boxed{5}$ Sia $A(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & \alpha+2 & \alpha+3 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & \alpha+4 \end{pmatrix}$ dove $\alpha \in \mathbb{R}$. Per quegli $\alpha \in \mathbb{R}$ per cui $A(\alpha)$ è non singolare, si calcoli $A(\alpha)^{-1}$.

$$(A(\alpha) \quad | \quad I_3) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \alpha+2 & \alpha+3 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & \alpha+4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{E_{31}(-1)E_{21}(1)}$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \alpha+2 & \alpha+3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha+2 & \alpha+2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -\alpha-2 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[]{\boxed{\alpha \neq -2 : A(-2) \text{ non ha inv.}} \quad E_{32}(\alpha+2)E_2(\frac{1}{\alpha+2})}$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \alpha+2 & \alpha+3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \frac{1}{\alpha+2} & \frac{1}{\alpha+2} & 0 \\ 0 & 0 & \alpha+3 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[]{\boxed{\alpha \neq -3 : A(-3) \text{ non ha inv.}} \quad E_3(\frac{1}{\alpha+3})}$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \alpha+2 & \alpha+3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \frac{1}{\alpha+2} & \frac{1}{\alpha+2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{\alpha+3} & \frac{1}{\alpha+3} \end{array}\right) \xrightarrow{E_{23}(-1)}$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \alpha+2 & \alpha+3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{\alpha+2} & \frac{1}{(\alpha+2)(\alpha+3)} & -\frac{1}{\alpha+3} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{\alpha+3} & \frac{1}{\alpha+3} \end{array}\right) \xrightarrow{E_{13}(-\alpha-3)}$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \alpha+2 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{\alpha+2} & \frac{1}{(\alpha+2)(\alpha+3)} & -\frac{1}{\alpha+3} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{\alpha+3} & \frac{1}{\alpha+3} \end{array}\right) \xrightarrow{E_{12}(-\alpha-2)}$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\alpha+4}{\alpha+3} & -\frac{1}{\alpha+3} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{\alpha+2} & \frac{1}{(\alpha+2)(\alpha+3)} & -\frac{1}{\alpha+3} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{\alpha+3} & \frac{1}{\alpha+3} \end{array}\right) = (I_3 \quad | \quad A(\alpha)^{-1}).$$

Se $\boxed{\alpha \notin \{-2, -3\}}$

$$A(\alpha)^{-1} = \frac{1}{(\alpha+2)(\alpha+3)} \begin{pmatrix} 0 & -(\alpha+4)(\alpha+2) & -(\alpha+2) \\ \alpha+3 & 1 & -(\alpha+2) \\ 0 & \alpha+2 & \alpha+2 \end{pmatrix}.$$

$\boxed{6}$ Si trovino tutte le inverse destre della matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & i & 1 \\ -i & 1 & i \end{pmatrix}$.

Un'inversa destra di A è una matrice 3×2 R tale che se $R = (\underline{c}_1 \quad | \quad \underline{c}_2)$, allora

$\underline{c}_1$ è soluzione di (1) $A\underline{x} = \underline{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e

$\underline{c}_2$ è soluzione di (2) $A\underline{x} = \underline{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Cerchiamo tutte le soluzioni di (1) e (2).

$$(A \quad | \quad I_2) = \begin{pmatrix} 1 & i & 1 & | & 1 & 0 \\ -i & 1 & i & | & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{21}(i)} \begin{pmatrix} 1 & i & 1 & | & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2i & | & i & 1 \end{pmatrix} \rightarrow$$
$$\xrightarrow{E_2(-\frac{i}{2})} \begin{pmatrix} 1 & i & 1 & | & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & \frac{1}{2} & -\frac{i}{2} \end{pmatrix} = (U \quad | \quad \underline{b}_1 \quad \underline{b}_2) .$$

(1) è equivalente a (1′) $U\underline{x} = \underline{b}_1$ che è una forma compatta per

$$\begin{cases} x_1 + ix_2 + x_3 & = 1 \\ \qquad\qquad x_3 & = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Scegliamo come parametro la variabile corrispondente all'unica colonna libera di U (la 2^a) e con la sostituzione all'indietro otteniamo

$$\begin{cases} x_2 = h \\ x_3 = \dfrac{1}{2} \\ x_1 = -ix_2 - x_3 + 1 = -ih - \dfrac{1}{2} + 1 = -ih + \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

L'insieme delle soluzioni di (1) è

$$\left\{ \begin{pmatrix} -ih + \frac{1}{2} \\ h \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} | h \in \mathbb{C} \right\}.$$

(2) è equivalente a (2′) $U\underline{x} = \underline{b}_2$ che è una forma compatta per

$$\begin{cases} x_1 + ix_2 + x_3 & = 0 \\ \qquad\qquad x_3 & = -\frac{i}{2} \end{cases}$$

Scegliamo come parametro la variabile corrispondente all'unica colonna libera di U (la 2^a) e con la sostituzione all'indietro otteniamo

$$\begin{cases} x_2 = k \\ x_3 = -\dfrac{i}{2} \\ x_1 = -ix_2 - x_3 = -ik + \dfrac{i}{2} \end{cases}$$

L'insieme delle soluzioni di (2) è

$$\left\{ \begin{pmatrix} -ik + \frac{i}{2} \\ k \\ -\frac{i}{2} \end{pmatrix} | k \in \mathbb{C} \right\}.$$

Per ogni $h, k \in \mathbb{C}$, $R(h,k) = \begin{pmatrix} -ih + \frac{1}{2} & -ik + \frac{i}{2} \\ h & k \\ \frac{1}{2} & -\frac{i}{2} \end{pmatrix}$ è un'inversa destra di A.

$\boxed{7}$ Si trovino tutte le inverse sinistre della matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -i \\ i & 1 \\ 1 & i \end{pmatrix}$.

Sia $B = A^T = \begin{pmatrix} 1 & i & 1 \\ -i & 1 & i \end{pmatrix}$. Per l'esercizio precedente, l'insieme delle inverse destre di B è:

$$\left\{ R(h,k) = \begin{pmatrix} -ih + \frac{1}{2} & -ik + \frac{i}{2} \\ h & k \\ \frac{1}{2} & -\frac{i}{2} \end{pmatrix} | h, k \in \mathbb{C} \right\}.$$

Allora l'insieme delle inverse sinistre di A è:

$$\left\{ L(h,k) = R(h,k)^T = \begin{pmatrix} -ih + \frac{1}{2} & h & \frac{1}{2} \\ -ik + \frac{i}{2} & k & -\frac{i}{2} \end{pmatrix} | h, k \in \mathbb{C} \right\}.$$

LEZIONE 9

Spazi vettoriali reali e complessi.

Sia $K \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$.

Def. 1. Uno **spazio vettoriale su K** è un insieme non vuoto V tale che siano definite due operazioni

$$V \times V \xrightarrow{+} V \qquad \text{e} \qquad K \times V \xrightarrow{\cdot} V$$

che verifichino le seguenti condizioni:

per ogni $\underline{u}$, $\underline{v}$,$\underline{w} \in V$ (gli elementi di V si chiamano **vettori**, e vengono indicati con lettere sottolineate in carattere corsivo minuscolo),

e per ogni α, $\beta \in K$ (gli elementi di K si chiamano **scalari** e vengono indicati con lettere dell'alfabeto greco oppure dell'alfabeto latino, scritte pure loro in carattere corsivo minuscolo, ma non sottolineate) si ha

$$\begin{array}{llll} (1): & \underline{u} + (\underline{v} + \underline{w}) = (\underline{u} + \underline{v}) + \underline{w}; & (2): & \underline{u} + \underline{v} = \underline{v} + \underline{u}; \\ (3): & \alpha(\beta\underline{v}) = (\alpha\beta)\underline{v}; & (4): & 1\underline{v} = \underline{v}; \\ (5): & (\alpha + \beta)\underline{v} = \alpha\underline{v} + \beta\underline{v}; & (6): & \alpha(\underline{v} + \underline{u}) = \alpha\underline{v} + \alpha\underline{u}, \end{array}$$

inoltre esiste un (unico) elemento di V che viene indicato con il simbolo $\underline{0}$ (e viene chiamato **zero di V** o l'**elemento neutro di V**) tale che

$$(7): \quad \underline{v} + \underline{0} = \underline{v} \qquad \text{(per ogni } \underline{v} \in V\text{)},$$

ed anche per ogni $\underline{v} \in V$ esiste un (unico) elemento $\underline{w} \in V$ tale che $\underline{v} + \underline{w} = \underline{0}$. Il vettore $\underline{w}$ si chiama **l'opposto** del vettore $\underline{v}$ e si indica con il simbolo $-\underline{v}$. Dunque

$$(8): \quad \text{per ogni } \underline{v} \in V \text{ esiste } -\underline{v} \in V \text{ tale che } \underline{v} + (-\underline{v}) = \underline{0}.$$

Se $K = \mathbb{R}$ allora V si dice uno **spazio vettoriale reale**;

se $K = \mathbb{C}$ allora V si dice uno **spazio vettoriale complesso**.

L'operazione $+$ si chiama **addizione tra gli elementi di V**, ed associa ad ogni coppia di vettori $(\underline{v}, \underline{u})$ la loro **somma** $\underline{v} + \underline{u}$.

L'operazione $\cdot$ si chiama **moltiplicazione degli elementi di V per gli scalari**, ed associa ad ogni coppia $(\alpha, \underline{u})$, ove α è uno scalare e $\underline{v}$ è un vettore, il **prodotto** $\alpha\underline{v}$.

Esempio 1. L'insieme $M_{mn}(\mathbb{R})$ con l'operazione di addizione definita nella Lezione 2 e l'operazione di moltiplicazione per gli elementi di $\mathbb{R}$ definita nella Lezione 1 è uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$.

Analogamente, l'insieme $M_{mn}(\mathbb{C})$ con l'operazione di addizione definita nella Lezione 2 e l'operazione di moltiplicazione per gli elementi di $\mathbb{C}$ definita nella Lezione 1 è uno spazio vettoriale su $\mathbb{C}$.

In particolare l'insieme $\mathbb{R}^n$ dei vettori colonna con n componenti reali e l'insieme $\mathbb{R}_n$ dei vettori riga con n componenti reali sono spazi vettoriali su $\mathbb{R}$; l'insieme $\mathbb{C}^n$ dei vettori colonna con n componenti complesse e l'insieme $\mathbb{C}_n$ dei vettori riga con n componenti complesse sono spazi vettoriali su $\mathbb{C}$.

N.B.

- Se $\underline{w} \in V$ verifica la condizione

$$(*) \quad \underline{v}+\underline{w}=\underline{v} \qquad \text{per ogni } \underline{v} \in V,$$

ossia se $\underline{w}$ ha le stesse funzioni di $\underline{0}$, allora $\underline{w}=\underline{0}$ (in altre parole esiste un unico elemento neutro in V). Infatti:

$$\underline{w} \underset{\substack{\uparrow \\ \boxed{(7) \text{ con } \underline{v}=\underline{w}}}}{=} \underline{w}+\underline{0} \underset{\substack{\uparrow \\ \boxed{(2)}}}{=} \underline{0}+\underline{w} \underset{\substack{\uparrow \\ \boxed{(*) \text{ con } \underline{v}=\underline{0}}}}{=} \underline{0}.$$

- Sia $\underline{v} \in V$. Se $\underline{z} \in V$ verifica la condizione

$$(**) \quad \underline{v}+\underline{z}=\underline{0},$$

ossia se $\underline{z}$ ha le stesse funzioni di $-\underline{v}$, allora $\underline{z}=-\underline{v}$ (in altre parole ogni vettore $\underline{v}$ ha un unico opposto). Infatti:

$$\underline{z} \underset{\substack{\uparrow \\ \boxed{(7)}}}{=} \underline{z}+\underline{0} \underset{\substack{\uparrow \\ \boxed{(8)}}}{\;} \underline{z}+(\underline{v}+(-\underline{v})) \underset{\substack{\uparrow \\ \boxed{(1)}}}{=} (\underline{z}+\underline{v})+(-\underline{v}) \underset{\substack{\uparrow \\ \boxed{(2)}}}{=}$$

$$= (\underline{v}+\underline{z})+(-\underline{v}) \underset{\substack{\uparrow \\ \boxed{(**)}}}{=} \underline{0}+(-\underline{v}) \underset{\substack{\uparrow \\ \boxed{(2)}}}{=} (-\underline{v})+\underline{0} \underset{\substack{\uparrow \\ \boxed{(7)}}}{=} -\underline{v}.$$

Proposizione.

(i) $0\underline{v}=\underline{0}$ per ogni $\underline{v} \in V$;

(ii) $(-\alpha)\underline{v}=-(\alpha\underline{v})$ per ogni $\underline{v} \in V$ ed ogni $\alpha \in K$;

(iii) $\alpha\underline{0}=\underline{0}$ per ogni $\alpha \in K$.

Dimostrazione. Per dimostrare (i): da

$$0\underline{v} \underset{\substack{\uparrow \\ \boxed{0+0=0 \text{ in } K}}}{=} (0+0)\underline{v} \underset{\substack{\uparrow \\ \boxed{(5)}}}{=} 0\underline{v}+0\underline{v}$$

Typeset by $\mathcal{AMS}$-TEX
Typeset by $\mathcal{AMS}$-TEX

segue

$$\underline{0} \underset{\substack{\uparrow\\ \boxed{(8)}}}{=} 0\underline{v} + (-0\underline{v}) = 0\underline{v} + 0\underline{v} + (-0\underline{v}) \underset{\substack{\uparrow\\ \boxed{(8)}}}{=} 0\underline{v} + \underline{0} \underset{\substack{\uparrow\\ \boxed{(7)}}}{=} 0\underline{v}$$

Per dimostrare (*ii*): poichè si ha

$$\underline{0} \underset{\substack{\uparrow\\ \boxed{(i)}}}{=} 0\underline{v} \underset{\substack{\uparrow\\ \boxed{\alpha + (-\alpha) = 0 \text{ in } K}}}{=} (\alpha + (-\alpha))\underline{v} \underset{\substack{\uparrow\\ \boxed{(5)}}}{=} \alpha\underline{v} + (-\alpha)\underline{v},$$

allora per l'unicità dell'opposto di $\alpha\underline{v}$ si ha $(-\alpha)\underline{v} = -\alpha\underline{v}$, ossia (*ii*).

Per dimostrare (*iii*): da

$$\alpha\underline{0} \underset{\substack{\uparrow\\ \boxed{(7)}}}{=} \alpha(\underline{0} + \underline{0}) \underset{\substack{\uparrow\\ \boxed{(6)}}}{=} \alpha\underline{0} + \alpha\underline{0}$$

segue

$$\underline{0} \underset{\substack{\uparrow\\ \boxed{(8)}}}{=} \alpha\underline{0} + (-\alpha\underline{0}) = \alpha\underline{0} + \alpha\underline{0} + (-\alpha\underline{0}) \underset{\substack{\uparrow\\ \boxed{(8)}}}{=} \alpha\underline{0} + \underline{0} \underset{\substack{\uparrow\\ \boxed{(7)}}}{=} \alpha\underline{0}.$$

LEZIONE 10

Sottospazi di spazi vettoriali.

Sia V uno spazio vettoriale su K, $K \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$.

Def. 1. Siano $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_n \in V$. Un vettore $\underline{v} \in V$ si dice una **combinazione lineare** dei vettori $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_n \in V$, se esistono $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in K$ tali che

$$\underline{v} = \alpha_1 \underline{v}_1 + \alpha_2 \underline{v}_2 + \ldots + \alpha_n \underline{v}_n.$$

Gli scalari $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ si chiamano i **coefficienti (o pesi) della combinazione lineare**.

Esempio 1. In $V = \mathbb{R}^4$ il vettore $\underline{v} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -8 \\ 3 \end{pmatrix}$ è una combinazione lineare dei vettori $\underline{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\underline{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\underline{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, poichè

$$2\underline{v}_1 + 3\underline{v}_2 - 4\underline{v}_3 = 2\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - 4\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -8 \\ 3 \end{pmatrix} = \underline{v}.$$

I coefficienti della combinazione sono $2, 3$ e -4.

Def. 2. Un sottoinsieme non vuoto W di V si dice un **sottospazio (vettoriale) di V** (e si scrive $W \leq V$) se sono verificate le seguenti due condizioni:

$$\begin{aligned} (a):& \quad \underline{w}_1 + \underline{w}_2 \in W \quad \text{per ogni } \underline{w}_1, \underline{w}_2 \in W, \\ (b):& \quad \alpha\underline{w} \in W \quad \text{per ogni } \underline{w} \in W \quad \text{ed ogni } \alpha \in K. \end{aligned}$$

Si noti che **se W è un sottospazio di V, allora** $\underline{0} \in$W.

Infatti:

– si fissi $\underline{w} \in W$ (esiste almeno un $\underline{w} \in W$ poichè per ipotesi W non è vuoto),

– poichè W è un sottospazio, per (b) si ha che $\alpha\underline{w} \in W$ per ogni $\alpha \in K$. In particolare prendendo $\alpha = 0$ si ottiene $0\underline{w} \in W$.

– per il punto (i) della Proposizione della Lezione 9 si ha che $0\underline{w} = \underline{0}$, essendo $\underline{w} \in W \subseteq V$.

Dunque $\underline{0} \in W$.

Esempio 2. Per ogni spazio vettoriale V, $\{\underline{0}\}$ è un sottospazio di V, poichè $\underline{0} + \underline{0} = \underline{0}$ e $\alpha\underline{0} = \underline{0}$ per ogni $\alpha \in K$ (punto (iii) della Proposizione della Lezione 9).

Def. 4. $\{\underline{0}\}$ si chiama **il sottospazio nullo** di V.

Def. 5. Una matrice quadrata $A = [a_{ij}]$, $n \times n$, si dice **triangolare superiore** (risp. **triangolare inferiore**) se $a_{ij} = 0$ per $i > j$ (risp. $i < j$). Una matrice quadrata si dice **unitriangolare superiore** (risp. **unitriangolare inferiore**) se è triangolare superiore (risp. inferiore) ed inoltre ha tutti gli elementi diagonali uguali ad 1.

Esempio 3. Sia $V = M_n(\mathbb{C})$, e siano

$\mathcal{W}_1$ l'insieme delle matrici complesse $n \times n$ diagonali,

$\mathcal{W}_2$ l'insieme delle matrici complesse $n \times n$ triangolari superiori,

$\mathcal{W}_3$ l'insieme delle matrici complesse $n \times n$ triangolari inferiori,

$\mathcal{W}_4$ l'insieme delle matrici complesse $n \times n$ simmetriche.

Allora $\mathcal{W}_1$, $\mathcal{W}_2$, $\mathcal{W}_3$ e $\mathcal{W}_4$ sono sottospazi di V.

Esempio 4. Sia $V = M_n(\mathbb{C})$, e siano

$\mathcal{Z}_1$ l'insieme delle matrici complesse $n \times n$ unitriangolari superiori,

$\mathcal{Z}_2$ l'insieme delle matrici complesse $n \times n$ unitriangolari inferiori,

$\mathcal{Z}_3$ l'insieme delle matrici complesse $n \times n$ hermitiane,

$\mathcal{Z}_4$ l'insieme delle matrici complesse $n \times n$ antihermitiane.

Allora nessuno tra $\mathcal{Z}_1$, $\mathcal{Z}_2$, $\mathcal{Z}_3$ e $\mathcal{Z}_4$ è un sottospazio di V.

Esempio 5. $W = \{ \begin{pmatrix} a \\ a \\ b \end{pmatrix} | a, b \in \mathbb{R}\}$ è un sottospazio di $V = \mathbb{R}^3$. Infatti:

(1) per ogni $a_, b_1, a_2, b_2 \in \mathbb{R}$ esistono $a_3, b_3 \in \mathbb{R}$ tali che

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2 \\ a_2 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_3 \\ a_3 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

(si prende $a_3 = a_1 + a_2$ e $b_3 = b_1 + b_2$);

(2) per ogni $a, b, \alpha \in \mathbb{R}$ esistono $a_1, b_1 \in \mathbb{R}$ tali che

$$\alpha \begin{pmatrix} a \\ a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_1 \\ b_1 \end{pmatrix}$$

(si prende $a_1 = \alpha a$ e $b_1 = \alpha b$).

Proposizione. Un sottoinsieme non vuoto W di V è un sottospazio di V se e solo se è verificata la seguente condizione:

$$(*) \qquad \alpha_1 \underline{w}_1 + \alpha_2 \underline{w}_2 \in W \quad \text{per ogni } \underline{w}_1, \underline{w}_2 \in W \quad \text{ed ogni } \alpha_1, \alpha_2 \in K.$$

Dimostrazione. Supponiamo dapprima che W sia un sottospazio di V (ossia che siano verificate le condizioni (a) e (b)) e proviamo che allora vale $(*)$.

Siano $\underline{w}_1, \underline{w}_2 \in W$ ed $\alpha_1, \alpha_2 \in K$. Per (b), da $\underline{w}_1 \in W$ ed $\alpha_1 \in K$ segue che $\alpha_1 \underline{w}_1 \in W$, ed analogamente da $\underline{w}_2 \in W$ ed $\alpha_2 \in K$ segue che $\alpha_2 \underline{w}_2 \in W$.

Per (a) da $\alpha_1 \underline{w}_1 \in W$ ed $\alpha_2 \underline{w}_2 \in W$ segue che anche $\alpha_1 \underline{w}_1 + \alpha_2 \underline{w}_2 \in W$, ossia $(*)$.

Supponiamo ora che W sia un sottoinsieme non vuoto di V che verifichi la condizione $(*)$, e proviamo che allora W è un sottospazio di V, ossia che sono verificate entrambe le condizioni (a) e (b).

Siano $\underline{w}_1$ e $\underline{w}_2 \in W$. Applicando $(*)$ con $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$ si ottiene

$$\underline{w}_1 + \underline{w}_2 = 1\underline{w}_1 + 1\underline{w}_2 \in W,$$

ossia (a).

Se poi $\underline{w} \in W$ ed $\alpha \in K$, applicando $(*)$ con $\underline{w}_1 = \underline{w}$, $\alpha_1 = \alpha$ ed $\alpha_2 = 0$ si ottiene (b).

Si osservi che la condizione $(*)$ è equivalente alla condizione

$$(**) \quad \alpha_1 \underline{w}_1 + \alpha_2 \underline{w}_2 + \ldots + \alpha_n \underline{w}_n \in W \quad \text{per ogni } \underline{w}_1, \ldots, \underline{w}_n \in W, \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in K,$$

poichè $(*)$ è $(**)$ con $n = 2$, e $(**)$ si ottiene da $(*)$ iterandola.

$(**)$ si esprime dicendo che combinazioni lineari di elementi di W sono elementi di W. Dunque:

Un sottoinsieme non vuoto W di uno spazio vettoriale V è un sottospazio di V se e solo se ogni combinazione lineare di elementi di W è un elemento di W.

Si dice anche che **W è chiuso alle combinazioni lineari di suoi elementi**.

In particolare, **se S è un sottoinsieme di V, l'insieme delle combinazioni lineari di elementi di S è un sottospazio vettoriale di V**.

Def. 6 Se S è un sottoinsieme di V, l'insieme delle combinazioni lineari di elementi di S si chiama lo **spazio generato da S**, e si indica con il simbolo $\langle \mathbf{S} \rangle$.

I sottospazi fondamentali di una matrice

Sia A una matrice $m \times n$ reale (risp. complessa).

Siano $\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_n$ le colonne di A (quindi ciascun $\underline{a}_i$, per $i = 1, \ldots, n$, è un vettore colonna con m componenti).

Siano $\underline{r}_1^T, \ldots, \underline{r}_m^T$ le righe di A (quindi ciascun $\underline{r}_i^T$, per $i = 1, \ldots, m$, è un vettore riga con n componenti, e dunque ciascun $\underline{r}_i$ è un vettore colonna con n componenti).

(1) L'insieme delle combinazioni lineari delle colonne di A è un sottospazio di $\mathbb{R}^m$ (risp. di $\mathbb{C}^m$). Esso si chiama **lo spazio delle colonne di A** e si indica con il simbolo **C(A)**. Dunque

$$C(A) = \{\alpha_1\underline{a}_1 + \alpha_2\underline{a}_2 + \ldots + \alpha_n\underline{a}_n | \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R} \quad (\text{ risp. } \mathbb{C})\}.$$

(2) L'insieme delle combinazioni lineari dei vettori colonna $\underline{r}_i$, $i = 1, \ldots, m$, che si ottengono trasponendo le righe di A, è un sottospazio di $\mathbb{R}^n$ (risp. di $\mathbb{C}^n$). Esso si chiama **lo spazio delle righe di A** e si indica con il simbolo **R(A)**. Dunque

$$R(A) = \{\alpha_1\underline{r}_1 + \alpha_2\underline{r}_2 + \ldots + \alpha_n\underline{r}_n | \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R} \quad (\text{ risp. } \mathbb{C})\}.$$

(3) Un sistema lineare $A\underline{x} = \underline{b}$ in cui $\underline{b} = \underline{0}$ si chiama un **sistema** lineare **omogeneo**.

L'insieme di tutte le soluzioni del sistema omogeneo $A\underline{x} = \underline{0}$ (ossia l'insieme di tutti i vettori colonna con n componenti $\underline{v}$ tali che $A\underline{v} = \underline{0} \in \mathbb{R}^m$) è un sottospazio di $\mathbb{R}^n$ (risp. $\mathbb{C}^n$). Esso si chiama **lo spazio nullo di A** e si indica con il simbolo **N(A)**.

$\boxed{N.B.}$ In particolare lo spazio nullo $N(A)$ di una matrice A coincide con lo spazio nullo $N(U)$ di una sua forma ridotta di Gauss. Infatti se U è una forma ridotta di Gauss di A allora $(U \mid \underline{0})$ è una forma ridotta di Gauss della matrice $(A \mid \underline{0})$, per cui, per quanto detto nella Lezione 7, i due sistemi $A\underline{x} = \underline{0}$ ed $U\underline{x} = \underline{0}$ sono equivalenti.

(4) L'insieme di tutte le soluzioni del sistema omogeneo $A^T\underline{x} = \underline{0}$ (ossia l'insieme di tutti i vettori colonna con m componenti $\underline{w}$ tali che $A^T\underline{w} = \underline{0} \in \mathbb{R}^n$) è un sottospazio di $\mathbb{R}^m$ (risp. $\mathbb{C}^m$). Esso è lo spazio nullo della trasposta di A, $\mathbf{N(A^T)}$, e si chiama **lo spazio nullo sinistro di A**. Poichè

$$(\underline{w}^T A)^T = A^T\underline{w} = \underline{0}$$

se e solo se $\underline{w}^T A = \underline{0}$, allora lo spazio nullo sinistro di A coincide con l'insieme dei vettori $\underline{w} \in \mathbb{R}^m$ (risp. $\mathbb{C}^m$) tali che $\underline{w}^T A = \underline{0}$.

Esempio 6. Sia $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$. Allora si ha:

$$C(A) = \{\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} | \alpha, \beta \in \mathbb{R}\} = \{ \begin{pmatrix} \alpha \\ 2\alpha \\ \alpha + 3\beta \end{pmatrix} | \alpha, \beta \in \mathbb{R}\},$$

$$R(A) = \{\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \delta \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} | \alpha, \beta, \delta \in \mathbb{R}\} = \{\gamma \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \delta \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} | \gamma, \delta \in \mathbb{R}\} =$$

$$= \{ \begin{pmatrix} \gamma + \delta \\ 3\delta \end{pmatrix} | \gamma, \delta \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}^2,$$

$$N(A) = \{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 | \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \} = \{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \},$$

$$N(A^T) = \{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 | \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \} =$$

$$= \{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 | x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 = 3x_3\} = \{ \begin{pmatrix} -2h \\ h \\ 0 \end{pmatrix} | h \in \mathbb{R}\}.$$

LEZIONE 11

Insiemi di generatori. Insiemi linearmente indipendenti e insiemi linearmente dipendenti.

Sia V uno spazio vettoriale su K ($K \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$).

Def. 1. Un sottoinsieme $S = \{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_n\}$ di elementi di V si dice un **insieme di generatori** di V se lo spazio vettoriale generato da S coincide con V (in simboli $\langle S \rangle = V$). Quindi S è un insieme di generatori di V se ogni elemento di V è una combinazione lineare di elementi di S, ossia se per ogni $\underline{v} \in V$ esistono α_1, α_2, …, $\alpha_n \in K$ tali che

$$\underline{v} = \alpha_1 \underline{v}_1 + \alpha_2 \underline{v}_2 + \ldots + \alpha_n \underline{v}_n.$$

Esempio 1. Siano $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \dots, \underline{e}_n$ le colonne della matrice identica I_n. L'insieme $S = \{\underline{e}_1, \underline{e}_2, \dots, \underline{e}_n\}$ è un insieme di generatori di $\mathbb{R}^n$ (risp. $\mathbb{C}^n$) come spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ (risp. $\mathbb{C}$). Infatti un generico elemento di $\mathbb{R}^n$ (risp. $\mathbb{C}^n$) è del tipo $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ con $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ (risp. $\mathbb{C}$), e per ogni $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ (risp. $\mathbb{C}$) si ha:

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = a_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \ldots + a_n \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = a_1 \underline{e}_1 + a_2 \underline{e}_2 + \ldots + a_n \underline{e}_n.$$

Analogamente l'insieme $\{\underline{e}_1^T, \underline{e}_2^T, \dots, \underline{e}_n^T\}$ è un insieme di generatori di $\mathbb{R}_n$ (risp. $\mathbb{C}_n$) come spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ (risp. $\mathbb{C}$).

Esempio 2. Siano $V = \mathbb{R}^2$ ed $S = \{\underline{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \underline{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\}$. S è un insieme di generatori di V. Per dimostrarlo, ricordando che un generico elemento $\underline{v}$ è del tipo $\underline{v} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, per opportuni $a, b \in \mathbb{R}$, ci chiediamo se dati comunque $a, b \in \mathbb{R}$ esistano α_1 ed $\alpha_2 \in \mathbb{R}$ tali che

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \underline{v} = \alpha_1 \underline{v}_1 + \alpha_2 \underline{v}_2 = \alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ 2\alpha_1 + \alpha_2 \end{pmatrix}.$$

Poichè prendendo $\alpha_1 = a$ e $\alpha_2 = b - 2a$ l'uguaglianza è verificata (ossia α_1 ed α_2 esistono qualunque siano a e b reali), allora S è un insieme di generatori di $\mathbb{R}^2$.

Esempio 3. Siano $V = \mathbb{R}^3$ ed $S = \{\underline{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \underline{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \underline{v}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}\}$. S non è un insieme di generatori di V. Per dimostrarlo, ricordando che un generico elemento $\underline{v}$ è del tipo

$\underline{v} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$, per opportuni $a, b, c \in \mathbb{R}$, ci chiediamo se dati comunque $a, b, c \in \mathbb{R}$ esistano α_1, α_2, ed $\alpha_3 \in \mathbb{R}$ tali che

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \underline{v} = \alpha_1\underline{v}_1 + \alpha_2\underline{v}_2 + \alpha_3\underline{v}_3 = \alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 + 3\alpha_3 \\ 2\alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3 \\ \alpha_1 + 3\alpha_3 \end{pmatrix}.$$

In particolare $a = \alpha_1 + 3\alpha_3 = c$. Quindi un vettore $\underline{v}$ con $a \neq c$, ad esempio $\underline{v} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, non è combinazione lineare degli elementi di S, per cui S non è un insieme di generatori di V.

Def. 2. Un sottoinsieme finito $S = \{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_n\}$ di elementi di V si dice **linearmente indipendente** (L.I.) se l'unica combinazione lineare nulla di elementi di S ha tutti i coefficienti uguali a 0, ossia se imponendo la condizione

$$\alpha_1\underline{v}_1 + \alpha_2\underline{v}_2 + \ldots + \alpha_n\underline{v}_n = \underline{0},$$

con $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in K$, si deduce che $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0$.

Esempio 4. Siano $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \dots, \underline{e}_n$ le colonne della matrice identica I_n. L'insieme $S = \{\underline{e}_1, \underline{e}_2, \dots, \underline{e}_n\}$ è un sottoinsieme linearmente indipendente (L.I.) di $\mathbb{R}^n$ (risp. $\mathbb{C}^n$) come spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ (risp. $\mathbb{C}$). Siano infatti α_1,α_2,...,$\alpha_n \in \mathbb{R}$ (risp. $\mathbb{C}$) tali che

$$\underline{0} = \alpha_1\underline{e}_1 + \alpha_2\underline{e}_2 + \ldots + \alpha_n\underline{e}_n = \alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \ldots + \alpha_n \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}.$$

Allora $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0$.

Analogamente l'insieme $\{\underline{e}_1^T, \underline{e}_2^T, \dots, \underline{e}_n^T\}$ è un sottoinsieme L.I. di $\mathbb{R}_n$ (risp. $\mathbb{C}_n$) come spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ (risp. $\mathbb{C}$).

Esempio 5. L'insieme S dell'Esempio 2 è linearmente indipendente (L.I.): da

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \underline{0} = \alpha_1\underline{v}_1 + \alpha_2\underline{v}_2 = \alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ 2\alpha_1 + \alpha_2 \end{pmatrix}$$

segue $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$.

Def. 3. Un sottoinsieme finito $S = \{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_n\}$ di elementi di V si dice **linearmente dipendente** (L.D.) se non è linearmente indipendente, ossia se esistono scalari $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ non tutti nulli tali che

$$\alpha_1\underline{v}_1 + \alpha_2\underline{v}_2 + \ldots + \alpha_n\underline{v}_n = \underline{0}.$$

Esempio 6. L'insieme S dell'Esempio 3 è linearmente dipendente (L.D.):

$$3\underline{v}_1 - 4\underline{v}_2 - \underline{v}_3 = \underline{0}.$$

Proposizione.

(1) Se $S = \{\underline{v}\}$, allora S è linearmente indipendente (L.I.) se e solo se $\underline{v} \neq \underline{0}$.

(2) Sottoinsiemi non vuoti di insiemi linearmente indipendendenti (L.I.) sono linearmente indipendenti (L.I.).

(3) Un sottoinsieme S con almeno due elementi è linearmente dipendente (L.D.) se e solo se esiste un elemento di S che è combinazione lineare dei rimanenti elementi di S.

Dimostrazione

(1) Provare

$$(*) \quad S = \{\underline{v}\} \quad \text{è} \quad L.I. \quad \Longleftrightarrow \quad \underline{v} \neq \underline{0}$$

equivale a provare

$$(**) \quad \text{non } [S = \{\underline{v}\} \quad \text{è} \quad L.I.] \quad \Longleftrightarrow \quad \text{non } [\underline{v} \neq \underline{0}],$$

ossia

$$(**) \quad S = \{\underline{v}\} \quad \text{è} \quad L.D. \quad \Longleftrightarrow \quad \underline{v} = \underline{0},$$

per cui proviamo $(**)$.

Se $S = \{\underline{v}\}$ L.D., allora esiste uno scalare $\alpha \neq 0$ tale che $\alpha\underline{v} = \underline{0}$. Moltiplicando ambo i membri dell'uguaglianza per α^{-1} (che esiste essendo $\alpha \neq 0$), si ottiene

$$\underline{v} = 1\underline{v} = \alpha^{-1}\alpha\underline{v} = \alpha^{-1}\underline{0} = \underline{0}.$$

Viceversa se $\underline{v} = \underline{0}$, allora $1\underline{v} = \underline{v} = \underline{0}$ è una combinazione lineare nulla degli elementi di S con coefficienti non tutti nulli, ossia S è un insieme L.D.

(2) Siano S un insieme L.I. ed S_0 un sottoinsieme non vuoto di S. Sia

$$\alpha_1\underline{v}_1 + \alpha_2\underline{v}_2 + \ldots + \alpha_n\underline{v}_n = \underline{0}$$

una combinazione lineare nulla di elementi di S_0 ($\alpha_i \in K$ per ogni $i = 1, \ldots, n$). Poichè gli elementi di S_0 sono elementi di S, allora

$$\alpha_1\underline{v}_1 + \alpha_2\underline{v}_2 + \ldots + \alpha_n\underline{v}_n = \underline{0}$$

è una combinazione lineare nulla di elementi di S. Poichè S è un insieme L.I., allora $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0$. Dunque S_0 è L.I.

(3) Sia $S = \{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_n\}$, $n \geq 2$, un insieme L.D.

Allora esistono $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ non tutti nulli tali che

$$(*) \quad \alpha_1\underline{v}_1 + \alpha_2\underline{v}_2 + \ldots + \alpha_n\underline{v}_n = \underline{0}.$$

Si fissi un $\alpha_i \neq 0$. Da $(*)$ si ricava

$$\alpha_i \underline{v}_i = -\alpha_1 \underline{v}_1 - \alpha_2 \underline{v}_2 - \ldots - \alpha_{i-1} \underline{v}_{i-1} - \alpha_{i+1} \underline{v}_{i+1} - \ldots - \alpha_n \underline{v}_n$$

e quindi, moltiplicando ambo i membri per α_i^{-1} (che esiste essendo $\alpha_i \neq 0$)

$$\underline{v}_i = -\alpha_i^{-1} \alpha_1 \underline{v}_1 - \alpha_i^{-1} \alpha_2 \underline{v}_2 - \ldots - \alpha_i^{-1} \alpha_{i-1} \underline{v}_{i-1} - \alpha_i^{-1} \alpha_{i+1} \underline{v}_{i+1} - \ldots - \alpha_i^{-1} \alpha_n \underline{v}_n.$$

Quindi esiste $\underline{v}_i \in S$ che è combinazione lineare dei rimanenti elementi di S.

Viceversa se $\underline{v}_i \in S = \{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_n\}$ è combinazione lineare degli altri elementi di S, allora esistono $\beta_1, \ldots, \beta_{i-1}, \beta_{i+1}, \ldots, \beta_n \in K$ tali che

$$\underline{v}_i = \beta_1 \underline{v}_1 + \beta_2 \underline{v}_2 + \ldots + \beta_{i-1} \underline{v}_{i-1} + \beta_{i+1} \underline{v}_{i+1} + \ldots + \beta_n \underline{v}_n.$$

Da ció si ricava che

$$\beta_1 \underline{v}_1 + \beta_2 \underline{v}_2 + \ldots + \beta_{i-1} \underline{v}_{i-1} - \underline{v}_i + \beta_{i+1} \underline{v}_{i+1} + \ldots + \beta_n \underline{v}_n = \underline{0}$$

è una combinazione lineare nulla degli elementi di S con coefficienti non tutti nulli (il coefficiente di $\underline{v}_i$ è -1). Quindi S è un insieme L.D.

Esercizio. Siano V uno spazio vettoriale, $S = \{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_n\}$ un sottoinsieme linearmente indipendente di V e $\underline{v} \in V$. Si supponga che $S \cup \{\underline{v}\}$ sia linearmente dipendente. Allora $\underline{v}$ è combinazione lineare degli elementi di S (ossia $\underline{v} \in \langle S \rangle$).

Svolgimento. Poichè $S \cup \{\underline{v}\} = \{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_n, \underline{v}\}$ è linearmente dipendente, esistono scalari $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \beta$ non tutti nulli tali che

$$(*) \qquad \alpha_1 \underline{v}_1 + \alpha_2 \underline{v}_2 + \ldots + \alpha_n \underline{v}_n + \beta \underline{v} = \underline{0}.$$

Se fosse $\beta = 0$, da $(*)$ seguirebbe $\alpha_1 \underline{v}_1 + \alpha_2 \underline{v}_2 + \ldots + \alpha_n \underline{v}_n = \underline{0}$, e quindi, essendo S linearmente indipendente, si avrebbe $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0$, mentre non tutti gli scalari $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \beta$ sono nulli.

Dunque $\beta \neq 0$ ed esiste β^{-1}.

Da $(*)$ si deduce

$$\underline{v} = -\beta^{-1} \alpha_1 \underline{v}_1 - \beta^{-1} \alpha_2 \underline{v}_2 - \ldots - \beta^{-1} \alpha_n \underline{v}_n,$$

per cui $\underline{v}$ è combinazione lineare di $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_n$ (con coefficienti $\delta_1 = -\beta^{-1}\alpha_1$, $\delta_2 = -\beta^{-1}\alpha_2$, …, $\delta_n = -\beta^{-1}\alpha_n$).

ESERCIZIO TIPO 7

Siano $\underline{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\underline{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\underline{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Si dica se $\mathcal{S} = \{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3\} \subset \mathbb{R}^4$ è linearmente dipendente o linearmente indipendente.

Siano $\alpha, \beta, \delta \in \mathbb{R}$ tali che

$$(*) \qquad \underline{0} = \alpha\underline{v}_1 + \beta\underline{v}_2 + \delta\underline{v}_3 = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + \delta \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha + 2\beta + \delta \\ \beta + \delta \\ 3\alpha + 4\beta + \delta \\ -\alpha + \delta \end{pmatrix}.$$

Allora $(*)$ equivale a (1) $\begin{cases} \alpha + 2\beta + \delta &= 0 \\ \beta + \delta &= 0 \\ 3\alpha + 4\beta + \delta &= 0 \\ -\alpha + \delta &= 0 \end{cases}$.

(1) è un sistema lineare nelle incognite α, β, δ.

(1) ha sempre la soluzione nulla $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ (ossia $\alpha = \beta = \delta = 0$).

Se essa dovesse essere l'unica soluzione di (1) (quindi se (1) avesse un'unica soluzione) allora $\mathcal{S}$ sarebbe L.I., altrimenti, se (1) ha anche una soluzione non nulla (quindi se (1) ha piú di una soluzione) allora $\mathcal{S}$ è L.D.

Cerchiamo allora le soluzioni di (1). Facendo una eliminazione di Gauss sulla sua matrice aumentata si ottiene

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[E_{41}(1)E_{31}(-3)]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \end{array}\right) \rightarrow$$

$$\xrightarrow[E_{42}(-2)E_{32}(2)]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) = (U \quad | \quad \underline{0})$$

Dunque (1) è equivalente ad (1') $\begin{cases} \alpha + 2\beta + \delta &= 0 \\ \beta + \delta &= 0 \end{cases}$

Scegliendo come parametro la variabile corrispondente all'unica colonna non dominante di U (la 3^a), con la sostituzione all'indietro si ottiene $\begin{cases} \delta = h \\ \beta = -\delta = -h \\ \alpha = -2\beta - \delta = -2(-h) - h = h \end{cases}$

Il sistema (1') ha ∞^1 soluzioni: tutti gli elementi dell'insieme $\left\{ \begin{pmatrix} h \\ -h \\ h \end{pmatrix} | h \in \mathbb{R} \right\}$.

Prendendo ad esempio $h = 1$ si ottiene $\alpha = \delta = 1$ e $\beta = -1$ e $\underline{v}_1 - \underline{v}_2 + \underline{v}_3 = \underline{0}$.

