ALGEBRA LINEARE I (A) PER SCIENZE STATISTICHE, A.A. 2003/04, GEMMA PARMEGGIANI

Università degli Studi di Padova
Dipartimento di Matematica Pura e Applicata
via Belzoni, 7
35131 Padova

1. Esercitazioni a gruppi svolte

2. Esercizi tipo svolti

Typeset by $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$-TEX

ESERCITAZIONI* 1

$\boxed{1}$ Di ciascuna delle seguenti matrici si dica se è scalare, diagonale, triangolare superiore, triangolare inferiore o nessuna delle precedenti:

$$\begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 6 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 & 6 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 6 & 0 & 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 6 \\ 0 & 6 & 6 \end{pmatrix}.$$

$\boxed{2}$ Siano $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 1 & -3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$, $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ e $\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 0 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$.

Si calcoli $\mathbf{B}(\mathbf{DC} - 2\mathbf{A}) + 4\mathbf{C}$.

$\boxed{3}$ Sia $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Si trovino tutte le matrici reali 2×2 $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ tali che $\begin{cases} \mathbf{AB} = \mathbf{O} \\ \mathbf{BA} = \mathbf{O} \end{cases}$.

$\boxed{4}$ Siano $\mathbf{A}$ una matrice reale $2 \times n$ non nulla in cui la seconda riga è il doppio della prima. Si trovino tutte le matrici reali diagonali $\mathbf{D}$ tali che $\mathbf{DA}$ abbia tutte le righe uguali.

$\boxed{5}$ Siano $\quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2-3i & 1+i \\ 0 & i \\ 1-i & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 1+i \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 3+5i \\ 6 \\ 2-2i \end{pmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{pmatrix} 7+i & 2+3i \\ 3-2i & 0 \end{pmatrix}$.

(a) Di ciascuna delle precedenti matrici si calcolino la trasposta, la coniugata e la H-trasposta.

(b) Si calcoli $(\mathbf{A}^H\overline{\mathbf{C}} + i\mathbf{B}^T)\overline{\mathbf{B}} + (1+3i)\mathbf{D}^H$.

$\boxed{6}$ Di ciascuna delle seguenti matrici si dica se è simmetrica, anti-simmetrica, hermitiana, anti-hermitiana o nessuna delle precedenti:

$$\begin{pmatrix} \sqrt{2} & 1+5i \\ 1-5i & \sqrt{3} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 1+5i \\ 1+5i & \sqrt{3} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1+5i \\ -1+5i & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1+5i \\ -1-5i & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$\boxed{7}$ Si calcolino la parte hermitiana e la parte anti-hermitiana della matrice complessa $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} i & 1 \\ 3 & 1+i \end{pmatrix}$.

$\boxed{8}$ Una matrice $\mathbf{A}$ $m \times m$ si dice invertibile (o non singolare) se esiste una matrice $\mathbf{A}_1$ tale che $\mathbf{AA}_1 = \mathbf{I}_m = \mathbf{A}_1\mathbf{A}$. Si provi che se $\mathbf{T} = \begin{pmatrix} \mathbf{X} & \mathbf{O} \\ \mathbf{Y} & \mathbf{Z} \end{pmatrix}$ è una matrice triangolare inferiore a blocchi con $\mathbf{X}$ e $\mathbf{Z}$ invertibili, allora $\mathbf{T}$ è invertibile. (Sugg.: Esistono matrici $\mathbf{X}_1$ e $\mathbf{Z}_1$ tali che $\mathbf{XX}_1 = \mathbf{I}_m = \mathbf{X}_1\mathbf{X}$ e $\mathbf{ZZ}_1 = \mathbf{I}_n = \mathbf{Z}_1\mathbf{Z}$. Si cerchi $\mathbf{V} = \begin{pmatrix} \mathbf{X}_2 & \mathbf{K}_2 \\ \mathbf{Y}_2 & \mathbf{Z}_2 \end{pmatrix}$ a blocchi tale che $\mathbf{TV} = \mathbf{I}_{m+n} = \mathbf{VT}$ esprimendo i blocchi $\mathbf{X}_2, \mathbf{Y}_2, \mathbf{Z}_2, \mathbf{K}_2$ in funzione di $\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z}, \mathbf{X}_1$, e $\mathbf{Z}_1$).

$\boxed{9}$ Si risolva il sistema lineare $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ dove $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 3 & -3 \\ 3 & 6 & 3 & -6 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ e $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 9 \\ 6 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Svolgimento delle Esercitazioni *1

$\boxed{1}$ Di ciascuna delle seguenti matrici si dica se è scalare, diagonale, triangolare superiore, triangolare inferiore o nessuna delle precedenti:

$$\begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 6 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 & 6 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 6 & 0 & 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 6 \\ 0 & 6 & 6 \end{pmatrix}.$$

scalari: $\begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$

diagonali: $\begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$

triang. sup.: $\begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 & 6 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$

triang. inf.: $\begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 6 & 0 & 6 \end{pmatrix}$

nessuna delle precedenti: $\begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 6 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 6 \\ 0 & 6 & 6 \end{pmatrix}$

$\boxed{2}$ Siano $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 1 & -3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$, $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ e $\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 0 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$.

Si calcoli $\mathbf{B}(\mathbf{DC} - 2\mathbf{A}) + 4\mathbf{C}$.

$$4\mathbf{C} = 4\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 4 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{DC} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 0 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4\times 2 + 2\times 0 & 4\times 1 + 2\times 1 \\ 1\times 2 + 0\times 0 & 1\times 1 + 0\times 1 \\ (-1)\times 2 + (-2)\times 0 & (-1)\times 1 + (-2)\times 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 8+0 & 4+2 \\ 2+0 & 1+0 \\ -2+0 & -1-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 6 \\ 2 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$$

$$-2\mathbf{A} = -2\begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 1 & -3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 & 0 \\ -2 & 6 \\ -4 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{DC} - 2\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 8 & 6 \\ 2 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -12 & 0 \\ -2 & 6 \\ -4 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 6 \\ 0 & 7 \\ -6 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{B}(\mathbf{DC} - 2\mathbf{A}) &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & -2 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -4 & 6 \\ 0 & 7 \\ -6 & 1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 1\times(-4)+1\times 0+2\times(-6) & 1\times 6+1\times 7+2\times 1 \\ -1\times(-4)-2\times 0-3\times(-6) & -1\times 6-2\times 7-3\times 1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} -4+0-12 & 6+7+2 \\ 4+0+18 & -6-14-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -16 & 15 \\ 22 & -23 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{DC} - 2\mathbf{A}) + 4\mathbf{C} = \begin{pmatrix} -16 & 15 \\ 22 & -23 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 8 & 4 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & 19 \\ 22 & -19 \end{pmatrix}$$

$\boxed{3}$ Sia $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Si trovino tutte le matrici reali 2×2 $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ tali che $\begin{cases} \mathbf{AB} = \mathbf{O} \\ \mathbf{BA} = \mathbf{O} \end{cases}$.

Sia $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ una matrice reale 2×2. Poichè

$$\begin{aligned}\mathbf{AB} &= \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-z & y-t \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{e} \\ \mathbf{BA} &= \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & -x \\ z & -z \end{pmatrix},\end{aligned}$$

la condizione $\mathbf{AB} = \mathbf{O}$ equivale a $\begin{cases} x - z = 0 \\ y - t = 0 \end{cases}$, ossia a $\begin{cases} z = x \\ t = y \end{cases}$

e la condizione $\mathbf{BA} = \mathbf{O}$ equivale a $\begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \end{cases}$.

Dunque le matrici 2×2 reali $\mathbf{B}$ tali che $\mathbf{AB} = \mathbf{O} = \mathbf{BA}$ sono tutte e sole le matrici del tipo

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & y \\ 0 & y \end{pmatrix}, \qquad \text{dove} \quad y \in \mathbb{R}.$$

$\boxed{4}$ Siano $\mathbf{A}$ una matrice reale $2 \times n$ non nulla in cui la seconda riga è il doppio della prima. Si trovino tutte le matrici reali diagonali $\mathbf{D}$ tali che $\mathbf{DA}$ abbia tutte le righe uguali.

Poichè $\mathbf{A}$ ha due righe ed esiste $\mathbf{DA}$, allora $\mathbf{D}$ ha due colonne. Quindi, essendo $\mathbf{D}$ diagonale reale, è $\mathbf{D} = \begin{pmatrix} d_1 & 0 \\ 0 & d_2 \end{pmatrix}$ per opportuni numeri reali d_1 e d_2.

Dalla condizione che la prima riga di $\mathbf{A}$ è il doppio della seconda segue che se $\mathbf{r}^T$ è la prima riga di $\mathbf{A}$ (quindi un vettore riga con n coordinate), allora $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{r}^T \\ 2\mathbf{r}^T \end{pmatrix}$, per cui

$$\mathbf{DA} = \begin{pmatrix} d_1 & 0 \\ 0 & d_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{r}^T \\ 2\mathbf{r}^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1\mathbf{r}^T \\ 2d_2\mathbf{r}^T \end{pmatrix}.$$

A questo punto la condizione che $\mathbf{DA}$ abbia le righe uguali comporta che $d_1\mathbf{r}^T = 2d_2\mathbf{r}^T$.