Quindi $\{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3\}$ è linearmente dipendente.

ESERCIZIO TIPO 8

Si provi che le colonne dominanti di una matrice in forma ridotta di Gauss diversa dalla matrice nulla sono linearmente indipendenti.

Sia $U \neq \mathbb{O}$ una matrice $m \times n$ in forma ridotta di Gauss. Siano $\underline{u}_{j_1}, \underline{u}_{j_2}, \dots, \underline{u}_{j_k}$ le sue colonne dominanti. Ciascuna di esse è un vettore colonna con m componenti, inoltre

$$\underline{u}_{j_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \text{ è la prima colonna di } I_m \qquad \underline{u}_{j_2} \text{ è del tipo } \begin{pmatrix} * \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\dots\dots\dots \qquad \underline{u}_{j_{k-2}} \text{ è del tipo } \begin{pmatrix} * \\ * \\ * \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \leftarrow k-2 \\ \\ \\ \\ \\ \end{array}$$

$$\underline{u}_{j_{k-1}} \text{ è del tipo } \begin{pmatrix} * \\ * \\ * \\ \vdots \\ * \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \\ \leftarrow k-1 \\ \\ \\ \\ \end{array} \qquad \underline{u}_{j_k} \text{ è del tipo } \begin{pmatrix} * \\ * \\ * \\ \vdots \\ * \\ * \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \leftarrow k \\ \\ \\ \end{array}$$

Siano $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{k-2}, \alpha_{k-1}, \alpha_k$, degli scalari tali che

$$(\bullet) \quad \alpha_1 \underline{u}_{j_1} + \alpha_2 \underline{u}_{j_2} + \dots + \alpha_{k-2} \underline{u}_{j_{k-2}} + \alpha_{k-1} \underline{u}_{j_{k-1}} + \alpha_k \underline{u}_{j_k} = \underline{0}.$$

Allora

$$\begin{pmatrix}0\\0\\0\\\vdots\\0\\0\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}=\alpha_1\begin{pmatrix}1\\0\\0\\\vdots\\0\\0\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}+\alpha_2\begin{pmatrix}*\\1\\0\\\vdots\\0\\0\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}+\ldots+\alpha_{k-2}\begin{pmatrix}*\\*\\*\\\vdots\\1\\0\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}+\alpha_{k-1}\begin{pmatrix}*\\*\\*\\\vdots\\*\\1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}+\alpha_k\begin{pmatrix}*\\*\\*\\\vdots\\*\\*\\1\\\vdots\\0\end{pmatrix}=\begin{array}{c}\begin{pmatrix}*\\*\\*\\\vdots\\*\\*\\\alpha_k\\\vdots\\0\end{pmatrix}\end{array}\begin{array}{l}\\\\\\\\\\\\\leftarrow k\\\\\\\end{array}.$$

Quindi $\alpha_k = 0$. Sostituendo $\alpha_k = 0$ in $(\bullet)$ si ricava

$$(\bullet\bullet)\quad \alpha_1\underline{u}_{j_1}+\alpha_2\underline{u}_{j_2}+\ldots+\alpha_{k-2}\underline{u}_{j_{k-2}}+\alpha_{k-1}\underline{u}_{j_{k-1}}=\underline{0}.$$

Allora

$$\begin{pmatrix}0\\0\\0\\\vdots\\0\\0\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}=\alpha_1\begin{pmatrix}1\\0\\0\\\vdots\\0\\0\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}+\alpha_2\begin{pmatrix}*\\1\\0\\\vdots\\0\\0\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}+\ldots+\alpha_{k-2}\begin{pmatrix}*\\*\\*\\\vdots\\1\\0\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}+\alpha_{k-1}\begin{pmatrix}*\\*\\*\\\vdots\\*\\1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}*\\*\\*\\\vdots\\*\\\alpha_{k-1}\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}\begin{array}{l}\\\\\\\\\\\leftarrow k-1\\\\\\\\\end{array}.$$

Quindi anche $\alpha_{k-1} = 0$. Sostituendo $\alpha_{k-1} = 0$ in $(\bullet\bullet)$ si ricava

$$(\bullet\bullet\bullet)\quad \alpha_1\underline{u}_{j_1}+\alpha_2\underline{u}_{j_2}+\ldots+\alpha_{k-2}\underline{u}_{j_{k-2}}=\underline{0}.$$

Allora

$$\begin{pmatrix}0\\0\\0\\\vdots\\0\\0\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}=\alpha_1\begin{pmatrix}1\\0\\0\\\vdots\\0\\0\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}+\alpha_2\begin{pmatrix}*\\1\\0\\\vdots\\0\\0\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}+\ldots+\alpha_{k-2}\begin{pmatrix}*\\*\\*\\\vdots\\1\\0\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}*\\*\\*\\\vdots\\\alpha_{k-2}\\0\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}\begin{array}{l}\\\\\\\\\leftarrow k-2\\\\\\\\\\\end{array}.$$

Quindi $\alpha_{k-2} = 0$. Cosí procedendo si ottiene che $\alpha_k = \alpha_{k-1} = \alpha_{k-2} = \ldots = \alpha_2 = \alpha_1 = 0$, ossia le colonne dominanti di U, $\underline{u}_{j_1}, \underline{u}_{j_2}, \ldots, \underline{u}_{j_k}$, sono linearmente indipendenti.

ESERCIZIO TIPO 9

Si provi che le righe non nulle di una matrice in forma ridotta di Gauss diversa dalla matrice nulla sono linearmente indipendenti.

Sia $U \neq \mathbb{O}$ una matrice $m \times n$ in forma ridotta di Gauss. Siano $\underline{r}_1^T, \underline{r}_2^T, \ldots, \underline{r}_k^T$ le sue righe non nulle. Ciascuna di esse è un vettore riga con n componenti, inoltre

$\underline{r}_1^T$ è del tipo

$$\begin{array}{cccccccccccc} & & & j_1 & & & & & & & & \\ & & & \downarrow & & & & & & & & \\ (0 & \ldots & 0 & 1 & * & \ldots & * & \ldots & \ldots & \ldots & *) \end{array}$$

$\underline{r}_2^T$ è del tipo

$$\begin{array}{cccccccccccc} & & & & & & j_2 & & & & \\ & & & & & & \downarrow & & & & \\ (0 & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & 0 & 1 & * & \ldots & \ldots & *) \end{array}$$

$\ldots, \underline{r}_k^T$ è del tipo

$$\begin{array}{cccccccccccc} & & & & & & & & j_k & & \\ & & & & & & & & \downarrow & & \\ (0 & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & 0 & 1 & * & \ldots) \end{array}$$

Siano $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{k-1}, \alpha_k$, degli scalari tali che

$$(\bullet) \quad \alpha_1 \underline{r}_1^T + \alpha_2 \underline{r}_2^T + \ldots + \alpha_k \underline{r}_k^T = \underline{0}^T.$$

Allora

$$\begin{array}{rcccccccccccccl} & & & & j_1 & & & & j_2 & & j_k & & & & \\ & & & & \downarrow & & & & \downarrow & & \downarrow & & & & \\ \alpha_1 & (0 & \ldots & 0 & 1 & * & \ldots & * & \ldots & \ldots & \ldots & * &) & + & \\ +\alpha_2 & (0 & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & 0 & 1 & * & \ldots & \ldots & * &) & + & \\ + & & & & & & & \ldots & & & & & & & \\ +\alpha_k & (0 & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & 0 & 1 & * & \ldots &) & = & \\ = & (0 & \ldots & 0 & \alpha_1 & * & \ldots & * & \ldots & \ldots & \ldots & * &) & & \end{array}$$

è il vettore riga nullo (con n componenti). Quindi $\alpha_1 = 0$ e sostiuendo $\alpha_1 = 0$ in($\bullet$) si ottiene

$$(\bullet\bullet) \quad \alpha_2 \underline{r}_2^T + \ldots + \alpha_k \underline{r}_k^T = \underline{0}^T.$$

Allora

$$
\begin{array}{rl}
\alpha_2\,(& 0 \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad 0 \quad \overset{\overset{j_2}{\downarrow}}{1} \quad * \quad \dots \quad \dots \quad *\,)+ \\
+ & \qquad\qquad\qquad\qquad \dots \\
+\alpha_k\,(& 0 \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad 0 \quad \overset{\overset{j_k}{\downarrow}}{1} \quad * \quad \dots\,) = \\
=(& 0 \quad \dots \qquad\qquad\quad \dots \quad 0 \quad \alpha_2 \quad * \quad \dots \quad *\,)
\end{array}
$$

è il vettore riga nullo (con n componenti). Quindi $\alpha_2 = 0$ e sostiuendo $\alpha_2 = 0$ in $(\bullet\bullet)$ si ottiene

$$(\bullet\bullet\bullet) \qquad \alpha_3\underline{r}_3^T + \ldots + \alpha_k\underline{r}_k^T = \underline{0}^T.$$

Cosí procedendo si ottiene che $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \ldots = \alpha_{k-1} = \alpha_k = 0$, ossia le righe non nulle di U, $\underline{r}_1^T, \underline{r}_2^T, \ldots, \underline{r}_k^T$, sono linearmente indipendenti.

ESERCIZIO TIPO 10

(1) Si provi che $\mathcal{S}_1 = \{\underline{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \underline{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \underline{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \underline{v}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \underline{v}_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\}$ è un insieme di generatori di $\mathbb{R}^3$.

(2) Sia $\mathcal{S}_2 = \{\underline{w}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \underline{w}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \underline{w}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \underline{w}_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \underline{w}_5 = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}\}$. Si dica se $\mathcal{S}_2$ è un insieme di generatori di $\mathbb{R}^3$.

(1) Per provare che $\mathcal{S}$ è un insieme di generatori di $\mathbb{R}^3$ occorre provare che per ogni $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ esistono $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5 \in \mathbb{R}$ tali che

$$
\begin{aligned}
\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} &= \alpha_1\underline{v}_1 + \alpha_2\underline{v}_2 + \alpha_3\underline{v}_3 + \alpha_4\underline{v}_4 + \alpha_5\underline{v}_5 = \\
&= \alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_4 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \alpha_5 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3 \\ \alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_4 \\ \alpha_3 - \alpha_4 + \alpha_5 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

ossia che il sistema lineare

$$(*) \qquad \begin{cases} \alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3 = a \\ \alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_4 = b \\ \alpha_3 - \alpha_4 + \alpha_5 = c \end{cases}$$

nelle incognite $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5$ ha soluzione **qualunque** siano $a, b, c \in \mathbb{R}$.

Facendo una eliminazione di Gauss sulla matrice aumentata del sistema si ottiene

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & a \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & c \end{array}\right) \xrightarrow[E_{21}(-1)]{} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & b-a \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & c \end{array}\right) \rightarrow$$

$$\xrightarrow[E_{32}(-1)E_2(-1)]{} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & a-b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & c+b-a \end{array}\right) = (\, U_1 \quad | \quad \underline{d}_1 \,).$$

Poichè $\underline{d}_1$ è libera qualunque siano $a, b, c \in \mathbb{R}$, allora $(*)$ ha soluzione qualunque siano $a, b, c \in \mathbb{R}$, per cui $\mathcal{S}$ è un insieme di generatori di $\mathbb{R}^3$.

(2) Per sapere se $\mathcal{S}_2$ è o meno un insieme di generatori di $\mathbb{R}^3$ dobbiamo verificare se per ogni $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ esistano o meno $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5 \in \mathbb{R}$ tali che

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \alpha_1 \underline{w}_1 + \alpha_2 \underline{w}_2 + \alpha_3 \underline{w}_3 + \alpha_4 \underline{w}_4 + \alpha_5 \underline{w}_5 =$$

$$= \alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_4 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_5 \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 + 3\alpha_2 + \alpha_3 + 2\alpha_4 + 4\alpha_5 \\ \alpha_1 + 3\alpha_2 + \alpha_4 + 3\alpha_5 \\ \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5 \end{pmatrix}$$

ossia se il sistema lineare

$$(*) \qquad \begin{cases} \alpha_1 + 3\alpha_2 + \alpha_3 + 2\alpha_4 + 4\alpha_5 = a \\ \alpha_1 + 3\alpha_2 + \alpha_4 + 3\alpha_5 = b \\ \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5 = c \end{cases}$$

nelle incognite $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5$ abbia o meno soluzione **per ogni** $a, b, c \in \mathbb{R}$.

Se $(*)$ avesse soluzione **per ogni** $a, b, c \in \mathbb{R}$ allora $\mathcal{S}_2$ sarebbe un insieme di generatori di $\mathbb{R}^3$, in caso contrario (ossia se esistono $a, b, c \in \mathbb{R}$ per cui $(*)$ non ha soluzione) no.

Facendo una eliminazione di Gauss sulla matrice aumentata del sistema si ottiene

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 3 & 1 & 2 & 4 & a \\ 1 & 3 & 0 & 1 & 3 & b \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & c \end{array}\right) \xrightarrow[E_{21}(-1)]{} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 3 & 1 & 2 & 4 & a \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & b-a \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & c \end{array}\right) \rightarrow$$

$$\xrightarrow[E_{32}(-1)E_2(-1)]{} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 3 & 1 & 2 & 4 & a \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & a-b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c+b-a \end{array}\right) = (\, U_2 \quad | \quad \underline{d}_2 \,).$$

Poichè esistono $a, b, c \in \mathbb{R}$ per cui $\underline{d}_2$ è dominante (ad esempio si prendano $a = b = 0$ e $c = 1$), allora $\mathcal{S}_2$ non è un insieme di generatori di $\mathbb{R}^3$

(in altre parole: poichè esistono dei vettori di $\mathbb{R}^3$ che **NON** si possono esprimere come combinazione lineare degli elementi di $\mathcal{S}_2$, ad esempio il vettore $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, allora $\mathcal{S}_2$ **NON** è un insieme di generatori di $\mathbb{R}^3$).

LEZIONE 12

Lemma della scrematura.

Sia V uno spazio vettoriale su K ($K \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$).

Proposizione. Supponiamo che $S = \{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_n\}$ sia un insieme di generatori di V e che $\underline{v}_i \in S$ sia combinazione lineare dei rimanenti elementi di S.

Allora $S' = S \setminus \{\underline{v}_i\}$ è ancora un insieme di generatori di V.

Dimostrazione. Dobbiamo provare che ogni $\underline{v} \in V$ è combinazione lineare degli elementi di $S' = \{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_{i-1}, \underline{v}_{i+1}, \ldots, \underline{v}_n\}$, ossia che

per ogni $\underline{v} \in V$ esistono $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_{i-1}, \gamma_{i+1}, \ldots, \gamma_n \in K$ tali che
$\underline{v} = \gamma_1 \underline{v}_1 + \gamma_2 \underline{v}_2 + \ldots + \gamma_{i-1} \underline{v}_{i-1} + \gamma_{i+1} \underline{v}_{i+1} + \ldots + \gamma_n \underline{v}_n$.

Sia dunque $\underline{v} \in V$. Poichè $S = \{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_n\}$ è un insieme di generatori di V,

esistono $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in K$ tali che

$$(*) \quad \underline{v} = \alpha_1 \underline{v}_1 + \alpha_2 \underline{v}_2 + \ldots + \alpha_n \underline{v}_n.$$

Poichè $\underline{v}_i$ è combinazione lineare degli elementi di $S' = \{\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_{i-1}, \underline{v}_{i+1}, \ldots, \underline{v}_n\}$,

esistono $\beta_1, \ldots, \beta_{i-1}, \beta_{i+1}, \ldots, \beta_n \in K$ tali che

$$(**) \quad \underline{v}_i = \beta_1 \underline{v}_1 + \ldots + \beta_{i-1} \underline{v}_{i-1} + \beta_{i+1} \underline{v}_{i+1} + \ldots + \beta_n \underline{v}_n.$$

Sostituendo $(**)$ in $(*)$ si ottiene:

$$\underline{v} = \alpha_1 \underline{v}_1 + \ldots + \alpha_{i-1} \underline{v}_{i-1} + \alpha_i (\beta_1 \underline{v}_1 + \ldots + \beta_{i-1} \underline{v}_{i-1} + \beta_{i+1} \underline{v}_{i+1} + \ldots\ldots + \beta_n \underline{v}_n) + \alpha_{i+1} \underline{v}_{i+1} + \ldots + \alpha_n \underline{v}_n =$$
$$= (\alpha_1 + \alpha_i \beta_1) \underline{v}_1 + \ldots + (\alpha_{i-1} + \alpha_i \beta_{i-1}) \underline{v}_{i-1} + (\alpha_{i+1} + \alpha_i \beta_{i+1}) \underline{v}_{i+1} + \ldots + (\alpha_n + \alpha_i \beta_n) \underline{v}_n.$$

Quindi basta prendere $\gamma_j = \alpha_j + \alpha_i \beta_j$ per ogni $j \neq i$.

Lemma della scrematura. Siano $V \neq \{\underline{0}\}$ ed $S = \{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_n\}$ un insieme di generatori di V. Allora esiste un sottoinsieme S_0 contenuto in S che è sia linearmente indipendente, sia un insieme di generatori di V.

Dimostrazione. Sia

$$S_1 = \begin{cases} S \setminus \{\underline{0}\} & \text{se} \quad \underline{0} \in S \\ S & \text{se} \quad \underline{0} \notin S \end{cases}$$

Poichè $V \neq \{\underline{0}\}$ e $V = \langle S \rangle$ allora $S_1 \neq \emptyset$.

Per ogni $\underline{v} \in S$ si ha $\underline{0} = 0\underline{v}$, ossia $\underline{0}$ è combinazione lineare degli elementi di S, quindi per la Proposizione precedente si ha $\langle S_1 \rangle = \langle S \rangle$.

Sia $S_1 = \{\underline{w}_1, \underline{w}_2, \dots, \underline{w}_m\}$ ($m = n-1$ se $\underline{0} \in S$, $m = n$ se $\underline{0} \notin S$).

Si ponga:

$$A_1 = \{\underline{w}_1\},$$

e si noti che essendo $\underline{w}_1 \neq \underline{0}$ si ha che A_1 è linearmente indipendente (L.I.);

$$A_2 = \begin{cases} A_1 & \text{se} \quad A_1 \cup \{\underline{w}_2\} \quad \text{è linearmente dipendente (L.D.)} \\ \\ A_1 \cup \{\underline{w}_2\} & \text{se} \quad A_1 \cup \{\underline{w}_2\} \quad \text{è linearmente indipendente (L.I.)} \end{cases}$$

$$A_3 = \begin{cases} A_2 & \text{se} \quad A_2 \cup \{\underline{w}_3\} \quad \text{è} \quad L.D. \\ \\ A_2 \cup \{\underline{w}_3\} & \text{se} \quad A_2 \cup \{\underline{w}_3\} \quad \text{è} \quad L.I. \end{cases}$$

Cosí procedendo, per ogni $1 < k \leq m$, con si ponga

$$A_k = \begin{cases} A_{k-1} & \text{se} \quad A_{k-1} \cup \{\underline{w}_k\} \quad \text{è} \quad L.D. \\ \\ A_{k-1} \cup \{\underline{w}_k\} & \text{se} \quad A_{k-1} \cup \{\underline{w}_k\} \quad \text{è} \quad L.I. \end{cases}$$

Per costruzione ciascun A_k è $L.I.$, in particolare A_m è $L.I.$

Vogliamo provare che A_m è anche un insieme di generatori di V, per cui si puó prendere $S_0 = A_m$.

Cominciamo con il provare che per ogni k si ha:

$$(*) \quad \langle A_k \rangle = \langle A_{k-1} \cup \{\underline{w}_k\} \rangle.$$

1^0 caso: se $A_{k-1} \cup \{\underline{w}_k\}$ è $L.D.$

Allora per definizione di A_k si ha $A_k = A_{k-1}$. Poichè A_{k-1} è $L.I.$, applicando l'esercizio in fondo alla Lezione 11 si ottiene che $\underline{w}_k \in \langle A_{k-1} \rangle$. Quindi per la Proposizione di questa lezione

$$\langle A_{k-1} \cup \{\underline{w}_k\} \rangle \underset{\boxed{\underline{w}_k \in \langle A_{k-1} \rangle}}{\overset{}{=}} \langle A_{k-1} \rangle \underset{\boxed{A_{k-1} = A_k}}{=} \langle A_k \rangle$$

2^0 caso: se $A_{k-1} \cup \{\underline{w}_k\}$ è $L.I.$

Allora per definizione di A_k si ha $A_k = A_{k-1} \cup \{\underline{w}_k\}$. Quindi anche

$$\langle A_k \rangle = \langle A_{k-1} \cup \{\underline{w}_k\} \rangle.$$

Questo completa la dimostrazione di $(*)$.

Applichiamo ora ripetutamente $(*)$:

$\langle A_m\rangle = \langle A_{m-1} \cup \{\underline{w}_m\}\rangle$ (applicando (*) con $k = m$)
$\langle A_{m-1} \cup \{\underline{w}_m\}\rangle = \langle A_{m-2} \cup \{\underline{w}_{m-1}, \underline{w}_m\}\rangle$ (applicando (*) con $k = m-1$)
$\langle A_{m-2} \cup \{\underline{w}_{m-1}, \underline{w}_m\}\rangle = \langle A_{m-3} \cup \{\underline{w}_{m-2}, \underline{w}_{m-1}, \underline{w}_m\}\rangle$ (applicando (*) con $k = m-2$)
$\dots$

fino ad arrivare a

$$\langle A_2 \cup \{\underline{w}_3, \dots, \underline{w}_m\}\rangle = \langle A_1 \cup \{\underline{w}_2, \underline{w}_2, \dots, \underline{w}_m\}\rangle \quad \text{(applicando (*) con } k = 2).$$

Dunque:

$$\langle A_m\rangle = \langle A_{m-1} \cup \{\underline{w}_m\}\rangle = \langle A_{m-2} \cup \{\underline{w}_{m-1}, \underline{w}_m\}\rangle = \dots$$
$$\dots = \langle A_1 \cup \{\underline{w}_2, \dots, \underline{w}_{m-1}, \underline{w}_m\}\rangle = \langle \underline{w}_1, \underline{w}_2, \dots, \underline{w}_{m-1}, \underline{w}_m\rangle = \langle S_1\rangle = \langle S\rangle = V,$$

ossia $S_0 = A_m$ è un insieme di generatori di V, ed è linearmente indipendente.

Def. 1. Un sottoinsieme di elementi di V che sia

– sia un insieme di generatori di V,

– sia linearmente indipendente,

si chiama **una base di V**.

Esempio 1. L'insieme $\{\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n\}$ che ha come elementi le colonne della matrice identica I_n è sia una base di $\mathbb{R}^n$, spazio vettoriale su $\mathbb{R}$, che una base di $\mathbb{C}^n$, spazio vettoriale su $\mathbb{C}$ (si vedano gli esempi 1 e 4 della Lezione 11).

Analogamente l'insieme $\{\underline{e}_1^T, \underline{e}_2^T, \dots, \underline{e}_n^T\}$ è una base di $\mathbb{R}_n$ (risp. $\mathbb{C}_n$) come spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ (risp. $\mathbb{C}$).

Il Lemma della scrematura prova che **ogni insieme di generatori di V contiene una base di V**.

Esempio 2. Si trovi una base $\mathcal{B}$ di $\mathbb{R}^2$ contenuta nell'insieme di generatori di $\mathbb{R}^2$

$$S = \{\underline{v}_1 = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \underline{v}_2 = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}, \underline{v}_3 = \begin{pmatrix}5\\5\end{pmatrix}, \underline{v}_4 = \begin{pmatrix}3\\3\end{pmatrix}, \underline{v}_5 = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}, \underline{v}_6 = \begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}\}.$$

$S_1 = S \setminus \{\underline{0}\} = \{\underline{w}_1 = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \underline{w}_2 = \begin{pmatrix}5\\5\end{pmatrix}, \underline{w}_3 = \begin{pmatrix}3\\3\end{pmatrix}, \underline{w}_4 = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}, \underline{w}_5 = \begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}\}.$

$A_1 = \{\underline{w}_1 = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\}$

$A_1 \cup \{\underline{w}_2\} = \{\underline{w}_1, \underline{w}_2\}$ è un insieme L.D. (perchè $5\underline{w}_1 - \underline{w}_2 = \underline{0}$), allora $A_2 = A_1 = \{\underline{w}_1\}$.

$A_2 \cup \{\underline{w}_3\} = \{\underline{w}_1, \underline{w}_3\}$ è un insieme L.D. (perchè $3\underline{w}_1 - \underline{w}_3 = \underline{0}$), allora $A_3 = A_2 = A_1 = \{\underline{w}_1\}$.

$A_3 \cup \{\underline{w}_4\} = \{\underline{w}_1, \underline{w}_4\}$ è un insieme L.I., perchè

$$\underline{0} = \alpha\underline{w}_1 + \beta\underline{w}_4 = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \alpha + \beta \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \alpha = \beta = 0.$$

Allora $A_4 = A_3 \cup \{\underline{w}_4\} = \{\underline{w}_1, \underline{w}_4\}$.

$A_4 \cup \{\underline{w}_5\} = \{\underline{w}_1, \underline{w}_4, \underline{w}_5\}$ è un insieme L.D. (perchè $3\underline{w}_1 - \underline{w}_4 - \underline{w}_5 = \underline{0}$), allora $A_5 = A_4 = \{\underline{w}_1, \underline{w}_4\}$.

$\mathcal{B} = A_5 = \{\underline{w}_1, \underline{w}_4\}$ è una base di $\mathbb{R}^2$ contenuta in S.

ESERCIZIO TIPO 11

Si consideri il seguente insieme di generatori di $\mathbb{R}^3$:

$$\mathcal{S} = \left\{ \underline{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \underline{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \underline{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \underline{v}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \underline{v}_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \underline{v}_6 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Si trovi una base di $\mathbb{R}^3$ contenuta in $\mathcal{S}$.

Applichiamo il "Lemma della scrematura".

– Poichè $\underline{0} \in \mathcal{S}$, poniamo $\mathcal{S}_1 = \mathcal{S} \setminus \{\underline{0}\}$, ossia

$$\mathcal{S}_1 = \left\{ \underline{w}_1 = \underline{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \underline{w}_2 = \underline{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \underline{w}_3 = \underline{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \underline{w}_4 = \underline{v}_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \underline{w}_5 = \underline{v}_6 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

N.B. Se fosse stato $\underline{0} \notin \mathcal{S}$ avremmo preso $\mathcal{S}_1 = \mathcal{S}$ e $\underline{w}_i = \underline{v}_i$ per ogni $i = 1, \dots, 5$.

– $A_1 = \{\underline{w}_1\}$.

– Poichè $\underline{w}_2 = 2\underline{w}_1$, allora $A_1 \cup \{\underline{w}_2\} = \{\underline{w}_1, \underline{w}_2\}$ è linearmente dipendente (L.D.), quindi $A_2 = A_1 = \{\underline{w}_1\}$.

– $A_2 \cup \{\underline{w}_3\} = \{\underline{w}_1, \underline{w}_3\}$ è linearmente indipendente (L.I.):

$$\underline{0} = \alpha \underline{w}_1 + \beta \underline{w}_3 = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha + \beta \\ \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \alpha = \beta = 0.$$

Quindi $A_3 = A_2 \cup \{\underline{w}_3\} = \{\underline{w}_1, \underline{w}_3\}$.

– $A_3 \cup \{\underline{w}_4\} = \{\underline{w}_1, \underline{w}_3, \underline{w}_4\}$ è linearmente dipendente (L.D.):

$$\underline{0} = \alpha \underline{w}_1 + \beta \underline{w}_3 + \delta w_4 = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \delta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha + \beta \\ \alpha + \delta \\ \beta - \delta \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad (*) \begin{cases} \alpha + \beta = 0 \\ \alpha + \delta = 0 \\ \beta - \delta = 0 \end{cases}$$

Facendo una eliminazione di Gauss sulla matrice aumentata di $(*)$ si ottiene:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & | & 0 \\ 1 & 0 & 1 & | & 0 \\ 0 & 1 & -1 & | & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[E_{21}(-1)]{} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & | & 0 \\ 0 & -1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 1 & -1 & | & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[E_{32}(-1)E_2(-1)]{} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 1 & -1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix},$$

per cui $(*)$ è equivalente a $(*)' \begin{cases} \alpha + \beta = 0 \\ \beta - \delta = 0 \end{cases}$ che ha ∞^1 soluzioni, in particolare una soluzione non nulla.

Quindi $A_4 = A_3 = \{\underline{w}_1, \underline{w}_3\}$.

– $A_4 \cup \{\underline{w}_5\} = \{\underline{w}_1, \underline{w}_3, \underline{w}_5\}$ è linearmente indipendente (L.I.):

$$\underline{0} = \alpha \underline{w}_1 + \beta \underline{w}_3 + \delta w_5 = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \delta \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha + \beta \\ \alpha \\ \beta + \delta \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \alpha = \beta = \delta = 0.$$

Quindi $A_5 = A_4 \cup \{\underline{w}_5\} = \{\underline{w}_1, \underline{w}_3, \underline{w}_5\}$.

Dunque $\mathbb{R}^3 = \langle \mathcal{S} \rangle = \langle \underline{w}_1, \underline{w}_3, \underline{w}_5 \rangle$ e poichè $\{\underline{w}_1, \underline{w}_3, \underline{w}_5\}$ è linearmente indipendente, allora $\{\underline{w}_1, \underline{w}_3, \underline{w}_5\}$ è una base di $\mathbb{R}^3$ contenuta in $\mathcal{S}$.

ESERCITAZIONI* 3

$\boxed{1}$ Si dica quale dei seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{R}^3$ è linearmente indipendente:

$$(1) \quad \left\{ \underline{v}_1 = \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}, \underline{v}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}, \underline{v}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\},$$

$$(2) \quad \left\{ \underline{w}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \underline{w}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \underline{w}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

$\boxed{2}$ Sia V uno spazio vettoriale reale (risp. complesso) e sia $\mathcal{S} = \{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3\}$ un sottoinsieme linearmente indipendente di V.

Si dica quale dei seguenti sottoinsiemi di V è linearmente indipendente:

$$(1) \quad \mathcal{S}_1 = \{\underline{v}_2 + \underline{v}_3, \underline{v}_1 + \underline{v}_3, \underline{v}_1 + \underline{v}_2 + \underline{v}_3\},$$
$$(2) \quad \mathcal{S}_2 = \{\underline{v}_1 - 2\underline{v}_3, \underline{v}_1 + \underline{v}_2, \underline{v}_2 + 2\underline{v}_3\}.$$

$\boxed{3}$ Sia W l'insieme delle matrici 2×2 reali simmetriche.

(a) Si provi che W è un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale delle matrici 2×2 reali.

(b) Sia $\mathcal{B} = \left\{ B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, B_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$.

Si provi che $\mathcal{B}$ è una base di W.

(c) Sia

$$\mathcal{S} = \left\{ C_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, C_2 = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}, C_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, C_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, C_5 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Si provi che $\mathcal{S}$ è un insieme di generatori di W.

(d) Si trovi una base di W contenuta in $\mathcal{S}$.

$\boxed{4}$ Sia $\mathcal{S} = \left\{ \underline{v}_1 = \begin{pmatrix} i \\ i \\ i \end{pmatrix}, \underline{v}_2 = \begin{pmatrix} -2i \\ -2i \\ -2i \end{pmatrix}, \underline{v}_3 = \begin{pmatrix} 1+i \\ 1-i \\ i \end{pmatrix}, \underline{v}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1-2i \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$. Si dica se $\mathcal{S}$ è un insieme di generatori di $\mathbb{C}^3$.

Svolgimento ESERCITAZIONI* 3

$\boxed{1}$ Si dica quale dei seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{R}^3$ è linearmente indipendente:

$$(1) \quad \left\{ \underline{v}_1 = \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}, \underline{v}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}, \underline{v}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\},$$

$$(2) \quad \left\{ \underline{w}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \underline{w}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \underline{w}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

(1) Il problema è stabilire se gli unici numeri reali α_1, α_2, α_3 per cui $\alpha_1\underline{v}_1+\alpha_2\underline{v}_2+\alpha_3\underline{v}_3 = \underline{0}$ siano $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$, oppure no. Poichè, dati α_1, α_2, $\alpha_3 \in \mathbb{R}$, si ha

$$\alpha_1\underline{v}_1 + \alpha_2\underline{v}_2 + \alpha_3\underline{v}_3 = \alpha_1 \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4\alpha_1 + 4\alpha_2 + 2\alpha_3 \\ -2\alpha_1 + 6\alpha_2 - \alpha_3 \\ -2\alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3 \end{pmatrix},$$

allora $\alpha_1\underline{v}_1 + \alpha_2\underline{v}_2 + \alpha_3\underline{v}_3 = \underline{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ se e solo se

$$(*) \qquad \begin{cases} -4\alpha_1 + 4\alpha_2 + 2\alpha_3 = 0 \\ -2\alpha_1 + 6\alpha_2 - \alpha_3 = 0 \\ -2\alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3 = 0 \end{cases}$$

Il problema diventa quindi stabilire se il sistema $(*)$ (nelle incognite $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$) abbia un'unica soluzione (e quindi la soluzione nulla $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$), oppure no.

La matrice aumentata di $(*)$ è: $\begin{pmatrix} -4 & 4 & 2 & | & 0 \\ -2 & 6 & -1 & | & 0 \\ -2 & 2 & 1 & | & 0 \end{pmatrix}$.

Facendo un'eliminazione di Gauss si ottiene:

$$\begin{pmatrix} -4 & 4 & 2 & | & 0 \\ -2 & 6 & -1 & | & 0 \\ -2 & 2 & 1 & | & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{31}(2)E_{21}(2)E_1(-\frac{1}{4})} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1/2 & | & 0 \\ 0 & 4 & -2 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\xrightarrow{E_2(\frac{1}{4})} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1/2 & | & 0 \\ 0 & 1 & -1/2 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} = (U \quad | \quad \underline{0}\,).$$

Poichè **non tutte** le colonne di U sono **dominanti**, allora $(*)$ ha ∞ soluzioni. In particolare $(*)$ ha una soluzione non nulla, e quindi $\{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3\}$ è **linearmente dipendente** (ad esempio, poichè $(*)$ è equivalente a

$$\begin{cases} \alpha_1 - \alpha_2 - \frac{1}{2}\alpha_3 = 0 \\ \qquad \alpha_2 - \frac{1}{2}\alpha_3 = 0 \end{cases}$$

prendendo $\alpha_3 = 1$ con la sostituzione all'indietro si ottiene $\alpha_2 = \frac{1}{2}$ ed $\alpha_1 = \alpha_2 + \frac{1}{2}\alpha_3 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$, ossia $\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$ è una soluzione non nulla di $(*)$ e $\underline{v}_1 + \frac{1}{2}\underline{v}_2 + \underline{v}_3 = \underline{0}$ è una combinazione lineare nulla di $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3$ con coefficienti non tutti nulli).

(2) $$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \alpha_1\underline{w}_1 + \alpha_2\underline{w}_2 + \alpha_3\underline{w}_3 = \alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 + \alpha_2 \\ -\alpha_1 + 4\alpha_3 \\ \alpha_1 + 2\alpha_2 \end{pmatrix}$$

$$\iff \qquad (*) \qquad \begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 = 0 \\ -\alpha_1 + 4\alpha_3 = 0 \\ \alpha_1 + 2\alpha_2 = 0 \end{cases}$$

Facendo un'eliminazione di Gauss sulla matrice aumentata di $(*)$ si ottiene:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{E_{31}(-1)E_{21}(1)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \rightarrow$$

$$\xrightarrow{E_{32}(-1)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{E_3(-\frac{1}{4})} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) = (U \quad | \quad \underline{0}).$$

Poichè **tutte** le colonne di U sono **dominanti**, allora $(*)$ ha come unica soluzione la soluzione nulla $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, ossia

$$\alpha_1\underline{w}_1 + \alpha_2\underline{w}_2 + \alpha_3\underline{w}_3 = \underline{0} \quad \Longrightarrow \quad \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0.$$

Quindi $\{\underline{w}_1, \underline{w}_2, \underline{w}_3\}$ è **linearmente indipendente**.

$\boxed{2}$ Sia V uno spazio vettoriale reale (risp. complesso) e sia $\mathcal{S} = \{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3\}$ un sottoinsieme linearmente indipendente di V.

Si dica quale dei seguenti sottoinsiemi di V è linearmente indipendente:

$$\begin{aligned} &(1) \quad \mathcal{S}_1 = \{\underline{v}_2 + \underline{v}_3, \underline{v}_1 + \underline{v}_3, \underline{v}_1 + \underline{v}_2 + \underline{v}_3\}, \\ &(2) \quad \mathcal{S}_2 = \{\underline{v}_1 - 2\underline{v}_3, \underline{v}_1 + \underline{v}_2, \underline{v}_2 + 2\underline{v}_3\}. \end{aligned}$$

(1)

$$\underline{0} = \alpha(\underline{v}_2 + \underline{v}_3) + \beta(\underline{v}_1 + \underline{v}_3) + \delta(\underline{v}_1 + \underline{v}_2 + \underline{v}_3) = (\beta+\delta)\underline{v}_1 + (\alpha+\delta)\underline{v}_2 + (\alpha+\beta+\delta)\underline{v}_3$$

$$\underset{\boxed{\text{poichè } \mathcal{S} \text{ è L.I.}}}{\overset{}{\Longleftrightarrow}} \qquad (*) \quad \begin{cases} \beta + \delta = 0 \\ \alpha + \delta = 0 \\ \alpha + \beta + \delta = 0 \end{cases}$$

Facendo un'eliminazione di Gauss sulla matrice aumentata di $(*)$ si ottiene:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & | & 0 \\ 1 & 0 & 1 & | & 0 \\ 1 & 1 & 1 & | & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{12}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & | & 0 \\ 0 & 1 & 1 & | & 0 \\ 1 & 1 & 1 & | & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{31}(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & | & 0 \\ 0 & 1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\xrightarrow{E_{32}(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & | & 0 \\ 0 & 1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & -1 & | & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{3}(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & | & 0 \\ 0 & 1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 \end{pmatrix} = (U \quad | \quad \underline{0}).$$

Poichè **tutte** le colonne di U sono **dominanti**, l'unica soluzione di $(*)$ è $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, quindi $\mathcal{S}_1$ è **linearmente indipendente**.

(2)

$$\underline{0} = \alpha(\underline{v}_1 - 2\underline{v}_3) + \beta(\underline{v}_1 + \underline{v}_2) + \delta(\underline{v}_2 + 2\underline{v}_3) = (\alpha+\beta)\underline{v}_1 + (\beta+\delta)\underline{v}_2 + (-2\alpha+2\delta)\underline{v}_3$$

$$\underset{\boxed{\text{poichè } \mathcal{S} \text{ è L.I.}}}{\overset{}{\Longleftrightarrow}} \qquad (*) \quad \begin{cases} \alpha + \beta = 0 \\ \beta + \delta = 0 \\ -2\alpha + 2\delta = 0 \end{cases}$$

Facendo un'eliminazione di Gauss sulla matrice aumentata di $(*)$ si ottiene:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 1 & 1 & | & 0 \\ -2 & 0 & 2 & | & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{31}(2)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 2 & 2 & | & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{32}(-2)}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} = (U \quad | \quad \underline{0}).$$

Poichè U ha una colonna non dominante, $(*)$ ha ∞ soluzioni, in particolare $(*)$ ha una soluzione non nulla, quindi $\mathcal{S}_2$ è **linearmente dipendente**.

$\boxed{3}$ Sia W l'insieme delle matrici 2×2 reali simmetriche.

(a) Si provi che W è un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale delle matrici 2×2 reali.

(b) Sia $\mathcal{B} = \left\{ B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, B_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$.

Si provi che $\mathcal{B}$ è una base di W.

(c) Sia

$$\mathcal{S} = \left\{ C_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, C_2 = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}, C_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, C_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, C_5 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Si provi che $\mathcal{S}$ è un insieme di generatori di W.

(d) Si trovi una base di W contenuta in $\mathcal{S}$.

(a) $\quad W = \{A \in M_2(\mathbb{R}) | A = A^T\} = \{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} | a, b, c \in \mathbb{R}\}$

(i) $\quad A, B \in W \quad \overset{?}{\Longrightarrow} \quad A + B \in W$

$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{r} A \in W \Longrightarrow A \in M_2(\mathbb{R}) \\ B \in W \Longrightarrow B \in M_2(\mathbb{R}) \end{array}\right\} \Longrightarrow A + B \in M_2(\mathbb{R}) \\ \left.\begin{array}{r} A \in W \Longrightarrow A = A^T \\ B \in W \Longrightarrow B = B^T \end{array}\right\} \Longrightarrow (A+B)^T = A^T + B^T = A + B \end{array}\right\} \Longrightarrow A + B \in W$$

(ii) $\quad \alpha \in \mathbb{R}, A \in W \quad \overset{?}{\Longrightarrow} \quad \alpha A \in W$

$$\left.\begin{array}{r} A \in W \Longrightarrow A \in M_2(\mathbb{R}) \Longrightarrow \alpha A \in M_2(\mathbb{R}) \\ A \in W \Longrightarrow A = A^T \Longrightarrow (\alpha A)^T = \alpha A^T = \alpha A \end{array}\right\} \Longrightarrow \quad \alpha A \in W$$

Si osservi che sostituendo $M_2(\mathbb{R})$ con $M_n(\mathbb{R})$ si ottiene una dimostrazione del fatto che l'insieme delle matrici $n \times n$ reali simmetriche è un sottospazio dello spazio vettoriale $M_n(\mathbb{R})$ delle matrici $n \times n$ reali su $\mathbb{R}$.

(b) Per ogni $A \in W$ esistono $a, b, c \in \mathbb{R}$ tali che $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$. Poichè

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = aB_1 + bB_2 + cB_3,$$

allora $\mathcal{B} = \{B_1, B_2, B_3\}$ è un insieme di generatori di W.

Poichè

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} = aB_1 + bB_2 + cB_3 = \mathbb{O} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad a = b = c = 0,$$

allora $\mathcal{B}$ è linearmente indipendente.

(c) Per provare che $\mathcal{S}$ è un insieme di generatori di W occorre provare che **per ogni** $A \in W$ **esistono** $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5 \in \mathbb{R}$ tali che

$$A = \alpha_1 C_1 + \alpha_2 C_2 + \alpha_3 C_3 + \alpha_4 C_4 + \alpha_5 C_5.$$

Poichè per ogni $A \in W$ esistono $a, b, c \in \mathbb{R}$ tali che $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$, il problema diventa provare che per ogni $a, b, c \in \mathbb{R}$ esistono $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5 \in \mathbb{R}$ tali che

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} = \alpha_1 \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \alpha_4 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \alpha_5 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} \alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 & 2\alpha_1 + 3\alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_5 \\ 2\alpha_1 + 3\alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_5 & \alpha_4 + \alpha_5 \end{pmatrix}.$$

Equivalentemente, occorre provare che **per ogni** $a, b, c \in \mathbb{R}$ il sistema (nelle incognite $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5$)

$$(*) \qquad \begin{cases} \alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = a \\ 2\alpha_1 + 3\alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_5 = b \\ \alpha_4 + \alpha_5 = c \end{cases}$$

ha soluzione.