Se fosse $\mathbf{r}^T = \mathbf{0}^T$ non potremmo trarre alcuna conclusione su d_1 e d_2. Ma $\mathbf{r}^T \neq \mathbf{0}^T$, altrimenti entrambe le righe di $\mathbf{A}$ sarebbero nulle, mentre $\mathbf{A}$ è supposta non nulla. Ora

$$\left.\begin{array}{l} d_1\mathbf{r}^T = 2d_2\mathbf{r}^T \\ \\ \mathbf{r}^T \neq \mathbf{0}^T \end{array}\right\} \implies d_1 = 2d_2,$$

per cui ogni matrice $\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 2d & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}$ con d numero reale è soluzione del nostro problema.

$\boxed{5}$ Siano $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2-3i & 1+i \\ 0 & i \\ 1-i & 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 1+i \end{pmatrix}$, $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 3+5i \\ 6 \\ 2-2i \end{pmatrix}$, $\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 7+i & 2+3i \\ 3-2i & 0 \end{pmatrix}$.

(a) Di ciascuna delle precedenti matrici si calcolino la trasposta, la coniugata e la H-trasposta.

(b) Si calcoli $(\mathbf{A}^H\overline{\mathbf{C}} + i\mathbf{B}^T)\overline{\mathbf{B}} + (1+3i)\mathbf{D}^H$.

$$\mathbf{A}^T = \begin{pmatrix} 2-3i & 0 & 1-i \\ 1+i & i & 1 \end{pmatrix} \qquad \overline{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} 2+3i & 1-i \\ 0 & -i \\ 1+i & 1 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{A}^H = \begin{pmatrix} 2+3i & 0 & 1+i \\ 1-i & -i & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{B}^T = \begin{pmatrix} 2 \\ 1+i \end{pmatrix} \qquad \overline{\mathbf{B}} = \begin{pmatrix} 2 & 1-i \end{pmatrix} \qquad \mathbf{B}^H = \begin{pmatrix} 2 \\ 1-i \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{C}^T = \begin{pmatrix} 3+5i & 6 & 2-2i \end{pmatrix} \qquad \overline{\mathbf{C}} = \begin{pmatrix} 3-5i \\ 6 \\ 2+2i \end{pmatrix} \qquad \mathbf{C}^H = \begin{pmatrix} 3-5i & 6 & 2+2i \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{D}^T = \begin{pmatrix} 7+i & 3-2i \\ 2+3i & 0 \end{pmatrix} \qquad \overline{\mathbf{D}} = \begin{pmatrix} 7-i & 2-3i \\ 3+2i & 0 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{D}^H = \begin{pmatrix} 7-i & 3+2i \\ 2-3i & 0 \end{pmatrix}$$

$(\mathbf{A}^H\overline{\mathbf{C}} + i\mathbf{B}^T)\overline{\mathbf{B}} + (1+3i)\mathbf{D}^H =$

$$= (\begin{pmatrix} 2+3i & 0 & 1+i \\ 1-i & -i & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3-5i \\ 6 \\ 2+2i \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 2 \\ 1+i \end{pmatrix}) \begin{pmatrix} 2 & 1-i \end{pmatrix} + (1+3i) \begin{pmatrix} 7-i & 3+2i \\ 2-3i & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= (\begin{pmatrix} (2+3i)(3-5i)+(1+i)(2+2i) \\ (1-i)(3-5i)-6i+2+2i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2i \\ i(1+i) \end{pmatrix}) \begin{pmatrix} 2 & 1-i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} (1+3i)(7-i) & (1+3i)(3+2i) \\ (1+3i)(2-3i) & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 6+9i-10i+15+2+2i+2i-2 \\ 3-3i-5i-5-6i+2+2i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ -1+i \end{pmatrix}) \begin{pmatrix} 2 & 1-i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7+21i-i+3 & 3+9i+2i-6 \\ 2+6i-3i+9 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= (\begin{pmatrix} 21+3i \\ -12i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2i \\ -1+i \end{pmatrix}) \begin{pmatrix} 2 & 1-i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 10+20i & -3+11i \\ 11+3i & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 21+5i \\ -1-11i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1-i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 10+20i & -3+11i \\ 11+3i & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2(21+5i) & (21+5i)(1-i) \\ 2(-1-11i) & (-1-11i)(1-i) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 10+20i & -3+11i \\ 11+3i & 0 \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} 42+10i & 21+5i-21i+5 \\ -2-22i & -1-11i+i-11 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 10+20i & -3+11i \\ 11+3i & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 42+10i & 26-16i \\ -2-22i & -12-10i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 10+20i & -3+11i \\ 11+3i & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 52+30i & 23-5i \\ 9-19i & -12-10i \end{pmatrix}$$

$\boxed{6}$ Di ciascuna delle seguenti matrici si dica se è simmetrica, anti-simmetrica, hermitiana, anti-hermitiana o nessuna delle precedenti:

$$\begin{pmatrix} \sqrt{2} & 1+5i \\ 1-5i & \sqrt{3} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 1+5i \\ 1+5i & \sqrt{3} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1+5i \\ -1+5i & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1+5i \\ -1-5i & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

simmetriche: $\begin{pmatrix} \sqrt{2} & 1+5i \\ 1+5i & \sqrt{3} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{pmatrix}$

anti-simmetriche: $\begin{pmatrix} 0 & 1+5i \\ -1-5i & 0 \end{pmatrix}$

hermitiane: $\begin{pmatrix} \sqrt{2} & 1+5i \\ 1-5i & \sqrt{3} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{pmatrix}$

anti-hermitiane: $\begin{pmatrix} 0 & 1+5i \\ -1+5i & 0 \end{pmatrix}$

nessuna delle precedenti: $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$\boxed{7}$ Si calcolino la parte hermitiana e la parte anti-hermitiana della matrice complessa $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} i & 1 \\ 3 & 1+i \end{pmatrix}$.

Poichè $\mathbf{A}^H = \begin{pmatrix} -i & 3 \\ 1 & 1-i \end{pmatrix}$, la parte hermitiana di $\mathbf{A}$ è

$$\frac{\mathbf{A}+\mathbf{A}^H}{2} = \frac{1}{2}(\begin{pmatrix} i & 1 \\ 3 & 1+i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -i & 3 \\ 1 & 1-i \end{pmatrix}) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix},$$

e la parte anti-hermitiana di $\mathbf{A}$ è

$$\frac{\mathbf{A}-\mathbf{A}^H}{2} = \frac{1}{2}(\begin{pmatrix} i & 1 \\ 3 & 1+i \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -i & 3 \\ 1 & 1-i \end{pmatrix}) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2i & -2 \\ 2 & 2i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i & -1 \\ 1 & i \end{pmatrix}.$$

ESERCITAZIONI* 2

$\boxed{1}$ Si risolva il sistema lineare $\mathbf{A}(\alpha)\mathbf{x} = \mathbf{b}(\alpha)$ dipendente dal parametro complesso α dove

$$\mathbf{A}(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & \alpha - i & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & \alpha - i & \alpha + i \\ -\alpha - i & -\alpha^2 - 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{b}(\alpha) = \begin{pmatrix} \alpha - i \\ \alpha^2 + 1 \\ 2\alpha \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^4.$$

$\boxed{2}$ Sia $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} i & 2+i \\ 7i & 1 \end{pmatrix}$. Si calcoli $\mathbf{A}^{-1}$.

$\boxed{3}$ Si dica per quali $\alpha \in \mathbb{C}$ la matrice $\mathbf{A}(\alpha) = \begin{pmatrix} \alpha - i & \alpha - i \\ -2i & \alpha \end{pmatrix}$ è non singolare. Per tali α, si trovi l'inversa di $\mathbf{A}(\alpha)$.

$\boxed{4}$ Sia $\mathbf{A}(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & \alpha+2 & \alpha+3 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & \alpha+4 \end{pmatrix}$ dove $\alpha \in \mathbb{R}$. Per quegli $\alpha \in \mathbb{R}$ per cui $\mathbf{A}(\alpha)$ è non singolare, si calcoli $\mathbf{A}(\alpha)^{-1}$.

$\boxed{5}$ Si trovino tutte le inverse destre della matrice $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -i & 1 & i \\ 1 & i & 1 \end{pmatrix}$.

$\boxed{6}$ Si trovino tutte le inverse sinistre della matrice $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -i & 1 \\ 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix}$.

Svolgimento delle Esercitazioni *2

$\boxed{1}$ Si risolva il sistema lineare $\mathbf{A}(\alpha)\mathbf{x} = \mathbf{b}(\alpha)$ dipendente dal parametro complesso α dove

$$\mathbf{A}(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & \alpha - i & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & \alpha - i & \alpha + i \\ -\alpha - i & -\alpha^2 - 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{b}(\alpha) = \begin{pmatrix} \alpha - i \\ \alpha^2 + 1 \\ 2\alpha \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^4.$$

Troviamo una forma ridotta di Gauss della matrice aumentata del sistema.

$$(\,\mathbf{A}(\alpha) \quad | \quad \mathbf{b}(\alpha)\,) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \alpha - i & 0 & \alpha - i \\ 0 & 1 & 0 & \alpha^2 + 1 \\ 1 & \alpha - i & \alpha + i & 2\alpha \\ -\alpha - i & -\alpha^2 - 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{E_{41}(\alpha+i)E_{31}(-1)}$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \alpha - i & 0 & \alpha - i \\ 0 & 1 & 0 & \alpha^2 + 1 \\ 0 & 0 & \alpha + i & \alpha + i \\ 0 & 0 & 0 & \alpha^2 + 1 \end{array}\right) = (\,\mathbf{B}(\alpha) \quad | \quad \mathbf{c}(\alpha)\,).$$

$\boxed{1^0 \text{ CASO}}$ $\qquad \alpha = -i \qquad (\,\mathbf{B}(-\mathbf{i}) \quad | \quad \mathbf{c}(-\mathbf{i})\,) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2i & 0 & -2i \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$ è una forma ridotta di Gauss per $(\,\mathbf{A}(-\mathbf{i}) \quad | \quad \mathbf{b}(-\mathbf{i})\,)$, quindi $\mathbf{A}(-\mathbf{i})\mathbf{x} = \mathbf{b}(-\mathbf{i})$ è equivalente a $\mathbf{B}(-\mathbf{i})\mathbf{x} = \mathbf{c}(-\mathbf{i})$ che è una forma compatta per

$$(*) \qquad \begin{cases} x_1 - 2ix_2 & = -2i \\ \qquad\quad x_2 & = 0 \end{cases}$$

Poichè $\mathbf{c}(-\mathbf{i})$ è libera, $\mathbf{B}(-\mathbf{i})\mathbf{x} = \mathbf{c}(-\mathbf{i})$ ammette soluzioni.

Poichè $\mathbf{B}(-\mathbf{i})$ ha esattamente una colonna libera, $\mathbf{B}(-\mathbf{i})\mathbf{x} = \mathbf{c}(-\mathbf{i})$ ha ∞^1 soluzioni.

Scegliamo come parametro la variabile corrispondente alla colonna libera di $\mathbf{B}(-\mathbf{i})$ (la 3^a) e con la sostituzione all'indietro da $(*)$ otteniamo

$$\begin{cases} x_3 = h \\ x_2 = 0 \\ x_1 = 2ix_2 - 2i = -2i \end{cases}$$

L'insieme delle soluzioni del sistema $\mathbf{B}(-\mathbf{i})\mathbf{x} = \mathbf{c}(-\mathbf{i})$ (e quindi l'insieme delle soluzioni del sistema $\mathbf{A}(-\mathbf{i})\mathbf{x} = \mathbf{b}(-\mathbf{i})$) è

$$\left\{ \begin{pmatrix} -2i \\ 0 \\ h \end{pmatrix} | h \in \mathbb{C} \right\}.$$

$\boxed{2^0 \text{ CASO}}$ $\qquad \alpha \neq -i$

$$(\,\mathbf{B}(\alpha) \quad | \quad \mathbf{c}(\alpha)\,) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \alpha - i & 0 & \alpha - i \\ 0 & 1 & 0 & \alpha^2 + 1 \\ 0 & 0 & \alpha + i & \alpha + i \\ 0 & 0 & 0 & \alpha^2 + 1 \end{array}\right) \xrightarrow{E_3(\frac{1}{\alpha+i})}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & \alpha - i & 0 & \vert & \alpha - i \\ 0 & 1 & 0 & \vert & \alpha^2+1 \\ 0 & 0 & 1 & \vert & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \vert & \alpha^2+1 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_4(\frac{1}{\alpha+i})} \begin{pmatrix} 1 & \alpha - i & 0 & \vert & \alpha - i \\ 0 & 1 & 0 & \vert & \alpha^2+1 \\ 0 & 0 & 1 & \vert & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \vert & \alpha - i \end{pmatrix} = (\,\mathbf{C}(\alpha) \vert \quad \mathbf{d}(\alpha)\,)\,.$$

$\boxed{1^0 \text{ Sottocaso}}$ $\alpha = i$ $(\,\mathbf{C}(\mathbf{i}) \quad \vert \quad \mathbf{d}(\mathbf{i})\,) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \vert & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \vert & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \vert & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \vert & 0 \end{pmatrix}$ è una forma ridotta di Gauss per $(\,\mathbf{A}(\mathbf{i}) \quad \vert \quad \mathbf{b}(\mathbf{i})\,)$, quindi $\mathbf{A}(\mathbf{i})\mathbf{x} = \mathbf{b}(\mathbf{i})$ è equivalente a $\mathbf{C}(\mathbf{i})\mathbf{x} = \mathbf{d}(\mathbf{i})$ che è una forma compatta per

$$(*) \qquad \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 1 \end{cases}$$

Poichè $\mathbf{d}(\mathbf{i})$ è libera, $\mathbf{C}(\mathbf{i})\mathbf{x} = \mathbf{d}(\mathbf{i})$ ammette soluzioni.

Poichè tutte le colonne di $\mathbf{C}(\mathbf{i})$ sono dominanti, $\mathbf{C}(\mathbf{i})\mathbf{x} = \mathbf{d}(\mathbf{i})$ ammette un'unica soluzione. L'unica soluzione di $\mathbf{C}(\mathbf{i})\mathbf{x} = \mathbf{d}(\mathbf{i})$ (e quindi di $\mathbf{A}(\mathbf{i})\mathbf{x} = \mathbf{b}(\mathbf{i})$) è

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$\boxed{2^0 \text{ Sottocaso}}$ $\alpha \notin \{i, -i\}$ $(\,\mathbf{C}(\alpha) \vert \quad \mathbf{d}(\alpha)\,) = \begin{pmatrix} 1 & \alpha - i & 0 & \vert & \alpha - i \\ 0 & 1 & 0 & \vert & \alpha^2+1 \\ 0 & 0 & 1 & \vert & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \vert & \alpha - i \end{pmatrix} \xrightarrow{E_4(\frac{1}{\alpha-i})}$

$\begin{pmatrix} 1 & \alpha - i & 0 & \vert & \alpha - i \\ 0 & 1 & 0 & \vert & \alpha^2+1 \\ 0 & 0 & 1 & \vert & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \vert & 1 \end{pmatrix} = (\,\mathbf{D}(\alpha) \vert \quad \mathbf{e}(\alpha)\,)$ è una forma ridotta di Gauss per $(\,\mathbf{A}(\alpha) \quad \vert \quad \mathbf{b}(\alpha)\,)$.

Poichè $\mathbf{e}(\alpha)$ è dominante, $\mathbf{D}(\alpha)\mathbf{x} = \mathbf{e}(\alpha)$ (e quindi di $\mathbf{A}(\alpha)\mathbf{x} = \mathbf{b}(\alpha)$) non ammette soluzioni.

$\boxed{2}$ Sia $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} i & 2+i \\ 7i & 1 \end{pmatrix}$. Si calcoli $\mathbf{A}^{-1}$.

Ricordando che

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \qquad \text{se} \qquad ad - bc \neq 0,$$

si ha:

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{i-(2+i)7i} \begin{pmatrix} 1 & -2-i \\ -7i & i \end{pmatrix} = \frac{1}{7-13i} \begin{pmatrix} 1 & -2-i \\ -7i & i \end{pmatrix}$$

Poichè

$$\frac{1}{7-13i} = \frac{1}{7-13i} \times \frac{\overline{7-13i}}{\overline{7-13i}} = \frac{7+13i}{(7-13i)(7+13i)} = \frac{7+13i}{49-169i^2} = \frac{7+13i}{218} = \frac{7}{218} + i\frac{13}{218},$$

allora

$$\mathbf{A}^{-1} = (\frac{7}{218} + i\frac{13}{218}) \begin{pmatrix} 1 & -2-i \\ -7i & i \end{pmatrix}.$$

$\boxed{3}$ Si dica per quali $\alpha \in \mathbb{C}$ la matrice $\mathbf{A}(\alpha) = \begin{pmatrix} \alpha - i & \alpha - i \\ -2i & \alpha \end{pmatrix}$ è non singolare. Per tali α, si trovi l'inversa di $\mathbf{A}(\alpha)$.