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & a \\ 2 & 3 & 1 & 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & c \end{array}\right) \xrightarrow{E_{21}(-2)} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & a \\ 0 & -1 & -1 & -2 & 1 & b-2a \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & c \end{array}\right) \xrightarrow{E_2(-1)}$$
$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & 1 & 2 & -1 & -b+2a \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & c \end{array}\right) = (U \mid \underline{d}).$$

Poichè $\underline{d}$ non è dominante **per ogni** $a, b, c \in \mathbb{R}$, allora $(*)$ ha soluzione **per ogni** $a, b, c \in \mathbb{R}$, e quindi $\mathcal{S}$ è un insieme di generatori di W.

Infatti $(*)$ è equivalente a

$$(**)\qquad \begin{cases} \alpha_1+2\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4 &= a \\ \alpha_2+\alpha_3+2\alpha_4-\alpha_5 &= -b+2a \\ \alpha_4+\alpha_5 &= c \end{cases}$$

Se, ad esempio, in $(**)$ si prende $\alpha_3=\alpha_5=0$, con la sostituzione all'indietro si ottiene

$$\begin{cases} \alpha_3=0 \\ \alpha_5=0 \\ \alpha_4=-\alpha_5+c=c \\ \alpha_2=-\alpha_3-2\alpha_4+\alpha_5-b+2a=-2c-b+2a \\ \alpha_1=-2\alpha_2-\alpha_3-\alpha_4+a=-2(-2c-b+2a)-c+a=3c+2b-3a \end{cases}$$

e quindi

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}=(3c+2b-3a)C_1+(-2c-b+2a)C_2+cC_4.$$

(d) 1^0 MODO.

Nella dimostrazione di (c) si è visto che

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}=(3c+2b-3a)C_1+(-2c-b+2a)C_2+cC_4,$$

quindi che il sottoinsieme $\{C_1,C_2,C_4\}$ di $\mathcal{S}$ è un insieme di generatori di W. Dunque, per il Lemma della scrematura, $\{C_1,C_2,C_4\}$ contiene una base di W. Poichè in (b) si è visto che $\mathcal{B}$ è una base di W, allora

$$\dim W = (\text{ numero degli elementi di } \mathcal{B}\ )=3.$$

Ogni base di W ha dunque 3 elementi, in particolare una base di W contenuta in $\{C_1,C_2,C_4\}$ deve avere 3 elementi. Poichè $\{C_1,C_2,C_4\}$ ha esattamente 3 elementi, si ottiene che $\{C_1,C_2,C_4\}$ è una base di W contenuta in $\mathcal{S}$.

2^0 MODO.

$S_1=S\setminus\{\underline{0}\}=\mathcal{S}$

$A_1=\{C_1\}$

$A_1\cup\{C_2\}=\{C_1,C_2\}$ è un insieme L.I. poichè

$$\alpha_1C_1+\alpha_2C_2=\mathbb{O}\quad\Longrightarrow\quad \alpha_1=\alpha_2=0.$$

Infatti:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathbb{O} = \alpha_1 C_1 + \alpha_2 C_2 = \alpha_1 \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} \alpha_1 + 2\alpha_2 & 2\alpha_1 + 3\alpha_2 \\ 2\alpha_1 + 3\alpha_2 & 0 \end{pmatrix} \implies (*) \quad \begin{cases} \alpha_1 + 2\alpha_2 = 0 \\ 2\alpha_1 + 3\alpha_2 = 0 \end{cases}$$

Facendo un'eliminazione di Gauss sulla matrice aumentata di $(*)$ si ottiene:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & | & 0 \\ 2 & 3 & | & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{21}(-2)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & | & 0 \\ 0 & -1 & | & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_2(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & | & 0 \\ 0 & 1 & | & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_1 & | & \underline{0} \end{pmatrix}$$

Poichè tutte le colonne di U_1 sono dominanti, allora $(*)$ ha un'unica soluzione, quindi quella nulla $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.
Dunque $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$.

Quindi $A_2 = A_1 \cup \{C_2\} = \{C_1, C_2\}$.

$A_2 \cup \{C_3\} = \{C_1, C_2, C_3\}$ è un insieme L.D.

Infatti:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathbb{O} = \alpha_1 C_1 + \alpha_2 C_2 + \alpha_3 C_3 = \alpha_1 \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} \alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3 & 2\alpha_1 + 3\alpha_2 + \alpha_3 \\ 2\alpha_1 + 3\alpha_2 + \alpha_3 & 0 \end{pmatrix} \implies (**) \quad \begin{cases} \alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3 = 0 \\ 2\alpha_1 + 3\alpha_2 + \alpha_3 = 0 \end{cases}$$

Facendo un'eliminazione di Gauss sulla matrice aumentata di $(**)$ si ottiene:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & | & 0 \\ 2 & 3 & 1 & | & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{21}(-2)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & | & 0 \\ 0 & -1 & -1 & | & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_2(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & | & 0 \\ 0 & 1 & 1 & | & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_2 & | & \underline{0} \end{pmatrix}$$

Poichè U_2 ha colonne libere (una: la 3^a), allora $(**)$ ha ∞ soluzioni, in particolare una soluzione non nulla.

Quindi $A_3 = A_2 = \{C_1, C_2\}$.

$A_3 \cup \{C_4\} = \{C_1, C_2, C_4\}$ è un insieme L.I.

Typeset by $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$-TEX
Typeset by $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$-TEX

Infatti:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathbb{O} = \alpha_1 C_1 + \alpha_2 C_2 + \alpha_3 C_4 = \alpha_1 \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_4 & 2\alpha_1 + 3\alpha_2 \\ 2\alpha_1 + 3\alpha_2 & \alpha_3 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad (***) \quad \begin{cases} \alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_4 & = 0 \\ 2\alpha_1 + 3\alpha_2 & = 0 \\ \alpha_3 & = 0 \end{cases}$$

Facendo un'eliminazione di Gauss sulla matrice aumentata di $(***)$ si ottiene:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{E_{21}(-2)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{E_2(-1)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) = \left(U_3 \quad | \quad \underline{0} \right)$$

Poichè tutte le colonne di U_3 sono dominanti, $(***)$ ha un'unica soluzione, quindi solo la soluzione nulla $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Dunque $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$.

Quindi $A_4 = A_3 \cup \{C_4\} = \{C_1, C_2, C_4\}$.

A questo punto si considera $A_4 \cup \{C_5\} = \{C_1, C_2, C_4, C_5\}$.

Poichè $\{C_1, C_2, C_4, C_5\}$ risulta L.D, allora $A_5 = A_4 = \{C_1, C_2, C_4\}$ è una base di W contenuta in $\mathcal{S}$.

$\boxed{N.B.}$ Per vedere che $\{C_1, C_2, C_4, C_5\}$ è L.D. si puó fare i conti, ossia verificare che

$$\alpha_1 C_1 + \alpha_2 C_2 + \alpha_3 C_4 + \alpha_4 C_5 = \mathbb{O} \quad \Longrightarrow \quad \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 0.$$

Ma si puó anche concludere senza fare la verifica che $\{C_1, C_2, C_4, C_5\}$ è L.D: poichè da (b) segue che $\dim W = 3$ allora $\{C_1, C_2, C_4\}$, in quanto sottoinsieme linearmente indipendente di W con 3 elementi, è una base di W (ed è contenuta in $\mathcal{S}$).

$\boxed{4}$ Sia $\mathcal{S} = \left\{ \underline{v}_1 = \begin{pmatrix} i \\ i \\ i \end{pmatrix}, \underline{v}_2 = \begin{pmatrix} -2i \\ -2i \\ -2i \end{pmatrix}, \underline{v}_3 = \begin{pmatrix} 1+i \\ 1-i \\ i \end{pmatrix}, \underline{v}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1-2i \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$. Si dica se $\mathcal{S}$ è un insieme di generatori di $\mathbb{C}^3$.

Il problema è stabilire se **per ogni** $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^3$ esistano o meno $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 \in \mathbb{C}$ tali che

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \alpha_1 \begin{pmatrix} i \\ i \\ i \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} -2i \\ -2i \\ -2i \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 1+i \\ 1-i \\ i \end{pmatrix} + \alpha_4 \begin{pmatrix} 1 \\ 1-2i \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i\alpha_1 - 2i\alpha_2 + (1+i)\alpha_3 + \alpha_4 \\ i\alpha_1 - 2i\alpha_2 + (1-i)\alpha_3 + (1-2i)\alpha_4 \\ i\alpha_1 - 2i\alpha_2 + i\alpha_3 \end{pmatrix},$$

ossia se per ogni $a, b, c \in \mathbb{C}$ il sistema (nelle incognite $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$)

$$(*) \qquad \begin{cases} i\alpha_1 - 2i\alpha_2 + (1+i)\alpha_3 + \alpha_4 = a \\ i\alpha_1 - 2i\alpha_2 + (1-i)\alpha_3 + (1-2i)\alpha_4 = b \\ i\alpha_1 - 2i\alpha_2 + i\alpha_3 = c \end{cases}$$

abbia o meno soluzione.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} i & -2i & 1+i & 1 & a \\ i & -2i & 1-i & 1-2i & b \\ i & -2i & i & 0 & c \end{array}\right) \xrightarrow{E_{31}(-i)E_{21}(-i)E_1(-i)}$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1-i & -i & -ia \\ 0 & 0 & -2i & -2i & b-a \\ 0 & 0 & -1 & -1 & c-a \end{array}\right) \xrightarrow{E_{32}(1)E_2(\frac{1}{2}i)}$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1-i & -i & -ia \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \frac{1}{2}i(b-a) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c-a+\frac{1}{2}i(b-a) \end{array}\right) = (\, U \quad | \quad \underline{d}\,).$$

Poichè esistono valori di $a, b, c \in \mathbb{C}$ tali che $c - a + \frac{1}{2}i(b-a) \neq 0$, ossia tali che $\underline{d}$ sia dominante, allora $\mathcal{S}$ **non** è un insieme di generatori di $\mathbb{C}^3$.

Ad esempio prendendo $a = b = 0$ e $c = 1$ si ottiene che $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ non si puó esprimere come combinazione lineare degli elementi di $\mathcal{S}$, per cui $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \notin \langle \mathcal{S} \rangle$ e dunque $\langle \mathcal{S} \rangle < \mathbb{C}^3$.

LEZIONE 13

Teorema del rimpiazzo. Dimensione di uno spazio vettoriale. Caratterizzazioni delle basi di uno spazio vettoriale.

Teorema del rimpiazzo. (contenuto nel punto (a) del Teorema 14.4 pg.69)

Sia $V \neq \{\underline{0}\}$ uno spazio vettoriale su K $(K \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\})$.

Siano $\mathcal{S}$ un insieme di generatori ed $\mathcal{I}$ un insieme L.I. di elementi di V. Allora l'insieme che si ottiene rimpiazzando OPPORTUNI elementi di $\mathcal{S}$ con gli elementi di $\mathcal{I}$ è ancora un insieme di generatori di V.

Dimostrazione. Siano $\mathcal{S} = \{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_n\}$ e $\mathcal{I} = \{\underline{w}_1, \underline{w}_2, \dots, \underline{w}_m\}$.

Vogliamo provare che esistono $\underline{v}_{i_1}, \underline{v}_{i_2}, \dots, \underline{v}_{i_m} \in \mathcal{S}$ tali che

$$\begin{aligned}\mathcal{S}' &= (\mathcal{S} \setminus \{\underline{v}_{i_1}, \underline{v}_{i_2}, \dots, \underline{v}_{i_m}\}) \cup \mathcal{I} = \\ &= (\mathcal{S} \cup \mathcal{I}) \setminus \{\underline{v}_{i_1}, \underline{v}_{i_2}, \dots, \underline{v}_{i_m}\}\end{aligned}$$

sia ancora un insieme di generatori di V.

$\boxed{1^0 \text{ passaggio}}$

L'insieme $\mathcal{S}_1$ che si ottiene da $\mathcal{S}$ rimpiazzando UN opportuno elemento di $\mathcal{S}$ con il primo elemento di $\mathcal{I}$ è ancora un insieme di generatori di V.

Infatti:

$$\left.\begin{array}{c}
\left.\begin{array}{c} \underline{w}_1 \in V \\ \\ \{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_n\} = \mathcal{S} \\ \text{ins. gen. di V} \end{array}\right\} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{c} \text{esistono } \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \text{ tali che} \\ \underline{w}_1 = \alpha_1 \underline{v}_1 + \dots + \alpha_n \underline{v}_n \end{array}\right. \\
\\
\left.\begin{array}{l} \mathcal{I} \text{ L.I.} \\ \\ \underline{w}_1 \in \mathcal{I} \end{array}\right\} \underset{\substack{\uparrow \\ \boxed{\text{Prop. Lez. 11 punto (2)}}}}{\Longrightarrow} \{\underline{w}_1\} \text{ L.I.} \underset{\substack{\uparrow \\ \boxed{\text{Prop. Lez. 11 punto (1)}}}}{\Longrightarrow} \underline{w}_1 \neq \underline{0}
\end{array}\right\} \Longrightarrow$$

esiste $\alpha_i \neq 0$ $\Longrightarrow$ $(*)$ $\underline{v}_i = -\alpha_1\alpha_i^{-1}\underline{v}_1 - \dots - \alpha_{i-1}\alpha_i^{-1}\underline{v}_{i-1} - \alpha_{i+1}\alpha_i^{-1}\underline{v}_{i+1} - \dots - \alpha_n\alpha_i^{-1}\underline{v}_n + \underline{w}_1$.

Rimpiazziamo $\underline{v}_i$ con $\underline{w}_1$, ossia poniamo

$$\mathcal{S}_1 = (\mathcal{S} \setminus \{\underline{v}_i\}) \cup \{\underline{w}_1\} = (\mathcal{S} \cup \{\underline{w}_1\}) \setminus \{\underline{v}_i\}.$$

Allora $\mathcal{S}_1$ è ancora un insieme di generatori di V. Per provarlo, dobbiamo provare che ogni elemento $\underline{z} \in V$ è combinazione lineare degli elementi di $\mathcal{S}_1$.

Sia dunque $\underline{z} \in V$.

$$\underline{z} \underset{\boxed{\begin{array}{c}\text{esistono } \beta_1,\dots,\beta_n \text{ essendo}\\ \mathcal{S}=\{\underline{v}_1,\dots,\underline{v}_n\} \text{ ins. di gen. di } V\end{array}}}{\overset{\uparrow}{=}} \beta_1\underline{v}_1+\dots+\beta_n\underline{v}_n \underset{\boxed{\begin{array}{c}\text{sostituendo (*) al posto}\\ \text{di } \underline{v}_i\end{array}}}{\overset{\uparrow}{=}}$$

$$= \beta_1\underline{v}_1+\dots+\beta_{i-1}\underline{v}_{i-1}+\beta_i(-\alpha_1\alpha_i^{-1}\underline{v}_1-\dots-\alpha_{i-1}\alpha_i^{-1}\underline{v}_{i-1}-\alpha_{i+1}\alpha_i^{-1}\underline{v}_{i+1}-\dots-\alpha_n\alpha_i^{-1}\underline{v}_n+\underline{w}_1)+$$
$$+\beta_{i+1}\underline{v}_{i+1}+\dots+\beta_n\underline{v}_n$$

è una combinazione lineare degli elementi di

$$\{\underline{v}_1,\dots,\underline{v}_{i-1},\underline{v}_{i+1},\dots,\underline{v}_n,\underline{w}_1\}=\mathcal{S}_1 \quad (\text{dunque} \quad i_1=i).$$

$\boxed{2^0 \text{ passaggio}}$

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{L'insieme } \mathcal{S}_2 \text{ che si ottiene da } \mathcal{S} \text{ rimpiazzando DUE opportuni elementi di } \mathcal{S}\\ \text{con i primi due elementi di } \mathcal{I} \text{ è ancora un insieme di generatori di } V.\end{array}}$$

Innanzitutto costruiamo l'insieme di generatori $\mathcal{S}_1$ come nel 1^0 passaggio.

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{c}\underline{w}_2\in V\\ \{\underline{v}_1,\dots,\underline{v}_{i-1},\underline{w}_1,\underline{v}_{i+1},\dots,\underline{v}_n\}=\mathcal{S}_1\\ \text{ins. gen. di V}\end{array}\right\} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{c}\text{esistono}\\ \delta_1,\dots,\delta_{i-1},\delta,\delta_{i+1},\dots,\delta_n\\ \text{tali che}\\ (\bullet)\quad \underline{w}_2=\delta_1\underline{v}_1+\dots+\delta_{i-1}\underline{v}_{i-1}+\\ +\delta\underline{w}_1+\delta_{i+1}\underline{v}_{i+1}+\dots+\delta_n\underline{v}_n\end{array}\right.\\ \\ \left.\begin{array}{c}\mathcal{I} \text{ L.I.}\\ \{\underline{w}_1,\underline{w}_2\}\subseteq\mathcal{I}\end{array}\right\} \underset{\boxed{\begin{array}{c}\text{Prop. Lez. 11}\\ \text{punto (2)}\end{array}}}{\overset{\uparrow}{\Longrightarrow}} \{\underline{w}_1,\underline{w}_2\} \text{ L.I.}\end{array}\right\} \Longrightarrow$$

esiste $\delta_j \neq 0$ (altrimenti $\delta\underline{w}_1-\underline{w}_2=\underline{0}$, una contraddizione con $\mathcal{I}$ L.I.)

Rimpiazziamo $\underline{v}_j$ con $\underline{w}_2$, ossia poniamo

$$\begin{aligned}\mathcal{S}_2 &= (\mathcal{S}_1\setminus\{\underline{v}_j\})\cup\{\underline{w}_2\}=\\ &=(\mathcal{S}_1\cup\{\underline{w}_2\})\setminus\{\underline{v}_j\}=\\ &=(\{\underline{v}_1,\dots,\underline{v}_n\}\cup\{\underline{w}_1,\underline{w}_2\})\setminus\{\underline{v}_i,\underline{v}_j\}.\end{aligned}$$

Allora $\mathcal{S}_2$ è ancora un insieme di generatori di V. Per provarlo, dobbiamo provare che ogni elemento $\underline{z} \in V$ è combinazione lineare degli elementi di $\mathcal{S}_2$.

Sia dunque $\underline{z} \in V$.

Innanzitutto osserviamo che essendo $\delta_j \neq 0$, esiste δ_j^{-1}, e moltiplicando ambo i membri di $(\bullet)$ per δ_j^{-1} ottieniamo che $\underline{v}_j$ è una combinazione lineare degli elementi di $\mathcal{S}_2$:

$$(**) \quad \underline{v}_j = -\delta_1\delta_j^{-1}\underline{v}_1 - \ldots - \delta_{j-1}\delta_j^{-1}\underline{v}_{j-1} - \delta_{j+1}\delta_j^{-1}\underline{v}_{j+1} - \ldots - \delta_{i-1}\delta_j^{-1}\underline{v}_{i-1} - \delta_{i+1}\delta_j^{-1}\underline{v}_{i+1} - \ldots$$
$$\ldots - \delta_n\delta_j^{-1}\underline{v}_n - \delta\delta_j^{-1}\underline{w}_1 + \delta_j^{-1}\underline{w}_2$$

Poichè $\mathcal{S}_1 = (\{\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_n\} \cup \{\underline{w}_1\}) \setminus \{\underline{v}_i\}$ è un insieme di generatori di V, allora esistono $\gamma_1, \ldots, \gamma_{i-1}, \gamma, \gamma_{i+1}, \ldots, \gamma_n \in K$ tali che

$$(\bullet\bullet) \quad \underline{z} = \gamma_1\underline{v}_1 + \ldots + \gamma_{i-1}\underline{v}_{i-1} + \gamma\underline{w}_1 + \gamma_{i+1}\underline{v}_{i+1} + \ldots + \gamma_n\underline{v}_n.$$

Sostituendo $(**)$ al posto di $\underline{v}_j$ al secondo membro di in $(\bullet\bullet)$, otteniamo $\underline{z}$ come combinazione lineare degli elementi di $\mathcal{S}_2$.

Dunque $\mathcal{S}_2$ è un insieme di generatori di V ($i_1 = i$ e $i_2 = j$).

Iterando questo procedimento, al k-esimo passaggio partiamo dall'insieme di generatori di V

$$\begin{aligned}\mathcal{S}_{k-1} &= (\mathcal{S} \setminus \{\underline{v}_{i_1}, \underline{v}_{i_2}, \ldots, \underline{v}_{i_{k-1}}\}) \cup \{\underline{w}_1, \ldots, \underline{w}_{k-1}\} = \\ &= (\mathcal{S} \cup \{\underline{w}_1, \ldots, \underline{w}_{k-1}\}) \setminus \{\underline{v}_{i_1}, \underline{v}_{i_2}, \ldots, \underline{v}_{i_{k-1}}\}\end{aligned}$$

ottenuto al $k-1$-esimo passaggio, e troviamo un opportuno elemento $\underline{v}_{i_k} \in \mathcal{S}_{k-1}$ tale che

$$\begin{aligned}\mathcal{S}_k &= (\mathcal{S} \setminus \{\underline{v}_{i_1}, \underline{v}_{i_2}, \ldots, \underline{v}_{i_{k-1}, \underline{v}_{i_k}}\}) \cup \{\underline{w}_1, \ldots, \underline{w}_{k-1}, \underline{w}_k\} = \\ &= (\mathcal{S} \cup \{\underline{w}_1, \ldots, \underline{w}_{k-1}, \underline{w}_k\}) \setminus \{\underline{v}_{i_1}, \underline{v}_{i_2}, \ldots, \underline{v}_{i_{k-1}}, \underline{v}_{i_k}\}\end{aligned}$$

sia ancora un insieme di generatori di V.

Dopo m passaggi il procedimento è concluso, avendo esaurito tutti gli elementi di $\mathcal{I}$.

Corollario. Se $\mathcal{S} = \{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_n\}$ ed $\mathcal{I} = \{\underline{w}_1, \underline{w}_2, \ldots, \underline{w}_m\}$ sono rispettivamente un insieme di generatori ed un insieme L.I. di V allora $m \leq n$ (è il punto (a) del Teorema 14.4).

Dimostrazione. Supponiamo per assurdo $n < m$, ossia che esista $\underline{w}_{n+1} \in \mathcal{I}$.

Applicando il teorema del rimpiazzo otteniamo che

$$\mathcal{S}' = (\mathcal{S} \cup \{\underline{w}_1, \underline{w}_2, \ldots, \underline{w}_n\}) \setminus \mathcal{S} = \{\underline{w}_1, \underline{w}_2, \ldots, \underline{w}_n\}$$

è un insieme di generatori di V. Pertanto $\underline{w}_{n+1} \in \mathcal{I}$ è combinazione lineare di $\{\underline{w}_1, \underline{w}_2, \ldots, \underline{w}_n\} \subseteq \mathcal{I}$. Dal punto (3) della Proposizione della Lezione 11 si ottiene una contraddizione con il fatto che $\mathcal{I}$ è L.I. Dunque $m \leq n$.

Dimensione di uno spazio vettoriale.

Sia $V \neq \{\underline{0}\}$ uno spazio vettoriale su K $(K \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\})$.

Come applicazione del Corollario della lezione precedente si ottiene questo importante

TEOREMA:

Siano $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$ due basi di V. Allora il numero degli elementi di $\mathcal{B}$ è uguale al numero degli elementi di $\mathcal{B}'$

Dimostrazione.

Siano $|\mathcal{B}|$ il numero degli elementi di $\mathcal{B}$ e $|\mathcal{B}'|$ il numero degli elementi di $\mathcal{B}'$.

$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} \mathcal{B} \quad \text{base di} \quad V \quad \Longrightarrow \mathcal{B} \quad \text{ins. gen. di} \quad V \\ \mathcal{B}' \quad \text{base di} \quad V \quad \Longrightarrow \mathcal{B}' \quad \text{L.I.} \end{array}\right\} \Longrightarrow \quad |\mathcal{B}'| \leq |\mathcal{B}| \\ \left.\begin{array}{l} \mathcal{B}' \quad \text{base di} \quad V \quad \Longrightarrow \mathcal{B}' \quad \text{ins. gen. di} \quad V \\ \mathcal{B} \quad \text{base di} \quad V \quad \Longrightarrow \mathcal{B} \quad \text{L.I.} \end{array}\right\} \Longrightarrow \quad |\mathcal{B}| \leq |\mathcal{B}'| \end{array}\right\} \Longrightarrow \quad |\mathcal{B}| = |\mathcal{B}'|$$

Def. 1. Sia V uno spazio vettoriale (non nullo) che ammette una base $\mathcal{B}$ con n elementi. Allora ogni altra base di V ha n elementi. Si dice che V ha **dimensione finita** e che n **è la dimensione di V**. Si scrive $\dim V = n$.

Se $V = \{\underline{0}\}$ si pone $\dim V = 0$.

Esempio 1. La dimensione degli spazi vettoriali $\mathbb{R}^n$ ed $\mathbb{R}_n$ su $\mathbb{R}$ è n (in simboli: $\dim\mathbb{R}^n = n = \dim\mathbb{R}_n$). Analogamente la dimensione degli spazi vettoriali $\mathbb{C}^n$ ed $\mathbb{C}_n$ su $\mathbb{C}$ è n (in simboli: $\dim\mathbb{C}^n = n = \dim\mathbb{C}_n$).

N.B. Non tutti gli spazi vettoriali hanno dimensione finita.

Si consideri il seguente

Esempio 2. Sia

$$\mathcal{P} = \{f(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + \ldots + a_{m-1} t^{m-1} + a_m t^m | m \in \mathbb{N}, \quad a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{m-1}, a_m \in \mathbb{R}\}$$

l'insieme dei polinomi a coefficienti reali ($a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{m-1}, a_m$ sono i coefficienti del polinomio $f(t)$) nell'indeterminata t.

Si verifica facilmente che rispetto all'addizione di polinomi definita da:

$$(a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \ldots + a_{m-1} t^{m-1} + a_m t^m) + (b_0 + a_1 t + b_2 t^2 + \ldots + b_{k-1} t^{k-1} + b_k t^k) =$$

$$= \begin{cases} (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)t + (a_2 + b_2)t^2 + \ldots + (a_m + b_m)t^m + +b_{m+1} t^{m+1} + \ldots + b_k t^k & \text{se} \quad m \leq k \\ (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)t + (a_2 + b_2)t^2 + \ldots + (a_k + b_k)t^k + +a_{k+1} t^{k+1} + \ldots + a_m t^m & \text{se} \quad k \leq m \end{cases}$$

ed alla moltiplicazione di un polinomio per uno scalare definita da:

$$\alpha(a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \ldots + a_{m-1} t^{m-1} + a_m t^m) = \alpha a_0 + \alpha a_1 t + \alpha a_2 t^2 + \ldots + \alpha a_{m-1} t^{m-1} + \alpha a_m t^m$$

$\mathcal{P}$ è uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$.

Vogliamo provare che $\mathcal{P}$ non ha dimensione finita. Ricordiamo innanzitutto che il **grado** di un polinomio

$$0 \neq f(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + \ldots + a_{m-1} t^{m-1} + a_m t^m$$

è quel numero naturale m tale che $a_m \neq 0$ ed $a_r = 0$ per ogni $r > m$.

Vogliamo provare che $\mathcal{P}$ non possiede un insieme finito di generatori.

Sia $\{f_1(t), \ldots, f_n(t)\}$ un insieme finito di elementi di $\mathcal{P}$.

Siano $k_1, k_2, \ldots, k_n$ i gradi di $f_1(t), f_2(t), \ldots, f_n(t)$ rispettivamente.

Sia poi k un numero strettamente maggiore di ciascun k_i, $i = 1, \ldots, n$.

Dalle definizioni di somma di due polinomi e di moltiplicazione di un polinomio per uno scalare segue che ogni combinazione lineare di $f_1(t), f_2(t), \ldots, f_n(t)$ ha 0 come coefficiente di t^k, quindi il polinomio t^k non è combinazione lineare di $\{f_1(t), \ldots, f_n(t)\}$.

Dunque ogni sottoinsieme finito $\{f_1(t), \ldots, f_n(t)\}$ di $\mathcal{P}$ non puó essere un insieme di generatori di $\mathcal{P}$.

In particolare $\mathcal{P}$ non ha dimensione finita (si dice che $\mathcal{P}$ ha **dimensione infinita**).

Proposizione 1. Se $W \leq V$ (ossia se W è un sottospazio di V) allora dim$W$ $\leq$dim$V$.

Dimostrazione. Siano $m =$dim$W$ ed $n =$dim$V$.

Siano poi $\mathcal{B}_1$ una base di W e $\mathcal{B}$ una base di V. Dunque $\mathcal{B}_1$ ha m elementi e $\mathcal{B}$ ha n elementi.

Poichè $\mathcal{B}_1$ è una base di W, allora $\mathcal{B}_1$ è un insieme L.I. di W. Da ció segue, essendo W un sottospazio di V, che $\mathcal{B}_1$ è un insieme L.I. di V.

Poichè $\mathcal{B}$ è una base di V, allora $\mathcal{B}$ è un insieme di generatori di V.

Applicando il Corollario della Lezione 13 si ottiene $m \leq n$.

Def. 2. Un insieme di generatori $\mathcal{S}$ di V si dice **un insieme di generatori minimale** se nessun suo sottoinsieme proprio è un insieme di generatori di V, ossia se

$$\mathcal{S} \quad \text{è un ins. di gen. e}$$
$$\left.\begin{array}{r} \mathcal{S}_0 \subseteq \mathcal{S} \\ \mathcal{S}_0 \quad \text{è un ins. di gen.} \end{array}\right\} \quad \Longrightarrow \quad \mathcal{S}_0 = \mathcal{S}.$$

Def. 3. Un insieme L.I. $\mathcal{I}$ di V si dice **un insieme L.I. massimale** se non è contenuto propriamente in alcun insieme L.I. di V, ossia se

$$\mathcal{I} \quad \text{è L.I. e}$$
$$\left.\begin{array}{r} \mathcal{I} \subseteq \mathcal{I}_0 \\ \mathcal{I}_0 \quad \text{L.I.} \end{array}\right\} \quad \Longrightarrow \quad \mathcal{I}_0 = \mathcal{I}.$$

Proviamo ora due diverse caratterizzazioni delle basi di uno spazio vettoriale.

Proposizione 2. Sia $\mathcal{S}$ un insieme di elementi di V.

$$\boxed{1} \quad \mathcal{S} \quad \text{è una base di} \quad V \quad \Longleftrightarrow \quad \mathcal{S} \quad \text{è un insieme di generatori minimale di} \quad V;$$
$$\boxed{2} \quad \mathcal{S} \quad \text{è una base di} \quad V \quad \Longleftrightarrow \quad \mathcal{S} \quad \text{è un insieme L.I. massimale di} \quad V.$$

Dimostrazione.

$\boxed{1}$ $\Longrightarrow$: Siano $\mathcal{S}$ una base ed $\mathcal{S}_0$ un insieme di generatori di V contenuto in $\mathcal{S}$.

$$\mathcal{S} \quad \text{base} \quad \Longrightarrow \quad \mathcal{S} \quad \text{insieme di generatori.}$$

Inoltre si ha:

$$\left.\begin{array}{l} \mathcal{S} \quad \text{base} \quad \Longrightarrow \quad \mathcal{S} \quad \text{L.I.} \\ \mathcal{S}_0 \quad \text{insieme di generatori} \end{array}\right\} \quad \underset{\substack{\uparrow \\ \boxed{\text{Coroll. questa Lez.}}}}{\Longrightarrow} \quad |\mathcal{S}| \leq |\mathcal{S}_0| \quad \underset{\substack{\uparrow \\ \boxed{\mathcal{S}_0 \subseteq \mathcal{S}}}}{\Longrightarrow} \quad \mathcal{S}_0 = \mathcal{S}$$

Dunque $\mathcal{S}$ è un insieme di generatori minimale di V.

$\Longleftarrow$: Sia $\mathcal{S}$ un insieme di generatori minimale di V. Poichè $\mathcal{S}$ è in particolare un insieme di generatori, per il Lemma della scrematura esiste una base $\mathcal{B}$ di V contenuta in $\mathcal{S}$.

$$\left.\begin{array}{r} \mathcal{B} \quad \text{base} \quad \Longrightarrow \quad \mathcal{B} \quad \text{ins. di gen.} \\ \mathcal{S} \quad \text{insieme di generatori } \textbf{minimale} \\ \mathcal{B} \subseteq \mathcal{S} \end{array}\right\} \quad \Longrightarrow \quad \mathcal{B} = \mathcal{S} \quad \Longrightarrow \quad \mathcal{S} \quad \text{base}$$

$\boxed{2}$ $\Longrightarrow$: Siano $\mathcal{S}$ una base ed $\mathcal{I}$ un insieme L.I. di V che contiene $\mathcal{S}$.

$$\mathcal{S} \quad \text{base} \quad \Longrightarrow \quad \mathcal{S} \quad \text{L.I.}$$

Inoltre si ha:

$$\left.\begin{array}{r} \mathcal{S} \quad \text{base} \quad \Longrightarrow \quad \mathcal{S} \quad \text{ins. di gen.} \\ \mathcal{I} \quad \text{L.I.} \end{array}\right\} \quad \underset{\substack{\uparrow \\ \boxed{\text{Coroll. questa Lez.}}}}{\Longrightarrow} \quad |\mathcal{I}| \leq |\mathcal{S}| \quad \underset{\substack{\uparrow \\ \boxed{\mathcal{S} \subseteq \mathcal{I}}}}{\Longrightarrow} \quad \mathcal{S} = \mathcal{I}$$

Dunque $\mathcal{S}$ è un insieme L.I. massimale di V.

$\Longleftarrow$: Siano $\mathcal{D}$ un insieme L.I. massimale di V. Si fissi una base $\mathcal{B} = \{\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_n\}$ di V.

Essendo $\mathcal{D}$ un insieme L.I. massimale di V si ha

$$\mathcal{D} \cup \{\underline{v}_i\} \quad \text{è} \quad L.D. \quad \text{per ogni} \quad i = 1, \ldots, n.$$

Quindi, dall'esercizio in fondo alla Lezione 11 si ottiene che

$$\underline{v}_i \in \langle \mathcal{D} \rangle \quad \text{per ogni} \quad i = 1, \ldots, n,$$

e dunque $\langle \mathcal{D} \rangle = \langle \mathcal{D} \cup \mathcal{B} \rangle \leq \langle \mathcal{B} \rangle$.

Essendo $\mathcal{B}$ una base di V, in particolare $\mathcal{B}$ è un insieme di generatori di V, per cui $\langle \mathcal{B} \rangle = V$. Allora da $\langle \mathcal{D} \rangle \leq \langle \mathcal{B} \rangle = V$ segue che $\langle \mathcal{D} \rangle = V$, ossia che $\mathcal{D}$ è un insieme di generatori di V. Poichè $\mathcal{D}$ è anche L.I., allora $\mathcal{D}$ è una base di V.

Esercizio. Siano V uno spazio vettoriale di dimensione n su $K \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ ed $\mathcal{S}$ un sottoinsieme L.I. di V. Si provi che se $\mathcal{S}$ ha n elementi allora $\mathcal{S}$ è una base di V.

Svolgimento. Sia $\mathcal{I}$ un insieme L.I. massimale di V contenente $\mathcal{S}$.

Per la Proposizione 2, punto $\boxed{2}$, si ha che $\mathcal{I}$ è una base di V.

Poichè $\dim V = n$ per ipotesi, dal Teorema principale di questa Lezione si ha il numero degli elementi di $\mathcal{I}$ è n.

Poichè $\mathcal{S}$ è contenuto in $\mathcal{I}$ e sia $\mathcal{S}$ che $\mathcal{I}$ hanno n elementi, allora $\mathcal{S} = \mathcal{I}$, per cui $\mathcal{S}$ è una base di V.

LEZIONE 14

Rango di una matrice.

Basi dello spazio delle righe e dello spazio delle colonne di una matrice.

Def. 1. Sia A una matrice $m \times n$. Si chiama **rango** o **caratteristica di A**, e si indica con il simbolo rk(A), la dimensione dello spazio delle colonne $C(A)$ di A.

Proposizione.

Siano U una matrice $m\times n$ in forma ridotta di Gauss e k il numero delle sue colonne dominanti.

Siano $\underline{u}_{j_1}, \underline{u}_{j_2}, \dots, \underline{u}_{j_k}$ le colonne dominanti di U ed $\underline{r}_1^T, \underline{r}_2^T, \dots, \underline{r}_k^T$ le sue righe non nulle (quindi le prime k righe di U: si ricordi, come osservato nella Lezione 6, che il numero delle colonne dominannti di una matrice in forma ridotta di Gauss è uguale al numero delle sue righe non nulle).

$\boxed{1}$ $\mathcal{B} = \{\underline{u}_{j_1}, \underline{u}_{j_2}, \dots, \underline{u}_{j_k}\}$ è una base dello spazio delle colonne $C(U)$ di U.

$\boxed{2}$ $\mathcal{D} = \{\underline{r}_1, \underline{r}_2, \dots, \underline{r}_k\}$ è una base dello spazio delle righe $R(U)$ di U.

$\boxed{3}$ rk(U)=k.

Dimostrazione.

$\boxed{1}$ Per l'ESERCIZIO TIPO 8 $\mathcal{B}$ è L.I, quindi per provare che è una base di $C(U)$ resta da provare che $\mathcal{B}$ è un insieme di generatori di $C(U)$.

Provare che $\mathcal{B}$ è un insieme di generatori di $C(U)$ significa provare che ogni elemento di $C(U)$, ossia ogni combinazione lineare delle colonne di U, è combinazione lineare degli elementi di $\mathcal{B}$. Poichè combinazioni lineari di combinazioni lineari sono ancora combinazioni lineari, è **sufficiente** provare che ogni colonna di U è combinazione lineare degli elementi di $\mathcal{B}$.

Sia dunque $\underline{u}$ una colonna di U.

Si costruisca la matrice $\tilde{U}$ le cui colonne sono gli elementi di $\mathcal{B}$.

Dunque $\tilde{U}$ è una matrice $m \times k$ del tipo:

$$\tilde{U} = \left(\begin{array}{c} T \\ \hdashline \mathbb{O} \end{array}\right)$$

dove e T è una matrice unitriangolare superiore $k \times k$:

$$T = \boxed{\begin{matrix} 1 & & & \\ & 1 & & * \\ & & \ddots & \\ & \mathbb{O} & & 1 \\ & & & & 1 \end{matrix}},$$

e $\mathbb{O}$ è un blocco nullo $(m-k) \times k$.

La matrice $(\tilde{U} \quad | \quad \underline{u})$ che si ottiene affiancando $\underline{u}$ ad $\tilde{U}$ è, come $\tilde{U}$, una matrice in forma ridotta di Gauss, ed $\underline{u}$ è una colonna libera. Quindi il sistema lineare $(*) \quad \tilde{U}\underline{x} = \underline{u}$, che ha $(\tilde{U} \quad | \quad \underline{u})$ come matrice aumentata, ha soluzioni.

Sia $\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_k \end{pmatrix}$ una soluzione di $(*)$. Allora, suddividendo $\tilde{U}$ in blocchi colonna e facendo il prodotto a blocchi (come nel caso (3) della Lezione 4), si ottiene:

$$\underline{u} = \tilde{U} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_k \end{pmatrix} = (\, \underline{u}_{j_1} \quad \underline{u}_{j_2} \quad \dots \quad \underline{u}_{j_k} \,) \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_k \end{pmatrix} = \alpha_1 \underline{u}_{j_1} + \alpha_2 \underline{u}_{j_2} + \ldots + \alpha_k \underline{u}_{j_k}.$$

Quindi $\underline{u}$ è combinazione lineare degli elementi di $\mathcal{B}$.

$\boxed{2}$ Per l'ESERCIZIO TIPO 9 $\mathcal{D}$ è L.I, quindi per provare che è una base di $R(U)$ resta da provare che $\mathcal{D}$ è un insieme di generatori di $R(U)$.

Osserviamo che ogni riga di U sta in $\mathcal{D}$ oppure è nulla, in entrambi i casi è quindi una combinazione lineare di elementi di $\mathcal{D}$. Quindi, come nella dimostrazione di $\boxed{1}$, poichè combinazioni lineari di combinazioni lineari di righe di U sono ancora combinazioni lineari di righe di U, questa osservazione è sufficiente a provare che $\mathcal{D}$ è un insieme di generatori di $R(U)$.

$\boxed{3}$ Segue da $\boxed{1}$ e dalla definizione di rango di una matrice.

Si puó provare il seguente

Teorema. Siano A e B due matrici tali che esista una matrice **non singolare** F per cui si abbia $B = FA$. Allora si ha:

$\boxed{1}$ $\{\underline{a}_{j_1}, \underline{a}_{j_2}, \ldots, \underline{a}_{j_k}\}$ è una base di $C(A)$ se e solo se $\{\underline{b}_{j_1}, \underline{b}_{j_2}, \ldots, \underline{b}_{j_k}\}$ (l'insieme delle corrispondenti colonne di B) è una base di $C(B)$.

$\boxed{2}$ $R(A) = R(B)$.

Un'applicazione di questo Teorema ci permette di trovare basi di spazi delle colonne e delle righe di ogni matrice.

Corollario. Siano A una matrice ed U una sua forma ridotta di Gauss. Siano $\underline{u}_{j_1}, \underline{u}_{j_2}, \ldots, \underline{u}_{j_k}$ le colonne dominanti di U ed $\underline{r}_1^T, \underline{r}_2^T, \ldots, \underline{r}_k^T$ le sue righe non nulle (quindi le prime k righe di U). Allora:

$\boxed{1}$ L'insieme delle **colonne di A** corrispondenti alle colonne dominanti di una forma ridotta di Gauss U di A è una base di $C(A)$.

$\boxed{2}$ L'insieme delle **righe non nulle di U** è una base di $R(A)$.

Dimostrazione. Per la Proposizione di questa Lezione, $\mathcal{B} = \{\underline{u}_{j_1}, \underline{u}_{j_2}, \ldots, \underline{u}_{j_k}\}$ è una base dello spazio delle colonne $C(U)$ di U e $\mathcal{D} = \{\underline{r}_1, \underline{r}_2, \ldots, \underline{r}_k\}$ è una base dello spazio delle righe $R(U)$ di U.

Il risultato segue quindi da un'applicazione del Teorema, ricordando (si veda un N.B. nella Lezione 6) che poichè U è una forma ridotta di Gauss per A, esiste una matrice non singolare F tale che $FA = U$.

Esempio 1. Sia $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Allora, facendo un'eliminazione di Gauss su A si ottiene

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{12}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = U,$$

ed U è una forma ridotta di Gauss per A.

Poichè l'unica colonna dominante di U è la 1^a, cioè $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, allora l'insieme che ha come unico elemento la 1^a colonna di A, ossia $\{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\}$, è una base di $C(A)$.

Poichè l'unica riga non nulla di U è la 1^a, cioè $(1 \quad 0)$, allora l'insieme che ha la trasposta si tale riga come unico elemento, ossia $\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\}$, è una base di $R(A)$.

$\boxed{N.B.}$ $\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\}$, ossia l'insieme che ha come elemento la 1^a colonna di U, **NON** è una base di $C(A)$.

$\boxed{N.B.}$ $\{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\}$, ossia l'insieme che ha come elemento la trasposta della riga di A corrispondente all'unica riga non nulla di U, **NON** è una base di $R(A)$.

Proprietà del rango di una matrice.

1. rk(A)= rk(A^T)= rk(A^H) per ogni matrice A.
2. Se A e B sono due matrici per cui esiste il prodotto AB, allora

- rk(AB) $\leq$rk(A),
- rk(AB) $\leq$rk(B).

ESERCIZIO TIPO 12

Sia $\quad A_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \alpha & 4 \\ 1 & \alpha+2 & 2\alpha+2 & 4 \\ 2 & 0 & \alpha^2+2\alpha-4 & \alpha^2+4 \\ 0 & \alpha+2 & \alpha^2+\alpha-2 & \alpha^2+\alpha-4 \end{pmatrix}, \quad$ dove $\alpha \in \mathbb{C}$.

Per ogni $\alpha \in \mathbb{C}$ si dica qual è $rk(A_\alpha)$ e si trovino una base $\mathcal{B}_\alpha$ di $C(A_\alpha)$ ed una base $\mathcal{D}_\alpha$ di $R(A_\alpha)$.

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \alpha & 4 \\ 1 & \alpha+2 & 2\alpha+2 & 4 \\ 2 & 0 & \alpha^2+2\alpha-4 & \alpha^2+4 \\ 0 & \alpha+2 & \alpha^2+\alpha-2 & \alpha^2+\alpha-4 \end{pmatrix} \to$$

$$\xrightarrow{E_{31}(-2)E_{21}(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \alpha & 4 \\ 0 & \alpha+2 & \alpha+2 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha^2-4 & \alpha^2-4 \\ 0 & \alpha+2 & \alpha^2+\alpha-2 & \alpha^2+\alpha-4 \end{pmatrix} = B_\alpha$$

$\boxed{1^o CASO}$ $\quad \alpha \neq -2$

$$B_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \alpha & 4 \\ 0 & \alpha+2 & \alpha+2 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha^2-4 & \alpha^2-4 \\ 0 & \alpha+2 & \alpha^2+\alpha-2 & \alpha^2+\alpha-4 \end{pmatrix} \to$$

$$\xrightarrow{E_{42}(-\alpha-2)E_2(\frac{1}{\alpha+2})} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \alpha & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha^2-4 & \alpha^2-4 \\ 0 & 0 & \alpha^2-4 & \alpha^2+\alpha-4 \end{pmatrix} = C_\alpha$$

$\boxed{1^o Sottocaso}$ $\quad \alpha \neq -2, 2$

$$C_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \alpha & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha^2-4 & \alpha^2-4 \\ 0 & 0 & \alpha^2-4 & \alpha^2+\alpha-4 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{43}(-\alpha^2+4)E_3(\frac{1}{\alpha^2-4})} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \alpha & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix} = D_\alpha$$

$\boxed{1^o Sotto-sottocaso}$ $\quad \alpha \neq -2, 2, 0$

$$D_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \alpha & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix} \xrightarrow{E_4(\frac{1}{\alpha})} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \alpha & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = U_\alpha$$

$$rk(A_\alpha) = 4, \qquad \mathcal{D}_\alpha = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \alpha \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\mathcal{B}_\alpha = \{ \begin{pmatrix} 1\\1\\2\\0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0\\ \alpha+2\\0\\ \alpha+2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \alpha\\ 2\alpha+2\\ \alpha^2+2\alpha-4\\ \alpha^2+\alpha-2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4\\4\\ \alpha^2+4\\ \alpha^2+\alpha-4 \end{pmatrix} \}$$

$\boxed{2^o Sotto-sottocaso}$ $\alpha = 0$

$$D_0 = \begin{pmatrix} 1&0&0&4\\0&1&1&0\\0&0&1&1\\0&0&0&0 \end{pmatrix} = U_0$$

$$rk(A_0) = 3, \qquad \mathcal{D}_0 = \{ \begin{pmatrix} 1\\0\\0\\4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0\\1\\1\\0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0\\0\\1\\1 \end{pmatrix} \} \qquad \mathcal{B}_0 = \{ \begin{pmatrix} 1\\1\\2\\0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0\\2\\0\\2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0\\2\\-4\\-2 \end{pmatrix} \}$$

$\boxed{2^o Sottocaso}$ $\alpha = 2$

$$C_2 = \begin{pmatrix} 1&0&2&4\\0&1&1&0\\0&0&0&0\\0&0&0&2 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_3(\frac{1}{2})E_{34}} \begin{pmatrix} 1&0&2&4\\0&1&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0 \end{pmatrix} = U_2$$

$$rk(A_2) = 3, \qquad \mathcal{D}_2 = \{ \begin{pmatrix} 1\\0\\2\\4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0\\1\\1\\0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0\\0\\0\\1 \end{pmatrix} \} \qquad \mathcal{B}_2 = \{ \begin{pmatrix} 1\\1\\2\\0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0\\4\\0\\4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4\\4\\8\\2 \end{pmatrix} \}$$

$\boxed{2^o CASO}$ $\alpha = -2$

$$B_{-2} = \begin{pmatrix} 1&0&-2&4\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&-2 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_2(\frac{-1}{2})E_{24}} \begin{pmatrix} 1&0&-2&4\\0&0&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0 \end{pmatrix} = U_{-2}$$

$$rk(A_{-2}) = 2, \qquad \mathcal{D}_{-2} = \{ \begin{pmatrix} 1\\0\\-2\\4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0\\0\\0\\1 \end{pmatrix} \} \qquad \mathcal{B}_{-2} = \{ \begin{pmatrix} 1\\1\\2\\0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4\\4\\8\\-2 \end{pmatrix} \}$$

ESERCIZIO TIPO 13

Osservazione 1. Siano $V \neq \{\underline{0}\}$ uno spazio vettoriale su $K \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ e W un suo sottospazio. Se dim(V) =dim$(W) = n$ allora $W = V$.

Dimostrazione. Sia $\mathcal{B}$ una base di W. Poichè dim$(W) = n$, allora $|\mathcal{B}| = n$.

Essendo $\mathcal{B}$ L.I. e $|\mathcal{B}| = n$ =dim(V), dall'Esercizio in fondo alla Lezione 13 si ottiene che $\mathcal{B}$ è anche una base di V.

Dunque $\mathcal{B}$ è sia un insieme di generatori di W che un insieme di generatori di V, per cui

$$W = \langle \mathcal{B} \rangle = V.$$

Osservazione 2. Sia $\mathcal{B} = \{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_n\} \subset K^n$, dove $K \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$.

Per vedere se $\mathcal{B}$ è una base o meno di $\mathbb{K}^n$ si puó procedere nel seguente modo:

– si costruisce la matrice $n \times n$

$$A = \begin{pmatrix} \underline{v}_1 & \underline{v}_2 & \ldots & \underline{v}_n \end{pmatrix}$$

le cui colonne sono gli elementi di $\mathcal{B}$;

– si trova una forma ridotta di Gauss U per A.

– Se rk(U)=n (ossia il numero delle colonne dominanti di U, o, equivalentemente, il numero delle righe non nulle di U è n), allora $\mathcal{B}$ è una base di K^n, altrimenti (ossia se rk$(U) < n$) $\mathcal{B}$ non è una base di K^n.

Infatti:

– rk(U) =rk(A), essendo U una forma ridotta di Gauss per A,

– rk(A) =dim$(C(A))$ per definizione,

– $C(A) = \langle \underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_n \rangle = \langle \mathcal{B} \rangle$, per costruzione di A.

Quindi

$$rk(U) = n \iff \mathcal{B} \text{ base di } C(A) \iff dim(C(A)) = n \iff C(A) = K^n$$

per cui

$$rk(U) = n \iff \mathcal{B} \text{ base di } K^n.$$

ESERCIZIO Si dica per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ l'insieme $\mathcal{B}_\alpha = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha + 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$ è una base di $\mathbb{R}^3$.

Costruiamo una matrice le cui colonne sisano gli elementi di $\mathcal{B}_\alpha$:

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ \alpha & 0 & \alpha+1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Il problema diventa stabilire per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ si ha che $\text{rk}A_\alpha = 3$.

Facciamo un'eliminazione di Gauss su A_α.

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ \alpha & 0 & \alpha+1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{31}(-1)E_{21}(-\alpha)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2\alpha & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = B_\alpha$$

1^0 CASO: $\alpha = 0$

$$B_0 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{32}(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = U_0$$

$$rk(A_0) = rk(U_0) = 2 \neq 3 \quad \Longrightarrow \quad \mathcal{B}_0 \quad \text{NON è una base di} \quad \mathbb{R}^3.$$

2^0 CASO: $\alpha \neq 0$

$$B_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2\alpha & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_2(-1/2\alpha)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1/2\alpha \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = U_\alpha$$

$$rk(A_\alpha) = rk(U_\alpha) = 3 \quad \Longrightarrow \quad \mathcal{B}_\alpha \quad \text{E' una base di} \quad \mathbb{R}^3.$$

LEZIONE 15

Basi ordinate e mappe delle coordinate in uno spazio vettoriale.

Sia V uno spazio vettoriale su K, $K \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$.

Def. 1. Una **base ordinata** di V è una base di V in cui si sia fissato l'ordine degli elementi. Per indicare che tale ordine è stato fissato, i vettori vengono separati da un "punto e virgola", anzichè da una semplice "virgola".

Esempio 1. .

$\mathcal{B} = \{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\}$ è una base di $\mathbb{R}^2$.

$\mathcal{B}_1 = \{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\}$ e $\mathcal{B}_2 = \{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\}$ sono due **distinte** basi ordinate di $\mathbb{R}^2$.

Sia $\mathcal{B} = \{\underline{v}_1; \underline{v}_2; \ldots; \underline{v}_n\}$ una base ordinata di V e sia $\underline{v} \in V$.

Poichè $\mathcal{B}$ è un insieme di generatori di V, **esistono** $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in K$ tali che

$$\underline{v} = \alpha_1 \underline{v}_1 + \alpha_2 \underline{v}_2 + \ldots + \alpha_n \underline{v}_n.$$

Poichè $\mathcal{B}$ è L.I, tali $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in K$ sono **unici**.

Una volta fissata una base ordinata $\mathcal{B}$ di V, al vettore $\underline{v} \in V$ resta associato in maniera univoca il vettore $\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \in K^n$.

Def. 2. Sia $\mathcal{B} = \{\underline{v}_1; \underline{v}_2; \ldots; \underline{v}_n\}$ una base ordinata di V e sia $\underline{v} \in V$. Si chiama **vettore delle coordinate** (o semplicemente **le coordinate**) del vettore $\underline{v}$ rispetto alla base ordinata $\mathcal{B}$ il vettore $\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \in K^n$ tale che $\underline{v} = \alpha_1 \underline{v}_1 + \alpha_2 \underline{v}_2 + \ldots + \alpha_n \underline{v}_n$. Si scrive:

$$C_{\mathcal{B}}(\underline{v}) = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}.$$

Esempio 2. Siano $\mathcal{B}_1$ e $\mathcal{B}_2$ le basi ordinate di $\mathbb{R}^2$ considerate nell'Esempio 1. Sia $\underline{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \end{pmatrix}$.

Le coordinate di $\underline{v}$ rispetto a $\mathcal{B}_1$ sono il vettore $\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\end{pmatrix}$ tale che

$$\begin{pmatrix}2\\7\end{pmatrix} = \alpha_1\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + \alpha_2\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\end{pmatrix},$$

quindi

$$C_{\mathcal{B}_1}(\begin{pmatrix}2\\7\end{pmatrix}) = \begin{pmatrix}2\\7\end{pmatrix};$$

le coordinate di $\underline{v}$ rispetto a $\mathcal{B}_2$ sono il vettore $\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\end{pmatrix}$ tale che

$$\begin{pmatrix}2\\7\end{pmatrix} = \alpha_1\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} + \alpha_2\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\alpha_2\\ \alpha_1\end{pmatrix},$$

quindi

$$C_{\mathcal{B}_2}(\begin{pmatrix}2\\7\end{pmatrix}) = \begin{pmatrix}7\\2\end{pmatrix}.$$

Se poi si considera la base ordinata $\mathcal{B}_3 = \{\begin{pmatrix}2\\14\end{pmatrix};\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\}$, le coordinate di $\underline{v}$ rispetto a $\mathcal{B}_3$ sono il vettore $\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\end{pmatrix}$ tale che

$$\begin{pmatrix}2\\7\end{pmatrix} = \alpha_1\begin{pmatrix}2\\14\end{pmatrix} + \alpha_2\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\alpha_1+\alpha_2\\ 14\alpha_1\end{pmatrix},$$

quindi

$$C_{\mathcal{B}_2}(\begin{pmatrix}2\\7\end{pmatrix}) = \begin{pmatrix}1/2\\1\end{pmatrix}.$$

$\boxed{N.B.}$ Sia $\mathcal{B} = \{\underline{v}_1;\underline{v}_2;\ldots;\underline{v}_n\}$ una base ordinata di V. Allora per ogni $i = 1,\ldots,n$ $C_{\mathcal{B}}(\underline{v}_i) = \underline{e}_i = i$-esima colonna della matrice identica I_n.

Resta cosí definita la funzione

$$\begin{array}{rcccc} C_{\mathcal{B}} & : & V & \rightarrow & K^n \\ & & \underline{v} & \mapsto & C_{\mathcal{B}}(\underline{v}) \end{array}$$

che ad ogni elemento dello spazio vettoriale V associa le sue coordinate rispetto alla fissata base ordinata $\mathcal{B}$.

Tale funzione si chiama **mappa delle coordinate** (rispetto alla base ordinata $\mathcal{B}$) e gode delle seguenti proprietà:

Proprietà della mappa delle coordinate

$\boxed{1}$ $\quad C_{\mathcal{B}}(\underline{u}+\underline{v}) = C_{\mathcal{B}}(\underline{u}) + C_{\mathcal{B}}(\underline{v}) \quad$ per ogni $\underline{u}, \underline{v} \in V$;

$\boxed{2}$ $\quad C_{\mathcal{B}}(\alpha\underline{v}) = \alpha C_{\mathcal{B}}(\underline{v}) \quad$ per ogni $\underline{v} \in V$ ed ogni $\alpha \in K$;

$\boxed{3}$ $\quad C_{\mathcal{B}}(\underline{v}) = \underline{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in K^n \quad \Longleftrightarrow \quad \underline{v} = \underline{0} \in V$;

$\boxed{4}$ $\quad$ per ogni $\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \in K^n$ esiste $\underline{v} \in V$ tale che $C_{\mathcal{B}}(\underline{v}) = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$ (si prenda $\underline{v} = \alpha_1\underline{v}_1 + \alpha_2\underline{v}_2 + \ldots + \alpha_n\underline{v}_n$).

Matrice di passaggio tra due basi ordinate

Teorema. Siano $\mathcal{B} = \{\underline{v}_1; \underline{v}_2; \ldots; \underline{v}_n\}$ e $\mathcal{B}' = \{\underline{w}_1; \underline{w}_2; \ldots; \underline{w}_n\}$ due basi ordinate di V. Allora **esiste** ed è **unica** una matrice $n \times n$ (dove $n = \dim V$) M tale che

$$(*) \quad C_{\mathcal{B}}(\underline{v}) = M C_{\mathcal{B}'}(\underline{v}) \quad \text{per ogni} \quad \underline{v} \in V.$$

M si chiama la **matrice di passaggio da** $\mathcal{B}'$ a $\mathcal{B}$, ed è

$$M = (\, C_{\mathcal{B}}(\underline{w}_1) \quad C_{\mathcal{B}}(\underline{w}_2) \quad \ldots \quad C_{\mathcal{B}}(\underline{w}_n)\,).$$

Dimostrazione.

Esistenza. Verifichiamo che la matrice $(\, C_{\mathcal{B}}(\underline{w}_1) \quad C_{\mathcal{B}}(\underline{w}_2) \quad \ldots \quad C_{\mathcal{B}}(\underline{w}_n)\,)$ soddisfa la condizione $(*)$. La domanda che ci poniamo è quindi se sia vero che **per ogni** $\underline{v} \in V$ si abbia

$$C_{\mathcal{B}}(\underline{v}) \overset{?}{=} (\, C_{\mathcal{B}}(\underline{w}_1) \quad C_{\mathcal{B}}(\underline{w}_2) \quad \ldots \quad C_{\mathcal{B}}(\underline{w}_n)\,)\, C_{\mathcal{B}'}(\underline{v}).$$

Sia dunque $\underline{v} \in V$. Facendo il prodotto a blocchi (si veda il punto (3) della Lezione 4) si ha che se

$$C_{\mathcal{B}'}(\underline{v}) = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}, \qquad \text{e quindi } (\bullet) \quad \underline{v} = \alpha_1\underline{w}_1 + \alpha_2\underline{w}_2 + \ldots + \alpha_n\underline{w}_n,$$

allora

$$(\, C_{\mathcal{B}}(\underline{w}_1) \quad C_{\mathcal{B}}(\underline{w}_2) \quad \ldots \quad C_{\mathcal{B}}(\underline{w}_n)\,)\, C_{\mathcal{B}'}(\underline{v}) = (\, C_{\mathcal{B}}(\underline{w}_1) \quad C_{\mathcal{B}}(\underline{w}_2) \quad \ldots \quad C_{\mathcal{B}}(\underline{w}_n)\,) \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} =$$

$$= \alpha_1 C_{\mathcal{B}}(\underline{w}_1) + \alpha_2 C_{\mathcal{B}}(\underline{w}_2) + \ldots + \alpha_n C_{\mathcal{B}}(\underline{w}_n) \underset{\underset{1 \text{ e } 2}{\uparrow}}{=} C_{\mathcal{B}}(\alpha_1 \underline{w}_1 + \alpha_2 \underline{w}_2 + \ldots + \alpha_n \underline{w}_n) \underset{\underset{(\bullet)}{\uparrow}}{=} C_{\mathcal{B}}(\underline{v}).$$

Unicità. Supponiamo che esista una matrice M verificante la condizione $(*)$. Vogliamo provare che allora M è univocamente individuata, equivalentemete che sono completamente individuate le sue colonne.

Per il N.B. alla fine del punto (3) nella Lezione 4, la i-esima colonna di M è $M\underline{e}_i$, ove $\underline{e}_i$ è la i-esima colonna della matrice identica I_n.

Per il N.B. di questa lezione, $\underline{e}_i = C_{\mathcal{B}'}(\underline{w}_i)$.

Dunque, da $(*)$ si ottiene che la i-esima colonna di M è

$$M\underline{e}_i = MC_{\mathcal{B}'}(\underline{w}_i) \underset{\underset{(*)}{\uparrow}}{=} C_{\mathcal{B}}(\underline{w}_i),$$

per cui

$$M = \begin{pmatrix} C_{\mathcal{B}}(\underline{w}_1) & C_{\mathcal{B}}(\underline{w}_2) & \ldots & C_{\mathcal{B}}(\underline{w}_n) \end{pmatrix}.$$

ESERCIZIO TIPO 14 Si calcoli la matrice di passaggio M da $\mathcal{B}'$ a $\mathcal{B}$, dove $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$ sono le seguenti basi ordinate di $\mathbb{R}^3$:

$$\mathcal{B} = \{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \}, \qquad \mathcal{B}' = \{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \}.$$

La matrice di passaggio M da $\mathcal{B}'$ a $\mathcal{B}$ è

$$M = \begin{pmatrix} C_{\mathcal{B}}(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}) & C_{\mathcal{B}}(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}) & C_{\mathcal{B}}(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}) \end{pmatrix}.$$

Per calcolarla, piuttosto che calcolare separatamente $C_{\mathcal{B}}(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix})$, $C_{\mathcal{B}}(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix})$ e $C_{\mathcal{B}}(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix})$, calcoliamo $C_{\mathcal{B}}(\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix})$ per un generico vettore $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$, e specializziamo la formula ottenuta ai tre diversi vettori $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Poichè

$$C_{\mathcal{B}}(\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \delta \end{pmatrix} \quad | \quad \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \delta \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

allora

$$C_{\mathcal{B}}(\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \delta \end{pmatrix} \quad | \quad \begin{pmatrix} \alpha + 2\beta + \delta \\ \beta \\ \alpha - \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

ossia α, β e δ sono tali che

$$\begin{cases} \alpha + 2\beta + \delta = a \\ \beta = b \\ \alpha - \delta = c \end{cases} \implies \begin{cases} \alpha + \delta = a - 2b \\ \beta = b \\ \alpha - \delta = c \end{cases} \implies \begin{cases} \alpha = (a - 2b + c)/2 \\ \beta = b \\ \delta = (a - 2b - c)/2 \end{cases}$$

per cui

$$C_{\mathcal{B}}(\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} (a - 2b + c)/2 \\ b \\ (a - 2b - c)/2 \end{pmatrix}$$

Dunque

$$M = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & -1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

LEZIONE 16

Trasformazioni lineari.

Def. 1. Siano V e W due spazi vettoriali su $\mathbb{R}$ (oppure **entrambi** su $\mathbb{C}$). Una funzione

$$f \quad : \quad V \quad \to \quad W$$

si dice una **trasformazione lineare** se soddisfa le due seguenti condizioni:

$\boxed{1}$ $\quad f(\underline{u}+\underline{v}) = f(\underline{u}) + f(\underline{v})$ per ogni $\underline{u}, \underline{v} \in V$;

$\boxed{2}$ $\quad f(\alpha\underline{v}) = \alpha f(\underline{v})$ per ogni $\underline{v} \in V$ ed ogni $\alpha \in K$.

V si chiama il **dominio** di f, W si chiama il **codominio** di f.

Esempio 1. Fissata una base ordinata $\mathcal{B}$ di V, la mappa delle coordinate $C_{\mathcal{B}} : V \to K^n$ è una trsformazione lineare (per le proprietà $\boxed{1}$ e $\boxed{2}$ della mappa delle coordinate enunciate nella lezione precedente).

Esempio 2. Se $V = \mathbb{R}^2$ e $W = \mathbb{R}^3$,

$$\begin{array}{cccc} f & : & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^3 \\ & & \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} 2a-b \\ a+3b \\ b \end{pmatrix} \end{array}$$

è una trasformazione lineare, mentre

$$\begin{array}{cccc} g & : & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^3 \\ & & \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} 2a-b \\ a+3b+2 \\ b \end{pmatrix} \end{array}$$

non è una trasformazione lineare.

Infatti:

f verifica la condizione $\boxed{1}$:

Per ogni $\underline{u}, \underline{v} \in \mathbb{R}^2$ esistono $a_1, b_1, a_2, b_2 \in \mathbb{R}$ tali che $\underline{u} = \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix}$ e $\underline{v} = \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix}$. Si ha:

$$f(\underline{u}+\underline{v}) = f(\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix}) = f(\begin{pmatrix} a_1+a_2 \\ b_1+b_2 \end{pmatrix}) \overset{\text{def. di f}}{=} \begin{pmatrix} 2(a_1+a_2)-(b_1+b_2) \\ (a_1+a_2)+3(b_1+b_2) \\ b_1+b_2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2a_1-b_1 \\ a_1+3b_1 \\ b_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2a_2-b_2 \\ a_2+3b_2 \\ b_2 \end{pmatrix} \underset{\text{def. di f}}{=} f(\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix}) + f(\begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix}) = f(\underline{u}) + f(\underline{v})$$

f verifica la condizione $\boxed{2}$:

Sia $\alpha \in \mathbb{R}$. Per ogni $\underline{v} \in \mathbb{R}^2$ esistono $a, b \in \mathbb{R}$ tali che $\underline{v} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$. Si ha:

$$f(\alpha\underline{v}) = f(\alpha \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}) = f(\begin{pmatrix} \alpha a \\ \alpha b \end{pmatrix}) \overset{\text{def. di f}}{=} \begin{pmatrix} 2(\alpha a)-(\alpha b) \\ \alpha a+3(\alpha b) \\ \alpha b \end{pmatrix} =$$

$$= \alpha \begin{pmatrix} 2a-b \\ a+3b \\ b \end{pmatrix} \underset{\text{def. di f}}{=} \alpha f(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}) = \alpha f(\underline{v})$$

g non verifica nè la condizione $\boxed{1}$, nè la condizione $\boxed{2}$. Perchè ?

$\boxed{N.B.}$ Se $f : V \to W$ è una trasformazione lineare, allora

$$f(\underline{0}) + f(\underline{0}) \underset{\boxed{1}}{=} f(\underline{0}+\underline{0}) = f(\underline{0}) \quad \Longrightarrow \quad \boxed{f(\underline{0}) = \underline{0}}$$

Proposizione 1. Siano V e W due spazi vettoriali su K ($K \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$) ed $f : V \to W$ una funzione. Allora f è una trasformazione lineare se e solo se

$$f(\alpha\underline{u} + \beta\underline{v}) = \alpha f(\underline{u}) + \beta f(\underline{v}), \quad \text{per ogni } \underline{u}, \underline{v} \in V \quad \text{ed ogni } \alpha, \beta \in K.$$

Def. 2. Una trasformazione lineare $f : V \to W$ si dice **iniettiva** se

$$\underset{\text{in } V}{\underline{u} \neq \underline{v}} \quad \Longrightarrow \quad \underset{\text{in } W}{f(\underline{u}) \neq f(\underline{v})},$$

equivalentemente

$$\underset{\text{in } W}{f(\underline{u}) = f(\underline{v})} \quad \Longrightarrow \quad \underset{\text{in } V}{\underline{u} = \underline{v}}$$

Def. 3. Una trasformazione lineare $f : V \to W$ si dice **suriettiva** se per ogni $\underline{w} \in W$ esiste $\underline{v} \in V$ tale che $f(\underline{v}) = \underline{w}$.

Def. 4. Una trasformazione lineare iniettiva e suriettiva si dice un **isomorfismo**.

Esempio 3. Fissata una base ordinata $\mathcal{B}$ di V, la mappa delle coordinate $C_{\mathcal{B}} : V \to K^n$ è un isomorfismo (è iniettiva per la proprietà $\boxed{3}$, ed è suriettiva la proprietà $\boxed{4}$).

Sia $f : V \to W$ una trasformazione lineare.

Si definiscano i due seguenti sottoinsiemi di W e V rispettivamente:

$$\begin{aligned} \operatorname{Im}(f) &= \{\underline{w} \in W | \text{ esiste } \underline{v} \in V \text{ per cui } f(\underline{v}) = \underline{w}\} \\ N(f) &= \{\underline{v} \in V | f(\underline{v}) = \underline{0}\} \end{aligned}$$

$\operatorname{Im}(f)$ è un sottospazio di W, e si chiama lo **spazio immagine** della trasformazione lineare f, $N(f)$ è un sottospazio di V, e si chiama lo **spazio nullo** della trasformazione lineare f.

$\operatorname{Im}(f) \leq W$:

1. $\underline{w}_1, \underline{w}_2 \in \operatorname{Im}(f) \quad \overset{?}{\Longrightarrow} \quad \underline{w}_1 + \underline{w}_2 \in \operatorname{Im}(f)$

$$\left.\begin{array}{l} \underline{w}_1 \in \operatorname{Im}(f) \Longrightarrow \text{esiste } \underline{v}_1 \in V | \underline{w}_1 = f(\underline{v}_1) \\ \underline{w}_2 \in \operatorname{Im}(f) \Longrightarrow \text{esiste } \underline{v}_2 \in V | \underline{w}_2 = f(\underline{v}_2) \end{array}\right\} \Longrightarrow \underline{w}_1 + \underline{w}_2 = f(\underline{v}_1) + f(\underline{v}_2) \overset{\boxed{1}}{\underset{\downarrow}{=}} f(\underline{v}_1 + \underline{v}_2),$$

quindi esiste $\underline{v} \in V$ tale che $f(\underline{v}) = \underline{w}_1 + \underline{w}_2$ (si prenda ad esempio $\underline{v} = \underline{v}_1 + \underline{v}_2$).

2. $\underline{w} \in \operatorname{Im}(f), \quad \alpha \in K \quad \overset{?}{\Longrightarrow} \quad \alpha\underline{w} \in \operatorname{Im}(f)$

$$\underline{w} \in \operatorname{Im}(f) \Longrightarrow \text{esiste } \underline{v} \in V | \underline{w} = f(\underline{v}) \Longrightarrow \alpha\underline{w} = \alpha f(\underline{v}) \underset{\substack{\uparrow \\ \boxed{2}}}{=} f(\alpha\underline{v}),$$

quindi esiste $\tilde{\underline{v}} \in V$ tale che $f(\tilde{\underline{v}}) = \alpha\underline{w}$ (si prenda ad esempio $\tilde{\underline{v}} = \alpha\underline{v}$).

$N(f) \leq V$:

1. $\underline{v}_1, \underline{v}_2 \in N(f) \quad \overset{?}{\Longrightarrow} \quad \underline{v}_1 + \underline{v}_2 \in N(f)$

$$\left.\begin{array}{l} \underline{v}_1, \underline{v}_2 \in N(f) \Longrightarrow \underline{v}_1, \underline{v}_2 \in V \Longrightarrow \underline{v}_1 + \underline{v}_2 \in V \\ f(\underline{v}_1 + \underline{v}_2) \underset{\substack{\uparrow \\ \boxed{1}}}{=} f(\underline{v}_1) + f(\underline{v}_2) \underset{\substack{\uparrow \\ \underline{v}_1, \underline{v}_2 \in N(f)}}{=} \underline{0} + \underline{0} = \underline{0} \end{array}\right\} \Longrightarrow \underline{v}_1 + \underline{v}_2 \in N(f)$$

Typeset by $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$-TEX
Typeset by $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$-TEX

2. $\underline{v} \in N(f), \quad \alpha \in K \quad \overset{?}{\Longrightarrow} \quad \alpha\underline{v} \in N(f)$

$$\left.\begin{array}{l} \underline{v} \in N(f) \Longrightarrow \underline{v} \in V \Longrightarrow \alpha\underline{v} \in V \\[1em] f(\alpha\underline{v}) \underset{\underset{\boxed{2}}{\uparrow}}{=} \alpha f(\underline{v}) \underset{\underset{\underline{v}\in N(f)}{\uparrow}}{=} \alpha\underline{0} = \underline{0} \end{array}\right\} \Longrightarrow \alpha\underline{v} \in N(f)$$

Proposizione 2. Sia $f : V \to W$ una trasformazione lineare. Allora

$$f \text{ è iniettiva} \quad \Longleftrightarrow \quad N(f) = \{\underline{0}\}.$$

Dimostrazione. Sia f una trasformazione lineare iniettiva. Vogliamo provare che $N(f) = \{\underline{0}\}$, ossia che se $\underline{v} \in N(f)$ allora $\underline{v} = \underline{0}$.

Sia dunque $\underline{v} \in N(f)$, cioè, per definizione di $N(f)$, $\underline{v}$ è un elemento di V tale che $f(\underline{v}) = \underline{0}$.

Poichè f è una trasformazione lineare, per il N.B. di questa lezione si ha che $f(\underline{0}) = \underline{0}$.

Dunque $f(\underline{v}) = f(\underline{0})$. Da ció segue, essendo f iniettiva, che $\underline{v} = \underline{0}$.

Viceversa, supponiamo ora che f sia una trasformazione lineare con $N(f) = \{\underline{0}\}$ e proviamo che f è iniettiva, ossia che

$$\begin{array}{c} \underline{u}, \underline{v} \in V \\ f(\underline{u}) = f(\underline{v}) \end{array} \quad \Longrightarrow \quad \underline{u} = \underline{v}.$$

Da $f(\underline{u}) = f(\underline{v})$ segue che $f(\underline{u}) - f(\underline{v}) = \underline{0}$, e poichè f è una trasformazione lineare, si ha che $f(\underline{u}) - f(\underline{v}) = f(\underline{u} - \underline{v})$. Dunque $f(\underline{u} - \underline{v}) = \underline{0}$, e quindi, essendo $\underline{u} - \underline{v} \in V$, otteniamo che $\underline{u} - \underline{v} \in N(f)$. Poichè stiamo supponendo che $N(f) = \{\underline{0}\}$, allora $\underline{u} - \underline{v} = \underline{0}$, ossia $\underline{u} = \underline{v}$.

LEZIONE 17

Il Teorema Nullità+Rango. Lo spazio nullo di una matrice.

Teorema (Nullità + Rango) Sia $f : V \to W$ una trasformazione lineare. Se dim (V) è finita allora anche dim $(\mathrm{Im}(f))$ è finita e si ha

$$\boxed{\dim(V) = \dim(\mathrm{Im}(f)) + \dim(N(f)).}$$

La dimostrazione dl Teorema si articola in due punti:

$\boxed{1}$ Mostrare che

$\mathcal{B} = \{\underline{z}_1, \underline{z}_2, \dots, \underline{z}_n\}$ base di $V \quad \Longrightarrow \quad \mathcal{D} = \{f(\underline{z}_1), f(\underline{z}_2), \dots, f(\underline{z}_n)\}$ insieme di generatori di $\mathrm{Im}(f)$.

Da ció segue, poichè allora per il lemma della scrematura $\mathcal{D}$ contiene una base di $\mathrm{Im}(f)$, che

$$\dim(V) \text{ finita } \Longrightarrow \dim(\mathrm{Im}(f)) \text{ finita.}$$

$\boxed{2}$ Se $\mathcal{D}_1 = \{\underline{w}_1, \underline{w}_2, \dots, \underline{w}_r\}$ è una base di $\mathrm{Im}(f)$ e $\mathcal{B}_1 = \{\underline{v}_{r+1}, \underline{v}_{r+2}, \dots, \underline{v}_n\}$ è una base di $N(f)$, allora scegliendo per ogni $i = 1, \dots, r$

$$\underline{v}_i \in V \text{ tale che } \underline{w}_i = f(\underline{v}_i),$$

mostrare che $\mathcal{B} = \{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_r, \underline{v}_{r+1}, \dots, \underline{v}_n\}$ è una base di V.

Il caso della moltiplicazione di un vettore di $\mathbb{C}^n$ (risp. $\mathbb{R}^n$) per una matrice.

Sia A una matrice $m \times n$ complessa (oppure reale) e sia

$$\begin{array}{ccccc} f_A & : & \mathbb{C}^n & \to & \mathbb{C}^m \\ & & \underline{x} & \mapsto & A\underline{x} \end{array} \quad (\text{risp. } f_A \ : \ \mathbb{R}^n \ \to \ \mathbb{R}^m)$$

f_A è una trasformazione lineare.

Infatti per ogni $\underline{x}, \underline{y} \in \mathbb{C}^n$ ed ogni $\alpha \in \mathbb{C}$ si ha:

$\boxed{1}$ $f_A(\underline{x}+\underline{y}) \underset{\text{def. di } f_A}{\overset{\uparrow}{=}} A(\underline{x}+\underline{y}) \underset{\text{propr. distrib.}}{\overset{\uparrow}{=}} A\underline{x} + A\underline{y} \underset{\text{def. di } f_A}{\overset{\uparrow}{=}} f_A(\underline{x}) + f_A(\underline{y}),$

$\boxed{2}$ $f_A(\alpha\underline{x}) \underset{\text{def. di } f_A}{\overset{\uparrow}{=}} A(\alpha\underline{x}) \underset{\text{propr. distrib.}}{\overset{\uparrow}{=}} \alpha A\underline{x} \underset{\text{def. di } f_A}{\overset{\uparrow}{=}} \alpha f_A(\underline{x}).$

Vogliamo provare che **lo spazio immagine di f_A è uguale allo spazio delle colonne di A.**

$$\begin{aligned} \mathrm{Im} f_A = \{\underline{w} | \text{ esiste } \underline{v} \in \mathbb{C}^n \text{ per cui } f_A(\underline{v}) = \underline{w}\} & \underset{\text{def. di } f_A}{\overset{\uparrow}{=}} \\ = \{\underline{w} | \text{ esiste } \underline{v} \in \mathbb{C}^n \text{ per cui } A\underline{v} = \underline{w}\} & = \\ = \{A\underline{v} | \underline{v} \in \mathbb{C}^n\} & \end{aligned}$$

Se $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \ldots, \underline{a}_n$ sono le colonne di A e $v_1, v_2, \ldots, v_n$ le componenti di $\underline{v} \in \mathbb{C}^n$, allora, facendo il prodotto $A\underline{v}$ a blocchi (come nel punto (3) della Lezione 4) otteniamo

$$A\underline{v} = \begin{pmatrix} \underline{a}_1 & \underline{a}_2 & \ldots & \underline{a}_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = v_1\underline{a}_1 + v_2\underline{a}_2 + \ldots + v_n\underline{a}_n,$$

per cui

$$\begin{aligned} \mathrm{Im} f_A &= \{v_1\underline{a}_1 + v_2\underline{a}_2 + \ldots + v_n\underline{a}_n | v_1, v_2, \ldots, v_n \in \mathbb{C}\} = \\ &= \{ \text{ combinazioni lineari delle colonne di A a coefficienti in } \mathbb{C}\} = \\ &= C(A). \end{aligned}$$

Lo spazio nullo di f_A (definito nella Lezione 16) **è uguale allo spazio nullo di A** (definito nella Lezione 10):

$$N(f_A) = \{\underline{v} \in \mathbb{C}^n | f_A(\underline{v}) = \underline{0}\} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{def. di } f_A}}{=} \{\underline{v} \in \mathbb{C}^n | A\underline{v} = \underline{0}\} = N(A).$$

$\boxed{N.B.}$ Poichè abbiamo verificato che per ogni trasformazione lineare $f: \quad V \rightarrow W$ si ha che $N(f)$ è un sottospazio di V, in particolare $N(f_A) \leq \mathbb{C}^n$. Quindi da $N(f_A) = N(A)$ segue che $N(A) \leq \mathbb{C}^n$ per ogni matrice A $m \times n$.

Applicando ora il Teorema Nullità+Rango alla trasformazione lineare f_A otteniamo, essendo $V = \mathbb{C}^n$:

$$\begin{aligned} n = \dim(\mathbb{C}^n) = \dim(V) &= \dim\,(\mathrm{Im}(f_A)) + \dim\,(N(f_A)) = \\ &= \dim\,(C(A)) + \dim\,(N(A)) = \mathrm{rk}(A) + \dim\,(N(A)), \end{aligned}$$

e quindi, essendo n il numero delle colonne di A,

$$\boxed{\dim\,(N(A)) = \text{ numero delle colonne di } A - \mathrm{rk}(A) \quad \text{ per ogni matrice } A}$$

Matrice associata ad una trasformazione lineare rispetto a fissate basi di dominio e codominio.

Siano:

1. $f \quad : \quad V \quad \rightarrow \quad W$ una trasformazione lineare,
2. $\mathcal{B} = \{\underline{v}_1; \underline{v}_2; \ldots; \underline{v}_n\}$ una fissata base ordinata di V,
3. $\mathcal{D} = \{\underline{w}_1; \underline{w}_2; \ldots; \underline{w}_m\}$ una fissata base ordinata di W.

La matrice associata ad f rispetto alle basi ordinate $\mathcal{B}$ e $\mathcal{D}$ è la matrice A tale che

$$(*) \quad AC_{\mathcal{B}}(\underline{v}) = C_{\mathcal{D}}(f(\underline{v})) \quad \text{per ogni } \underline{v} \in V.$$

Quindi A è la matrice che rende che commutativo il diagramma:

$$\begin{array}{ccccc} & V & \xrightarrow{f} & W & \\ C_{\mathcal{B}} & \downarrow & & \downarrow & C_{\mathcal{D}} \\ & \mathbb{C}^n & \xrightarrow[f_A]{} & \mathbb{C}^m & \end{array}$$

Come nella costruzione della matrice di passaggio tra due basi ordinate di uno stesso spazio vettoriale V fatta nella Lezione 15 si ha:

– per il N.B. alla fine del punto (3) nella Lezione 4, la i-esima colonna di A è $A\underline{e}_i$, ove $\underline{e}_i$ è la i-esima colonna della matrice identica I_n,

– per il N.B. della Lezione 15, $\underline{e}_i = C_{\mathcal{B}}(\underline{v}_i)$,

– $AC_{\mathcal{B}}(\underline{v}_i) = C_{\mathcal{D}}(f(\underline{v}_i))$ perchè f soddisfi la condizione $(*)$.

Dunque

$$\boxed{A = \left(C_{\mathcal{D}}(f(\underline{v}_1)) \quad C_{\mathcal{D}}(f(\underline{v}_2)) \quad \dots \quad C_{\mathcal{D}}(f(\underline{v}_n)) \right)}$$

Si noti che A è una matrice $m \times n$.

$\boxed{N.B.}$ La matrice associata alla trasformazione lineare identica

$$\begin{array}{cccc} id_V & : V & \to & V \\ & \underline{v} & \mapsto & \underline{v} \end{array}$$

rispetto alle basi ordinate $\mathcal{B}'$ **sul dominio** e $\mathcal{B}$ **sul codominio** è la matrice di passaggio da $\mathcal{B}'$ a $\mathcal{B}$.

Come cambia la matrice associata ad una trasformazione lineare f quando si cambiano le basi del dominio e el codominio.

Siano

1. $f \quad : \quad V \quad \to \quad W$ una trasformazione lineare,
2. $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$ **due** basi ordinate di V,
3. $\mathcal{D}$ e $\mathcal{D}'$ **due** basi ordinate di W,
4. A la matrice associata ad f rispetto a $\mathcal{B}$ e $\mathcal{D}$,
5. A' la matrice associata ad f rispetto a $\mathcal{B}'$ e $\mathcal{D}'$.

Qual è la relazione tra A ed A' ?

Vale la seguente formula:

$$\boxed{A' = S^{-1}AP}$$

dove

P è la matrice di passaggio da $\mathcal{B}'$ a $\mathcal{B}$,
S è la matrice di passaggio da $\mathcal{D}'$ a $\mathcal{D}$.