Ricordando che $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ è non singolare se e solo se $ad - bc \neq 0$ ed in tal caso si ha

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix},$$

allora $\mathbf{A}(\alpha)$ è non singolare se e solo se

$$(\alpha - i)\alpha - (\alpha - i)(-2i) = (\alpha - i)(\alpha + 2i) \neq 0,$$

ossia se e solo se $\alpha \notin \{-2i, i\}$, ed in tal caso si ha:

$$\mathbf{A}(\alpha)^{-1} = \frac{1}{(\alpha - i)(\alpha + 2i)} \begin{pmatrix} \alpha & -\alpha + i \\ 2i & \alpha - i \end{pmatrix}.$$

$\boxed{4}$ Sia $\mathbf{A}(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & \alpha + 2 & \alpha + 3 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & \alpha + 4 \end{pmatrix}$ dove $\alpha \in \mathbb{R}$. Per quegli $\alpha \in \mathbb{R}$ per cui $\mathbf{A}(\alpha)$ è non singolare, si calcoli $\mathbf{A}(\alpha)^{-1}$.

$$(\,\mathbf{A}(\alpha)\quad|\quad\mathbf{I}_3\,) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \alpha+2 & \alpha+3 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & \alpha+4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{E_{31}(-1)E_{21}(1)}$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \alpha+2 & \alpha+3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha+2 & \alpha+2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -\alpha-2 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \boxed{\alpha \neq -2 : \mathbf{A(-2)} \text{ non ha inv.}} \xrightarrow{E_{32}(\alpha+2)E_2(\frac{1}{\alpha+2})}$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \alpha+2 & \alpha+3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \frac{1}{\alpha+2} & \frac{1}{\alpha+2} & 0 \\ 0 & 0 & \alpha+3 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \boxed{\alpha \neq -3 : \mathbf{A(-3)} \text{ non ha inv.}} \xrightarrow{E_3(\frac{1}{\alpha+3})}$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \alpha+2 & \alpha+3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \frac{1}{\alpha+2} & \frac{1}{\alpha+2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{\alpha+3} & \frac{1}{\alpha+3} \end{array}\right) \xrightarrow{E_{23}(-1)}$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \alpha+2 & \alpha+3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{\alpha+2} & \frac{1}{(\alpha+2)(\alpha+3)} & -\frac{1}{\alpha+3} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{\alpha+3} & \frac{1}{\alpha+3} \end{array}\right) \xrightarrow{E_{13}(-\alpha-3)}$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \alpha+2 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{\alpha+2} & \frac{1}{(\alpha+2)(\alpha+3)} & -\frac{1}{\alpha+3} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{\alpha+3} & \frac{1}{\alpha+3} \end{array}\right) \xrightarrow{E_{12}(-\alpha-2)}$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\alpha+4}{\alpha+3} & -\frac{1}{\alpha+3} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{\alpha+2} & \frac{1}{(\alpha+2)(\alpha+3)} & -\frac{1}{\alpha+3} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{\alpha+3} & \frac{1}{\alpha+3} \end{array}\right) = (\,\mathbf{I}_3 \quad | \quad \mathbf{A}(\alpha)^{-1}\,).$$

Se $\boxed{\alpha \notin \{-2,-3\}}$

$$\mathbf{A}(\alpha)^{-1} = \frac{1}{(\alpha+2)(\alpha+3)} \begin{pmatrix} 0 & -(\alpha+4)(\alpha+2) & -(\alpha+2) \\ \alpha+3 & 1 & -(\alpha+2) \\ 0 & \alpha+2 & \alpha+2 \end{pmatrix}.$$

$\boxed{5}$ Si trovino tutte le inverse destre della matrice $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -i & 1 & i \\ 1 & i & 1 \end{pmatrix}$.

Un'inversa destra di $\mathbf{A}$ è una matrice 3×2 $\mathbf{R}$ tale che se $\mathbf{R} = (\, \mathbf{c}_1 \quad | \quad \mathbf{c}_2 \,)$, allora

$\mathbf{c}_1$ è soluzione di (1) $\mathbf{Ax} = \mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e

$\mathbf{c}_2$ è soluzione di (2) $\mathbf{Ax} = \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Cerchiamo tutte le soluzioni di (1) e (2).

$$(\, \mathbf{A} \quad | \quad \mathbf{I}_2 \,) = \begin{pmatrix} -i & 1 & i & | & 1 & 0 \\ 1 & i & 1 & | & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{21}(-1)E_1(i)} \begin{pmatrix} 1 & i & -1 & | & i & 0 \\ 0 & 0 & 2 & | & -i & 1 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\xrightarrow{E_2(-\frac{1}{2})} \begin{pmatrix} 1 & i & -1 & | & i & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & -\frac{i}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = (\, \mathbf{U} \quad | \quad \mathbf{b}_1 \quad \mathbf{b}_2 \,).$$

(1) è equivalente a (1′) $\mathbf{Ux} = \mathbf{b}_1$ che è una forma compatta per

$$\begin{cases} x_1 + ix_2 - x_3 & = i \\ \qquad\qquad\;\; x_3 & = -\frac{i}{2} \end{cases}$$

Scegliamo come parametro la variabile corrispondente all'unica colonna libera di $\mathbf{U}$ (la 2^a) e con la sostituzione all'indietro otteniamo

$$\begin{cases} x_2 = h \\ x_3 = -\dfrac{i}{2} \\ x_1 = -ix_2 + x_3 + i = -ih - \dfrac{i}{2} + i = -ih + \dfrac{i}{2} \end{cases}$$

L'insieme delle soluzioni di (1) è

$$\left\{ \begin{pmatrix} -ih + \frac{i}{2} \\ h \\ -\frac{1}{2}i \end{pmatrix} | h \in \mathbb{C} \right\}.$$

(2) è equivalente a (2′) $\mathbf{Ux} = \mathbf{b}_2$ che è una forma compatta per

$$\begin{cases} x_1 + ix_2 - x_3 & = 0 \\ \qquad\qquad\;\; x_3 & = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Scegliamo come parametro la variabile corrispondente all'unica colonna libera di U (la 2^a) e con la sostituzione all'indietro otteniamo

$$\begin{cases} x_2 = k \\ x_3 = \dfrac{1}{2} \\ x_1 = -ix_2 + x_3 = -ik + \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

L'insieme delle soluzioni di (2) è

$$\left\{ \begin{pmatrix} -ik + \frac{1}{2} \\ k \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} | k \in \mathbb{C} \right\}.$$

Per ogni $h, k \in \mathbb{C}$, $\mathbf{R(h,k)} = \begin{pmatrix} -ih + \frac{i}{2} & -ik + \frac{1}{2} \\ h & k \\ -\frac{i}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ è un'inversa destra di $\mathbf{A}$.

$\boxed{6}$ Si trovino tutte le inverse sinistre della matrice $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -i & 1 \\ 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix}$.

Sia $\mathbf{B} = \mathbf{A}^T = \begin{pmatrix} -i & 1 & i \\ 1 & i & 1 \end{pmatrix}$. Per l'esercizio precedente, l'insieme delle inverse destre di $\mathbf{B}$ è:

$$\left\{ \quad \mathbf{R(h,k)} = \begin{pmatrix} -ih + \frac{i}{2} & -ik + \frac{1}{2} \\ h & k \\ -\frac{i}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} | h, k \in \mathbb{C} \quad \right\}.$$

Allora l'insieme delle inverse sinistre di $\mathbf{A}$ è:

$$\left\{ \quad \mathbf{L(h,k)} = \mathbf{R(h,k)}^T = \begin{pmatrix} -ih + \frac{i}{2} & h & -\frac{i}{2} \\ -ik + \frac{1}{2} & k & \frac{1}{2} \end{pmatrix} | h, k \in \mathbb{C} \quad \right\}.$$

ESERCITAZIONI* 3

$\boxed{1}$ Sia $W = \{\mathbf{A} \in M_n(\mathbb{C}) | \mathbf{A} = -\mathbf{A}^T\}$ l'insieme delle matrici anti-simmetriche (complesse) di ordine n. Si provi che W è un sottospazio dello spazio vettoriale delle matrici quadrate (complesse) di ordine n.

$\boxed{2}$ Sia $W = \{\mathbf{A} \in M_n(\mathbb{C}) | \mathbf{A} = \mathbf{A}^H\}$ l'insieme delle matrici hermitiane (complesse) di ordine n. Si provi che W non è un sottospazio dello spazio vettoriale delle matrici quadrate (complesse) di ordine n.

$\boxed{3}$ Sia $V = \mathbb{R}^3$ (spazio vettoriale reale). Si dica quale dei seguenti sottoinsiemi di V è un sottospazio vettoriale di V:

$$\mathrm{S}_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}; \mathrm{S}_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}; \mathrm{S}_3 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}; \mathrm{S}_4 = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ 0 \end{pmatrix} | a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\mathrm{S}_5 = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b+1 \\ 0 \end{pmatrix} | a, b \in \mathbb{R} \right\}; \mathrm{S}_6 = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ a+b \\ 0 \end{pmatrix} | a, b \in \mathbb{R} \right\}; \mathrm{S}_7 = \left\{ \begin{pmatrix} a+1 \\ a-1 \\ 0 \end{pmatrix} | a \in \mathbb{R} \right\}; \mathrm{S}_8 = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ a \\ 0 \end{pmatrix} | a \in \mathbb{R} \right\}.$$

$\boxed{4}$ Sia $W = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} | a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$ l'insieme delle matrici reali simmetriche di ordine 2.

1. Si provi che W è un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale reale $M_2(\mathbb{R})$.

2. Si provi che W non è un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale $M_2(\mathbb{C})$.

3. Si dica quali dei seguenti sottoinsiemi di $M_2(\mathbb{R})$ è un insieme di generatori per W:

(a) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$ **(b)** $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$

(c) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$ **(d)** $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$

(e) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$

Svolgimento delle Esercitazioni *3

$\boxed{1}$ Sia $W = \{\mathbf{A} \in M_n(\mathbb{C}) | \mathbf{A} = -\mathbf{A}^T\}$ l'insieme delle matrici anti-simmetriche (complesse) di ordine n. Si provi che W è un sottospazio dello spazio vettoriale delle matrici quadrate (complesse) di ordine n.