Infatti A' è l'unica matrice tale che

$$(\bullet) \qquad A'C_{\mathcal{B}'}(\underline{v}) = C_{\mathcal{D}'}(f(\underline{v})) \quad \text{per ogni } \underline{v} \in V.$$

Poichè S, P ed A sono, rispettivamente, le uniche matrici per cui

$$\begin{aligned}
&(1) \quad C_{\mathcal{D}}(\underline{w}) = SC_{\mathcal{D}'}(\underline{w}) \quad \text{per ogni } \underline{w} \in W,\\
&(2) \quad C_{\mathcal{B}}(\underline{v}) = PC_{\mathcal{B}'}(\underline{v}) \quad \text{per ogni } \underline{v} \in V,\\
&(3) \quad AC_{\mathcal{B}}(\underline{v}) = C_{\mathcal{D}}(f(\underline{v})) \quad \text{per ogni } \underline{v} \in V,
\end{aligned}$$

allora per ogni $\underline{v} \in V$ si ha:

$$C_{\mathcal{D}'}(f(\underline{v})) \underset{\substack{\uparrow\\ (1)\ \text{con } \underline{w}=f(\underline{v})}}{=} S^{-1}C_{\mathcal{D}}(f(\underline{v})) \underset{\substack{\uparrow\\ (3)}}{=} S^{-1}AC_{\mathcal{B}}(\underline{v}) \underset{\substack{\uparrow\\ (2)}}{=} S^{-1}APC_{\mathcal{B}'}(\underline{v}) = (S^{-1}AP)C_{\mathcal{B}'}(\underline{v}),$$

dunque da $(\bullet)$ segue $A' = S^{-1}AP$.

ESERCIZIO TIPO 15

Si trovi una base dello spazio nullo $N(A)$ della matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{21}(-2)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = U$$

U è una forma ridotta di Gauss per A. Per il teorema "nullità + rango"si ha

$$(\text{ dim N(A) = numero delle colonne di A - rk(A)}) = 4 - 2 = 2.$$

Poichè $N(A) = N(U) = \{\underline{x} \in \mathbb{C}^4 | U\underline{x} = \underline{0}\}$ (si veda il N.B. della Lezione 10), allora

$$\underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in N(A) \Longleftrightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

Scegliendo come parametri le variabili corrispondenti alle colonne libere di U (la 2^a e la 4^a) con la sostituzione all'indietro si ottiene

$$\begin{cases} x_2 = h \\ x_4 = k \\ x_3 = -x_4 = -k \\ x_1 = -2x_2 - x_3 = -2h - (-k) = -2h + k \end{cases}$$

Quindi

$$N(A) = N(U) = \{ \begin{pmatrix} -2h + k \\ h \\ -k \\ k \end{pmatrix} | h, k \in \mathbb{C}\}$$

e chiamando $\underline{v}_1$ l'elemento di $N(A)$ che si ottiene ponendo $h = 1$ e $k = 0$, e $\underline{v}_2$ l'elemento di $N(A)$ che si ottiene ponendo $h = 0$ e $k = 1$, si ha che una base di $N(A)$ è

$$\{\underline{v}_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \underline{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\}.$$

ESERCIZIO TIPO 16

Si consideri la trasformazione lineare $f : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^2$ definita da

$$f(\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} a_0 + a_2 \\ 2a_0 + a_1 \end{pmatrix}.$$

Si determini la matrice A associata ad f rispetto alle basi ordinate

$$\mathcal{B} = \{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \} \quad \text{e} \quad \mathcal{D} = \{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \}$$

su dominio e codominio rispettivamente.

La matrice che cerchiamo è

$$A = \begin{pmatrix} C_{\mathcal{D}}(f(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix})) & C_{\mathcal{D}}(f(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix})) & C_{\mathcal{D}}(f(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix})) \end{pmatrix}$$

Poichè

$$\underset{\uparrow \atop \boxed{\begin{matrix} a_0 = 1 \\ a_1 = 0 \\ a_2 = 1 \end{matrix}}}{f(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}) =} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad \underset{\uparrow \atop \boxed{\begin{matrix} a_0 = 2 \\ a_1 = 1 \\ a_2 = 0 \end{matrix}}}{f(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}) =} \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix},$$

$$\underset{\uparrow \atop \boxed{\begin{matrix} a_0 = 1 \\ a_1 = 0 \\ a_2 = -1 \end{matrix}}}{f(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}) =} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix},$$

allora

$$A = \begin{pmatrix} C_{\mathcal{D}}(\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}) & C_{\mathcal{D}}(\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}) & C_{\mathcal{D}}(\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}) \end{pmatrix}$$

Piuttosto che calcolare separatamente $C_{\mathcal{D}}(\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix})$, $C_{\mathcal{D}}(\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix})$ e $C_{\mathcal{D}}(\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix})$, calcoliamo $C_{\mathcal{D}}(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix})$ per un generico vettore $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2$, e specializziamo la formula ottenuta ai tre diversi vettori $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Poichè

$$C_{\mathcal{D}}(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \quad | \quad \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

allora

$$C_{\mathcal{D}}(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \quad | \quad \begin{pmatrix} \alpha+\beta \\ \alpha-\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

ossia α e β sono tali che $\begin{cases} \alpha+\beta = a \\ \alpha-\beta = b \end{cases}$, per cui $\begin{cases} \alpha = (a+b)/2 \\ \beta = (a-b)/2 \end{cases}$

Quindi

$$C_{\mathcal{D}}(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} (a+b)/2 \\ (a-b)/2 \end{pmatrix}$$

Dunque

$$C_{\mathcal{D}}(\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}) \underset{\boxed{\begin{matrix} a=2 \\ b=2 \end{matrix}}}{\overset{}{\underset{\uparrow}{=}}} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad C_{\mathcal{D}}(\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}) \underset{\boxed{\begin{matrix} a=2 \\ b=5 \end{matrix}}}{\overset{}{\underset{\uparrow}{=}}} \begin{pmatrix} \frac{7}{2} \\ -\frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

$$C_{\mathcal{D}}(\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}) \underset{\boxed{\begin{matrix} a=0 \\ b=2 \end{matrix}}}{\overset{}{\underset{\uparrow}{=}}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

e quindi

$$A = \begin{pmatrix} 2 & \frac{7}{2} & 1 \\ 0 & -\frac{3}{2} & -1 \end{pmatrix}.$$

ESERCIZIO TIPO 17

Sia $A = \begin{pmatrix} 2 & \frac{7}{2} & 1 \\ 0 & -\frac{3}{2} & -1 \end{pmatrix}$ la matrice associata ad una trasformazione lineare $f : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^2$ rispetto alle basi ordinate

$$\mathcal{B} = \{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \} \quad \text{e} \quad \mathcal{D} = \{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \}$$

su dominio e codominio rispettivamente. Si determini la matrice A' associata ad f rispetto alle basi ordinate

$$\mathcal{B}' = \{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \} \quad \text{e} \quad \mathcal{D}' = \{ \underline{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} ; \underline{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \}$$

su dominio e codominio rispettivamente.

La matrice che cerchiamo è

$$A' = S^{-1} A P$$

dove S è la matrice di passaggio da $\mathcal{D}'$ a $\mathcal{D}$, e P è la matrice di passaggio da $\mathcal{B}'$ a $\mathcal{B}$.

Nell'ESERCIZIO TIPO 16 abbiamo visto che

$$C_{\mathcal{D}}(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} (a+b)/2 \\ (a-b)/2 \end{pmatrix}$$

quindi

$$S = (\, C_{\mathcal{D}}(\underline{e}_1) \quad C_{\mathcal{D}}(\underline{e}_2) \,) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

e

$$S^{-1} = \frac{1}{\frac{1}{2}(-\frac{1}{2}) - \frac{1}{2}\frac{1}{2}} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = (-2) \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

La matrice P è già stata calcolata nell'ESERCIZIO TIPO 14 (si chiamava M):

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & -1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

e quindi

$$A' = S^{-1} A P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & \frac{7}{2} & 1 \\ 0 & -\frac{3}{2} & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & -1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & -1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

ESERCITAZIONI* 4

$\boxed{1}$ Sia $\quad A_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & -\alpha^2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & \alpha+1 \\ 3 & -3\alpha^2 & 3 & \alpha+3 \end{pmatrix}, \quad$ dove $\alpha \in \mathbb{C}$.

(a) Per ogni $\alpha \in \mathbb{C}$ si dica qual è $rk(A_\alpha)$ e si trovino una base $\mathcal{B}_\alpha$ di $C(A_\alpha)$ ed una base $\mathcal{D}_\alpha$ di $R(A_\alpha)$.

(b) Sia $A = A_0$ la matrice che si ottiene ponendo $\alpha = 0$. Si trovi una base dello spazio nullo $N(A)$ di A.

$\boxed{2}$ Siano $\underline{w}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \underline{w}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \underline{w}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \underline{w}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \underline{z}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \underline{z}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$

$\underline{z}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \underline{z}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$

(a) Si provi che $\mathcal{B} = \{\underline{w}_1; \underline{w}_2; \underline{w}_3; \underline{w}_4\}$ e $\mathcal{B}' = \{\underline{z}_1; \underline{z}_2; \underline{z}_3; \underline{z}_4\}$ sono due basi ordinate di $\mathbb{R}^4$.

(b) Si scriva la matrice di passaggio da $\mathcal{B}'$ a $\mathcal{B}$.

$\boxed{3}$ Sia $f : M_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^2$ definita da $f(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} a+b \\ a+c \end{pmatrix}$.

(a) Si provi che f è una trasformazione lineare.

(b) Si determini la matrice A associata ad f rispetto alle basi ordinate

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} \quad \text{e} \quad \mathcal{D} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

su dominio e codominio rispettivamente.

$\boxed{4}$ Sia $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ la matrice associata ad una trasformazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ rispetto alle basi ordinate $\mathcal{B} = \left\{ \underline{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \underline{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \underline{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ e $\mathcal{D} = \left\{ \underline{w}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}; \underline{w}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ su dominio e codominio rispettivamente. Si determini la matrice A' associata ad f rispetto alle basi ordinate $\mathcal{B}' = \left\{ \underline{v}'_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \underline{v}'_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}; \underline{v}'_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ e $\mathcal{D}' = \left\{ \underline{w}'_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \underline{w}'_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ su dominio e codominio rispettivamente.

Svolgimento ESERCITAZIONI* 4

$\boxed{1}$ Sia $\quad A_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & -\alpha^2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & \alpha+1 \\ 3 & -3\alpha^2 & 3 & \alpha+3 \end{pmatrix}, \quad$ dove $\alpha \in \mathbb{C}$.

(a) Per ogni $\alpha \in \mathbb{C}$ si dica qual è $rk(A_\alpha)$ e si trovino una base $\mathcal{B}_\alpha$ di $C(A_\alpha)$ ed una base $\mathcal{D}_\alpha$ di $R(A_\alpha)$.

(b) Sia $A = A_0$ la matrice che si ottiene ponendo $\alpha = 0$. Si trovi una base dello spazio nullo $N(A)$ di A.

(a)
$$A_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & -\alpha^2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & \alpha+1 \\ 3 & -3\alpha^2 & 3 & \alpha+3 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{31}(-3)E_{21}(-1)} \begin{pmatrix} 1 & -\alpha^2 & 1 & 1 \\ 0 & \alpha^2+3 & 1 & \alpha \\ 0 & 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix} = B_\alpha$$

$\boxed{1^0 \text{ CASO}}$ $\qquad \alpha^2+3=0$ cioè $\alpha \in \{\sqrt{3}i, -\sqrt{3}i\}$

$$B_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \alpha \\ 0 & 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix} \xrightarrow{E_3(\frac{1}{\alpha}) \quad (\alpha \neq 0!)} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \alpha \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = U_\alpha$$

$\text{rk}(A_\alpha) = 3$

Una base $\mathcal{B}_\alpha$ di $C(A_\alpha)$ è $\mathcal{B}_\alpha = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha+1 \\ \alpha+3 \end{pmatrix} \right\}$.

Una base $\mathcal{D}_\alpha$ di $R(A_\alpha)$ è $\mathcal{D}_\alpha = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ \alpha \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

$\boxed{2^0 \text{ CASO}}$ $\qquad \alpha^2+3 \neq 0$ cioè $\alpha \notin \{\sqrt{3}i, -\sqrt{3}i\}$

$$B_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & -\alpha^2 & 1 & 1 \\ 0 & \alpha^2+3 & 1 & \alpha \\ 0 & 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix} \xrightarrow{E_2(\frac{1}{\alpha^2+3})} \begin{pmatrix} 1 & -\alpha^2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{\alpha^2+3} & \frac{\alpha}{\alpha^2+3} \\ 0 & 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix} = C_\alpha$$

$\boxed{1^0 \text{ Sottocaso}}$ $\qquad \alpha = 0 \qquad C_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = U_0$

$\text{rk}(A_0) = 2$

Una base $\mathcal{B}_0$ di $C(A_0)$ è $\mathcal{B}_0 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$.

Una base $\mathcal{D}_0$ di $R(A_0)$ è $\mathcal{D}_0 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{1}{3} \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$.

$\boxed{2^0 \text{ Sottocaso}}$ $\qquad \alpha \notin \{\sqrt{3}i, -\sqrt{3}i, 0\}$

$$C_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & -\alpha^2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{\alpha^2+3} & \frac{\alpha}{\alpha^2+3} \\ 0 & 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix} \xrightarrow{E_3(\frac{1}{\alpha})} \begin{pmatrix} 1 & -\alpha^2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{\alpha^2+3} & \frac{\alpha}{\alpha^2+3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = U_\alpha$$

$\text{rk}(A_\alpha) = 3$

Una base $\mathcal{B}_\alpha$ di $C(A_\alpha)$ è $\mathcal{B}_\alpha = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\alpha^2 \\ 3 \\ -3\alpha^2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha+1 \\ \alpha+3 \end{pmatrix} \right\}$.

Una base $\mathcal{D}_\alpha$ di $R(A_\alpha)$ è $\mathcal{D}_\alpha = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -\alpha^2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{1}{\alpha^2+3} \\ \frac{\alpha}{\alpha^2+3} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

$(b) \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}$

Una forma ridotta di Gauss per A è $U_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ trovata nel 1^0 sottocaso.

Per il Teorema nullità+rango,

$$\dim N(A) = \text{ (numero delle colonne di A }) - \text{ rk } (A) = 4 - 2 = 2.$$

Poichè $N(A) = N(U_0) = \left\{ \underline{x} \in \mathbb{C}^4 | U_0 \underline{x} = \underline{0} \right\}$, allora

$$\underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in N(A) \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} x_1 + x_3 + x_4 & = 0 \\ x_2 + \frac{1}{3}x_3 & = 0 \end{cases}$$

Prendendo come parametri le variabili corrispondenti alle colonne libere di U_0, ossia la 3^a e la 4^a, con la sostituzione all'indietro si ottiene

$$\begin{cases} x_3 = h \\ x_4 = k \\ x_2 = -\frac{1}{3}x_3 = -\frac{1}{3}h \\ x_1 = -x_3 - x_4 = -h - k \end{cases}$$

Quindi $N(A) = N(U_0) = \left\{ \begin{pmatrix} -h-k \\ -\frac{1}{3}h \\ h \\ k \end{pmatrix} | h,k \in \mathbb{C} \right\}$. Ponendo:

$$\underline{v}_1 \underset{\boxed{\begin{matrix} h=1 \\ k=0 \end{matrix}}}{\overset{}{\underset{\uparrow}{=}}} \begin{pmatrix} -1 \\ -\frac{1}{3} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \underline{v}_2 \underset{\boxed{\begin{matrix} h=0 \\ k=1 \end{matrix}}}{\overset{}{\underset{\uparrow}{=}}} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

si ottiene che una base di $N(A)$ è

$$\left\{ \underline{v}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -\frac{1}{3} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \underline{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

$\boxed{2}$ Siano $\underline{w}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \underline{w}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \underline{w}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \underline{w}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \underline{z}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \underline{z}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$
$\underline{z}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \underline{z}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(a) Si provi che $\mathcal{B} = \{\underline{w}_1; \underline{w}_2; \underline{w}_3; \underline{w}_4\}$ e $\mathcal{B}' = \{\underline{z}_1; \underline{z}_2; \underline{z}_3; \underline{z}_4\}$ sono due basi ordinate di $\mathbb{R}^4$.

(b) Si scriva la matrice di passaggio da $\mathcal{B}'$ a $\mathcal{B}$.

(a) E' sufficiente provare che se $A = (\underline{w}_1 \quad \underline{w}_2 \quad \underline{w}_3 \quad \underline{w}_4)$ ed $A' = (\underline{z}_1 \quad \underline{z}_2 \quad \underline{z}_3 \quad \underline{z}_4)$ si ha $\text{rk}(A) = 4 = \text{rk}(A')$ (si veda l'ESERCIZIO TIPO 13).

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{21}(-2)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{32}(1)E_2(-\frac{1}{2})}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{43}(-1)E_2(-2)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_4(\frac{1}{2})}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = U, \qquad \text{rk }(A) = 4;$$

$$A' = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{41}(-1)E_{21}(-1)E_1(-\frac{1}{2})} \begin{pmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & -2 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \xrightarrow{E_2(-\frac{1}{2})}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{43}(\frac{1}{2})E_3(\frac{1}{3})} \begin{pmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \xrightarrow{E_4(2)}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = U, \qquad \text{rk}\,(A') = 4;$$

(b) La matrice di passaggio da $\mathcal{B}'$ a $\mathcal{B}$ è

$$M = (\, C_{\mathcal{B}}(\underline{z}_1) \quad C_{\mathcal{B}}(\underline{z}_2) \quad C_{\mathcal{B}}(\underline{z}_3) \quad C_{\mathcal{B}}(\underline{z}_4)\,)\,.$$

$$C_{\mathcal{B}}(\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \delta \\ \gamma \end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \alpha\underline{w}_1 + \beta\underline{w}_2 + \delta\underline{w}_3 + \gamma\underline{w}_4 =$$

$$= \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \delta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha+\beta \\ 2\alpha+\delta \\ -\beta \\ \delta+2\gamma \end{pmatrix} \iff$$

$$\iff \quad \begin{cases} \alpha+\beta & = a \\ 2\alpha+\delta & = b \\ \quad -\beta & = c \\ \delta+2\gamma & = d \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & a \\ 2 & 0 & 1 & 0 & b \\ 0 & -1 & 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 1 & 2 & d \end{array}\right) \xrightarrow{E_{21}(-2)} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & -2 & 1 & 0 & b-2a \\ 0 & -1 & 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 1 & 2 & d \end{array}\right) \xrightarrow{E_{32}(1)E_2(-\frac{1}{2})}$$

$$\to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & -1/2 & 0 & -(b-2a)/2 \\ 0 & 0 & -1/2 & 0 & (2c-b+2a)/2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & d \end{array}\right) \xrightarrow{E_{43}(-1)E_3(-2)}$$

$$\to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & -1/2 & 0 & -(b-2a)/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2c+b-2a \\ 0 & 0 & 0 & 2 & d+2c-b+2a \end{array}\right) \xrightarrow{E_4(\frac{1}{2})}$$

$$\to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & -(b-2a)/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2c+b-2a \\ 0 & 0 & 0 & 1 & (d+2c-b+2a)/2 \end{array}\right)$$

Con la sostituzione all'indietro si ottiene:

$$\begin{cases} \gamma &= (d+2c-b+2a)/2 \\ \delta &= -2c+b-2a \\ \beta &= \delta/2-(b-2a)/2 &= (-2c+b-2a)/2-(b-2a)/2 &= -c \\ \alpha &= -beta+a &= c+a \end{cases}$$

per cui

$$C_{\mathcal{B}}(\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} c+a \\ -c \\ -2c+b-2a \\ (d+2c-b+2a)/2 \end{pmatrix}.$$

In particolare si ha:

$$C_{\mathcal{B}}(\underline{z}_1) = C_{\mathcal{B}}(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad C_{\mathcal{B}}(\underline{z}_2) = C_{\mathcal{B}}(\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad C_{\mathcal{B}}(\underline{z}_3) = C_{\mathcal{B}}(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ -8 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

La matrice di passaggio da $\mathcal{B}'$ a $\mathcal{B}$ è dunque

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ -3 & -5 & -8 & -2 \\ 2 & 3 & 4 & 3/2 \end{pmatrix}.$$

$\boxed{3}$ Sia $f : M_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^2$ definita da $f(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} a+b \\ a+c \end{pmatrix}$.

(a) Si provi che f è una trasformazione lineare.

(b) Si determini la matrice A associata ad f rispetto alle basi ordinate

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} \quad \text{e} \quad \mathcal{D} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

su dominio e codominio rispettivamente.

(a) Per provare che f è una trasformazione lineare occorre provare :

1. $f(\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix}) \underset{?}{=} f(\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}) + f(\begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix})$
   per ogni $a_1, b_1, c_1, d_1, a_2, b_2, c_2, d_2 \in \mathbb{R}$
2. $f(\alpha \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}) \underset{?}{=} \alpha f(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix})$ per ogni $\alpha, a, b, c, d \in \mathbb{R}$

1. $$f(\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix}) \underset{\substack{\uparrow \\ \boxed{\text{def. somma matrici}}}}{=} f(\begin{pmatrix} a_1 + a_2 & b_1 + b_2 \\ c_1 + c_2 & d_1 + d_2 \end{pmatrix}) \underset{\substack{\uparrow \\ \boxed{\text{def. f}}}}{=}$$

$$= \begin{pmatrix} (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2) \\ (a_1 + a_2) + (c_1 + c_2) \end{pmatrix} \underset{\substack{\uparrow \\ \boxed{\text{propr. assoc. e commut. di + in } \mathbb{R}}}}{=} \begin{pmatrix} (a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) \\ (a_1 + c_1) + (a_2 + c_2) \end{pmatrix} \underset{\substack{\uparrow \\ \boxed{\text{def. somma vettori colonna}}}}{=}$$

$$= \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_1 + c_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2 + b_2 \\ a_2 + c_2 \end{pmatrix} \underset{\substack{\uparrow \\ \boxed{\text{def. f}}}}{=} f(\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}) + f(\begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix})$$

2. $$f(\alpha \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}) \underset{\substack{\uparrow \\ \boxed{\text{def. prod. di uno scal. per una matr.}}}}{=} f(\begin{pmatrix} \alpha a & \alpha b \\ \alpha c & \alpha d \end{pmatrix}) \underset{\substack{\uparrow \\ \boxed{\text{def. f}}}}{=} \begin{pmatrix} \alpha a + \alpha b \\ \alpha a + \alpha c \end{pmatrix} \underset{\substack{\uparrow \\ \boxed{\text{propr. distr. in } \mathbb{R}}}}{=}$$

$$= \begin{pmatrix} \alpha(a + b) \\ \alpha(a + c) \end{pmatrix} \underset{\substack{\uparrow \\ \boxed{\text{def. prod. di uno scal. per un vett. colonna}}}}{=} \alpha \begin{pmatrix} a + b \\ a + c \end{pmatrix} \underset{\substack{\uparrow \\ \boxed{\text{def. f}}}}{=} \alpha f(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix})$$

(b) La matrice A associata ad f rispetto alle basi ordinate $\mathcal{B}$ e $\mathcal{D}$ su dominio e codominio rispettivamente è la matrice

$$A = \left(C_{\mathcal{D}}(f(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix})) \quad C_{\mathcal{D}}(f(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix})) \quad C_{\mathcal{D}}(f(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix})) \quad C_{\mathcal{D}}(f(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix})) \right).$$

Dalla definizione di f si ottiene:

$$f(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad f(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix},$$

$$f(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad f(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

quindi $A = \left(C_{\mathcal{D}}(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}) \quad C_{\mathcal{D}}(\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}) \quad C_{\mathcal{D}}(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}) \quad C_{\mathcal{D}}(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}) \right)$.

Calcoliamo le coordinate rispetto alla base ordinata $\mathcal{D}$ di un generico elemento $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$.

$$C_{\mathcal{D}}(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \quad \text{t.c.} \quad \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Facendo un'eliminazione di Gauss sulla matrice aumentata del sistema

$$\begin{cases} \alpha+\beta &= a \\ 2\alpha-\beta &= b \end{cases}$$

otteniamo:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & a \\ 2 & -1 & b \end{array}\right) \xrightarrow{E_{21}(-2)} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & a \\ 0 & -3 & b-2a \end{array}\right) \xrightarrow{E_{2}(-1/3)} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & a \\ 0 & 1 & (2a-b)/3 \end{array}\right),$$

per cui con la sostituzione all'indietro

$$\begin{cases} \beta = (2a-b)/3 \\ \alpha = -\beta+a = (b-2a)/3+a = (a+b)/3 \end{cases}$$

Dunque $C_{\mathcal{D}}(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} (a+b)/3 \\ (2a-b)/3 \end{pmatrix}$, e in particolare si ha:

$$C_{\mathcal{D}}(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}) \underset{\boxed{\substack{a=2\\ b=1}}}{\underset{\uparrow}{=}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad C_{\mathcal{D}}(\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}) \underset{\boxed{\substack{a=2\\ b=2}}}{\underset{\uparrow}{=}} \begin{pmatrix} 4/3 \\ 4/3 \end{pmatrix},$$

$$C_{\mathcal{D}}(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}) \underset{\boxed{\substack{a=1\\ b=0}}}{\underset{\uparrow}{=}} \begin{pmatrix} 1/3 \\ 2/3 \end{pmatrix}, \qquad C_{\mathcal{D}}(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}) \underset{\boxed{\substack{a=0\\ b=0}}}{\underset{\uparrow}{=}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

La matrice A associata ad f rispetto alle basi ordinate $\mathcal{B}$ e $\mathcal{D}$ su dominio e codominio rispettivamente è quindi la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4/3 & 1/3 & 0 \\ 1 & 2/3 & 2/3 & 0 \end{pmatrix}.$$

$\boxed{4}$ Sia $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ la matrice associata ad una trasformazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ rispetto alle basi ordinate $\mathcal{B} = \left\{ \underline{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \underline{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \underline{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ e $\mathcal{D} = \left\{ \underline{w}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}; \underline{w}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ su dominio e codominio rispettivamente. Si determini la matrice A' associata ad f rispetto alle basi ordinate $\mathcal{B}' = \left\{ \underline{v}'_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \underline{v}'_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}; \underline{v}'_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ e $\mathcal{D}' = \left\{ \underline{w}'_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \underline{w}'_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ su dominio e codominio rispettivamente.

La matrice A' associata ad f rispetto alle basi ordinate $\mathcal{B}'$ e $\mathcal{D}'$ su dominio e codominio rispettivamente è la matrice

$$A' = S^{-1}AP \quad \text{dove } S \quad \text{è la matrice di passaggio da } \mathcal{D}' \quad \text{a } \mathcal{D} \quad \text{e}$$
$$P \quad \text{è la matrice di passaggio da } \mathcal{B}' \quad \text{a } \mathcal{B}.$$

Per calcolare $S = (\,C_{\mathcal{D}}(\underline{w}_1') \quad C_{\mathcal{D}}(\underline{w}_2')\,)$, calcoliamo per prima cosa le coordinate rispetto a $\mathcal{D}$ di un generico $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$.

$$C_{\mathcal{D}}(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \quad | \quad \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \alpha \underline{w}_1 + \beta \underline{w}_2 = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ -\alpha+\beta \end{pmatrix}$$

Risolvendo il sistema $\begin{cases} \alpha = a \\ -\alpha+\beta = b \end{cases}$ otteniamo $\begin{cases} \alpha = a \\ \beta = a+b \end{cases}$, quindi

$$C_{\mathcal{D}}(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} a \\ a+b \end{pmatrix}.$$

In particolare, specializzando a $\underline{w}_1'$ e $\underline{w}_2'$ otteniamo

$$C_{\mathcal{D}}(\underline{w}_1') = C_{\mathcal{D}}(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}) \underset{\boxed{\substack{a=1 \\ b=1}}}{\overset{}{\underset{\uparrow}{=}}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad C_{\mathcal{D}}(\underline{w}_2') = C_{\mathcal{D}}(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}) \underset{\boxed{\substack{a=0 \\ b=1}}}{\underset{\uparrow}{=}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

per cui $S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. L'inversa di S e' quindi $S^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$.

Per calcolare $P = (\,C_{\mathcal{B}}(\underline{v}_1') \quad C_{\mathcal{B}}(\underline{v}_2') \quad C_{\mathcal{B}}(\underline{v}_3')\,)$, calcoliamo per prima cosa le coordinate rispetto a $\mathcal{B}$ di un generico $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$.

$$C_{\mathcal{B}}(\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \delta \end{pmatrix} \quad | \quad \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \alpha \underline{v}_1 + \beta \underline{v}_2 + \delta \underline{v}_3 = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \delta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha+\beta \\ \alpha+\delta \\ \beta \end{pmatrix}$$

Risolvendo il sistema

$$\begin{cases} \alpha+\beta = a \\ \alpha+\delta = b \\ \beta = c \end{cases}$$

otteniamo

$$\begin{cases} \beta = c \\ \alpha = -\beta + a = -c + a \\ \delta = -\alpha + b = -(-c+a) + b = c - a + b \end{cases},$$

quindi

$$C_{\mathcal{B}}\left(\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} a-c \\ c \\ -a+b+c \end{pmatrix}.$$

In particolare, specializzando a $\underline{v}_1'$, $\underline{v}_2'$ e $\underline{v}_3'$ otteniamo

$$C_{\mathcal{B}}(\underline{v}_1') = C_{\mathcal{B}}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \underset{\boxed{\begin{matrix} a=1 \\ b=0 \\ c=0 \end{matrix}}}{\overset{}{\underset{\uparrow}{=}}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad C_{\mathcal{B}}(\underline{v}_2') = C_{\mathcal{B}}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) \underset{\boxed{\begin{matrix} a=1 \\ b=-1 \\ c=0 \end{matrix}}}{\underset{\uparrow}{=}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix},$$

$$C_{\mathcal{B}}(\underline{v}_3') = C_{\mathcal{B}}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \underset{\boxed{\begin{matrix} a=0 \\ b=0 \\ c=1 \end{matrix}}}{\underset{\uparrow}{=}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

per cui $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

La matrice A' che cerchiamo è quindi

$$A' = S^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

LEZIONE 18

Interpretazione geometrica di $\mathbb{R}^2$ ed $\mathbb{R}^3$.

Fissando su di un piano π un sistema di riferimento ortogonale e monometrico, ogni punto P del piano π è completamente individuato dalla coppia ordinata di numeri reali (a, b), dove

$$\begin{aligned} a &= \text{ ascissa di P} \\ b &= \text{ ordinata di P} \end{aligned}$$

Resta quindi definita una **corrispondenza biunivoca** tra il piano ed $\mathbb{R}^2$:

$$\begin{array}{ccc} \pi & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ \underset{\substack{\text{punto di ascissa a} \\ \text{ed ordinata b}}}{\underset{\uparrow}{P}} & \mapsto & \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \end{array}$$

Siano O l'origine degli assi del sistema di riferimento ed r la retta del piano passante per i punti O e P (la retta uscente dall'origine degli assi e passante per P). Il punto O individua su r due semirette: la semiretta su cui si trova P e la semiretta opposta a quella su cui si trova P.

Per visualizzare il punto P si identifica P con il **segmento orientato** $\overrightarrow{OP}$ (si dice che $\overrightarrow{OP}$ è un vettore applicato nel punto O).

Dunque

$$\underline{v} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \underset{\text{corrisponde a}}{\leftrightarrow} \underset{\substack{\text{punto di ascissa a} \\ \text{ed ordinata b}}}{\underset{\uparrow}{P}} \underset{\text{visualizzato da}}{\leftrightarrow} \overrightarrow{OP}$$

La distanza di P da O è:

$$d = \sqrt{|a|^2 + |b|^2} = \text{ lunghezza di } \overrightarrow{OP}.$$

Lo spazio vettoriale $\mathbb{R}^2$ è, in questo senso, una astrazione del piano, in cui i vettori di $\mathbb{R}^2$ corrispondono ai punti del piano.

In questa astrazione, a cosa corrispondono i sottospazi di dimensione 1 di $\mathbb{R}^2$?

Un sottospazio di dimensione 1 di $V = \mathbb{R}^2$ è un sottospazio

$$W = \langle \underline{v} \rangle = \{\alpha \underline{v} | \alpha \in \mathbb{R}\} \leq \mathbb{R}^2$$

dove $\underline{v} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \neq \underline{0}$. Siano, con le notazioni adottate precedentemente, P il punto che corrisponde al vettore $\underline{v}$ ed r la retta uscente da O e passante per P.

Per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ si ha

$$\alpha \underline{v} = \alpha \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha a \\ \alpha b \end{pmatrix} \underset{\text{corrisponde a}}{\leftrightarrow} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{punto di ascissa } \alpha a \\ \text{ed ordinata } \alpha b}}{Q} \underset{\text{visualizzato da}}{\leftrightarrow} \overrightarrow{OQ}$$

dove il punto Q si trova sulla retta r e, piú precisamente,

Q è il punto che si trova a distanza $\sqrt{|\alpha a|^2 + |\alpha b|^2} = |\alpha| d$ da O,

- sulla semiretta su cui appartiene anche il punto P se $\alpha \geq 0$,
- sulla semiretta opposta a quella su cui appartiene il punto P se $\alpha \leq 0$.

Pertanto si ha:

$$\begin{matrix} \text{sottospazio di} \mathbb{R}^2 \\ \text{di dimensione 1} \end{matrix} \underset{\text{corrisponde a}}{\leftrightarrow} \begin{matrix} \text{retta del piano} \\ \textbf{passante per O} \end{matrix}$$

Quindi i sottospazi di dimensione 1 di $\mathbb{R}^2$ corrispondono alle rette passanti per l'origine degli assi in un piano in cui si sia fissato un sitema di riferimento.

Analogamente, fissando nello spazio tridimensionale un sistema di riferimento ortogonale e monometrico, ogni punto P dello spazio è completamente individuato da una terna ordinata di numeri reali (a, b, c). Resta quindi definita una **corrispondenza biunivoca** tra lo spazio tridimensionale ed $\mathbb{R}^3$ e si ha:

$$\underline{v} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \underset{\text{corrisponde a}}{\leftrightarrow} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{punto}}}{P} \underset{\text{visualizzato da}}{\leftrightarrow} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{segmento orientato}}}{\overrightarrow{OP}}$$

dove O è l'origine degli assi del sistema di riferimento.

La distanza di P da O è $d = \sqrt{|a|^2 + |b|^2 + |c|^2} =$ lunghezza di $\overrightarrow{OP}$.

Dunque $\mathbb{R}^3$ è una astrazione dello spazio tridimensionale in cui

– i vettori di $\mathbb{R}^3$ corrispondono ai punti,

– i sottospazi di dimensione 1 di $\mathbb{R}^3$ corrispondono alle rette uscenti dall'origine degli assi,

– i sottospazi di dimensione 2 di $\mathbb{R}^3$ corrispondono ai piani contenenti l'origine degli assi.

Regola del parallelogramma.

Siano $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$. In un piano π in cui si sia fissato un sistema di riferimento ortogonale e monometrico siano P e Q i punti che corrispondono ad $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$ rispettivamente. Allora il punto R del piano π che corrisponde a

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+c \\ b+d \end{pmatrix}$$

è il punto visualizzato dal segmento orientato che sia la diagonale del parallelogramma con lati $\overrightarrow{OP}$ ed $\overrightarrow{OQ}$.

Si guardi la parte destra della Fig. 2 a pag. 59 del libro, e si chiami P il punto che sul libro è chiamato P_2, Q il punto che sul libro è chiamato P_1 ed R il punto che sul libro è chiamato P.

Sia L il punto di intersezione tra la retta passante per P parallela all'asse delle x e la retta passante per R parallela all'asse delle y. Sia H la proiezione di Q sull'asse delle x.

I due triangoli $P\hat{R}L$ ed $O\hat{Q}H$, avendo lati corrispondenti paralleli per costruzione, e una coppia di lati corrispondenti ($\overrightarrow{PR}$ ed $\overrightarrow{OQ}$) uguali, sono uguali.

In particolare

$$d = |QH| = |RL| \quad \text{e} \quad c = |OH| = |PL|.$$

Dunque si ha:

$$\text{l'ordinata di } R = (\text{l'ordinata di } P) + |RL| = b + d,$$
$$\text{l'ascissa di } R = (\text{l'ascissa di } P) + |PL| = a + c.$$

LEZIONE 19

Norme di vettori.

Uguale alla Lezione 19 del libro.

Esempio numerico. Sia $\underline{v} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2+5i \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2$.

$$||\underline{v}||_1 = |-3| + |2+5i| = 3 + \sqrt{2^2+5^2} = 3 + \sqrt{29}$$

$$||\underline{v}||_2 = \sqrt{\begin{pmatrix} -3 \\ 2+5i \end{pmatrix}^H \begin{pmatrix} -3 \\ 2+5i \end{pmatrix}} = \sqrt{\begin{pmatrix} -3 & 2-5i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 \\ 2+5i \end{pmatrix}} =$$

$$= \sqrt{9 + (2-5i)(2+5i)} = \sqrt{9+4+25} = \sqrt{38}$$

$$||\underline{v}||_\infty = \max\{|-3|, |2+5i|\} = \max\{3, \sqrt{29}\} = \sqrt{29}$$

Svolgimento dell'Esercizio 19.5 del libro.

Def. Siano $||\cdot||$ una norma su $\mathbb{R}^2$ e d un numero reale strettamente positivo. L'intorno di O di raggio d in $\mathbb{R}^2$ rispetto a $||\cdot||$ è

$$\{\underline{z} \in \mathbb{R}^2 | \quad ||\underline{z}|| \leq d\}.$$

Intorni di O raggio d$(\in \mathbb{R}_{>0})$ **in** $\mathbb{R}^2$ **rispetto alle norme** $||\cdot||_2, ||\cdot||_1, ||\cdot||_\infty$.

Sia d un numero reale strettamente positivo.

$\boxed{1}$ L'intorno di O di raggio d in $\mathbb{R}^2$ rispetto a $||\cdot||_2$ è

$$\{\underline{z} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 | \quad ||\underline{z}||_2 = \sqrt{|x|^2+|y|^2} \leq d\}.$$

Poichè $\sqrt{|x|^2+|y|^2}$ = distanza del punto $P(x,y)$ (ossia il punto di ascissa x ed ordinata y) da O, allora l'intorno di O di raggio d in $\mathbb{R}^2$ rispetto a $||\cdot||_2$ è l'insieme dei vettori di $\mathbb{R}^2$ rappresentati dai punti del piano dentro al cerchio di centro O e raggio d.

$\boxed{2}$ L'intorno di O di raggio d in $\mathbb{R}^2$ rispetto a $||\cdot||_1$ è

$$\{\underline{z} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 | \quad ||\underline{z}||_1 = |x|+|y| \leq d\}.$$

Quindi l'intorno di O di raggio d in $\mathbb{R}^2$ rispetto a $||\cdot||_1$ è l'insieme dei vettori di $\mathbb{R}^2$ rappresentati dai punti del piano dentro al rombo di vertici i punti $P_1(d,0)$, $P_2(0,d)$, $P_3(-d,0)$, $P_4(0,-d)$.

(Si consideri dapprima il 1^o quadrante. Poichè i punti $P(x,y)$ che vi appartengono hanno ascissa e ordinata positiva, allora un punto $P(x,y)$ del primo quadrante appartiene all'intorno di O di raggio d rispetto a $||\cdot||_1$ se e solo se $x+y \le d$, quindi se P si trova nel triangolo delimitato dai due semiassi positivi del sistema di riferimento e la retta di equazione $y=-x+d$. Simmetricamente si ottengono i punti dell'intorno di O di raggio d rispetto a $||\cdot||_1$ appartenenti agli altri tre quadranti).

$\boxed{3}$ L'intorno di O di raggio d in $\mathbb{R}^2$ rispetto a $||\cdot||_\infty$ è

$$\{\underline{z} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 | \quad ||\underline{z}||_\infty = max\{|x|,|y|\} \le d\}.$$

Quindi l'intorno di O di raggio d in $\mathbb{R}^2$ rispetto a $||\cdot||_\infty$ è l'insieme dei vettori di $\mathbb{R}^2$ rappresentati dai punti del piano dentro al quadrato di vertici i punti $P_1(d,d)$, $P_2(-d,d)$, $P_3(-d,-d)$, $P_4(d,-d)$. (Si consideri dapprima il 1^o quadrante. Poichè i punti $P(x,y)$ che vi appartengono hanno ascissa e ordinata positiva, allora un punto $P(x,y)$ del primo quadrante appartiene all'intorno di O di raggio d rispetto a $||\cdot||_\infty$ se e solo se $x \le d$ e $y \le d$, quindi se P si trova nel quadrato di vertici $P_1(d,d)$, $Q(0,d)$, $O(0,0)$, $R(d,0)$. Simmetricamente si ottengono i punti dell'intorno di O di raggio d rispetto a $||\cdot||_\infty$ appartenenti agli altri tre quadranti).

ESERCIZIO TIPO 18

Si verifichi che $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ definita da $\phi(\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix}) = |a_0 + a_1| + |a_0 - a_1|$ è una norma.

$\boxed{1}$ $\phi(\underline{0}) = \phi(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}) = |0+0| + |0-0| = 0.$

Sia $\underline{v} = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix}$. Poichè $\phi(\underline{v}) \geq 0$, per provare che

$$\underline{v} \neq \underline{0} \qquad \Longrightarrow \qquad \phi(\underline{v}) > 0$$

basta provare che

$$\underline{v} \neq \underline{0} \qquad \Longrightarrow \qquad \phi(\underline{v}) \neq 0,$$

ossia basta provare che

$$\phi(\underline{v}) = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \underline{v} = \underline{0}.$$

Ora:

$$\left.\begin{array}{r} \phi(\underline{v}) = 0 \\ \underline{v} = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} \end{array}\right\} \Longrightarrow \begin{cases} |a_0 + a_1| = 0 \\ |a_0 - a_1| = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a_0 + a_1 = 0 \\ a_0 - a_1 = 0 \end{cases} \Longrightarrow a_0 = a_1 = 0 \Longrightarrow \underline{v} = \underline{0}.$$

$\boxed{2}$

$$\begin{aligned} \phi(\alpha\underline{v}) &= \phi(\alpha \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix}) = \phi(\begin{pmatrix} \alpha a_0 \\ \alpha a_1 \end{pmatrix}) = |\alpha a_0 + \alpha a_1| + |\alpha a_0 - \alpha a_1| = \\ &= |\alpha||a_0 + a_1| + |\alpha||a_0 - a_1| = |\alpha|(|a_0 + a_1| + |a_0 - a_1|) = |\alpha|\phi(\underline{v}). \end{aligned}$$

$\boxed{3}$ Siano $\underline{v} = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix}$ e $\underline{w} = \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned} \phi(\underline{v} + \underline{w}) &= \phi(\begin{pmatrix} a_0 + b_0 \\ a_1 + b_1 \end{pmatrix}) = |(a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)| + |(a_0 + b_0) - (a_1 + b_1)| = \\ &= |(a_0 + a_1) + (b_0 + b_1)| + |(a_0 - a_1) + (b_0 - b_1)| \leq \\ &\leq |a_0 + a_1| + |b_0 + b_1| + |a_0 - a_1| + |b_0 - b_1| = \phi(\underline{v}) + \phi(\underline{w}). \end{aligned}$$

LEZIONE 20

Matrici di rotazione in $\mathbb{R}^2$. Angoli tra vettori in $\mathbb{R}^2$

Sia Oxy un sistema di riferimento ortogonale e monometrico nel piano, e sia $Ox'y'$ il sistema di riferimento ortogonale che si ottiene da quello precedente ruotandolo intorno all'origine O degli assi in senso antiorario di un angolo β.

Siano P un punto del piano e $\underline{v} = \begin{pmatrix} x_P \\ y_P \end{pmatrix}$ il vettore delle coordinate di P rispetto al primo sistema. Allora se $\underline{v}' = \begin{pmatrix} x_{P'} \\ y_{P'} \end{pmatrix}$ è il vettore delle coordinate di P rispetto al secondo sistema, la relazione tra $\underline{v}$ e $\underline{v}'$ è

$$\underline{v} = R_\beta \underline{v}'$$

dove la matrice R_β, detta **matrice di rotazione** dell'angolo β, è la matrice

$$R_\beta = \begin{pmatrix} \cos\beta & -sin\beta \\ sin\beta & cos\beta \end{pmatrix}.$$

$\boxed{N.B.}$ Per ogni angolo β si ha $R_\beta^T R_\beta = I_2$. Infatti:

$$\begin{aligned} R_\beta^T R_\beta &= \begin{pmatrix} \cos\beta & sin\beta \\ -sin\beta & cos\beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\beta & -sin\beta \\ sin\beta & cos\beta \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} (cos\beta)^2 + (sin\beta)^2 & -cos\beta sin\beta + sin\beta cos\beta \\ -sin\beta cos\beta + cos\beta sin\beta & (sin\beta)^2 + (cos\beta)^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Vogliamo generalizzare il concetto di angolo tra due vettori $\underline{v}$ e $\underline{w}$ di $\mathbb{R}^2$.

Siano $\underline{v}, \underline{w} \in \mathbb{R}^2 \setminus \{\underline{0}\}$. Siano P e Q i punti del piano che rappresentano $\underline{v}$ e $\underline{w}$ rispettivamente rispetto ad un sistema di riferimento ortogonale e monometrico Oxy. Allora

$$\vec{OP} = \underline{v} = \begin{pmatrix} x_P \\ y_P \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad \vec{OQ} = \underline{w} = \begin{pmatrix} x_Q \\ y_Q \end{pmatrix}.$$

Per fissare le idee si supponga che entrambi P e Q stiano nel 1^0 quadrante.

Si consideri il sistema di riferimento ortogonale monometrico $Ox'y'$ che ha la stessa origine O del precedente e il semiasse positivo delle ascisse x' contenente il punto Q.

Se β e' l'angolo, misurato in senso antiorario, tra l'asse positivo delle ascisse di Oxy (l'asse delle x) e la retta passante per O e per Q, allora $Ox'y'$ si ottiene ruotando in senso antiorario Oxy intorno ad O dell'angolo β.

Sia α l'angolo tra la retta passante per O e Q e la retta passante per O e P.

Se $\underline{v}'$ e $\underline{w}'$ sono i vettori delle coordinate di P e Q rispetto ad $Ox'y'$ si ha:

$$\underline{v}' = \begin{pmatrix} x_{P'} \\ y_{P'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |OP|cos\alpha \\ |OP|sin\alpha \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad \underline{w}' = \begin{pmatrix} |OQ| \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Dunque

$$\underline{v}^T\underline{w} = (R_\beta\underline{v}')^T(R_\beta\underline{w}') = (\underline{v}')^T R_\beta^T R_\beta \underline{w}' \underset{\substack{\uparrow \\ R_\beta^T R_\beta = I}}{=} (\underline{v}')^T\underline{w}' =$$

$$= (\,|OP|cos\alpha \quad |OP|sin\alpha\,)\begin{pmatrix} |OQ| \\ 0 \end{pmatrix} = |OP||OQ|cos\alpha = ||\underline{v}||_2||\underline{w}||_2 cos\alpha$$

da cui si ricava (poichè $\underline{v} \neq \underline{0} \Longrightarrow ||\underline{v}||_2 \neq 0$ e $\underline{w} \neq \underline{0} \Longrightarrow ||\underline{w}||_2 \neq 0$)

$$cos\alpha = \frac{\underline{v}^T\underline{w}}{||\underline{v}||_2||\underline{w}||_2}.$$

Vogliamo generalizzare quanto ottenuto introducendo un concetto che comprenda quello che nella formula precedente è $\underline{v}^T\underline{w}$.

DALLA LEZIONE 20 DEL LIBRO:

$\boxed{1}$ Definizione di **prodotto scalare** (def. 20.1 pag. 91/92),

$\boxed{2}$ **Esercizio 20.2**

Le funzioni

$$\begin{aligned} (\cdot,\cdot\,) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R} \\ (\underline{u},\underline{v}) &\mapsto \underline{u}^T\underline{v} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} (\cdot,\cdot\,) : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n &\rightarrow \mathbb{C} \\ (\underline{u},\underline{v}) &\mapsto \underline{u}^H\underline{v} \end{aligned}$$

sono due prodotti scalari, rispettivamente su $\mathbb{R}^n$ e su $\mathbb{C}^n$. Si chiamano **prodotto scalare usuale** (od anche prodotto interno) di $\mathbb{R}^n$ e di $\mathbb{C}^n$.

$\boxed{3}$ **Teorema di Schwarz con DIMOSTRAZIONE** (teorema 20.3) pag. 92/93,

$\boxed{4}$ Definizione di **norma indotta da un prodotto scalare** (si veda il punto (a) dell'Esercizio 20.4 pag. 93.)

$\boxed{N.B.}$ La norma indotta dal prodotto scalare usuale è quella euclidea (si veda l'Esercizio 20.4 punto (b)).

Possiamo ora dare la seguente

Def. Sia V uno spazio vettoriale con un prodotto scalare $(\cdot,\cdot\,)$ e sia $||\cdot||$ la norma indotta dal prodotto scalare $(\cdot,\cdot\,)$. Allora per ogni $\underline{v},\underline{w} \in V \setminus \{\underline{0}\}$ si pone

$$cos\alpha = \frac{(\underline{v},\underline{w})}{||\underline{v}||||\underline{w}||}.$$

Si osservi che il numero $cos\alpha$ ora definito è un numero complesso, e per il teorema di Schwarz ha **modulo** minore od uguale a 1.

Solo nel caso in cui V sia uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$, si pone

$$\alpha = arccos(\frac{(\underline{v},\underline{w})}{||\underline{v}||||\underline{w}||})$$

ed α si chiama **angolo** tra i vettori $\underline{v}$ ed $\underline{w}$.

Si osservi che la definizione di $cos\alpha$ che abbiamo appena dato generalizza l'uguaglianza

$$cos\alpha = \frac{\underline{v}^T\underline{w}}{||\underline{v}||_2||\underline{w}||_2}$$

che abbiamo ottenuto per due vettori $\underline{v},\underline{w} \in \mathbb{R}^2$: in uno spazio vettoriale V dotato di un prodotto scalare $(\cdot,\cdot)$, al posto di $\underline{v}^T\underline{w}$ (che in $\mathbb{R}^2$ è il prodotto scalare usuale di $\underline{v}$ e $\underline{w}$), mettiamo il prodotto scalare $(\underline{v},\underline{w})$, ed al posto di $||\underline{v}||_2$ (che in $\mathbb{R}^2$ è la norma indotta dal prodotto scalare usuale calcolata in $\underline{v}$) mettiamo la norma indotta dal prodotto scalare $(\cdot,\cdot)$ calcolata in $\underline{v}$: $||\underline{v}||$. Analogamente al posto di $||\underline{w}||_2$ mettiamo $||\underline{w}||$.

ESERCIZIO TIPO 19

Si verifichi che $\quad (\cdot,\cdot\,) : \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C} \quad$ definita da

$$\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) = \overline{x}_1 y_1 + 2\overline{x}_2 y_2$$

è un prodotto scalare.

$\boxed{1}$ Siano $\underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ e $\underline{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$.

$$\overline{(\underline{y}, \underline{x})} \stackrel{?}{=} (\underline{x}, \underline{y})$$

$$\overline{(\underline{y}, \underline{x})} \quad = \quad \overline{\overline{y}_1 x_1 + 2\overline{y}_2 x_2} \quad = \quad y_1 \overline{x}_1 + 2 y_2 \overline{x}_2 \quad = \quad (\underline{x}, \underline{y}).$$

$\boxed{2}$ Siano $\underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, $\underline{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$, $\underline{z} = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$, $\underline{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$.

$$\bullet \quad (\alpha \underline{x} + \beta \underline{z}, \underline{y}) \stackrel{?}{=} \overline{\alpha}(\underline{x}, \underline{y}) + \overline{\beta}(\underline{z}, \underline{y})$$

$$\bullet\bullet \quad (\underline{x}, \alpha \underline{y} + \beta \underline{w}) \stackrel{?}{=} \alpha(\underline{x}, \underline{y}) + \beta(\underline{x}, \underline{w})$$

$$\bullet \quad (\alpha \underline{x} + \beta \underline{z}, \underline{y}) = \overline{(\alpha x_1 + \beta z_1)} y_1 + 2\overline{(\alpha x_2 + \beta z_2)} y_2 = (\overline{\alpha}\overline{x_1} + \overline{\beta}\overline{z_1}) y_1 + 2(\overline{\alpha}\overline{x_2} + \overline{\beta}\overline{z_2}) y_2 =$$
$$= \overline{\alpha}(\overline{x_1} y_1 + 2\overline{x_2} y_2) + \overline{\beta}(\overline{z_1} y_1 + 2\overline{z_2} y_2) = \overline{\alpha}(\underline{x}, \underline{y}) + \overline{\beta}(\underline{z}, \underline{y}).$$

$$\bullet\bullet \quad (\underline{x}, \alpha \underline{y} + \beta \underline{w}) = \overline{x_1}(\alpha y_1 + \beta w_1) + 2\overline{x_2}(\alpha y_2 + \beta w_2) = \alpha \overline{x_1} y_1 + \beta \overline{x_1} w_1 + 2\alpha \overline{x_2} y_2 + 2\beta \overline{x_2} w_2 =$$
$$= \alpha(\overline{x_1} y_1 + 2\overline{x_2} y_2) + \beta(\overline{x_1} w_1 + 2\overline{x_2} w_2) = \alpha(\underline{x}, \underline{y}) + \beta(\underline{x}, \underline{w}).$$

$\boxed{3}$

$$\bullet \quad (\underline{0}, \underline{0}) \stackrel{?}{=} 0$$

$$\bullet\bullet \quad \underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \neq \underline{0} \quad \stackrel{?}{\Longrightarrow} \quad (\underline{x}, \underline{x}) \in \mathbb{R}^+_{>0}$$

$$\bullet \quad (\underline{0}, \underline{0}) \quad = \quad 0 + 2 \times 0 \quad = \quad 0$$

$$\bullet\bullet \quad (\underline{x}, \underline{x}) \quad = \quad \overline{x}_1 x_1 + 2\overline{x}_2 x_2 \quad = \quad |x_1|^2 + 2|x_2|^2$$

Essendo $\underline{x} \neq \underline{0}$, si ha che $x_1 \neq 0$ oppure $x_2 \neq 0$, per cui $|x_1|^2 \in \mathbb{R}^+_{>0}$ oppure $|x_2|^2 \in \mathbb{R}^+_{>0}$. Quindi $|x_1|^2 + 2|x_2|^2 \in \mathbb{R}^+_{>0}$.

LEZIONE 21 L'algoritmo di Gram-Schmidt.

Sia V uno spazio vettoriale con un prodotto scalare $(\cdot,\cdot)$.

Def. 1 Due vettori $\underline{u}$ e $\underline{v}$ si dicono **ortogonali** se $cos\alpha = 0$ (dove α è l'angolo compreso tra $\underline{u}$ e $\underline{v}$). Dunque $\underline{u}$ e $\underline{v}$ sono ortogonali se e solo se $(\underline{u}, \underline{v}) = 0$ (in tal caso si scrive $\underline{u} \perp \underline{v}$).

Def. 2 Un sottoinsieme $\mathcal{S}$ di elementi di V si dice **ortogonale** se per ogni $\underline{u}, \underline{v} \in \mathcal{S}$ si ha $\underline{u} \perp \underline{v}$.

Def. 3 Sia $\underline{v} \in V \setminus \{\underline{0}\}$. Si dice che $\underline{v}$ è stato **normalizzato** se al posto di $\underline{v}$ si considera

$$\underline{u} = \frac{\underline{v}}{||\underline{v}||}$$

dove $||\underline{v}|| = \sqrt{(\underline{v}, \underline{v})}$ (quindi $||\cdot||$ è la norma indotta da $(\cdot,\cdot)$).

$\boxed{N.B.}$ $\langle \underline{u} \rangle = \langle \underline{v} \rangle$ e $||\underline{u}|| = 1$.

Def. 4 Un sottoinsieme $\mathcal{S}$ di elementi di V si dice **ortonormale** se è ortogonale ed ogni suo vettore ha norma 1 (s'intende sempre la norma indotta dal prodotto scalare $(\cdot,\cdot)$).

$\boxed{N.B. \quad 1}$ $\underline{0} \perp \underline{v}$ per ogni $\underline{v} \in V$ (poichè $(\underline{0}, \underline{v}) = 0$ per ogni $\underline{v} \in V$).

$\boxed{N.B. \quad 2}$ Se $\mathcal{S} = \{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_n\}$ è un insieme ortogonale di elementi non tutti nulli di V e $\mathcal{S}_0 = \{\underline{z}_1, \underline{z}_2, \dots, \underline{z}_m\}$ è l'insieme che si ottiene da $\mathcal{S}$ togliendovi eventualmente il vettore nullo (se c'è), allora, posto

$$\mathcal{S}' = \{\frac{\underline{z}_1}{||\underline{z}_1||}, \frac{\underline{z}_2}{||\underline{z}_2||}, \dots, \frac{\underline{z}_m}{||\underline{z}_m||}\}$$

si ha:

($\bullet$) $\mathcal{S}'$ è ortonormale,

($\bullet\bullet$) $\langle \mathcal{S}' \rangle = \langle \mathcal{S} \rangle$.

Dalla Lezione 21 del libro:

Proposizione. (Proposizione 21.4 punto (a) pag. 94):

Siano V uno spazio vettoriale con un prodotto scalare $(\cdot,\cdot)$ ed $\mathcal{S}$ un insieme di vettori ortogonali e **non nulli**. Allora $\mathcal{S}$ è linearmente indipendente (L.I.).

Siano V uno spazio vettoriale con un prodotto scalare $(\cdot,\cdot)$ ed $\mathcal{S} = \{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_n\}$ un insieme di generatori di V.

Obiettivo: Costruire $\mathcal{S}_0 = \{\underline{u}_1, \underline{u}_2, \dots, \underline{u}_n\}$ tale che

$\mathcal{S}_0$ è un insieme di generatori di V

$\mathcal{S}_0$ è ortogonale

Tecnica: (Algoritmo di Gram-Schmidt):

$$\underline{u}_1 = \underline{v}_1$$

$$\underline{u}_2 = \underline{v}_2 - \alpha_{12}\underline{u}_1, \qquad \alpha_{12} = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad \underline{u}_1 = \underline{0} \\ \frac{(\underline{u}_1, \underline{v}_2)}{(\underline{u}_1, \underline{u}_1)} & \text{se} \quad \underline{u}_1 \neq \underline{0} \end{cases}$$

$$\underline{u}_3 = \underline{v}_3 - \alpha_{13}\underline{u}_1 - \alpha_{23}\underline{u}_2, \quad \alpha_{13} = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad \underline{u}_1 = \underline{0} \\ \frac{(\underline{u}_1, \underline{v}_3)}{(\underline{u}_1, \underline{u}_1)} & \text{se} \quad \underline{u}_1 \neq \underline{0} \end{cases}$$

$$\alpha_{23} = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad \underline{u}_2 = \underline{0} \\ \frac{(\underline{u}_2, \underline{v}_3)}{(\underline{u}_2, \underline{u}_2)} & \text{se} \quad \underline{u}_2 \neq \underline{0} \end{cases}$$

$$\vdots \qquad \qquad \vdots$$

$$\vdots \qquad \qquad \vdots$$

$$\vdots$$

$$\vdots \qquad \qquad \vdots$$

$$\underline{u}_j = \underline{v}_j - \alpha_{1j}\underline{u}_1 - \alpha_{2j}\underline{u}_2 - \alpha_{3j}\underline{u}_3 - \dots - \alpha_{j-1,j}\underline{u}_{j-1},$$

dove per ogni $i = 1, \dots, j-1$ $\qquad \alpha_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad \underline{u}_i = \underline{0} \\ \frac{(\underline{u}_i, \underline{v}_j)}{(\underline{u}_i, \underline{u}_i)} & \text{se} \quad \underline{u}_i \neq \underline{0} \end{cases}$

$$\vdots$$

$$\vdots$$

$$\underline{u}_n = \underline{v}_n - \alpha_{1n}\underline{u}_1 - \alpha_{2n}\underline{u}_2 - \alpha_{3n}\underline{u}_3 - \dots - \alpha_{n-1,n}\underline{u}_{n-1},$$

dove per ogni $i = 1, \dots, n-1$ $\qquad \alpha_{in} = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad \underline{u}_i = \underline{0} \\ \frac{(\underline{u}_i, \underline{v}_n)}{(\underline{u}_i, \underline{u}_i)} & \text{se} \quad \underline{u}_i \neq \underline{0} \end{cases}$

L'insieme $\mathcal{S}_0 = \{\underline{u}_1, \underline{u}_2, \ldots, \underline{u}_n\}$ cosí costruito è un insieme di generatori ortogonale di V.

L'insieme che si ottiene da $\mathcal{S}_0$ togliendo **TUTTI** gli eventuali $\underline{u}_i = \underline{0}$ (e che possono essere anche piú di uno - cosí come possono non esserci affatto) è una **base ortogonale di V**, ossia una base di V che è anche un insieme ortogonale.

Se quindi è dato **un insieme di generatori** $\mathcal{S} = \{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_n\}$ di uno spazio vettoriale V dotato di un prodotto scalare $(\cdot, \cdot)$ e si richiede di **trovare una base ortogonale** di V si possono adottare indifferentemente uno dei seguenti procedimenti (il 1^0, peró, comporta meno calcoli !):

1^0 **Procedimento:**

$\boxed{1}$ Si cambia il nome agli elementi di $\mathcal{S}$: si pone $\mathcal{S} = \{\underline{w}_1, \underline{w}_2, \dots, \underline{w}_n\}$.

$\boxed{2}$ Si trova una base $\mathcal{B}_1$ di V contenuta in $\mathcal{S}$:

se V è uno spazio arbitrario si usa il Lemma della scrematura, se invece $V \leq \mathbb{R}^n$ oppure $V \leq \mathbb{C}^n$ si costruisce una matrice A che abbia per colonne gli elementi di $\mathcal{S}$. Allora, dal momento che $C(A) = \langle \mathcal{S} \rangle = V$, per avere una base di V contenuta in $\mathcal{S}$ basta trovare una base di $C(A)$.

Si pone $\mathcal{B}_1 = \{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_m\}$.

$\boxed{N.B.}$ Gli elementi $\underline{v}_i$ di $\mathcal{B}_2$ **non** sono gli elementi originari di $\mathcal{S}$, ma **alcuni** di essi, a cui eventualmente è stato cambiato l'**indice** (nel caso una forma ridotta di Gauss U di A abbia delle colonne precedenti all'ultima che sono libere).

$\boxed{3}$ Si applica l'algoritmo di Gram-Schmidt all'insieme $\mathcal{B}_1 = \{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_m\}$ e si trova $\mathcal{B}_2 = \{\underline{u}_1, \underline{u}_2, \dots, \underline{u}_m\}$, che è una **base ortogonale** di V.

2^0 **Procedimento:**

$\boxed{1}$ Si applica l'algoritmo di Gram-Schmidt all'insieme $\mathcal{S} = \{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_n\}$ di generatori di V trovando un **insieme di generatori ortogonale** di V, $\mathcal{S}_0 = \{\underline{u}_1, \underline{u}_2, \dots, \underline{u}_n\}$.

$\boxed{2}$ Si tolgono da $\mathcal{S}_0$ **TUTTI** gli eventuali $\underline{u}_i = \underline{0}$ (si faccia bene attenzione che cosí come puó accadere che nessuno degli $\underline{u}_i$ sia nullo - e in tal caso $\mathcal{S}_0 = \mathcal{S}$ - puó anche accadere che **piú di un** $\underline{u}_i$ sia nullo - e in tal caso vanno tolti tutti quelli nulli). L'insieme $\mathcal{S}_0$ cosí ottenuto è **una base ortogonale** di V.

$\boxed{N.B.}$ Per avere una **base ortonormale** di V, si trova prima una base ortogonale di V, e poi la si normalizza, ossia si normalizzano tutti i suoi elementi.

$\boxed{N.B.}$ Se $V = \mathbb{R}^n$ oppure $V = \mathbb{C}^n$ e non si specifica quale sia il prodotto scalare, s'intende che ci si riferisce al prodotto scalare usuale, per cui i coefficienti che compaiono nell'applicazione dell'algoritmo di Gran-Schmidt sono:

$$\alpha_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad \underline{u}_i = \underline{0} \\ \frac{\underline{u}_i^H \underline{v}_j}{(\underline{u}_i, \underline{u}_i)} & \text{se} \quad \underline{u}_i \neq \underline{0} \end{cases}$$

ESERCIZIO TIPO 20

Si trovi una base ortonormale di

$$V = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ i \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ i \end{pmatrix} \rangle \leq \mathbb{C}^4.$$

$\boxed{1^0\textbf{MODO}}$

$\boxed{1}$ Troviamo una base $\mathcal{B}_1$ di V.

Poniamo

$$\underline{w}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ i \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \underline{w}_2 = \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \underline{w}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \underline{w}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ i \end{pmatrix}$$

e costruiamo la matrice $A = (\, \underline{w}_1 \quad \underline{w}_2 \quad \underline{w}_3 \quad \underline{w}_4 \,)$, ossia una matrice tale che $C(A) = V$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & i & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ i & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & i \end{pmatrix} \xrightarrow[E_{31}(-i)]{} \begin{pmatrix} 1 & i & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & i \end{pmatrix} \xrightarrow[E_{42}(1)E_{32}(-1)]{} \begin{pmatrix} 1 & i & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\xrightarrow[E_{34}]{} \begin{pmatrix} 1 & i & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[E_3(-i)]{} \begin{pmatrix} 1 & i & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = U$$

Dunque $\mathcal{B}_1 = \{\underline{w}_1, \underline{w}_2, \underline{w}_4\}$ è una base di $C(A) = V$.

$\boxed{2}$ Troviamo una base ortogonale $\mathcal{B}_2$ di V: poniamo $\underline{v}_1 = \underline{w}_1, \underline{v}_2 = \underline{w}_2$ e $\underline{v}_3 = \underline{w}_4$, e applichiamo l'algoritmo di Gram-Schmidt a $\{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3\}$.

$$\underline{u}_1 = \underline{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ i \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\underline{u}_2 = \underline{v}_2 - \alpha_{12}\underline{u}_1, \qquad \underline{u}_1 \neq \underline{0} \quad \Longrightarrow \quad \alpha_{12} = \frac{(\underline{u}_1, \underline{v}_2)}{(\underline{u}_1, \underline{u}_1)}$$

$$(\underline{u}_1, \underline{v}_2) = \underline{u}_1^H \underline{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = i$$

$$(\underline{u}_1, \underline{u}_1) = \underline{u}_1^H \underline{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ i \\ 0 \end{pmatrix} = 2$$

$$\Longrightarrow \quad \alpha_{12} = i/2$$

$$\begin{aligned} \underline{u}_2 &= \underline{v}_2 - \alpha_{12}\underline{u}_1 = \\ &= \underline{v}_2 - \frac{i}{2}\underline{u}_1 = \\ &= \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} - \frac{i}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ i \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{i}{2} \\ 1 \\ \frac{1}{2} \\ -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\underline{u}_3 = \underline{v}_3 - \alpha_{13}\underline{u}_1 - \alpha_{23}\underline{u}_2,$$

$$\underline{u}_1 \neq \underline{0} \quad \Longrightarrow \quad \alpha_{13} = \frac{(\underline{u}_1, \underline{v}_3)}{(\underline{u}_1, \underline{u}_1)}$$

$$(\underline{u}_1, \underline{v}_3) = \underline{u}_1^H \underline{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ i \end{pmatrix} = 0$$

$$\Longrightarrow \quad \alpha_{13} = 0$$

$$\underline{u}_2 \neq \underline{0} \quad \Longrightarrow \quad \alpha_{23} = \frac{(\underline{u}_2, \underline{v}_3)}{(\underline{u}_2, \underline{u}_2)}$$

$$(\underline{u}_2, \underline{v}_3) = \underline{u}_2^H \underline{v}_3 = \begin{pmatrix} -\frac{i}{2} & 1 & \frac{1}{2} & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ i \end{pmatrix} = -i$$

$$(\underline{u}_2, \underline{u}_2) = \underline{u}_2^H \underline{u}_2 = \begin{pmatrix} -\frac{i}{2} & 1 & \frac{1}{2} & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{i}{2} \\ 1 \\ \frac{1}{2} \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{5}{2}$$

$$\Longrightarrow \quad \alpha_{23} = -\frac{2}{5}i$$

$$\begin{aligned}\underline{u}_3 &= \underline{v}_3 - \alpha_{13}\underline{u}_1 - \alpha_{23}\underline{u}_2 = \\ &= \underline{v}_3 + \frac{2i}{5}\underline{u}_2 = \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ i \end{pmatrix} + \frac{2i}{5}\begin{pmatrix} \frac{i}{2} \\ 1 \\ \frac{1}{2} \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -1 \\ 2i \\ i \\ 3i \end{pmatrix}\end{aligned}$$

$\mathcal{B}_2 = \{\underline{u}_1, \underline{u}_2, \underline{u}_3\}$, dove

$$\underline{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ i \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \underline{u}_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} i \\ 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \underline{u}_3 = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -1 \\ 2i \\ i \\ 3i \end{pmatrix},$$

è una base ortogonale di V.

$\boxed{3}$ Troviamo una base ortonormale $\mathcal{B}$ di V, normalizzando gli elementi di $\mathcal{B}_2$.

$$||\underline{u}_1||_2 = \sqrt{(\underline{u}_1, \underline{u}_1)} = \sqrt{2}$$
$$||\underline{u}_2||_2 = \sqrt{(\underline{u}_2, \underline{u}_2)} = \sqrt{5/2}$$
$$||\underline{u}_3||_2 = \sqrt{(\underline{u}_3, \underline{u}_3)} = \sqrt{\underline{u}_3^H \underline{u}_3} = \sqrt{\frac{1}{5}\begin{pmatrix} -1 & -2i & -i & -3i \end{pmatrix}\frac{1}{5}\begin{pmatrix} -1 \\ 2i \\ i \\ 3i \end{pmatrix}} = \frac{\sqrt{15}}{5}$$

$\mathcal{B} = \{\frac{\underline{u}_1}{||\underline{u}_1||_2}, \frac{\underline{u}_2}{||\underline{u}_2||_2}, \frac{\underline{u}_3}{||\underline{u}_3||_2}\}$, dove

$$\frac{\underline{u}_1}{||\underline{u}_1||_2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ i \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \frac{\underline{u}_2}{||\underline{u}_2||_2} = \frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix} i \\ 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \frac{\underline{u}_3}{||\underline{u}_3||_2} = \frac{1}{\sqrt{15}}\begin{pmatrix} -1 \\ 2i \\ i \\ 3i \end{pmatrix},$$

è una base ortonormale di V.

$\boxed{2^0\textbf{MODO}}$

$\boxed{1}$ Costruiamo dapprima **un insieme di generatori ortogonale di V**: poniamo

$$\underline{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ i \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \underline{v}_2 = \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \underline{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \underline{v}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ i \end{pmatrix}$$

e applichiamo l'algoritmo di Gram-Schimdt a $\{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3, \underline{v}_4\}$. Otterremo 4 vettori, $\underline{u}_1, \underline{u}_2, \underline{u}_3, \underline{u}_4$, e l'insieme $\{\underline{u}_1, \underline{u}_2, \underline{u}_3, \underline{u}_4\}$ sarà un insieme di generatori ortogonale di V.

Per sapere se alcuni degli $\underline{u}_i$ saranno nulli, e in tal caso quali, troviamo innanzitutto una forma ridotta di Gauss U della matrice A che ha come colnne $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3, \underline{v}_4$: le eventuali colonne libere di U corrisponderanno agli $\underline{u}_i$ nulli.

$$A = (\underline{v}_1 \quad \underline{v}_2 \quad \underline{v}_3 \quad \underline{v}_4) = \begin{pmatrix} 1 & i & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ i & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & i \end{pmatrix} \xrightarrow[E_{31}(-i)]{} \begin{pmatrix} 1 & i & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & i \end{pmatrix} \xrightarrow[E_{42}(1)E_{32}(-1)]{}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & i & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \end{pmatrix} \xrightarrow[E_{34}]{} \begin{pmatrix} 1 & i & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[E_3(-i)]{} \begin{pmatrix} 1 & i & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = U$$

Poichè U ha come unica colonna libera la 3^a, allora applicando l'algoritmo di Gram-Schimdt a $\{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3, \underline{v}_4\}$ otterremo $\underline{u}_3 = \underline{0}$.

$$\underline{u}_1 = \underline{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ i \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\underline{u}_2 = \underline{v}_2 - \alpha_{12}\underline{u}_1, \qquad \underline{u}_1 \neq \underline{0} \implies \alpha_{12} = \frac{(\underline{u}_1, \underline{v}_2)}{(\underline{u}_1, \underline{u}_1)}$$

$$(\underline{u}_1, \underline{v}_2) = \underline{u}_1^H \underline{v}_2 = (1 \quad 0 \quad -i \quad 0) \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = i$$

$$(\underline{u}_1, \underline{u}_1) = \underline{u}_1^H \underline{u}_1 = (1 \quad 0 \quad -i \quad 0) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ i \\ 0 \end{pmatrix} = 2$$

$$\implies \alpha_{12} = i/2$$

$$\underline{u}_2 = \underline{v}_2 - \alpha_{12}\underline{u}_1 = \underline{v}_2 - \frac{i}{2}\underline{u}_1 =$$

$$= \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} - \frac{i}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ i \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{i}{2} \\ 1 \\ \frac{1}{2} \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\underline{u}_3 = \underline{v}_3 - \alpha_{13}\underline{u}_1 - \alpha_{23}\underline{u}_2,$$

$$\underline{u}_1 \neq \underline{0} \quad \Longrightarrow \quad \alpha_{13} = \frac{(\underline{u}_1, \underline{v}_3)}{(\underline{u}_1, \underline{u}_1)}$$

$$(\underline{u}_1, \underline{v}_3) = \underline{u}_1^H \underline{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = i$$

$$(\underline{u}_1, \underline{u}_1) = 2$$

$$\Longrightarrow \quad \alpha_{13} = \frac{i}{2}$$

$$\underline{u}_2 \neq \underline{0} \quad \Longrightarrow \quad \alpha_{23} = \frac{(\underline{u}_2, \underline{v}_3)}{(\underline{u}_2, \underline{u}_2)}$$

$$(\underline{u}_2, \underline{v}_3) = \underline{u}_2^H \underline{v}_3 = \begin{pmatrix} -\frac{i}{2} & 1 & \frac{1}{2} & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$= -1 - \frac{1}{2} - 1 = -\frac{5}{2}$$

$$(\underline{u}_2, \underline{u}_2) = \underline{u}_2^H \underline{u}_2 = \begin{pmatrix} -\frac{i}{2} & 1 & \frac{1}{2} & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{i}{2} \\ 1 \\ \frac{1}{2} \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{5}{2}$$

$$\Longrightarrow \quad \alpha_{23} = -1$$

$$\underline{u}_3 = \underline{v}_3 - \alpha_{13}\underline{u}_1 - \alpha_{23}\underline{u}_2 =$$
$$= \underline{v}_3 - \frac{i}{2}\underline{u}_1 + \underline{u}_2 =$$
$$= \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{i}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ i \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{i}{2} \\ 1 \\ \frac{1}{2} \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\underline{u}_4 = \underline{v}_4 - \alpha_{14}\underline{u}_1 - \alpha_{24}\underline{u}_2 - \alpha_{34}\underline{u}_3$$

$$\underline{u}_1 \neq \underline{0} \quad \Longrightarrow \quad \alpha_{14} = \frac{(\underline{u}_1, \underline{v}_4)}{(\underline{u}_1, \underline{u}_1)}$$

$$(\underline{u}_1, \underline{v}_4) = \underline{u}_1^H \underline{v}_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ i \end{pmatrix} = 0$$

$$\Longrightarrow \quad \alpha_{14} = 0$$

$$\underline{u}_2 \neq \underline{0} \quad \Longrightarrow \quad \alpha_{24} = \frac{(\underline{u}_2, \underline{v}_4)}{(\underline{u}_2, \underline{u}_2)}$$

$$(\underline{u}_2, \underline{v}_4) = \underline{u}_2^H \underline{v}_4 = \begin{pmatrix} -\frac{i}{2} & 1 & \frac{1}{2} & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ i \end{pmatrix} = -i$$

$$(\underline{u}_2, \underline{u}_2) = \underline{u}_2^H \underline{u}_2 = \begin{pmatrix} -\frac{i}{2} & 1 & \frac{1}{2} & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{i}{2} \\ 1 \\ \frac{1}{2} \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{5}{2}$$

$$\Longrightarrow \quad \alpha_{24} = -\frac{2}{5}i$$

$$\underline{u}_3 = \underline{0} \quad \Longrightarrow \quad \alpha_{34} = 0 \quad \text{per def.}$$

$$\begin{aligned} \underline{u}_4 &= \underline{v}_4 - \alpha_{24}\underline{u}_2 = \\ &= \underline{v}_4 + \frac{2i}{5}\underline{u}_2 = \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ i \end{pmatrix} + \frac{2i}{5} \begin{pmatrix} \frac{i}{2} \\ 1 \\ \frac{1}{2} \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -1 \\ 2i \\ i \\ 3i \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Dunque $\{\underline{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ i \\ 0 \end{pmatrix}, \underline{u}_2 = \begin{pmatrix} \frac{i}{2} \\ 1 \\ \frac{1}{2} \\ -1 \end{pmatrix}, \underline{u}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \underline{u}_4 = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -1 \\ 2i \\ i \\ 3i \end{pmatrix}\}$ è un insieme di generatori ortogonale di V.

$\boxed{2}$ Costruiamo **una base ortogonale di V** togliendo dall'insieme di generatori ortogonale di V trovato al punto $\boxed{1}$ gli eventuali $\underline{u}_i$ nulli. In questo caso poniamo:

$$\underline{w}_1 = \underline{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ i \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \underline{w}_2 = \underline{u}_2 = \begin{pmatrix} \frac{i}{2} \\ 1 \\ \frac{1}{2} \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \underline{w}_3 = \underline{u}_4 = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -1 \\ 2i \\ i \\ 3i \end{pmatrix}.$$

L'insieme $\{\underline{w}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ i \\ 0 \end{pmatrix}, \underline{w}_2 = \begin{pmatrix} \frac{i}{2} \\ 1 \\ \frac{1}{2} \\ -1 \end{pmatrix}, \underline{w}_3 = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -1 \\ 2i \\ i \\ 3i \end{pmatrix}\}$ è una base ortogonale di V.

$\boxed{3}$ Costruiamo **base ortonormale di V** normalizzando la base ortogonale trovata al punto $\boxed{2}$, ossia dividendo ciascun elemento della base ortogonale trovata in $\boxed{2}$ per la propria norma euclidea.

Cominciamo con il calcolare la norma euclidea di $\underline{w}_1, \underline{w}_2, \underline{w}_3$:

$$||\underline{w}_1||_2 = \sqrt{(\underline{u}_1, \underline{u}_1)} = \sqrt{2}$$
$$||\underline{w}_2||_2 = \sqrt{(\underline{u}_2, \underline{u}_2)} = \sqrt{5/2}$$
$$||\underline{w}_3||_2 = \sqrt{(\underline{u}_4, \underline{u}_4)} = \sqrt{\underline{u}_4^H \underline{u}_4} = \sqrt{\frac{1}{5} \begin{pmatrix} -1 & -2i & -i & -3i \end{pmatrix} \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -1 \\ 2i \\ i \\ 3i \end{pmatrix}} = \frac{\sqrt{15}}{5}$$

Allora $\mathcal{B} = \{\frac{\underline{w}_1}{||\underline{w}_1||_2}, \frac{\underline{w}_2}{||\underline{w}_2||_2}, \frac{\underline{w}_3}{||\underline{w}_3||_2}\}$, dove

$$\frac{\underline{w}_1}{||\underline{w}_1||_2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ i \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \frac{\underline{w}_2}{||\underline{w}_2||_2} = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} i \\ 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \frac{\underline{w}_3}{||\underline{w}_3||_2} = \frac{1}{\sqrt{15}} \begin{pmatrix} -1 \\ 2i \\ i \\ 3i \end{pmatrix},$$

è una base ortonormale di V.

LEZIONE 22 Proiezioni ortogonali. Matrici di proiezione.

Complemento ortogonale di un sottospazio.

Sia V uno spazio vettoriale con un prodotto scalare $(\cdot,\cdot)$ e $W \neq \{\underline{0}\}$ un sottospazio di V.

Def. 1 Sia $\underline{v} \in V$. Si chiama **la proiezione ortogonale** dell'elemento $\underline{v} \in V$ sul sottospazio $W \leq V$ il vettore:

$$P_0(\underline{v}) = \alpha_1 \underline{w}_1 + \alpha_2 \underline{w}_2 + \ldots + \alpha_m \underline{w}_m$$

dove $\mathcal{B} = \{\underline{w}_1, \underline{w}_2, \ldots, \underline{w}_m\}$ è **una base ORTOGONALE di W** e, per ogni $i = 1, \ldots, m$

$$\alpha_i = \frac{(\underline{w}_i, \underline{v})}{(\underline{w}_i, \underline{w}_i)}.$$

$\boxed{N.B.}$ La definizione data non dipende dalla base ortogonale $\mathcal{B}$ di W scelta: se $\mathcal{B}' = \{\underline{w}'_1, \underline{w}'_2, \ldots, \underline{w}'_m\}$ è un'altra base ortogonale di W, e per ogni $i = 1, \ldots, m$ si pone $\beta_i = \frac{(\underline{w}'_i, \underline{v})}{(\underline{w}'_i, \underline{w}'_i)}$, allora si ha:

$$\alpha_1 \underline{w}_1 + \alpha_2 \underline{w}_2 + \ldots + \alpha_m \underline{w}_m = \beta_1 \underline{w}'_1 + \beta_2 \underline{w}'_2 + \ldots + \beta_m \underline{w}'_m.$$

$\boxed{N.B.}$ Se $W = \{\underline{0}\}$ si pone $P_0(\underline{v}) = \underline{0}$ per ogni $\underline{v} \in V$.

Matrici di proiezione.

Se $V = \mathbb{R}^n$ oppure $V = \mathbb{C}^n$ ed il prodotto scalare considerato è quello usuale ($(\underline{u}, \underline{z}) \mapsto \underline{u}^T \underline{z}$ se $V = \mathbb{R}^n$ e $(\underline{u}, \underline{z}) \mapsto \underline{u}^H \underline{z}$ se $V = \mathbb{C}^n$) si puó calcolare la proiezione $P_0(\underline{v})$ di un elemento $\underline{v} \in V$ tramite la matrice di proiezione di V su W.

$\boxed{1}$ Sia $\mathcal{B} = \{\underline{w}_1, \underline{w}_2, \ldots, \underline{w}_m\}$ è **una base ORTOGONALE di W** (per cui $\underline{w}_i^H \underline{w}_j = 0$ se $i \neq j$).

$\boxed{2}$ A partire da $\mathcal{B}$ si costruisca **una base ORTONORMALE di W**

$$\mathcal{B}' = \{\underline{w}'_1, \underline{w}'_2, \ldots, \underline{w}'_m\}$$

normalizzando gli elementi di $\mathcal{B}$: per ogni $i - 1, \ldots, m$ si pone

$$\underline{w}'_i = \frac{\underline{w}_i}{||\underline{w}_i||_2} = \frac{\underline{w}_i}{\sqrt{\underline{w}_i^H \underline{w}_i}}.$$

$\boxed{3}$ Sia Q la matrice $n \times m$ che ha come colonne gli elementi di $\mathcal{B}'$:

$$Q = \begin{pmatrix} \underline{w}'_1 & \underline{w}'_2 & \ldots & \underline{w}'_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\underline{w}_1}{||\underline{w}_1||_2} & \frac{\underline{w}_2}{||\underline{w}_2||_2} & \cdots & \frac{\underline{w}_m}{||\underline{w}_m||_2} \end{pmatrix}.$$

$\boxed{4}$ Si calcoli la H-trasposta Q^H di Q (Q^H è una matrice $m \times n$).

$\boxed{5}$ La matrice $P = QQ^H$ si chiama **la matrice di proiezione di V su W**. Si noti che P è una matrice $n \times n$.

$\boxed{6}$ La proiezione ortogonale $P_0(\underline{v})$ di un vettore $\underline{v} \in V = K^n$ $(K \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\})$ su W è uguale a

$$P_0(\underline{v}) = P\underline{v}.$$

Dimostrazione.