(i) $\mathbf{O}_{n\times n} \in W$: $\mathbf{O}^T = \mathbf{O} = -\mathbf{O}$

(ii) $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in W \overset{?}{\Longrightarrow} \mathbf{A} + \mathbf{B} \in W$

$$\left.\begin{array}{r} \left.\begin{array}{l} \mathbf{A} \in W \Longrightarrow \mathbf{A} \in M_n(\mathbb{C}) \\ \mathbf{B} \in W \Longrightarrow \mathbf{B} \in M_n(\mathbb{C}) \end{array}\right\} \Longrightarrow \mathbf{A} + \mathbf{B} \in M_n(\mathbb{C}) \\ \left.\begin{array}{l} \mathbf{A} \in W \Longrightarrow \mathbf{A} = -\mathbf{A}^T \\ \mathbf{B} \in W \Longrightarrow \mathbf{B} = -\mathbf{B}^T \end{array}\right\} \Longrightarrow (\mathbf{A}+\mathbf{B})^T = \mathbf{A}^T + \mathbf{B}^T = -\mathbf{A} + (-\mathbf{B}) = -(\mathbf{A}+\mathbf{B}) \end{array}\right\} \Longrightarrow \mathbf{A} + \mathbf{B} \in W$$

(iii) $\alpha \in \mathbb{C}, \mathbf{A} \in W \overset{?}{\Longrightarrow} \alpha\mathbf{A} \in W$

$$\left.\begin{array}{r} \mathbf{A} \in W \Longrightarrow \mathbf{A} \in M_n(\mathbb{C}) \Longrightarrow \alpha\mathbf{A} \in M_n(\mathbb{C}) \\ \mathbf{A} \in W \Longrightarrow \mathbf{A} = -\mathbf{A}^T \Longrightarrow (\alpha\mathbf{A})^T = \alpha\mathbf{A}^T = \alpha(-\mathbf{A}) = -(\alpha\mathbf{A}) \end{array}\right\} \Longrightarrow \alpha\mathbf{A} \in W$$

$\boxed{2}$ Sia $W = \{\mathbf{A} \in M_n(\mathbb{C}) | \mathbf{A} = \mathbf{A}^H\}$ l'insieme delle matrici hermitiane (complesse) di ordine n. Si provi che W non è un sottospazio dello spazio vettoriale delle matrici quadrate (complesse) di ordine n.

(i) $\mathbf{O}_{n\times n} \in W$: $\mathbf{O}^H = \mathbf{O}$

(ii) $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in W \overset{?}{\Longrightarrow} \mathbf{A} + \mathbf{B} \in W$

$$\left.\begin{array}{r} \left.\begin{array}{l} \mathbf{A} \in W \Longrightarrow \mathbf{A} \in M_n(\mathbb{C}) \\ \mathbf{B} \in W \Longrightarrow \mathbf{B} \in M_n(\mathbb{C}) \end{array}\right\} \Longrightarrow \mathbf{A} + \mathbf{B} \in M_n(\mathbb{C}) \\ \left.\begin{array}{l} \mathbf{A} \in W \Longrightarrow \mathbf{A} = \mathbf{A}^H \\ \mathbf{B} \in W \Longrightarrow \mathbf{B} = \mathbf{B}^H \end{array}\right\} \Longrightarrow (\mathbf{A}+\mathbf{B})^H = \mathbf{A}^H + \mathbf{B}^H = \mathbf{A} + \mathbf{B} \end{array}\right\} \Longrightarrow \mathbf{A} + \mathbf{B} \in W$$

(iii) $\alpha \in \mathbb{C}, \mathbf{A} \in W \overset{?}{\Longrightarrow} \alpha\mathbf{A} \in W$

$$\mathbf{A} \in W \Longrightarrow \mathbf{A} \in M_n(\mathbb{C}) \Longrightarrow \alpha\mathbf{A} \in M_n(\mathbb{C})$$

$$\mathbf{A} \in W \Longrightarrow \mathbf{A} = \mathbf{A}^H \Longrightarrow (\alpha\mathbf{A})^H = \overline{\alpha}\mathbf{A}^H = \overline{\alpha}\mathbf{A}$$

Non è vero che $\alpha\mathbf{A} \in W$ **per ogni scalare** α **ed ogni** $\mathbf{A} \in W$:

prendendo $\mathbf{A} \neq \mathbf{O}$ si ottiene che

$$\overline{\alpha}\mathbf{A} = \alpha\mathbf{A} \quad \underset{\uparrow \atop \boxed{\text{poichè } \mathbf{A} \neq \mathbf{O}}}{\iff} \quad \overline{\alpha} = \alpha \iff \alpha \in \mathbb{R}$$

Quindi se $\mathbf{O} \neq \mathbf{A} \in W$ e $\alpha \notin \mathbb{R}$ (ad esempio se $\mathbf{A} = \mathbf{I}_n$ e $\alpha = i$) allora $\alpha\mathbf{A} \notin W$.

Dunque W non è un sottospazio dello spazio vettoriale $M_n(\mathbb{C})$.

$\boxed{3}$ Sia $V = \mathbb{R}^3$ (spazio vettoriale reale). Si dica quale dei seguenti sottoinsiemi di V è un sottospazio vettoriale di V:

$$\mathrm{S}_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}; \mathrm{S}_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}; \mathrm{S}_3 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}; \mathrm{S}_4 = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ 0 \end{pmatrix} | a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\mathrm{S}_5 = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b+1 \\ 0 \end{pmatrix} | a, b \in \mathbb{R} \right\}; \mathrm{S}_6 = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ a+b \\ 0 \end{pmatrix} | a, b \in \mathbb{R} \right\}; \mathrm{S}_7 = \left\{ \begin{pmatrix} a+1 \\ a-1 \\ 0 \end{pmatrix} | a \in \mathbb{R} \right\}; \mathrm{S}_8 = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ a \\ 0 \end{pmatrix} | a \in \mathbb{R} \right\}.$$

• S_1 è un sottospazio vettoriale di V: l'unico elemento di S_1 è il vettore $\mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, e $\mathbf{0} + \mathbf{0} = \mathbf{0} \in \mathrm{S}_1$ e $\alpha\mathbf{0} = \mathbf{0} \in \mathrm{S}_1$ per ogni scalare α (S_1 è il sottospazio nullo di $\mathbb{R}^3$).

• S_2 ed S_3 non sono sottospazi di V: entrambi contengono $\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ma entrambi non contengono $\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_1 = 2\mathbf{e}_1$ (d'altra parte nessun sottoinsieme **finito** di uno spazio vettoriale W che contenga un elemento non nullo $\mathbf{w} \neq \mathbf{0}$ può essere un sottospazio di W, perchè se lo fosse dovrebbe contenere l'insieme **infinito** di vettori $\{\alpha\mathbf{w} | \alpha \text{ scalare }\}$).

• Per vedere se S_4 è o non è un sottospazio di V occorre stabilire se le seguenti condizioni sono soddisfatte:

(i) $\mathbf{0} \in \mathrm{S}_4$

(ii) $\mathbf{u} + \mathbf{v} \in \mathrm{S}_4$ per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathrm{S}_4$,

(iii) $\alpha\mathbf{u} \in \mathrm{S}_4$ per ogni $\mathbf{u} \in \mathrm{S}_4$ ed ogni scalare α.

Poichè gli elementi di S_4 sono esattamente i vettori di $\mathbb{R}^3$ che hanno la terza coordinata nulla, allora $\mathbf{0} \in \mathrm{S}_4$, inoltre dal fatto che la somma di due vettori di $\mathbb{R}^3$ con la terza coordinata nulla è un vettore di $\mathbb{R}^3$ con la terza coordinata nulla si ha (ii), e dal fatto che il prodotto di un vettore di $\mathbb{R}^3$ con la terza coordinata nulla per uno scalare è un vettore di $\mathbb{R}^3$ con la terza coordinata nulla segue (iii). In simboli:

(i) $\mathbf{0} \in \mathrm{S}_4$

(ii) Se $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathrm{S}_4$ esistono $a_1, b_1, a_2, b_2 \in \mathbb{R}$ tali che

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ 0 \end{pmatrix},$$

inoltre

$$\mathbf{u}+\mathbf{v} \in \mathrm{S}_4 \quad \Longleftrightarrow \quad \exists \quad a_3, b_3 \in \mathbb{R}^3 | \mathbf{u}+\mathbf{v} = \begin{pmatrix} a_3 \\ b_3 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Poichè $\mathbf{u}+\mathbf{v} = \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1+a_2 \\ b_1+b_2 \\ 0 \end{pmatrix}$, basta prendere $a_3 = a_1+a_2$ e $b_3 = b_1+b_2$.

(iii) Se $\mathbf{u} \in \mathrm{S}_4$ esistono $a, b \in \mathbb{R}$ tali che $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ 0 \end{pmatrix}$, inoltre per ogni scalare $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\alpha\mathbf{u} \in \mathrm{S}_4 \quad \Longleftrightarrow \quad \exists \quad c, d \in \mathbb{R}^3 | \alpha\mathbf{u} = \begin{pmatrix} c \\ d \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Poichè $\alpha\mathbf{u} = \alpha \begin{pmatrix} a \\ b \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha a \\ \alpha b \\ 0 \end{pmatrix}$, basta prendere $c = \alpha a$ e $d = \alpha b$.

Dunque S_4 è un sottospazio di V.

• Per vedere se S_5 è o non è un sottospazio di V occorre stabilire se le seguenti condizioni sono soddisfatte:

(i) $\mathbf{0} \in \mathrm{S}_5$

(ii) $\mathbf{u}+\mathbf{v} \in \mathrm{S}_5$ per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathrm{S}_5$,

(iii) $\alpha\mathbf{u} \in \mathrm{S}_5$ per ogni $\mathbf{u} \in \mathrm{S}_5$ ed ogni scalare α.

(i) esistono $a, b \in \mathbb{R}$ tali che $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b+1 \\ 0 \end{pmatrix}$: si prenda $a = 0$ e $b = -1$, quindi $\mathbf{0} \in \mathrm{S}_5$

(ii) Se $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathrm{S}_5$ esistono $a_1, b_1, a_2, b_2 \in \mathbb{R}$ tali che

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1+1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2+1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

inoltre

$$\mathbf{u}+\mathbf{v} \in \mathrm{S}_5 \quad \Longleftrightarrow \quad \exists \quad a_3, b_3 \in \mathbb{R}^3 | \mathbf{u}+\mathbf{v} = \begin{pmatrix} a_3 \\ b_3+1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Poichè $\mathbf{u}+\mathbf{v} = \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1+1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2+1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1+a_2 \\ b_1+b_2+2 \\ 0 \end{pmatrix}$, basta prendere $a_3 = a_1+a_2$ e $b_3 = b_1+b_2+1$.

(iii) Se $\mathbf{u} \in \mathrm{S}_5$ esistono $a, b \in \mathbb{R}$ tali che $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} a \\ b+1 \\ 0 \end{pmatrix}$, inoltre per ogni scalare $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\alpha\mathbf{u} \in \mathrm{S}_5 \quad \Longleftrightarrow \quad \exists \quad c, d \in \mathbb{R}^3 | \alpha\mathbf{u} = \begin{pmatrix} c \\ d+1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Poichè $\alpha\mathbf{u} = \alpha\begin{pmatrix} a \\ b+1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha a \\ \alpha b+\alpha \\ 0 \end{pmatrix}$, basta prendere $c = \alpha a$ e $d = \alpha b + \alpha - 1$.

Dunque S_5 è un sottospazio di V.

• Per vedere se S_6 è o non è un sottospazio di V occorre stabilire se le seguenti condizioni sono soddisfatte:

(i) $\mathbf{0} \in \mathrm{S}_6$

(ii) $\mathbf{u}+\mathbf{v} \in \mathrm{S}_6$ per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathrm{S}_6$,

(iii) $\alpha\mathbf{u} \in \mathrm{S}_6$ per ogni $\mathbf{u} \in \mathrm{S}_6$ ed ogni scalare α.

(i) esistono $a, b \in \mathbb{R}$ tali che $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ a+b \\ 0 \end{pmatrix}$: si prenda $a = b = 0$, quindi $\mathbf{0} \in \mathrm{S}_6$

(ii) Se $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathrm{S}_6$ esistono $a_1, b_1, a_2, b_2 \in \mathbb{R}$ tali che

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_1+b_1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} a_2 \\ a_2+b_2 \\ 0 \end{pmatrix},$$

inoltre

$$\mathbf{u}+\mathbf{v} \in \mathrm{S}_6 \quad \Longleftrightarrow \quad \exists \quad a_3, b_3 \in \mathbb{R}^3 | \mathbf{u}+\mathbf{v} = \begin{pmatrix} a_3 \\ a_3+b_3 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Poichè $\mathbf{u}+\mathbf{v} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_1+b_1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2 \\ a_2+b_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1+a_2 \\ (a_1+a_2)+(b_1+b_2) \\ 0 \end{pmatrix}$, basta prendere $a_3 = a_1 + a_2$ e $b_3 = b_1 + b_2$.

(iii) Se $\mathbf{u} \in \mathrm{S}_6$ esistono $a, b \in \mathbb{R}$ tali che $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} a \\ a+b \\ 0 \end{pmatrix}$, inoltre per ogni scalare $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\alpha\mathbf{u} \in \mathrm{S}_6 \quad \Longleftrightarrow \quad \exists \quad c, d \in \mathbb{R}^3 | \alpha\mathbf{u} = \begin{pmatrix} c \\ c+d \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Poichè $\alpha\mathbf{u} = \alpha\begin{pmatrix} a \\ a+b \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha a \\ \alpha a+\alpha b \\ 0 \end{pmatrix}$, basta prendere $c = \alpha a$ e $d = \alpha b$.

Dunque S_6 è un sottospazio di V.

• Per vedere se S_7 è o non è un sottospazio di V occorre stabilire se le seguenti condizioni sono soddisfatte:

(i) $\mathbf{0} \in \mathrm{S}_7$

(ii) $\mathbf{u}+\mathbf{v} \in \mathrm{S}_7$ per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathrm{S}_7$,

(iii) $\alpha\mathbf{u} \in \mathrm{S}_7$ per ogni $\mathbf{u} \in \mathrm{S}_7$ ed ogni scalare α.

(i) Perchè $\mathbf{0}$ appartenga a S_7 occorre che esista $a \in \mathbb{R}$ tale che $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+1 \\ a-1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Poichè il sistema

$$\begin{cases} a+1=0 \\ \\ a-1=0 \end{cases}$$

nell'incognita a non ha soluzioni, allora S_7 non è un sottospazio di V.

• Per vedere se S_8 è o non è un sottospazio di V occorre stabilire se le seguenti condizioni sono soddisfatte:

(i) $\mathbf{0} \in \mathrm{S}_8$

(ii) $\mathbf{u}+\mathbf{v} \in \mathrm{S}_8$ per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathrm{S}_8$,

(iii) $\alpha\mathbf{u} \in \mathrm{S}_8$ per ogni $\mathbf{u} \in \mathrm{S}_8$ ed ogni scalare α.

(i) esiste $a \in \mathbb{R}$ tale che $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ a \\ 0 \end{pmatrix}$: si prenda $a=0$. Quindi $\mathbf{0} \in \mathrm{S}_8$.

(ii) Se $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathrm{S}_8$ esistono $a, b \in \mathbb{R}$ tali che

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} a \\ a \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} b \\ b \\ 0 \end{pmatrix},$$

inoltre

$$\mathbf{u}+\mathbf{v} \in \mathrm{S}_8 \quad \Longleftrightarrow \quad \exists \quad c \in \mathbb{R}^3 | \mathbf{u}+\mathbf{v} = \begin{pmatrix} c \\ c \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Poichè $\mathbf{u}+\mathbf{v} = \begin{pmatrix} a \\ a \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b \\ b \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b \\ a+b \\ 0 \end{pmatrix}$, basta prendere $c = a+b$.

(iii) Se $\mathbf{u} \in \mathrm{S}_8$ esiste $a \in \mathbb{R}$ tale che $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} a \\ a \\ 0 \end{pmatrix}$, inoltre per ogni scalare $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\alpha\mathbf{u} \in \mathrm{S}_8 \quad \Longleftrightarrow \quad \exists \quad b \in \mathbb{R}^3 | \alpha\mathbf{u} = \begin{pmatrix} b \\ b \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Poichè $\alpha\mathbf{u} = \alpha \begin{pmatrix} a \\ a \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha a \\ \alpha a \\ 0 \end{pmatrix}$, basta prendere $b = \alpha a$.

Dunque S_8 è un sottospazio di V.

$\boxed{4}$ Sia $W = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} | a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$ l'insieme delle matrici reali simmetriche di ordine 2.

1. Si provi che W è un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale reale $M_2(\mathbb{R})$.

2. Si provi che W non è un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale $M_2(\mathbb{R})$.

3. Si dica quali dei seguenti sottoinsiemi di $M_2(\mathbb{R})$ è un insieme di generatori per W:

(a) $\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right\}$ **(b)** $\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right\}$

(c) $\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right\}$ **(d)** $\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}$

(e) $\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}$

1. $\boxed{1^0 \text{ MODO}}$ (i) $\mathbf{O}_{2\times 2} \in W$: $\mathbf{O}_{2\times 2} \in M_2(\mathbb{R})$ e $\mathbf{O}_{2\times 2}^T = \mathbf{O}_{2\times 2}$

(ii)

$$\left.\begin{array}{r} \left.\begin{array}{l} \mathbf{A} \in W \Longrightarrow \mathbf{A} \in M_2(\mathbb{R}) \\[1em] \mathbf{B} \in W \Longrightarrow \mathbf{B} \in M_2(\mathbb{R}) \end{array}\right\} \Longrightarrow \quad \mathbf{A}+\mathbf{B} \in M_2(\mathbb{R}) \\[2em] \left.\begin{array}{l} \mathbf{A} \in W \Longrightarrow \mathbf{A} = \mathbf{A}^T \\[1em] \mathbf{B} \in W \Longrightarrow \mathbf{B} = \mathbf{B}^T \end{array}\right\} \Longrightarrow (\mathbf{A}+\mathbf{B})^T = \mathbf{A}^T + \mathbf{B}^T = \mathbf{A}+\mathbf{B} \end{array}\right\} \Longrightarrow \mathbf{A}+\mathbf{B} \in W$$

(iii) $\quad \alpha \in \mathbb{C}, \mathbf{A} \in W \quad \overset{?}{\Longrightarrow} \quad \alpha\mathbf{A} \in W$

$$\left.\begin{array}{r} \mathbf{A} \in W \Longrightarrow \mathbf{A} \in M_2(\mathbb{R}) \Longrightarrow \alpha\mathbf{A} \in M_2(\mathbb{R}) \\[1em] \mathbf{A} \in W \Longrightarrow \mathbf{A} = \mathbf{A}^T \Longrightarrow (\alpha\mathbf{A})^T = \alpha\mathbf{A}^T = \alpha\mathbf{A} \end{array}\right\} \quad \Longrightarrow \quad \alpha\mathbf{A} \in W$$

$\boxed{2^0 \text{ MODO}}$

(i) esistono $a, b, c \in \mathbb{R}$ tali che $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$: si prenda $a = b = c = 0$.