$\mathcal{B}' = \{\underline{w}'_1, \underline{w}'_2, \dots, \underline{w}'_m\}$ è in particolare una base ortogonale di W, quindi, per la Def. 1, si ha:

$$P_0(\underline{v}) = \frac{(\underline{w}'_1, \underline{v})}{(\underline{w}'_1, \underline{w}'_1)}\underline{w}'_1 + \frac{(\underline{w}'_2, \underline{v})}{(\underline{w}'_2, \underline{w}'_2)}\underline{w}'_2 + \dots + \frac{(\underline{w}'_m, \underline{v})}{(\underline{w}'_m, \underline{w}'_m)}\underline{w}'_m \quad \underset{\substack{\uparrow \\ \text{il prodotto scalare} \\ \text{è quello usuale}}}{=}$$

$$= \frac{(\underline{w}'_1)^H\underline{v}}{(\underline{w}'_1)^H\underline{w}'_1}\underline{w}'_1 + \frac{(\underline{w}'_2)^H\underline{v}}{(\underline{w}'_2)^H\underline{w}'_2}\underline{w}'_2 + \dots + \frac{(\underline{w}'_m)^H\underline{v}}{(\underline{w}'_m)^H\underline{w}'_m}\underline{w}'_m.$$

Poichè $\mathcal{B}'$ è ortonormale, per ogni $i = 1, \dots, m$ si ha $1 = ||\underline{w}'_i||_2 = \sqrt{((\underline{w}'_i, \underline{w}'_i)} = \sqrt{\underline{w}'_i)^H\underline{w}'_i}$, quindi $\underline{w}'_i)^H\underline{w}'_i = 1$. Pertanto

$$(*) \qquad P_0(\underline{v}) = ((\underline{w}'_1)^H\underline{v})\underline{w}'_1 + ((\underline{w}'_2)^H\underline{v})\underline{w}'_2 + \dots + ((\underline{w}'_m)^H\underline{v})\underline{w}'_m.$$

Poichè $Q = \begin{pmatrix} \underline{w}'_1 & \underline{w}'_2 & \dots & \underline{w}'_m \end{pmatrix}$, allora

$$Q^H = \begin{pmatrix} (\underline{w}'_1)^H \\ (\underline{w}'_2)^H \\ \vdots \\ (\underline{w}'_m)^H \end{pmatrix}$$

e, facendo il prodotto a blocchi di Q e Q^H, si ottiene

$$P = QQ^H = \begin{pmatrix} \underline{w}'_1 & \underline{w}'_2 & \dots & \underline{w}'_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (\underline{w}'_1)^H \\ (\underline{w}'_2)^H \\ \vdots \\ (\underline{w}'_m)^H \end{pmatrix} =$$

$$= \underline{w}'_1(\underline{w}'_1)^H + \underline{w}'_2(\underline{w}'_2)^H + \dots + \underline{w}'_m(\underline{w}'_m)^H.$$

Si noti che ciascun addendo $\underline{w}'_i(\underline{w}'_i)^H$ è una matrice $n \times n$.

Typeset by $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$-TEX
Typeset by $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$-TEX

Sia $\underline{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$. Allora il prodotto della matrice P per il vettore colonna $\underline{v}$ è

$$(**) \qquad P\underline{v} = (\underline{w}'_1(\underline{w}'_1)^H + \underline{w}'_2(\underline{w}'_2)^H + \ldots + \underline{w}'_m(\underline{w}'_m)^H)\underline{v} = \\ = \underline{w}'_1(\underline{w}'_1)^H\underline{v} + \underline{w}'_2(\underline{w}'_2)^H\underline{v} + \ldots + \underline{w}'_m(\underline{w}'_m)^H\underline{v}.$$

Ciascun $\delta_i = (\underline{w}'_i)^H\underline{v}$, per $i = 1, \ldots, m$, è uno scalare, per cui per ogni $i = 1, \ldots, m$ si ha che

$$\underline{w}'_i(\underline{w}'_i)^H\underline{v} = \underline{w}'_i\delta_i \underset{\substack{\uparrow \\ \delta_i \text{ è un numero !}}}{=} \delta_i\underline{w}'_i = ((\underline{w}'_i)^H\underline{v})\underline{w}'_i$$

e quindi da $(*)$ e $(**)$ si ottiene $P_0(\underline{v}) = P\underline{v}$.

Esempio 1. Si calcolino la matrice di proiezione di $\mathbb{R}^3$ su $W = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \rangle$ e la proiezione ortogonale del vettore $\underline{v} = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 11 \end{pmatrix}$ su W.

Posto $\underline{w}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ed $\underline{w}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ si ha che, in questo caso, $\mathcal{B} = \{\underline{w}_1, \underline{w}_2\}$ è già una base ortogonale di W (non occorre cioè applicare l'algoritmo di Gram-Schmidt, poichè $\underline{w}_1^H\underline{w}_2 = 0$).

Poichè $||\underline{w}_1||_2 = \sqrt{2} = ||\underline{w}_2||_2$, allora $\mathcal{B}' = \{\underline{w}'_1 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 1\sqrt{2} \end{pmatrix}, \underline{w}'_2 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}\}$ è una base ortonormale di W. Si costruiscono

$$Q = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 0 \\ 1\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad Q^H = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Allora la matrice di proiezione P di V su W è la matrice

$$P = QQ^H = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 0 \\ 1\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e la proiezione ortogonale di $\underline{v} = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 11 \end{pmatrix}$ su W è

$$P_0(\underline{v}) = P\underline{v} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 11 \end{pmatrix}.$$

Il complemento ortogonale di un sottospazio.

Siano V uno spazio vettoriale con un prodotto scalare $(\cdot, \cdot)$ e W un suo sottospazio.

Def. 2 Si chiama **complemento ortogonale di W in V**, e si indica con il simbolo $W^{\perp}$, l'insieme degli elementi **di V** che sono **ortogonali a tutti gli elementi di W**:

$$W^{\perp} = \{\underline{v} \in V | (\underline{w}, \underline{v}) = 0 \text{ per ogni } \underline{w} \in W\}.$$

$\boxed{N.B.}$ $W^{\perp}$ è un sottospazio di V.

Se $\mathcal{B} = \{\underline{w}_1, \underline{w}_2, \ldots, \underline{w}_m\}$ è un insieme di generatori di W (e quindi, in particolare, se $\mathcal{B}$ è una base di W), poichè

$$(\alpha_1 \underline{w}_1 + \alpha_2 \underline{w}_2 + \ldots + \alpha_m \underline{w}_m, \underline{v}) = \overline{\alpha_1}(\underline{w}_1, \underline{v}) + \overline{\alpha_2}(\underline{w}_2, \underline{v}) + \ldots + \overline{\alpha_m}(\underline{w}_m, \underline{v}),$$

allora

$$(\underline{w}, \underline{v}) = 0 \text{ per ogni } \underline{w} \in W \qquad \Longleftrightarrow \qquad (\underline{w}_i, \underline{v}) = 0 \text{ per ogni } \underline{w}_i \in \mathcal{B}.$$

Dunque se $\mathcal{B} = \{\underline{w}_1, \underline{w}_2, \ldots, \underline{w}_m\}$ è un insieme di generatori di W (e quindi, in particolare, se $\mathcal{B}$ è una base di W), si ha

$$W^{\perp} = \{\underline{v} \in V | (\underline{w}_i, \underline{v}) = 0 \text{ per } i = 1, \ldots, m\}.$$

Il caso $V = \mathbb{R}^n$ oppure $V = \mathbb{C}^n$.

Sia A una matrice complessa $m \times n$. Allora lo spazio delle colonne $C(A)$ è un sottospazio di $\mathbb{C}^m$ e si puó provare che il complemento ortogonale $C(A)^{\perp}$ di $C(A)$ in $\mathbb{C}^m$ coincide con $N(A^H)$, lo spazio nullo della H-trasposta di A.

Infatti:

Siano $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \dots, \underline{a}_n$ le colonne di A (quindi $\underline{a}_i \in \mathbb{C}^m$ per ogni $i = 1, \dots, n$).

Poniamo $V = \mathbb{C}^m$ e $W = C(A) = \langle \underline{a}_1, \underline{a}_2, \dots, \underline{a}_n \rangle$ lo spazio delle colonne di A. Poichè $\{\underline{a}_1, \underline{a}_2, \dots, \underline{a}_n\}$ è un insieme di generatori di W, per quanto detto sopra si ha che se $\underline{x} \in \mathbb{C}^m$ allora

$$\underline{x} \in W^\perp = C(A)^\perp \iff (\underline{a}_i, \underline{x}) = 0 \text{ per ogni } i = 1, \dots, n \iff$$

$$\iff \underline{a}_i^H \underline{x} = 0 \text{ per ogni } i = 1, \dots, n \iff \underset{\substack{\uparrow \\ n \times m}}{\begin{pmatrix} \underline{a}_1^H \\ \underline{a}_2^H \\ \vdots \\ \underline{a}_n^H \end{pmatrix}} \underset{\substack{\uparrow \\ m \times 1}}{\underline{x}} = \underset{\substack{\uparrow \\ n \times 1}}{\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}} \qquad (*)$$

Poichè $A^H = \begin{pmatrix} \underline{a}_1^H \\ \underline{a}_2^H \\ \vdots \\ \underline{a}_n^H \end{pmatrix}$, allora da $(*)$ concludiamo che

$$\underline{x} \in C(A)^\perp \iff A^H \underline{x} = \underline{0} \iff \underline{x} \in N(A^H),$$

per cui $C(A)^\perp = N(A^H)$.

Se quindi $W \leq \mathbb{C}^m$ ed $\mathcal{S} = \{\underline{w}_1, \underline{w}_2, \dots, \underline{w}_n\}$ è un insieme di generatori di W, per trovare $W^\perp$ si puó costruire la matrice $A = \begin{pmatrix} \underline{w}_1 & \underline{w}_2 & \dots & \underline{w}_n \end{pmatrix}$ che ha come colonne gli elementi di $\mathcal{S}$ e trovare $N(A^H)$.

Esempio 2. Si trovi una base del complemento ortogonale $W^\perp$ di $W = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2i \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1+i \\ -2+2i \\ 1 \\ 3+2i \\ 1+i \end{pmatrix} \right\rangle$ in $\mathbb{C}^5$.

Sia $A = \begin{pmatrix} 1 & 1+i \\ 2i & -2+2i \\ 0 & 1 \\ 2 & 3+2i \\ 1 & 1+i \end{pmatrix}$.

Allora $A^H = \begin{pmatrix} 1 & -2i & 0 & 2 & 1 \\ 1-i & -2-2i & 1 & 3-2i & 1-i \end{pmatrix}$ e $W^\perp = N(A^H)$. Per trovare una base di $N(A^H)$ procediamo come nell'ESERCIZIO TIPO 15.

$$A^H = \begin{pmatrix} 1 & -2i & 0 & 2 & 1 \\ 1-i & -2+2i & 1 & 3-2i & 1-i \end{pmatrix} \xrightarrow[E_{21}(-1+i)]{} \begin{pmatrix} 1 & -2i & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = U$$

Osserviamo innanzitutto che $N(A^H) = N(U)$ e che

$$\dim(N(U)) = \text{numero delle colonne di U} - \text{rango di U} = 5 - 2 = 3,$$

quindi una base di $N(A^H)$ ha 3 elementi. Poichè

$$\underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} \in N(A^H) = N(U) \quad \Longleftrightarrow \quad U\underline{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} x_1 - 2ix_2 + 2x_4 + x_5 & = & 0 \\ \\ x_3 + x_4 & = & 0 \end{cases}$$

allora $N(A^H) = \left\{ \begin{pmatrix} 2ih - 2k - r \\ h \\ -k \\ k \\ r \end{pmatrix} | h, k, r \in \mathbb{C} \right\}$.

Chiamando $\underline{v}_1$ l'elemento di $N(A^H)$ che si ottiene ponendo $h = 1$ e $k = r = 0$, $\underline{v}_2$ l'elemento di $N(A^H)$ che si ottiene ponendo $h = r = 0$ e $k = 1$, e $\underline{v}_3$ l'elemento di $N(A^H)$ che si ottiene ponendo $h = k = 0$ e $r = 1$, si ha che una base di $W^\perp = N(A^H)$ è

$$\left\{ \underline{v}_1 = \begin{pmatrix} 2i \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \underline{v}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \underline{v}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

ESERCIZIO TIPO 21

Si calcolino la matrice di proiezione su $V = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle \leq \mathbb{C}^3$ e la proiezione ortogonale di $\underline{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}$ su V.

$\boxed{1}$ Troviamo una base ortonormale di V.

Siano $\underline{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 0 \end{pmatrix}$ e $\underline{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Allora $V = \langle \underline{v}_1, \underline{v}_2 \rangle$. Poichè

$$A = (\,\underline{v}_1 \quad \underline{v}_2\,) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[E_{21}(-i)]{} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1-i \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[E_2(\frac{1}{2}+\frac{i}{2})]{} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = U,$$

allora $dim(V) = dim(C(A)) = rk(A) = 2$, quindi $\{\underline{v}_1, \underline{v}_2\}$ è una base di V.

Applichiamo l'algoritmo di Gram-Schmidt a $\{\underline{v}_1, \underline{v}_2\}$ per trovare una base ortogonale di V.

$$\underline{u}_1 = \underline{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\underline{u}_2 = \underline{v}_2 - \alpha_{12}\underline{u}_1, \qquad \underline{u}_1 \neq \underline{0} \implies \alpha_{12} = \frac{(\underline{u}_1, \underline{v}_2)}{(\underline{u}_1, \underline{u}_1)}$$

$$(\underline{u}_1, \underline{v}_2) = \underline{u}_1^H \underline{v}_2 = (\,1 \quad -i \quad 0\,) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1 - i$$

$$(\underline{u}_1, \underline{u}_1) = \underline{u}_1^H \underline{u}_1 = (\,1 \quad -i \quad 0\,) \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 0 \end{pmatrix} = 2$$

$$\implies \alpha_{12} = \frac{1-i}{2}$$

$$\begin{aligned} \underline{u}_2 &= \underline{v}_2 - \alpha_{12}\underline{u}_1 = \\ &= \underline{v}_2 - \frac{1-i}{2}\underline{u}_1 = \\ &= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1-i}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1+i \\ 1-i \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$\{\underline{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 0 \end{pmatrix}, \underline{u}_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1+i \\ 1-i \\ 0 \end{pmatrix}\}$ è una base ortogonale di V.

$$||\underline{u}_1||_2 = \sqrt{(\underline{u}_1, \underline{u}_1)} = \sqrt{2}$$

$$||\underline{u}_2||_2 = \sqrt{(\underline{u}_2, \underline{u}_2)} = \sqrt{\underline{u}_2^H \underline{u}_2} = \sqrt{\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1-i & 1+i & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1+i \\ 1-i \\ 0 \end{pmatrix}} = \frac{1}{2}\sqrt{4} = 1$$

$\{\frac{\underline{u}_1}{||\underline{u}_1||_2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{\underline{u}_2}{||\underline{u}_2||_2} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1+i \\ 1-i \\ 0 \end{pmatrix}\}$ è una base ortonormale di V.

$\boxed{2}$ Calcoliamo una matrice Q che abbia come colonne gli elementi della base ortonormale di V trovata al punto 1.

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{\underline{u}_1}{||\underline{u}_1||_2} & \frac{\underline{u}_2}{||\underline{u}_2||_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1+i}{2} \\ \frac{i}{\sqrt{2}} & \frac{1-i}{2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sqrt{2} & 1+i \\ i\sqrt{2} & 1-i \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$\boxed{3}$ $P = QQ^H$, dove Q è la matrice trovata al punto 2, è la matrice di proiezione di $\mathbb{C}^3$ su V. Dunque

$$P = QQ^H = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} \sqrt{2} & 1+i \\ i\sqrt{2} & 1-i \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sqrt{2} & -i\sqrt{2} & 0 \\ 1-i & 1+i & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$\boxed{4}$ La proiezione ortogonale di $\underline{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}$ su V è $P\underline{v}$, dove P è la matrice è la matrice di proiezione di $\mathbb{C}^3$ su V (trovata al punto 3). Dunque la proiezione ortogonale di $\underline{v}$ su V è

$$P\underline{v} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

ESERCITAZIONI* 5

$\boxed{1}$ Si verifichi che $\phi : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ definita da $\phi(\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}) = |a-b| + |a-c| + |b+c|$ è una norma.

$\boxed{2}$ Sia V il sottospazio di $\mathbb{C}^2$ generato da $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ (quindi $V = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle = \{ \begin{pmatrix} a \\ a \end{pmatrix} \quad | \quad a \in \mathbb{C}\}$).

Si verifichi che $(\cdot, \cdot) : V \times V \to \mathbb{C}$ definito da $(\begin{pmatrix} a \\ a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b \\ b \end{pmatrix}) = 3\overline{a}b$ è un prodotto scalare.

$\boxed{3}$ Sia V l'insieme delle matrici 2×2 reali simmetriche. V è uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ e

$$(\cdot, \cdot) : V \times V \to \mathbb{R}$$

definita da

$$(\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a' & b' \\ b' & c' \end{pmatrix}) = aa' + 2bb' + cc'$$

è un prodotto scalare su V.

(a) Si determini l'angolo α tra $A = \begin{pmatrix} 1 & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}$ e I_2.

(b) Sia $W = \langle \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \rangle \leq V$. Si determini $W^{\perp}$ in V.

$\boxed{4}$ Siano $\underline{z} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$ ed $S = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^2 \quad | \quad ||\underline{x} - \underline{z}||_1 \leq 3\}$.

Si provi che esiste $\underline{y} \in S$ tale che $||\underline{x}||_\infty \leq ||\underline{y}||_\infty$ per ogni $\underline{x} \in S$ e si calcoli $||\underline{y}||_\infty$.

$\boxed{5}$ Si trovi una base ortonormale di

$$V = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 1 \\ i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i \\ -1 \\ i \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle \leq \mathbb{C}^4.$$

$\boxed{6}$ Si calcolino la matrice di proiezione su $V = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle \leq \mathbb{C}^3$ e la proiezione ortogonale di $\underline{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ su V.

Svolgimento ESERCITAZIONI* 5

$\boxed{1}$ Si verifichi che $\phi : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ definita da $\phi(\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}) = |a-b|+|a-c|+|b+c|$ è una norma.

(1) $\phi(\underline{0}) = \phi(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}) = |0-0| + |0-0| + |0+0| = 0.$

Poichè $\phi(\underline{x}) \geq 0$ per ogni $\underline{x} \in \mathbb{C}^3$, per provare che

$$\underline{x} \neq \underline{0} \quad \Longrightarrow \quad \phi(\underline{x}) > 0$$

basta provare che

$$\underline{x} \neq \underline{0} \quad \Longrightarrow \quad \phi(\underline{x}) \neq 0,$$

ossia basta provare che

$$\phi(\underline{x}) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \underline{x} = \underline{0}.$$

Dalla definizione di ϕ si ottiene:

$$\left.\begin{array}{rcl} \phi(\underline{x}) & = & 0 \\ \underline{x} & = & \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \end{array}\right\} \Longrightarrow \begin{cases} |a-b| = 0 \\ |a-c| = 0 \\ |b+c| = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a = b \\ a = c \\ b+c = 0 \end{cases} \Longrightarrow \quad a=b=c=0 \quad \Longrightarrow \quad \underline{x} = \underline{0}.$$

(2) $$\phi(\alpha \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}) = \phi(\begin{pmatrix} \alpha a \\ \alpha b \\ \alpha c \end{pmatrix}) = |\alpha a - \alpha b| + |\alpha a - \alpha c| + |\alpha b + \alpha c| =$$

$$= |\alpha||a-b| + |\alpha||a-c| + |\alpha||b+c| = |\alpha|(|a-b| + |a-c| + |b+c|) = |\alpha|\phi(\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}).$$

(3) $$\phi(\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{pmatrix}) = \phi(\begin{pmatrix} a_1+a_2 \\ b_1+b_2 \\ c_1+c_2 \end{pmatrix}) =$$

$$= |(a_1+a_2)-(b_1+b_2)| + |(a_1+a_2)-(c_1+c_2)| + |(b_1+b_2)+(c_1+c_2)| =$$

$$= |(a_1-b_1)+(a_2-b_2)| + |(a_1-c_1)+(a_2-c_2)| + |(b_1+c_1)+(b_2+c_2)| \leq$$

$$\leq |a_1-b_1| + |a_2-b_2| + |a_1-c_1| + |a_2-c_2| + |b_1+c_1| + |b_2+c_2| = \phi(\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix}) + \phi(\begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{pmatrix}).$$

$\boxed{2}$ Sia V il sottospazio di $\mathbb{C}^2$ generato da $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ (quindi $V = \langle\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\rangle = \{\begin{pmatrix}a\\a\end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{C}\}$).

Si verifichi che $(\cdot,\cdot\,) : V \times V \to \mathbb{C}$ definito da $(\begin{pmatrix}a\\a\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}b\\b\end{pmatrix}) = 3\overline{a}b$ è un prodotto scalare.

(1) $\overline{(\underline{v}, \underline{u})} \overset{?}{=} (\underline{u}, \underline{v})$ per ogni $\underline{u} = \begin{pmatrix}a\\a\end{pmatrix}, \underline{v} = \begin{pmatrix}b\\b\end{pmatrix} \in V$

$$\overline{(\begin{pmatrix}b\\b\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}a\\a\end{pmatrix})} \underset{\substack{\uparrow\\ \text{def. di } (\cdot,\cdot)}}{=} \overline{3\overline{b}a} = 3\overline{a}b \underset{\substack{\uparrow\\ \text{def. di } (\cdot,\cdot)}}{=} \overline{(\begin{pmatrix}a\\a\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}b\\b\end{pmatrix})}.$$

(2) (•) $(\alpha\underline{u} + \beta\underline{v}, \underline{z}) \overset{?}{=} \overline{\alpha}(\underline{u}, \underline{z}) + \overline{\beta}(\underline{v}, \underline{z})$ per ogni $\underline{u} = \begin{pmatrix}a\\a\end{pmatrix}, \underline{v} = \begin{pmatrix}b\\b\end{pmatrix}, \underline{z} = \begin{pmatrix}c\\c\end{pmatrix} \in V, \alpha, \beta \in \mathbb{C}$

(••) $(\underline{u}, \alpha\underline{v} + \beta\underline{z}) \overset{?}{=} \alpha(\underline{u}, \underline{v}) + \beta(\underline{u}, \underline{z})$ per ogni $\underline{u} = \begin{pmatrix}a\\a\end{pmatrix}, \underline{v} = \begin{pmatrix}b\\b\end{pmatrix}, \underline{z} = \begin{pmatrix}c\\c\end{pmatrix} \in V, \alpha, \beta \in \mathbb{C}$

(•) $$(\alpha\underline{u} + \beta\underline{v}, \underline{z}) = (\alpha\begin{pmatrix}a\\a\end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix}b\\b\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}c\\c\end{pmatrix}) = (\begin{pmatrix}\alpha a + \beta b\\ \alpha a + \beta b\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}c\\c\end{pmatrix}) \underset{\substack{\uparrow\\ \text{def. di } (\cdot,\cdot)}}{=} 3(\overline{\alpha a + \beta b})c =$$

$$= \overline{\alpha}(3\overline{a}c) + \overline{\beta}(3\overline{b}c) = \overline{\alpha}(\begin{pmatrix}a\\a\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}b\\b\end{pmatrix}) + \overline{\beta}(\begin{pmatrix}b\\b\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}c\\c\end{pmatrix}) = \overline{\alpha}(\underline{u}, \underline{z}) + \overline{\beta}(\underline{v}, \underline{z})$$

(••) $$(\underline{u}, \alpha\underline{v} + \beta\underline{z}) = (\begin{pmatrix}a\\a\end{pmatrix}, \alpha\begin{pmatrix}b\\b\end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix}c\\c\end{pmatrix}) = (\begin{pmatrix}a\\a\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\alpha b + \beta c\\ \alpha b + \beta c\end{pmatrix}) = 3\overline{a}(\alpha b + \beta c) =$$

$$= \alpha(3\overline{a}b) + \beta(3\overline{a}c) = \alpha(\begin{pmatrix}a\\a\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}b\\b\end{pmatrix}) + \beta(\begin{pmatrix}a\\a\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}c\\c\end{pmatrix}) = \alpha(\underline{u}, \underline{v}) + \beta(\underline{u}, \underline{z})$$

(3) (•) $(\underline{0}, \underline{0}) \overset{?}{=} 0$

(••) $\begin{pmatrix}a\\a\end{pmatrix} \neq \underline{0} \overset{?}{\Longrightarrow} (\begin{pmatrix}a\\a\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}a\\a\end{pmatrix}) \in \mathbb{R}_{>0}$

(•) $(\underline{0}, \underline{0}) = (\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}) = 3\overline{0}0 = 0$

(••)

$$\left.\begin{array}{rcl} \begin{pmatrix}a\\a\end{pmatrix} & \neq & \underline{0} \\ (\begin{pmatrix}a\\a\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}a\\a\end{pmatrix}) & = & 3\overline{a}a = 3|a|^2 \end{array}\right\} \Longrightarrow (\begin{pmatrix}a\\a\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}a\\a\end{pmatrix}) \in \mathbb{R}_{>0}$$

$\boxed{3}$ Sia V l'insieme delle matrici 2×2 reali simmetriche. V è uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ e

$$(\cdot, \cdot) : V \times V \to \mathbb{R}$$

definita da

$$(\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a' & b' \\ b' & c' \end{pmatrix}) = aa' + 2bb' + cc'$$

è un prodotto scalare su V.

(a) Si determini l'angolo α tra $A = \begin{pmatrix} 1 & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}$ e I_2.

(b) Sia $W = \langle \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \rangle \leq V$. Si determini $W^\perp$ in V.

(a) Sia $||\cdot|| : V \to \mathbb{R}$ la norma indotta da $(\cdot, \cdot)$. Allora

$$|| \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} || = \sqrt{(\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix})} = \sqrt{a^2 + 2b^2 + c^2},$$

per cui

$$cos\alpha = \frac{(A, I_2)}{||A||, ||I_2||} = \frac{1 \times 1 + 2 \times 1/\sqrt{2} \times 0 + 0 \times 1}{\sqrt{1^2 + 2(1/\sqrt{2})^2 + 0^2} \times \sqrt{1^2 + 2 \times 0^2 + 1^2}} = \frac{1}{\sqrt{2} \times \sqrt{2}} = \frac{1}{2}.$$

Quindi $\alpha =$arcos$\frac{1}{2} = \{\pi/3 + 2k\pi, -\pi/3 + 2k\pi | k \in \mathbb{Z}\}$.

(b) Se $\underline{w} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, allora $W = \langle \underline{w} \rangle$ e

$$W^\perp = \{\underline{v} \in V | (\underline{v}, \underline{w}) = 0\} = \{\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} | a + 2b = 0, \quad a, b, c \in \mathbb{R}\} =$$

$$= \{\begin{pmatrix} -2b & b \\ b & c \end{pmatrix} | b, c \in \mathbb{R}\}.$$

$\boxed{4}$ Siano $\underline{z} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$ ed $S = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^2 \quad | \quad ||\underline{x} - \underline{z}||_1 \leq 3\}$.

Si provi che esiste $\underline{y} \in S$ tale che $||\underline{x}||_\infty \leq ||\underline{y}||_\infty$ per ogni $\underline{x} \in S$ e si calcoli $||\underline{y}||_\infty$.

Sia $\underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in S$. Allora

$$||\underline{x} - \underline{z}||_1 = || \begin{pmatrix} x_1 - 3 \\ x_2 - 3 \end{pmatrix} ||_1 = |x_1 - 3| + |x_2 - 3| \leq 3 \quad \Longrightarrow \quad |x_i - 3| \leq 3 \quad i = 1, 2 \quad \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow \quad -3 \leq x_i - 3 \leq 3 \quad i = 1, 2 \quad \Longrightarrow \quad 0 \leq x_i \leq 6 \quad i = 1, 2 \quad \Longrightarrow \quad |x_i| \leq 6 \quad i = 1, 2.$$

Poichè $||\underline{x}||_\infty$ =max$\{|x_1|, |x_2|\}$ allora $||\underline{x}||_\infty \leq 6$ per ogni $\underline{x} \in S$. Se dunque esistesse $\underline{\tilde{x}} \in \mathcal{S}$ con $||\underline{\tilde{x}}||_\infty = 6$, si potrebbe prendere tale $\underline{\tilde{x}}$ come $\underline{y}$.

Intanto, perchè $\underline{\tilde{x}} = \begin{pmatrix} \tilde{x_1} \\ \tilde{x_2} \end{pmatrix} \in \mathcal{S}$, deve essere, come si è visto, che $0 \leq \tilde{x_i} \leq 6$, per $i = 1, 2$.

Esiste un $\underline{\tilde{x}} \in \mathcal{S}$ con una componente, ad esempio $\tilde{x_1}$, esattamente uguale a 6 ? Se $\tilde{x_1} = 6$, allora

$$\begin{pmatrix} 6 \\ \tilde{x_2} \end{pmatrix} \in \mathcal{S} \quad \Longleftrightarrow \quad |6 - 3| + |\tilde{x_2} - 3| = 3 + |x_2 - 3| \leq 3 \quad \Longleftrightarrow \quad |\tilde{x_2} - 3| = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \tilde{x_2} = 3.$$

Dunque $\begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix} = \underline{y} \in S$ e $||\underline{y}||_\infty = 6$ (si potrebbe anche prendere $\underline{y} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}$).

Intuitivamente:

Si fissi in un piano un sistema di riferimento ortogonale e monometrico Oxy. Abbiamo visto (LEZIONE 19) che gli elementi di $\mathbb{R}^2$ che distano in norma $||\cdot||_1$ al piú d ($d \in \mathbb{R}_{>0}$) da $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ sono tutti e soli quelli rappresentati dai punti dentro al rombo di vertici

$$P_1(d, 0), \quad P_2(0, d), \quad P_3(-d, 0), \quad P_4(0, -d).$$

Traslando il sistema di riferimento si ottiene che gli elementi di $\mathbb{R}^2$ che distano in norma $||\cdot||_1$ al piú d ($d \in \mathbb{R}_{>0}$) da $\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$ sono tutti e soli quelli rappresentati dai punti dentro al rombo di vertici

$$Q_1(z_1 + d, z_2), \quad Q_2(z_1, z_2 + d), \quad Q_3(z_1 - d, z_2), \quad Q_4(z_1, z_2 - d).$$

Nel caso di questo esercizio, $\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$ e $d = 3$, per cui gli elementi di $\mathcal{S}$ sono tutti e soli gli elementi di $\mathbb{R}^2$ rappresentati dai punti dentro al rombo di vertici

$$H_1(3 + 3, 3), \quad H_2(3, 3 + 3), \quad H_3(3 - 3, 3), \quad H_4(3, 3 - 3),$$

ossia

$$H_1(6,3), \quad H_2(3,6), \quad H_3(0,3), \quad H_4(3,0).$$

Essi hanno, in particolare, sia l'ascissa che l'ordinata positive o nulle, quindi

$$\underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathcal{S} \quad \Longrightarrow \quad ||\underline{x}||_\infty = max\{|x_1|, |x_2|\} = max\{x_1, x_2\}.$$

Poichè i punti dentro al rombo di vertici H_1, H_2, H_3, H_4 hanno sia l'ascissa che l'ordinata minore od uguale a 6, allora

$$\underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathcal{S} \quad \Longrightarrow \quad ||\underline{x}||_\infty = max\{|x_1|, |x_2|\} = max\{x_1, x_2\} \leq 6$$

e i punti dentro al rombo di vertici H_1, H_2, H_3, H_4 che abbiano ascissa od ordinata uguale a 6 rappresentano i vettori $\underline{y}$ soluzioni del nostro problema. Ne esistono esattamente due: $H_1(6,3)$ ed $H_2(3,6)$. Dunque

$$\underline{y} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \tilde{\underline{y}} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}$$

sono le due possibili soluzioni del nostro problema.

$\boxed{5}$ Si trovi una base ortonormale di

$$V = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 1 \\ i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i \\ -1 \\ i \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle \leq \mathbb{C}^4.$$

$\boxed{1}$ Costruiamo dapprima **una base di V**: poniamo

$$\underline{w}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 1 \\ i \end{pmatrix}, \quad \underline{w}_2 = \begin{pmatrix} i \\ -1 \\ i \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \underline{w}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \underline{w}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

e calcoliamo una base di $C(A)$ dove $A = (\,\underline{w}_1 \quad \underline{w}_2 \quad \underline{w}_3 \quad \underline{w}_4\,)$.

$$A = (\,\underline{w}_1 \quad \underline{w}_2 \quad \underline{w}_3 \quad \underline{w}_4\,) = \begin{pmatrix} 1 & i & 1 & 0 \\ i & -1 & 0 & 1 \\ 1 & i & 1 & 0 \\ i & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[E_{41}(-i)E_{31}(-1)E_{21}(-i)]{}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & i & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -i & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[E_{42}(i)E_2(i)]{} \begin{pmatrix} 1 & i & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = U$$

Poichè U ha come colonne dominanti la 1^a e la 3^a, allora una base di $C(A) = V$ è $\{\underline{w}_1, \underline{w}_3\}$.

$\boxed{2}$ Troviamo **una base ortogonale di V** applicando l'algoritmo di Gram-Schmidt a

$$\left\{ \underline{v}_1 = \underline{w}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 1 \\ i \end{pmatrix}, \underline{v}_2 = \underline{w}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

$$\underline{u}_1 = \underline{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 1 \\ i \end{pmatrix}$$

$$\underline{u}_2 = \underline{v}_2 - \alpha_{12}\underline{u}_1, \qquad \underline{u}_1 \neq \underline{0} \implies \alpha_{12} = \frac{(\underline{u}_1, \underline{v}_2)}{(\underline{u}_1, \underline{u}_1)}$$

$$(\underline{u}_1, \underline{v}_2) = \underline{u}_1^H \underline{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 & -i & 1 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1 + 1 = 2$$

$$(\underline{u}_1, \underline{u}_1) = \underline{u}_1^H \underline{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 & -i & 1 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 1 \\ i \end{pmatrix} = 1 + 1 + 1 + 1 = 4$$

$$\implies \alpha_{12} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$\underline{u}_2 = \underline{v}_2 - \alpha_{12}\underline{u}_1 = \underline{v}_2 - \frac{1}{2}\underline{u}_1 =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 1 \\ i \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ 1 \\ -i \end{pmatrix}$$

Dunque $\{\underline{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ i \\ 0 \end{pmatrix}, \underline{u}_2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ 1 \\ -i \end{pmatrix}\}$ è una base ortogonale di V.

$\boxed{3}$ Costruiamo **base ortonormale di V** normalizzando la base ortogonale trovata al punto $\boxed{2}$, ossia dividendo ciascun elemento della base ortogonale trovata in $\boxed{2}$ per la propria norma euclidea.

Cominciamo con il calcolare la norma euclidea di $\underline{u}_1$ ed $\underline{u}_2$:

$$||\underline{u}_1||_2 = \sqrt{(\underline{u}_1, \underline{u}_1)} = \sqrt{4} = 2$$

$$||\underline{u}_2||_2 = \sqrt{(\underline{u}_2, \underline{u}_2)} = \sqrt{\frac{1}{2}(\, 1 \quad i \quad 1 \quad i\,)\,\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ 1 \\ -i \end{pmatrix}} = \sqrt{\frac{1}{4}(1+1+1+1+1)} = 1$$

Allora

$$\mathcal{B} = \{\frac{\underline{u}_1}{||\underline{u}_1||_2}, \frac{\underline{u}_2}{||\underline{u}_2||_2}\} = \left\{ \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 1 \\ i \end{pmatrix}, \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ 1 \\ -i \end{pmatrix} \right\}$$

è una base ortonormale di V.

$\boxed{6}$ Si calcolino la matrice di proiezione su $V = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle \leq \mathbb{C}^3$ e la proiezione ortogonale di $\underline{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ su V.

$\boxed{1}$ Troviamo una base ortonormale di V.

Poniamo $\underline{w}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 0 \end{pmatrix}, \underline{w}_2 = \begin{pmatrix} i \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \underline{w}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ e calcoliamo una base di $C(A)$ dove $A = (\, \underline{w}_1 \quad \underline{w}_2 \quad \underline{w}_3\,)$.

$$A = (\, \underline{w}_1 \quad \underline{w}_2 \quad \underline{w}_3\,) = \begin{pmatrix} 1 & i & 2 \\ i & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[E_{21}(-i)]{} \begin{pmatrix} 1 & i & 2 \\ 0 & 0 & -2i \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[E_{32}(-1)E_2(\frac{1}{2}i)]{} \begin{pmatrix} 1 & i & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = U$$

Poichè U ha come colonne dominanti la 1^a e la 3^a, allora una base di $C(A) = V$ è $\{\underline{w}_1, \underline{w}_3\}$.

Applichiamo ora l'algoritmo di Gram-Schmidt a

$$\left\{ \underline{v}_1 = \underline{w}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 0 \end{pmatrix}, \underline{v}_2 = \underline{w}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

per trovare una base ortogonale di V.

$$\underline{u}_1 = \underline{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\underline{u}_2 = \underline{v}_2 - \alpha_{12}\underline{u}_1, \qquad \underline{u}_1 \neq \underline{0} \quad \Longrightarrow \quad \alpha_{12} = \frac{(\underline{u}_1, \underline{v}_2)}{(\underline{u}_1, \underline{u}_1)}$$

$$(\underline{u}_1, \underline{v}_2) = \underline{u}_1^H \underline{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 & -i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 2$$

$$(\underline{u}_1, \underline{u}_1) = \underline{u}_1^H \underline{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 & -i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 0 \end{pmatrix} = 2$$

$$\Longrightarrow \quad \alpha_{12} = \frac{2}{2} = 1$$

$$\begin{aligned} \underline{u}_2 &= \underline{v}_2 - \alpha_{12}\underline{u}_1 = \\ &= \underline{v}_2 - \underline{u}_1 = \\ &= \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$\{\underline{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 0 \end{pmatrix}, \underline{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ 1 \end{pmatrix}\}$ è una base ortogonale di V.

$$||\underline{u}_1||_2 = \sqrt{(\underline{u}_1, \underline{u}_1)} = \sqrt{2}$$

$$||\underline{u}_2||_2 = \sqrt{(\underline{u}_2, \underline{u}_2)} = \sqrt{\underline{u}_2^H \underline{u}_2} = \sqrt{\begin{pmatrix} 1 & i & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ 1 \end{pmatrix}} = \sqrt{1+1+1} = \sqrt{3}$$

$\left\{ \frac{\underline{u}_1}{||\underline{u}_1||_2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{\underline{u}_2}{||\underline{u}_2||_2} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ è una base ortonormale di V.

$\boxed{2}$ Calcoliamo una matrice Q che abbia come colonne gli elementi della base ortonormale di V trovata al punto $\boxed{1}$.

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{\underline{u}_1}{||\underline{u}_1||_2} & \frac{\underline{u}_2}{||\underline{u}_2||_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{i}{\sqrt{2}} & \frac{-i}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} \sqrt{3} & \sqrt{2} \\ i\sqrt{3} & -i\sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

$\boxed{3}$ $P = QQ^H$, dove Q è la matrice trovata al punto $\boxed{2}$, è la matrice di proiezione di $\mathbb{C}^3$ su V. Dunque

$$P = QQ^H = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} \sqrt{3} & \sqrt{2} \\ i\sqrt{3} & -i\sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} \sqrt{3} & -i\sqrt{3} & 0 \\ \sqrt{2} & i\sqrt{2} & \sqrt{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 5 & -i & 2 \\ i & 5 & -2i \\ 2 & 2i & 2 \end{pmatrix}.$$

$\boxed{4}$ La proiezione ortogonale di $\underline{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}$ su V è $P\underline{v}$, dove P è la matrice di proiezione di $\mathbb{C}^3$ su V (trovata al punto $\boxed{3}$).

Dunque la proiezione ortogonale di $\underline{v}$ su V è

$$P\underline{v} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 5 & -i & 2 \\ i & 5 & -2i \\ 2 & 2i & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 2 \\ -2i \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ 1 \end{pmatrix}.$$

ESERCIZIO TIPO 22

Sia $V = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -i \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ i \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle \leq \mathbb{C}^6$.

(a) Si trovi una base del complemento ortogonale di V in $\mathbb{C}^6$.

(b) Si trovi una base ortogonale di $V^\perp$.

(a) Sia $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ -i & 0 & -i & i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, per cui $V = C(A)$.

Allora $A^H = \begin{pmatrix} 1 & i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & i & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ e $V^\perp = C(A)^\perp = N(A^H)$. Per trovare una base di $N(A^H)$ procediamo come nell'ESERCIZIO TIPO 15.

$$A^H = \begin{pmatrix} 1 & i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & i & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[E_{31}(-2)E_{21}(-1)]{} \begin{pmatrix} 1 & i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[E_{42}(i)E_{32}(i)E_{2}(i)]{}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[E_{34}]{} \begin{pmatrix} 1 & i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = U$$

Osserviamo innanzitutto che $N(A^H) = N(U)$ e che

$$\dim(N(U)) = \text{numero delle colonne di U} - \text{rango di U} = 6 - 3 = 3,$$

quindi una base di $N(A^H)$ ha 3 elementi. Quindi

$$\dim V^\perp = \dim(N(U)) = 6 - \text{rango di U} = 6 - \dim(C(A)) = 6 - \dim V.$$

In generale

se V è uno spazio vettoriale con un prodotto scalare $(\cdot, \cdot)$ **e** $W \leq V$, **allora**

$$\dim W^\perp = \dim V - \dim W$$

Poichè

$$\underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} \in N(A^H) = N(U) \iff U\underline{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} x_1 + ix_2 & = & 0 \\ x_2 + ix_4 & = & 0 \\ x_3 + x_5 + x_6 & = & 0 \end{cases}$$

allora $N(A^H) = \left\{ \begin{pmatrix} -h \\ -ih \\ -k-r \\ h \\ k \\ r \end{pmatrix} | h, k, r \in \mathbb{C} \right\}$.

Chiamando $\underline{v}_1$ l'elemento di $N(A^H)$ che si ottiene ponendo $h = 1$ e $k = r = 0$, $\underline{v}_2$ l'elemento di $N(A^H)$ che si ottiene ponendo $h = r = 0$ e $k = 1$, e $\underline{v}_3$ l'elemento di $N(A^H)$ che si ottiene ponendo $h = k = 0$ e $r = 1$, si ha che una base di $V^\perp = N(A^H)$ è

$$\mathcal{B} = \left\{ \underline{v}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -i \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \underline{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \underline{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

(b) Applichiamo l'algoritmo di Gram-Schmidt a $\mathcal{B}$ per ottenere una base ortogonale di $V^\perp$.

$$\underline{u}_1 = \underline{v}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -i \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\underline{u}_2 = \underline{v}_2 - \alpha_{12}\underline{u}_1, \qquad \underline{u}_1 \neq \underline{0} \implies \alpha_{12} = \frac{(\underline{u}_1, \underline{v}_2)}{(\underline{u}_1, \underline{u}_1)}$$

$$(\underline{u}_1, \underline{v}_2) = \underline{u}_1^H \underline{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 & i & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

$$\Longrightarrow \quad \alpha_{12} = 0$$

$$\underline{u}_2 = \underline{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\underline{u}_3 = \underline{v}_3 - \alpha_{13}\underline{u}_1 - \alpha_{23}\underline{u}_2,$$

$$\underline{u}_1 \neq \underline{0} \quad \Longrightarrow \quad \alpha_{13} = \frac{(\underline{u}_1, \underline{v}_3)}{(\underline{u}_1, \underline{u}_1)}$$

$$(\underline{u}_1, \underline{v}_3) = \underline{u}_1^H \underline{v}_3 = \begin{pmatrix} -1 & i & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

$$\Longrightarrow \quad \alpha_{13} = 0$$

$$\underline{u}_2 \neq \underline{0} \quad \Longrightarrow \quad \alpha_{23} = \frac{(\underline{u}_2, \underline{v}_3)}{(\underline{u}_2, \underline{u}_2)}$$

$$(\underline{u}_2, \underline{v}_3) = \underline{u}_2^H \underline{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 1$$

$$(\underline{u}_2, \underline{u}_2) = \underline{u}_2^H \underline{u}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1 + 1 = 2$$

$$\Longrightarrow \quad \alpha_{23} = \frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned} \underline{u}_3 &= \underline{v}_3 - \alpha_{13}\underline{u}_1 - \alpha_{23}\underline{u}_2 = \\ &= \underline{v}_3 - \frac{1}{2}\underline{u}_2 = \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Una base ortogonale di $V^{\perp}$ è

$$\left\{ \underline{u}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -i \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \underline{u}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \underline{u}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

LEZIONE 23 Calcolo di determinanti.