(ii) Se $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in W$ esistono $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2 \in \mathbb{R}$ tali che

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ b_1 & c_1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ b_2 & c_2 \end{pmatrix},$$

inoltre

$$\mathbf{A}+\mathbf{B} \in W \quad \Longleftrightarrow \quad \exists \quad a_3, b_3, c_3 \in \mathbb{R}^3 | \mathbf{A}+\mathbf{B} = \begin{pmatrix} a_3 & b_3 \\ b_3 & c_3 \end{pmatrix}.$$

Poichè $\mathbf{u}+\mathbf{v} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ b_1 & c_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ b_2 & c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1+a_2 & b_1+b_2 \\ b_1+b_2 & c_1+c_2 \end{pmatrix}$, basta prendere $a_3 = a_1+a_2$, $b_3 = b_1+b_2$, $c_3 = c_1+c_2$.

(iii) Se $\mathbf{A} \in W$ esistono $a, b, c \in \mathbb{R}$ tali che $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$, inoltre per ogni scalare $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\alpha\mathbf{A} \in W \quad \Longleftrightarrow \quad \exists \quad a_1, b_1, c_1 \in \mathbb{R}^3 | \alpha\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ b_1 & c_1 \end{pmatrix}.$$

Poichè $\alpha\mathbf{A} = \alpha \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha a & \alpha b \\ \alpha b & \alpha c \end{pmatrix}$, basta prendere $a_1 = \alpha a$, $b_1 = \alpha b$, $c_1 = \alpha c$.

Dunque W è un sottospazio di $M_2(\mathbb{R})$.

2. W non è un sottospazio di $M_2(\mathbb{C})$: se ad esempio si prende $\mathbf{A} = \mathbf{I}_2 \in W$ ed $\alpha = i$ si ha che $\alpha\mathbf{A} = i\mathbf{I}_2 \notin W$ dal momento che $W \subseteq M_2(\mathbb{R})$ e $i\mathbf{I}_2 \notin M_2(\mathbb{R})$.

3. (a) Per ogni $\mathbf{A} \in W$ esistono $a, b, c \in \mathbb{R}$ tali che $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$. Poichè

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

allora $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$ è un insieme di generatori di W.

(b) Per ogni $\mathbf{A} \in W$ esistono $a, b, c \in \mathbb{R}$ tali che $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$. Poichè

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{c}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

allora $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$ è un insieme di generatori di W.

(c) Per provare che $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$ è un insieme di generatori di W occorre provare che **per ogni** $\mathbf{A} \in W$ **esistono** $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ tali che

$$\mathbf{A} = \alpha_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 + \alpha_3 \\ \alpha_3 & \alpha_2 \end{pmatrix}$$

Poichè per ogni $A \in W$ esistono $a, b, c \in \mathbb{R}$ tali che $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$, il problema diventa provare che per ogni $a, b, c \in \mathbb{R}$ il sistema

$$\begin{cases} \alpha_1 = a \\ \alpha_2 + \alpha_3 = b \\ \alpha_3 = b \\ \alpha_2 = c \end{cases}$$

nelle incognite $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ ha soluzione.

Poichè il sistema ha soluzione se e solo se $c = 0$, allora ogni matrice $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ con $c \neq 0$ non è combinazione lineare degli elementi di $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$, quindi $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$ non è un insieme di generatori di W (d'altra parte la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \notin W$, per cui $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$ non è nemmeno un sottoinsieme di W).

(d) Per provare che $\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}$ è un insieme di generatori di W occorre provare che **per ogni $\mathbf{A} \in W$ esistono** $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ tali che

$$\mathbf{A} = \alpha_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \alpha_2 & 2\alpha_1 + \alpha_3 \end{pmatrix}$$

Poichè per ogni $A \in W$ esistono $a, b, c \in \mathbb{R}$ tali che $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$, il problema diventa provare che per ogni $a, b, c \in \mathbb{R}$ il sistema

$$\begin{cases} \alpha_1 = a \\ \alpha_2 = b \\ 2\alpha_1 + \alpha_3 = c \end{cases}$$

nelle incognite $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ ha soluzione. Prendendo $\alpha_1 = a$, $\alpha_2 = b$ e $\alpha_3 = c - 2\alpha_1 = c - 2a$ si ottiene che ogni $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ si puó scrivere:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} = \mathbf{A} = a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + (c - 2a) \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dunque ogni $\mathbf{A} \in W$ è combinazione lineare degli elementi di $\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}$ che quindi è un insieme di generatori di W.

(e) $\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}$ è un insieme di generatori di W perchè contiene $\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}$ che è un insieme di generatori di W (punto (a)).

ESERCITAZIONI* 4

$\boxed{1}$ Sia $\mathcal{S} = \left\{ \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} i \\ i \\ i \end{pmatrix}; \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} -2i \\ -2i \\ -2i \end{pmatrix}; \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 1+i \\ 1-i \\ i \end{pmatrix}; \mathbf{v}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1-2i \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$.

Si dica se $\mathcal{S}$ è un insieme di generatori di $\mathbb{C}^3$.

$\boxed{2}$ Siano V uno spazio vettoriale ed $\mathcal{S} = \{\mathbf{v}_1; \mathbf{v}_2; \mathbf{v}_3\}$ un insieme di generatori di V.

Si dica quale dei seguenti insiemi di vettori è ancora un insieme di generatori di V:

$$\begin{aligned} &(1) \quad \mathcal{S}_1 = \{\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2; \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + 2\mathbf{v}_3; \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + 4\mathbf{v}_3\}, \\ &(2) \quad \mathcal{S}_2 = \{\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2; \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + 2\mathbf{v}_3; \mathbf{v}_1 + 2\mathbf{v}_2 + 2\mathbf{v}_3\}. \end{aligned}$$

$\boxed{3}$ Si dica quale dei seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{R}^3$ è linearmente indipendente:

$$(1) \quad \left\{ \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}; \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}; \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\},$$

$$(2) \quad \left\{ \mathbf{w}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}; \mathbf{w}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}; \mathbf{w}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

$\boxed{4}$ Siano V uno spazio vettoriale ed $\mathcal{S} = \{\mathbf{v}_1; \mathbf{v}_2; \mathbf{v}_3\}$ un insieme linearmente indipendente di vettori di V.

Si dica quale dei seguenti insiemi di vettori di V è linearmente indipendente:

$$\begin{aligned} &(1) \quad \mathcal{S}_1 = \{\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3; \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_3; \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3\}, \\ &(2) \quad \mathcal{S}_2 = \{\mathbf{v}_1 - 2\mathbf{v}_3; \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2; \mathbf{v}_2 + 2\mathbf{v}_3\}. \end{aligned}$$

$\boxed{5}$ Sia W l'insieme delle matrici 2×2 reali simmetriche. L'insieme

$$\mathcal{S} = \left\{ \mathbf{C}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}; \mathbf{C}_2 = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}; \mathbf{C}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \mathbf{C}_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \mathbf{C}_5 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

è un insieme di generatori di W.

Si trovi una base di W contenuta in $\mathcal{S}$.

Svolgimento delle Esercitazioni *4

$\boxed{1}$ Sia $\mathcal{S} = \left\{ \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} i \\ i \\ i \end{pmatrix}; \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} -2i \\ -2i \\ -2i \end{pmatrix}; \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 1+i \\ 1-i \\ i \end{pmatrix}; \mathbf{v}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1-2i \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$.

Si dica se $\mathcal{S}$ è un insieme di generatori di $\mathbb{C}^3$.