Sia A una matrice **quadrata** di ordine n.

Il **determinante di A** è un numero che dipende da A. Esso si indica con il simbolo $\det(A)$, oppure $\mathrm{Det}(A)$. Impariamo a calcolarlo, cominciando con i casi $n = 1, 2, 3$.

Il caso n=1. Se $A = (\, a_{11}\,)$, è $\mathrm{Det}(A) = a_{11}$.

Il caso n=2. Se $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, è $\mathrm{Det}(A) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$.

Esempio 1. Il determinante di $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$ è $\mathrm{Det}(A) = 2 \times 5 - 3 \times 4 = 10 - 12 = -2$.

Abbiamo detto che $\mathrm{Det}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$. Osserviamo che

$$\begin{aligned} a_{11}a_{22} &= a_{11}(-1)^{1+1}\mathrm{Det}\,(\, a_{22}\,) = \\ &= a_{11}(-1)^{(\text{la somma degli indici di } a_{11})}\mathrm{Det}\,(\, a_{22}\,) = \\ &= a_{11}(-1)^{(\text{la somma degli indici di} a_{11})}\begin{pmatrix} \text{il determinante della matrice che} \\ \text{si ottiene da A sopprimendo} \\ \text{la } 1^a \text{ riga e la } 1^a \text{colonna di A} \end{pmatrix} = \\ &= a_{11}(-1)^{(\text{la somma degli indici di} a_{11})}\begin{pmatrix} \text{il determinante della matrice che si ottiene da A} \\ \text{sopprimendo la riga e la colonna in cui si trova } a_{11} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} -a_{12}a_{21} &= a_{12}(-1)^{1+2}\mathrm{Det}\,(\, a_{21}\,) = \\ &= a_{12}(-1)^{(\text{la somma degli indici di } a_{12})}\mathrm{Det}\,(\, a_{21}\,) = \\ &= a_{12}(-1)^{(\text{la somma degli indici di} a_{12})}\begin{pmatrix} \text{il determinante della matrice che} \\ \text{si ottiene da A sopprimendo} \\ \text{la } 1^a \text{ riga e la } 2^a \text{colonna di A} \end{pmatrix} = \\ &= a_{12}(-1)^{(\text{la somma degli indici di} a_{12})}\begin{pmatrix} \text{il determinante della matrice che si ottiene da A} \\ \text{sopprimendo la riga e la colonna in cui si trova } a_{12} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Indicando con i simboli

C_{11} la matrice che si ottiene da A sopprimendo la 1^a riga e la 1^a colonna,

C_{12} la matrice che si ottiene da A sopprimendo la 1^a riga e la 2^a colonna, ed inoltre

$$A_{11} = (-1)^{1+1}\text{Det}C_{11},$$
$$A_{12} = (-1)^{1+2}\text{Det}C_{12},$$

abbiamo:

$$\text{Det}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12}.$$

Si tenga a mente che a_{11} ed a_{12} sono gli elementi della 1^a riga di A.

Quindi se $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, quello che abbiamo fatto per calcolare $\text{Det}(A)$ è stato:

(1) mettere in evidenza gli elementi della 1^a riga di A: $\begin{pmatrix} \boxed{a_{11}} & \boxed{a_{12}} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$,

(2) per ciascuna posizione $(1, j)$ della 1^a riga di A (posto $(1, 1)$ e posto $(1, 2)$)

– costruire la matrice C_{1j} (ottenuta sopprimendo da A la 1^a riga e la $j-$esima colonna di A),
– calcolare $\text{Det}(C_{1j})$,
– calcolare $(-1)^{1+j}$,
– calcolare $A_{1j} = (-1)^{1+j}\text{Det}(C_{1j})$,

(3) calcolare il prodotto $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_{11} \\ A_{12} \end{pmatrix}$.

Il caso n=3. Sia $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$. Per calcolare $\text{Det}(A)$ procediamo come abbiamo fatto nel caso $n = 2$.

(1) Mettiamo in evidenza gli elementi della 1^a riga di A: $\begin{pmatrix} \boxed{a_{11}} & \boxed{a_{12}} & \boxed{a_{13}} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$.

(2) per ciascuna posizione $(1, j)$ della 1^a riga di A (posto $(1, 1)$, posto $(1, 2)$ e posto $(1, 3)$)

– costruiamo la matrice C_{1j} (ottenuta sopprimendo da A la 1^a riga e la $j-$esima colonna di A):

$$C_{11} = \begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \qquad C_{12} = \begin{pmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{pmatrix}, \qquad C_{13} = \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}.$$

– calcoliamo $\mathrm{Det}(C_{1j})$, usando il caso $n = 2$, ossia il caso precedente a quello che stiamo analizzando ora (che è $n = 3$):

$$\begin{aligned}
\mathrm{Det}C_{11} &= \mathrm{Det}\begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}, \\
\mathrm{Det}C_{12} &= \mathrm{Det}\begin{pmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{pmatrix} = a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}, \\
\mathrm{Det}C_{13} &= \mathrm{Det}\begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} = a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31},
\end{aligned}$$

– calcoliamo $(-1)^{1+j}$: $(-1)^{1+1} = 1, (-1)^{1+2} = -1, (-1)^{1+3} = 1$,

– calcoliamo $A_{1j} = (-1)^{1+j}\mathrm{Det}(C_{1j})$:

$$\begin{aligned}
A_{11} &= (-1)^{1+1}\mathrm{Det}C_{11} = a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}, \\
A_{12} &= (-1)^{1+2}\mathrm{Det}C_{12} = -(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}), \\
A_{13} &= (-1)^{1+3}\mathrm{Det}C_{13} = a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}.
\end{aligned}$$

(3) Il determinante di A è il prodotto

$$\begin{aligned}
\mathrm{Det}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_{11} \\ A_{12} \\ A_{13} \end{pmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} = \\
&= a_{11}(-1)^{1+1}\mathrm{Det}C_{11} + a_{12}(-1)^{1+2}\mathrm{Det}C_{12} + a_{13}(-1)^{1+3}\mathrm{Det}C_{13}
\end{aligned}$$

Esempio 2. Calcoliamo il determinante della matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \\ 2 & 6 & 3 \end{pmatrix}$.

In questo caso abbiamo

$$a_{11} = 3, \qquad a_{12} = -2, \qquad a_{13} = 1,$$

$$C_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}, \qquad C_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \qquad C_{13} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 6 \end{pmatrix},$$

per cui

$$\begin{aligned}
\mathrm{Det}A &= 3(-1)^{1+1}\mathrm{Det}\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 6 & 3 \end{pmatrix} + (-2)(-1)^{1+2}\mathrm{Det}\begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} + 1(-1)^{1+3}\mathrm{Det}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} = \\
&= 3(3-24) + (-2)(-1)(0-8) + (0-2) = 3(-21) - 16 - 2 = \\
&= -81.
\end{aligned}$$

Quello che abbiamo fatto è quindi:

(a) per le matrici 1×1 porre $\mathrm{Det}(\, a_{11} \,) = a_{11}$,

(b) dare una formula che permetta di calcolare il determinante delle matrici 2×2 sapendo come calcolare il determinante delle matrici 1×1, ossia dare una formula che permetta di calcolare il determinante delle matrici nel caso $n = 2$ sapendo come calcolare il determinante delle matrici nel caso precedente, cioè il caso $n = 1$ (si veda il punto (a)),

(c) dare una formula che permetta di calcolare il determinante delle matrici 3×3 sapendo come calcolare il determinante delle matrici 2×2, ossia dare una formula che permetta di calcolare il determinante delle matrici nel caso $n = 3$ sapendo come calcolare il determinante delle matrici nel caso precedente, cioè il caso $n = 2$ (si veda il punto (b)).

Procediamo quindi allo stesso modo, dando una formula che permetta di calcolare il determinante delle matrici $n \times n$ sapendo come calcolare il determinante delle matrici $(n-1) \times (n-1)$, ossia dare una formula che permetta di calcolare il determinante delle matrici nel caso n sapendo come calcolare il determinante delle matrici nel caso precedente, cioè il caso $n-1$.

Sia dunque $A = (\, a_{ij} \,)$ una matrice $n \times n$. Cominciamo con il dare la seguente definizione:

Def. 1. Per ogni $1 \leq i \leq n$ e $1 \leq j \leq n$ si chiama **matrice complementare dell'elemento** a_{ij} od anche **matrice complementare di posto (i,j) in A**, e si indica con il simbolo C_{ij}, la matrice che si ottiene da A sopprimendo la i-esima riga e la j-esima colonna. Dunque C_{ij} è una matrice $(n-1) \times (n-1)$.

Esempio 3. Se $A = \begin{pmatrix} 1 & i & 3 & 4 & 11 \\ 0 & 2 & 7 & -3 & 8 \\ 1+i & 2 & 5 & -5 & 17 \\ -1 & 6i & 0 & 5i & 1-4i \\ 12 & 7+2i & 34 & 4-6i & 14i \end{pmatrix}$, allora

$$\begin{pmatrix} 1 & i & 3 & \boxed{4} & 11 \\ \boxed{0} & \boxed{2} & \boxed{7} & \boxed{-3} & \boxed{8} \\ 1+i & 2 & 5 & \boxed{-5} & 17 \\ -1 & 6i & 0 & \boxed{5i} & 1-4i \\ 12 & 7+2i & 34 & \boxed{4-6i} & 14i \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{e la } 4^a \text{ colonna}]{\text{togliendo la } 2^a \text{ riga}} C_{24} = \begin{pmatrix} 1 & i & 3 & 11 \\ 1+i & 2 & 5 & 17 \\ -1 & 6i & 0 & 1-4i \\ 12 & 7+2i & 34 & 14i \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & i & 3 & 4 & \boxed{11} \\ 0 & 2 & 7 & -3 & \boxed{8} \\ 1+i & 2 & 5 & -5 & \boxed{17} \\ \boxed{-1} & \boxed{6i} & \boxed{0} & \boxed{5i} & \boxed{1-4i} \\ 12 & 7+2i & 34 & 4-6i & \boxed{14i} \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{e la } 5^a \text{ colonna}]{\text{togliendo la } 3^a \text{ riga}} C_{35} = \begin{pmatrix} 1 & i & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 7 & -3 \\ 1+i & 2 & 5 & -5 \\ 12 & 7+2i & 34 & 4-6i \end{pmatrix}$$

Def. 2. Per ogni $1 \leq i \leq n$ e $1 \leq j \leq n$ si chiama **cofattore di posto (i,j) di A**, e si indica con il simbolo A_{ij}, il numero

$$A_{ij} = (-)^{i+j} \text{Det } (C_{ij}),$$

dove C_{ij} è la matrice complementare di posto (i,j) in A.

Si ha:

Formula del determinante di una matrice sviluppato rispetto alla 1^ariga

se $A = (\, a_{ij}\,)$ è una matrice $n \times n$ allora

$$\mathrm{Det}A = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \ldots + a_{1,n-1}A_{1,n-1} + a_{1n}A_{1n}$$

dove A_{11}, A_{12}, $\ldots$, $A_{1,n-1}$, A_{1n} sono i cofattori di A di posti $(1, 1)$, $(1, 2)$, $\ldots$, $(1, n-1)$, $(1, n)$ (ossia i posti della 1^a riga) rispettivamente.

Esempio 4. Calcoliamo il determinante della matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -5 & 0 & 3 \\ 6 & 2 & 0 & 4 \\ -2 & 0 & 0 & 2 \\ -1 & 7 & 5 & 1 \end{pmatrix}$.

Usando la formula dello sviluppo del determinante rispetto alla 1^a riga di A abbiamo:

$$\mathrm{Det}A = 1 \times A_{11} + (-5) \times A_{12} + 0 \times A_{13} + 3 \times A_{14} = A_{11} - 5A_{12} + 3A_{14}.$$

Dobbiamo quindi calcolare A_{11}, A_{12} ed A_{14}.

$$\begin{aligned}
A_{11} &= (-1)^{1+1}\mathrm{Det}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \\ 7 & 5 & 1 \end{pmatrix} = \\
&= \mathrm{Det}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \\ 7 & 5 & 1 \end{pmatrix} = \\
&= 2(-1)^{1+1}\mathrm{Det}\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} + 0(-1)^{1+2}\mathrm{Det}\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 7 & 1 \end{pmatrix} + 4(-1)^{1+3}\mathrm{Det}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 7 & 5 \end{pmatrix} = \\
&= 2(0-10) + 4(0-0) = -20, \\
A_{12} &= (-1)^{1+2}\mathrm{Det}\begin{pmatrix} 6 & 0 & 4 \\ -2 & 0 & 2 \\ -1 & 5 & 1 \end{pmatrix} = \\
&= -\mathrm{Det}\begin{pmatrix} 6 & 0 & 4 \\ -2 & 0 & 2 \\ -1 & 5 & 1 \end{pmatrix} = \\
&= -(6(-1)^{1+1}\mathrm{Det}\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} + 0(-1)^{1+2}\mathrm{Det}\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} + 4(-1)^{1+3}\mathrm{Det}\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}) = \\
&= -(6(0-10) + 4(-10-0)) = -(-60-40) = 100, \\
A_{14} &= (-1)^{1+4}\mathrm{Det}\begin{pmatrix} 6 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ -1 & 7 & 5 \end{pmatrix} = \\
&= -\mathrm{Det}\begin{pmatrix} 6 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ -1 & 7 & 5 \end{pmatrix} = \\
&= -(6(-1)^{1+1}\mathrm{Det}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 7 & 5 \end{pmatrix} + 2(-1)^{1+2}\mathrm{Det}\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} + 0(-1)^{1+3}\mathrm{Det}\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ -1 & 7 \end{pmatrix}) = \\
&= -(6(0-0) - 2(-10-0)) = 2(-10) = -20.
\end{aligned}$$

Dunque otteniamo:

$$\text{Det}A = A_{11} - 5A_{12} + 3A_{14} = -20 - 5 \times 100 + 3(-20) = -580.$$

Si puó dimostrare il seguente

Teorema. Sia A una matrice $n \times n$. Allora, fissato $i \in \{1, \dots, n\}$ si ha che

$a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \ldots + a_{i,n-1}A_{i,n-1} + a_{in}A_{in} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \ldots + a_{1,n-1}A_{1,n-1} + a_{1n}A_{1n}$,
ossia che

$$(*) \quad \text{Det}A = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \ldots + a_{i,n-1}A_{i,n-1} + a_{in}A_{in}.$$

$(*)$ si chiama **lo sviluppo di Laplace del determinante di A rispetto alla i-esima riga di A**.

Quindi, per calcolare il determinante di una matrice A, si puó partire mettendo in evidenza gli elementi di una riga qualunque, e non necessariamente la 1^a, come abbiamo fatto fino ad ora.

Esempio 5. Sia $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ una matrice 2×2. Sviluppiamo il determinante di A rispetto alla 2^a riga di A:

– mettiamo in evidenza gli elementi della 2^a riga di A: $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ \boxed{a_{21}} & \boxed{a_{22}} \end{pmatrix}$,

– C_{21} è la matrice che si ottiene da A togliendo la 2^a riga e la 1^a colonna, quindi $C_{21} = (\, a_{12}\,)$; C_{22} è la matrice che si ottiene da A togliendo la 2^a riga e la 2^a colonna, quindi $C_{22} = (\, a_{11}\,)$.

Allora

$$\begin{aligned} & a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} = a_{21}(-1)^{2+1}\text{Det}C_{21} + a_{22}(-1)^{2+2}\text{Det}C_{22} = \\ & = -a_{21}\text{Det}\,(\, a_{12}\,) + a_{22}\text{Det}\,(\, a_{11}\,) = -a_{21}a_{12} + a_{22}a_{11} = \\ & = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \end{aligned}$$

dà lo stesso risultato che abbiamo ottenuto partendo dalla 1^a riga.

Conviene quindi sviluppare il determinante rispetto alla riga che contiene piú zeri.

Esempio 6. Riconsideriamo la matrice dell'Esempio 4, $A = \begin{pmatrix} 1 & -5 & 0 & 3 \\ 6 & 2 & 0 & 4 \\ -2 & 0 & 0 & 2 \\ -1 & 7 & 5 & 1 \end{pmatrix}$, e calcoliamo il suo determinante rispetto alla 3^a riga (che contiene due zeri). Allora

$$\text{Det}A = (-2)(-1)^{3+1}\text{Det}\begin{pmatrix} -5 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 4 \\ 7 & 5 & 1 \end{pmatrix} + 2(-1)^{3+4}\text{Det}\begin{pmatrix} 1 & -5 & 0 \\ 6 & 2 & 0 \\ -1 & 7 & 5 \end{pmatrix}.$$

Calcoliamo separatamente Det $\begin{pmatrix} -5 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 4 \\ 7 & 5 & 1 \end{pmatrix}$ e Det $\begin{pmatrix} 1 & -5 & 0 \\ 6 & 2 & 0 \\ -1 & 7 & 5 \end{pmatrix}$. Per entrambe queste matrici 3×3 non è conveniente calcolare il determinante rispetto alla 3^a riga, ma è indifferente scegliere la 1^a o la 2^a. Per fare esercizio scegliamo in entrambi i casi la 2^a riga:

$$\text{Det}\begin{pmatrix} -5 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 4 \\ 7 & 5 & 1 \end{pmatrix} = 2(-1)^{2+1}\text{Det}\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} + 4(-1)^{2+3}\text{Det}\begin{pmatrix} -5 & 0 \\ 7 & 5 \end{pmatrix} =$$
$$= -2(0-15) - 4(-25-0) = 30 + 100 = 130$$
$$\text{Det}\begin{pmatrix} 1 & -5 & 0 \\ 6 & 2 & 0 \\ -1 & 7 & 5 \end{pmatrix} = 6(-1)^{2+1}\text{Det}\begin{pmatrix} -5 & 0 \\ 7 & 5 \end{pmatrix} + 2(-1)^{2+2}\text{Det}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} =$$
$$= -6(-25-0) + 2(5-0) = 150 + 10 = 160$$

Quindi $\text{Det}(A) = (-2) \times 130 + (-2) \times 160 = -580$ (lo stesso numero che avevamo ottenuto sviluppando il determinante rispetto alla 1^a riga).

Cosí come si puó sviluppare il determinante di una matrice rispetto ad una qualunque sua riga, lo si puó sviluppare rispetto ad una qualunque sua colonna, dal momento che vale il seguente

Teorema. Sia A una matrice $n \times n$. Allora, fissati $j \in \{1, \ldots, n\}$ e si ha che

$$(**) \quad \text{Det}A = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \ldots + a_{n-1,j}A_{n-1,j} + a_{nj}A_{nj}.$$

$(**)$ si chiama **lo sviluppo di Laplace del determinante di A rispetto alla j-esima colonna di A**.

Conviene quindi sviluppare il determinante rispetto alla riga oppure alla colonna che contiene piú zeri.

Esempio 7. Riconsideriamo la matrice degli Esempi 4 e 6, $A = \begin{pmatrix} 1 & -5 & 0 & 3 \\ 6 & 2 & 0 & 4 \\ -2 & 0 & 0 & 2 \\ -1 & 7 & 5 & 1 \end{pmatrix}$, e calcoliamo il suo determinante rispetto alla 3^a colonna (che contiene tre zeri). Allora

$$\text{Det}A = 0 \times (-1)^{1+3}\text{Det}\begin{pmatrix} 6 & 2 & 4 \\ -2 & 0 & 2 \\ -1 & 7 & 1 \end{pmatrix} + 0 \times (-1)^{2+3}\text{Det}\begin{pmatrix} 1 & -5 & 3 \\ -2 & 0 & 2 \\ -1 & 7 & 1 \end{pmatrix} +$$
$$+ 0 \times (-1)^{3+3}\text{Det}\begin{pmatrix} 1 & -5 & 3 \\ 6 & 2 & 4 \\ -1 & 7 & 1 \end{pmatrix} + 5(-1)^{4+3}\text{Det}\begin{pmatrix} 1 & -5 & 3 \\ 6 & 2 & 4 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix} =$$
$$= -5\text{Det}\begin{pmatrix} 1 & -5 & 3 \\ 6 & 2 & 4 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Calcoliamo $\text{Det}\begin{pmatrix} 1 & -5 & 3 \\ 6 & 2 & 4 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, ad esempio rispetto alla 2^a colonna:

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Det}\begin{pmatrix} 1 & -5 & 3 \\ 6 & 2 & 4 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \\
&= (-5)(-1)^{1+2}\mathrm{Det}\begin{pmatrix} 6 & 4 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} + 2(-1)^{2+2}\mathrm{Det}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} + 0 \times (-1)^{3+2}\mathrm{Det}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 6 & 4 \end{pmatrix} = \\
&= (-5)(-1)(12+8) + 2(2+6) = 100 + 16 = 116
\end{aligned}$$

quindi $\mathrm{Det}(A) = (-5) \times 116 = -580$ (si noti che è lo stesso numero che abbiamo ottenuto sviluppando il determinante rispetto alla 1^a oppure alla 3^a riga).

Proprietà del determinante.

Sia A una matrice $n \times n$.

(1) Se A ha una riga (risp. una colonna) nulla, oppure se A ha due righe (risp. due colonne) uguali, allora $\mathrm{Det}(A) = 0$.

(2) Se A' è la matrice che si ottiene da A mediante lo scambio di due righe (risp. due colonne) allora $\mathrm{Det}(A') = -\mathrm{Det}(A)$.

(3) Se A' è la matrice che si ottiene da A sommando ad una riga (risp. ad una colonna) di A un'altra riga (risp. un'altra colonna) di A moltiplicata per un numero c, allora $\mathrm{Det}(A') = \mathrm{Det}(A)$.

(4) Se A' è la matrice che si ottiene da A moltiplicando una riga (risp. una colonna) di A per un numero c, allora $\mathrm{Det}(A') = c\mathrm{Det}(A)$.

(5) $\mathrm{Det}(A^T) = \mathrm{Det}(A)$.

(6) Se B è un'altra matrice $n \times n$ allora **Det(AB)=Det(A)Det(B)**.

(7) **A è non singolare se e solo se Det(A)**$\neq 0$, e se A è non singolare si ha

$$\mathrm{Det}(A^{-1}) = \frac{1}{\mathrm{Det}(A)}.$$

$\boxed{N.B.}$

Per quanto riguarda la proprietà (7), si ricordi che nella Lezione 8 avevamo già osservato che una matrice 2×2 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ è non singolare se e solo se il numero $ad - bc \neq 0$, e tale numero è proprio $\mathrm{Det}(A)$.

DAL LIBRO:

(1) Esercizio 28.7 (c) pag. 126,

(2) Esercizio 28.7 (a) pag. 126,

(3) Determinante di Vandermonde (si veda 29.5 pag. 129)

(1) Svolgimento dell'Esercizio 28.7 (c) pag. 126.

Si provi che

il determinante di una matrice triangolare superiore (risp. inferiore) è il prodotto degli elementi diagonali.

Sia T una matrice $n \times n$ triangolare superiore (la dimostrazione è simile per le matrici triangolari inferiori):

$$T = \begin{pmatrix} t_{11} & & & & & & \\ 0 & t_{22} & & & & & \\ 0 & 0 & t_{33} & & & * & \\ 0 & 0 & 0 & t_{44} & & & \\ \vdots & & & & \ddots & & \\ & & \mathbb{O} & & & \ddots & \\ 0 & & & & \dots & \dots & t_{nn} \end{pmatrix}.$$

Chiamiamo:

T_1 la matrice che si ottiene da T sopprimendo la 1^a riga e la 1^a colonna (T_1 è triangolare superiore $(n-1) \times (n-1)$):

$$T_1 = \begin{pmatrix} t_{22} & & & & \\ 0 & t_{33} & & * & \\ 0 & 0 & t_{44} & & \\ \vdots & & & \ddots & \\ & & \mathbb{O} & & \\ 0 & & & \dots & t_{nn} \end{pmatrix},$$

T_2 la matrice che si ottiene da T_1 sopprimendo la 1^a riga e la 1^a colonna (T_2 è triangolare superiore $(n-2) \times (n-2)$):

$$T_2 = \begin{pmatrix} t_{33} & & & & \\ 0 & t_{44} & & * & \\ \vdots & & \ddots & & \\ & \mathbb{O} & & & \\ & & & \dots & t_{nn} \end{pmatrix},$$

e cosí via per ogni $k = 2, \dots, n-1$ chiamiamo T_k la matrice che si ottiene da T_{k-1} sopprimendo la 1^a riga e la 1^a colonna. T_k è una matrice triangolare superiore $(n-k) \times (n-k)$.

Sviluppiamo il determinante di T ripetto alla 1^a colonna di T:

$$\mathrm{Det}T = t_{11}(-1)^{1+1}\mathrm{Det}T_1 = t_{11}\mathrm{Det}T_1.$$

Sviluppiamo il determinante di T_1 ripetto alla 1^a colonna di T_1:

$$\mathrm{Det}T = t_{11}\mathrm{Det}T_1 = t_{11}(t_{22}(-1)^{1+1}\mathrm{Det}T_2) = t_{11}t_{22}\mathrm{Det}T_2.$$

Cosí procedendo otteniamo:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Det} T &= t_{11} t_{22} \mathrm{Det} T_2 = \\
&= t_{11} t_{22} t_{33} \mathrm{Det} T_3 = \\
&= t_{11} t_{22} t_{33} t_{44} \mathrm{Det} T_4 = \\
&= \qquad \ldots \qquad = \\
&= t_{11} t_{22} \quad \ldots \quad t_{n-1,n-1} \mathrm{Det} T_{n-1} = \\
&= t_{11} t_{22} \quad \ldots \quad t_{n-1,n-1} \mathrm{Det}\,(\, t_{nn}\,) = \\
&= t_{11} t_{22} \quad \ldots \quad t_{n-1,n-1} t_{nn}.
\end{aligned}
$$

In particolare da ció segue:

Il determinante di una matrice diagonale è il prodotto degli elementi diagonali, poichè le matrici diagonali sono particolari matrici triangolari superiori.

(2) Svolgimento dell' Esercizio 28.7 (a) pag. 126.

Sia A una matrice $n \times n$. Si provi che per ogni scalare c si ha:

$$\mathrm{Det}(cA) = c^n \mathrm{Det}(A).$$

Si ha:

$$\mathrm{Det}(cA) \underset{cA=c(I_nA)=(cI_n)A}{\underset{\uparrow}{=}} \mathrm{Det}((cI_n)A) \underset{\text{proprietà 6 del det.}}{\underset{\uparrow}{=}} \mathrm{Det}(cI_n)\mathrm{Det}(A).$$

Poichè cI_n è una matrice scalare $n \times n$, in particolare una matrice diagonale, per l'esercizio precedente si ha che

$$\mathrm{Det}(cI_n) = \text{ prodotto degli elementi diagonali di } cI_n.$$

Tali elementi sono tutti uguali a c, ed il loro prodotto ha n fattori (perchè cI_n è $n \times n$), dunque $\mathrm{Det}(cI_n) = c^n$, per cui

$$\mathrm{Det}(cA) = c^n \mathrm{Det}(A).$$

ESERCIZIO TIPO 23

Sia $A(z) = \begin{pmatrix} z & \overline{z} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & z-i \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, dove $z \in \mathbb{C}$.

Si dica per quali $z \in \mathbb{C}$ la matrice $A(z)$ è singolare.

$A(z)$ è singolare se e solo se $\mathrm{Det}(A(z)) = 0$. Calcoliamo dunque $\mathrm{Det}(A(z))$.

$$\mathrm{Det}(A(z)) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{sviluppato rispetto} \\ \text{alla } 2^a \text{ riga}}}{=} (-1)^{2+3}\mathrm{Det}\begin{pmatrix} z & \overline{z} & 0 \\ 1 & 1 & z-i \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{sviluppato rispetto} \\ \text{alla } 3^a \text{ colonna}}}{=} -(z-i)(-1)^{2+3}\mathrm{Det}\begin{pmatrix} z & \overline{z} \\ 1 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= (z-i)(z-\overline{z})$$

Quindi $A(z)$ è singolare se e solo se $(z-i)(z-\overline{z}) = 0$, ossia se e solo se o $z - i = 0$, e quindi $z = i$, oppure $z - \overline{z} = 0$, e quindi $z = \overline{z}$. Poichè

$$z = \overline{z} \quad \Longleftrightarrow \quad z \in \mathbb{R},$$

allora

$$A(z) \text{ è singolare} \quad \Longleftrightarrow \quad z \in \mathbb{R} \cup \{i\}.$$

ESERCITAZIONI* 6

$\boxed{1}$ Si trovi una base di $V^\perp$ nei seguenti casi:

$(a) \qquad V = \langle \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \rangle \leq \mathbb{C}^3,$

$(b) \qquad V = \langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1-i \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \rangle \leq \mathbb{C}^4,$

$(c) \qquad V = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 1 \\ i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i \\ -1 \\ i \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle \leq \mathbb{C}^4.$

$\boxed{2}$ Si calcoli la proiezione ortogonale di $\underline{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ sul complemento ortogonale di $V = \langle \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \rangle$ in $\mathbb{C}^3$.

$\boxed{3}$ Si calcoli il determinante delle seguenti matrici:

$$A = \begin{pmatrix} 1-i & 1 & 0 \\ 2 & 1+i & 3 \\ i & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1+i & 1 \\ i & 2 & 1 \\ 1 & 1 & i \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1+i \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

$\boxed{4}$ Esercizio 28.7 pag. 126 del libro:

Sia A una matrice $n \times n$ antisimmetrica, cioè tale che $A^T = -A$. Si provi che se n è dispari allora A è singolare (ossia A non ha inversa).

Svolgimento ESERCITAZIONI* 6

$\boxed{1}$ Si trovi una base di $V^{\perp}$ nei seguenti casi:

(a) $\quad V = \langle \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \rangle \leq \mathbb{C}^3,$

(b) $\quad V = \langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1-i \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \rangle \leq \mathbb{C}^4,$

(c) $\quad V = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 1 \\ i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i \\ -1 \\ i \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle \leq \mathbb{C}^4.$

(a) Se $A = \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ allora $C(A) = V$ e $V^{\perp} = C(A)^{\perp} = N(A^H)$.

Facendo un'eliminazione di Gauss su A^H otteniamo:

$$A^H = \begin{pmatrix} -i & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[E_1(i)]{} \begin{pmatrix} 1 & i & 2i \end{pmatrix} = U$$

Poichè $N(A^H) = N(U)$ e

$$\dim(N(U)) = \text{numero delle colonne di U} - \text{rango di U} = 3 - 1 = 2,$$

una base di $V^{\perp}$ ha 2 elementi (d'altra parte dim$V$=1 e dim$\mathbb{C}^3$=3, per cui a priori potevamo dedurre che dim$V^{\perp}$ = dim$\mathbb{C}^3$ − dim$V = 3 - 1 = 2$).

$$\underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in N(A^H) = N(U) \quad \iff \quad x_1 + ix_2 + 2ix_3 = 0$$

quindi $N(U) = \left\{ \begin{pmatrix} -ih - 2ik \\ h \\ k \end{pmatrix} | h, k \in \mathbb{C} \right\}$.

Una base di $V^{\perp}$ è

$$\left\{ \begin{pmatrix} -i \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2i \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

(b) Se $A = \begin{pmatrix} 0 \\ 1-i \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ allora $C(A) = V$ e $V^{\perp} = C(A)^{\perp} = N(A^H)$.

Facendo un'eliminazione di Gauss su A^H otteniamo:

$$A^H = \begin{pmatrix} 0 & 1+i & 0 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[E_1(\frac{1-i}{2})]{} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1-i \end{pmatrix} = U$$

Poichè $N(A^H) = N(U)$ e

$$\dim(N(U)) = \text{numero delle colonne di U} - \text{rango di U} = 4 - 1 = 3,$$

una base di $V^{\perp}$ ha 3 elementi (d'altra parte dim$V$=1 e dim$\mathbb{C}^4$=4, per cui a priori potevamo dedurre che dim$V^{\perp}$ = dim$\mathbb{C}^4$ − dim$V = 4 - 1 = 3$).

$$\underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in N(A^H) = N(U) \quad \iff \quad x_2 + (1-i)x_4 = 0$$

quindi $N(U) = \left\{ \begin{pmatrix} h \\ -(1-i)r \\ k \\ r \end{pmatrix} |h, k, r \in \mathbb{C} \right\}$.

Una base di $V^{\perp}$ è

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1+i \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

(c) Se $A = \begin{pmatrix} 1 & i & 1 & 0 \\ i & -1 & 0 & 1 \\ 1 & i & 1 & 0 \\ i & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, allora $C(A) = V$ e $V^{\perp} = C(A)^{\perp} = N(A^H)$.

Facendo un'eliminazione di Gauss su A^H otteniamo:

$$A^H = \begin{pmatrix} 1 & -i & 1 & -i \\ -i & -1 & -i & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[E_{31}(-1)E_{21}(i)]{} \begin{pmatrix} 1 & -i & 1 & -i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & i \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[E_{23}]{}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -i & 1 & -i \\ 0 & i & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[E_{42}(-1)E_2(-i)]{} \begin{pmatrix} 1 & -i & 1 & -i \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = U$$

Poichè $N(A^H) = N(U)$ e

$$\dim(N(U)) = \text{numero delle colonne di U} - \text{rango di U} = 4 - 2 = 2,$$

una base di $V^\perp$ ha 2 elementi.

$$\underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in N(A^H) = N(U) \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} x_1 - ix_2 + x_3 - ix_4 & = & 0 \\ \\ x_2 + x_4 & = & 0 \end{cases}$$

Quindi $N(A^H) = \left\{ \begin{pmatrix} -h \\ -k \\ h \\ k \end{pmatrix} | h, k \in \mathbb{C} \right\}$.

Una base di $V^\perp = N(A^H)$ è

$$\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

$\boxed{2}$ Si calcoli la proiezione ortogonale di $\underline{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ sul complemento ortogonale di $V = \langle \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \rangle$ in $\mathbb{C}^3$.

Nell'esercizio $\boxed{1}$ (a) abbiamo trovato una base di $V^\perp$:

$$\left\{ \underline{v}_1 = \begin{pmatrix} -i \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \underline{v}_2 = \begin{pmatrix} -2i \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Applichiamo l'algoritmo di Gram-Schmidt a $\{\underline{v}_1, \underline{v}_2\}$ per trovare una base ortogonale di $V^\perp$.

$$\underline{u}_1 = \underline{v}_1 = \begin{pmatrix} -i \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\underline{u}_2 = \underline{v}_2 - \alpha_{12}\underline{u}_1,$$

$$\underline{u}_1 \neq \underline{0} \quad \Longrightarrow \quad \alpha_{12} = \frac{(\underline{u}_1, \underline{v}_2)}{(\underline{u}_1, \underline{u}_1)}$$

$$(\underline{u}_1, \underline{v}_2) = \underline{u}_1^H \underline{v}_2 = \begin{pmatrix} i & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2i \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -2i^2 = 2$$

$$(\underline{u}_1, \underline{u}_1) = \underline{u}_1^H \underline{u}_1 = \begin{pmatrix} i & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -i \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1 + 1 = 2$$

$$\Longrightarrow \quad \alpha_{12} = 1$$

$$\underline{u}_2 = \underline{v}_2 - \underline{u}_1 =$$

$$= \begin{pmatrix} -2i \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -i \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -i \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Una base ortogonale di $V^\perp$ è:

$$\left\{ \underline{u}_1 = \begin{pmatrix} -i \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \underline{u}_2 = \begin{pmatrix} -i \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Per trovare una base ortonormale di $V^\perp$ normalizziamo quella appena trovata:

$$||\underline{u}_1||_2 = \sqrt{\underline{u}_1^H \underline{u}_1} = \sqrt{2}$$

$$||\underline{u}_2||_2 = \sqrt{\underline{u}_2^H \underline{u}_2} = \sqrt{\begin{pmatrix} i & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -i \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}} = \sqrt{3}$$

Dunque $\left\{ \frac{\underline{u}_1}{||\underline{u}_1||_2} = \begin{pmatrix} -\frac{i}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{\underline{u}_2}{||\underline{u}_2||_2} = \begin{pmatrix} -\frac{i}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \right\}$ è una base ortonormale di $V^\perp$.

Sia $Q = \begin{pmatrix} -\frac{i}{\sqrt{2}} & -\frac{i}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -i\sqrt{3} & -i\sqrt{2} \\ \sqrt{3} & -\sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$.

Allora $Q^H = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} i\sqrt{3} & \sqrt{3} & 0 \\ i\sqrt{2} & -\sqrt{2} & \sqrt{2} \end{pmatrix}$ e la matrice di proiezione su $V^\perp$ è

$$P = QQ^H = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -i\sqrt{3} & -i\sqrt{2} \\ \sqrt{3} & -\sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} i\sqrt{3} & \sqrt{3} & 0 \\ i\sqrt{2} & -\sqrt{2} & \sqrt{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 5 & -i & -2i \\ i & 5 & -2 \\ 2i & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

La proiezione ortogonale di $\underline{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ su $V^\perp$ è

$$P\underline{v} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 5 & -i & -2i \\ i & 5 & -2 \\ 2i & -2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 5-3i \\ 3+i \\ 2i \end{pmatrix}.$$

$\boxed{3}$ Si calcoli il determinante delle seguenti matrici:

$$A = \begin{pmatrix} 1-i & 1 & 0 \\ 2 & 1+i & 3 \\ i & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1+i & 1 \\ i & 2 & 1 \\ 1 & 1 & i \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1+i \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Conviene sviluppare $\mathrm{Det}(A)$ rispetto alla riga o alla colonna che contengono piú zeri. In questo caso conviene svilupparlo ripetto alla 1^a riga oppure alla 3^a colonna. Facciamolo in entrambi i modi, per esercizio.

Rispetto alla 1^a riga:

$$\begin{aligned}\mathrm{Det}A &= (1-i)(-1)^{1+1}\mathrm{Det}\begin{pmatrix} 1+i & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + (-1)^{1+2}\mathrm{Det}\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ i & 1 \end{pmatrix} = \\ &= (1-i)(1+i-3) - (2-3i) = (1-i)(-2+i) - 2 + 3i = \\ &= -2 + 2i + i - i^2 - 2 + 3i = -3 + 6i\end{aligned}$$

Rispetto alla 3^a colonna:

$$\begin{aligned}\mathrm{Det}A &= 3(-1)^{2+3}\mathrm{Det}\begin{pmatrix} 1-i & 1 \\ i & 1 \end{pmatrix} + (-1)^{3+3}\mathrm{Det}\begin{pmatrix} 1-i & 1 \\ 2 & 1+i \end{pmatrix} = \\ &= -3(1-i-i) + ((1-i)(1+i) - 2) = \\ &= -3(1-2i) + 1^2 - i^2 - 2 = -3 + 6i\end{aligned}$$

Sviluppiamo $\mathrm{Det}(B)$, ad esempio rispetto alla 1^a colonna:

$$\mathrm{Det}\begin{pmatrix} 1 & 1+i & 1 \\ i & 2 & 1 \\ 1 & 1 & i \end{pmatrix} = (-1)^{1+1}\mathrm{Det}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & i \end{pmatrix} + i(-1)^{2+1}\mathrm{Det}\begin{pmatrix} 1+i & 1 \\ 1 & i \end{pmatrix} + (-1)^{3+1}\mathrm{Det}\begin{pmatrix} 1+i & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} =$$
$$= 2i - 1 - i((1+i)i - 1) + 1 + i - 2 = 2i - 1 - i(i-2) + i - 1 = -1 + 5i$$

Infine sviluppiamo $\mathrm{Det}(C)$ ad esempio rispetto alla 3^a riga:

$$\mathrm{Det}C = \mathrm{Det}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1+i \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= (-1)^{3+1}\mathrm{Det}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1+i \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} + (-1)^{3+2}\mathrm{Det}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1+i \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} + (-1)^{3+3}\mathrm{Det}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+i \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Sviluppiamo il primo addendo rispetto alla 2^a colonna, mentre il secondo ed il terzo addendo rispetto alla 1^a riga.

$$\mathrm{Det}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1+i \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = (-1)^{1+2}\mathrm{Det}\begin{pmatrix} 1 & 1+i \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + 2(-1)^{3+2}\mathrm{Det}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1+i \end{pmatrix} =$$

$$= -(1-1-i) - 2(1+i-1) = -i$$

$$\mathrm{Det}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1+i \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} = (-1)^{1+2}\mathrm{Det}\begin{pmatrix} 1 & 1+i \\ 2 & 1 \end{pmatrix} + (-1)^{1+3}\mathrm{Det}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$= -(1-2(1+i)) + 2 = -(1-2-2i) + 2 = 1+2i+2 = 3+2i$$

$$\mathrm{Det}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+i \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} = (-1)^{1+2}\mathrm{Det}\begin{pmatrix} 1 & 1+i \\ 2 & 1 \end{pmatrix} + (-1)^{1+3}\mathrm{Det}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= -(1-2(1+i)) + (1-2)+ = -(1-2-2i) - 1 = 2i$$

Quindi

$$\mathrm{Det}(C) = -i - (3+2i) + 2i = -i - 3 - 2i + 2i = -3 - i.$$

$\boxed{4}$ Esercizio 28.7 pag. 126 del libro:

Sia A una matrice $n \times n$ antisimmetrica, cioè tale che $A^T = -A$. Si provi che se n è dispari allora A è singolare (ossia A non ha inversa).

Da $A^T = -A$ segue che $\mathrm{Det}(A^T) = \mathrm{Det}(-A)$.

Per la proprietà (5) dei determinanti si ha che $\mathrm{Det}(A^T) = \mathrm{Det}(A)$, e per l'esercizio 28.7 (a) pag. 126 del libro, con $c = -1$, si ha che

$$\mathrm{Det}(-A) = (-1)^n \mathrm{Det}(A) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{n dispari}}}{=} -\mathrm{Det}A.$$

Otteniamo quindi

$$\mathrm{Det}(A) = \mathrm{Det}(A^T) = \mathrm{Det}(-A) = -\mathrm{Det}(A),$$

per cui $\mathrm{Det}(A) = 0$. Dalla proprietà (7) dei determinanti segue ora che A è singolare.