Il problema è stabilire se **per ogni** $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^3$ esistano o meno $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 \in \mathbb{C}$ tali che

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \alpha_1 \begin{pmatrix} i \\ i \\ i \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} -2i \\ -2i \\ -2i \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 1+i \\ 1-i \\ i \end{pmatrix} + \alpha_4 \begin{pmatrix} 1 \\ 1-2i \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i\alpha_1 - 2i\alpha_2 + (1+i)\alpha_3 + \alpha_4 \\ i\alpha_1 - 2i\alpha_2 + (1-i)\alpha_3 + (1-2i)\alpha_4 \\ i\alpha_1 - 2i\alpha_2 + i\alpha_3 \end{pmatrix},$$

ossia se per ogni $a, b, c \in \mathbb{C}$ il sistema (nelle incognite $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$)

$$(*) \qquad \begin{cases} i\alpha_1 - 2i\alpha_2 + (1+i)\alpha_3 + \alpha_4 = a \\ i\alpha_1 - 2i\alpha_2 + (1-i)\alpha_3 + (1-2i)\alpha_4 = b \\ i\alpha_1 - 2i\alpha_2 + i\alpha_3 = c \end{cases}$$

abbia o meno soluzione.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} i & -2i & 1+i & 1 & a \\ i & -2i & 1-i & 1-2i & b \\ i & -2i & i & 0 & c \end{array}\right) \xrightarrow{E_{31}(-i)E_{21}(-i)E_1(-i)}$$

$$\to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1-i & -i & -ia \\ 0 & 0 & -2i & -2i & b-a \\ 0 & 0 & -1 & -1 & c-a \end{array}\right) \xrightarrow{E_{32}(1)E_2(\frac{1}{2}i)}$$

$$\to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1-i & -i & -ia \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \frac{1}{2}i(b-a) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c-a+\frac{1}{2}i(b-a) \end{array}\right) = (\mathbf{U} \mid \mathbf{d}).$$

Poichè esistono valori di $a, b, c \in \mathbb{C}$ tali che $c - a + \frac{1}{2}i(b-a) \neq 0$, ossia tali che $\mathbf{d}$ sia dominante, allora $\mathcal{S}$ **non** è un insieme di generatori di $\mathbb{C}^3$.

Ad esempio prendendo $a = b = 0$ e $c = 1$ si ottiene che $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ non si puó esprimere come combinazione lineare degli elementi di $\mathcal{S}$, per cui $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \notin \langle \mathcal{S} \rangle$ e dunque $\langle \mathcal{S} \rangle$ è **propriamente contenuto in** $\mathbb{C}^3$.

$\boxed{2}$ Siano V uno spazio vettoriale ed $\mathcal{S} = \{\mathbf{v}_1; \mathbf{v}_2; \mathbf{v}_3\}$ un insieme di generatori di V.

Si dica quale dei seguenti insiemi di vettori è ancora un insieme di generatori di V:

$$(1) \quad \mathcal{S}_1 = \{\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2; \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + 2\mathbf{v}_3; \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + 4\mathbf{v}_3\},$$
$$(2) \quad \mathcal{S}_2 = \{\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2; \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + 2\mathbf{v}_3; \mathbf{v}_1 + 2\mathbf{v}_2 + 2\mathbf{v}_3\}.$$

(1) **Se $V = \{\mathbf{0}\}$ allora** ogni elemento di V, ed in particolare ogni elemento di $\mathcal{S}$ e di $\mathcal{S}_1$ è il vettore nullo. In questo caso $\mathcal{S}_1 = \mathcal{S}$ e $\mathcal{S}_1$ **è un insieme di generatori di V**.

Supponiamo ora che $V \neq \{\mathbf{0}\}$.

$\langle \mathcal{S}_1 \rangle = V$ se e solo se ogni vettore di V si puó esprimere come combinazione lineare degli elementi di $\mathcal{S}_1$, ossia se e solo se per ogni $\mathbf{v} \in V$ esistano scalari $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ tali che

$$(*) \qquad \mathbf{v} = \alpha_1(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) + \alpha_2(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + 2\mathbf{v}_3) + \alpha_3(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + 4\mathbf{v}_3).$$

Sia dunque $\mathbf{v} \in V$. Poichè per ipotesi $\mathcal{S} = \{\mathbf{v}_1; \mathbf{v}_2; \mathbf{v}_3\}$ è un insieme di generatori di V, allora esistono scalari $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ tali che

$$\mathbf{v} = \beta_1\mathbf{v}_1 + \beta_2\mathbf{v}_2 + \beta_3\mathbf{v}_3.$$

E' sufficiente allora limitarsi a chiedersi se $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ e $\mathbf{v}_3$ si possano esprimere come combinazioni lineari dei vettori d $\mathcal{S}_1$. Se tutti e tre questi vettori si possono esprimere come combinazioni lineari degli elementi di $\mathcal{S}_1$, allora ogni vettore di V puó esprimersi come combinazione lineare degli elementi di $\mathcal{S}_1$ e $\mathcal{S}_1$ è un insieme di generatori di V, altrimenti no.

Si osservi che $\mathbf{v}_3$ è senz'altro combinazione lineare dei vettori di $\mathcal{S}_1$, perchè

$$\mathbf{v}_3 = \frac{1}{2}(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + 2\mathbf{v}_3) - \frac{1}{2}(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2),$$

quindi abbiamo che $\mathcal{S}_1$ è un insieme di generatori di V se e solo se entrambi $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ si possono esprimere come combinazioni lineari dei vettori di $\mathcal{S}_1$.

Poichè $\mathbf{v}_1$ sia una combinazione lineare degli elementi di $\mathcal{S}_1$ occorre che esistano scalari α, β, δ tali che

$$\mathbf{v}_1 = \alpha(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) + \beta(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + 2\mathbf{v}_3) + \delta(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + 4\mathbf{v}_3),$$

ossia tali che si abbia

$$(**) \quad (\alpha + \beta + \delta - 1)\mathbf{v}_1 + (\alpha + \beta + \delta)\mathbf{v}_2 + (2\beta + \delta)\mathbf{v}_3 = \mathbf{0}.$$

Se l'insieme $\mathcal{S}$ da cui siamo partiti è linearmente indipendente allora da $(**)$ si ottiene il sistema lineare nelle incognite α, β, δ

$$\begin{cases} \alpha + \beta + \delta - 1 = 0 \\ \alpha + \beta + \delta = 0 \\ 2\beta + \delta = 0 \end{cases}$$

che non ha soluzioni, per cui $\mathbf{v}_1$ non è combinazione lineare dei vettori di $\mathcal{S}_1$ ed $\mathcal{S}_1$ **non è un insieme di generatori di V**.

Se invece l'insieme di generatori $\mathcal{S}$ da cui siamo partiti **è linearmente dipendente, non possiamo trarre alcuna conclusione** su $\mathcal{S}_1$.

Si considerino ad esempio le due seguenti situazioni:

1. $V = \mathbb{R}^2$ ed $\mathcal{S} = \left\{ \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ (che è un insieme di generatori di $\mathbb{R}^2$). In questo caso

$$\mathcal{S}_1 = \left\{ \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}; \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + 2\mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}; \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + 4\mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}$$

è un insieme di generatori di $V = \mathbb{R}^2$.

2. $V = \mathbb{R}^2$ ed $\mathcal{S} = \left\{ \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ (che è un insieme di generatori di $\mathbb{R}^2$). In questo caso

$$\mathcal{S}_1 = \left\{ \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + 2\mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}; \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + 4\mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix} \right\}$$

non è un insieme di generatori di $V = \mathbb{R}^2$.

(2) Come nel punto precedente abbiamo che $\mathcal{S}_2$ è un insieme idi generatori di V se e solo se $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ e $\mathbf{v}_3$ possono essere espressi come combinazioni lineari dei vettori di $\mathcal{S}_2$.

Poichè

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_1 &= (\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) + (\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + 2\mathbf{v}_3) - (\mathbf{v}_1 + 2\mathbf{v}_2 + 2\mathbf{v}_3) \\ \mathbf{v}_2 &= (\mathbf{v}_1 + 2\mathbf{v}_2 + 2\mathbf{v}_3) - (\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + 2\mathbf{v}_3) \\ \mathbf{v}_3 &= \frac{1}{2}(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) - \frac{1}{2}(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + 2\mathbf{v}_3) \end{aligned}$$

allora $\mathcal{S}_2$ **è sempre un insieme di generatori** (ovviamente nell'ipotesi che $\mathcal{S}$ sia un insieme di generatori).

$\boxed{3}$ Si dica quale dei seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{R}^3$ è linearmente indipendente:

$$(1) \qquad \left\{ \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}; \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}; \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\},$$

$$(2) \qquad \left\{ \mathbf{w}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}; \mathbf{w}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}; \mathbf{w}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

(1) Il problema è stabilire se gli unici numeri reali α_1, α_2, α_3 per cui $\alpha_1\mathbf{v}_1 + \alpha_2\mathbf{v}_2 + \alpha_3\mathbf{v}_3 = \underline{0}$ siano $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$, oppure no. Poichè, dati α_1, α_2, $\alpha_3 \in \mathbb{R}$, si ha

$$\alpha_1\mathbf{v}_1 + \alpha_2\mathbf{v}_2 + \alpha_3\mathbf{v}_3 = \alpha_1 \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4\alpha_1 + 4\alpha_2 + 2\alpha_3 \\ -2\alpha_1 + 6\alpha_2 - \alpha_3 \\ -2\alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3 \end{pmatrix},$$

allora $\alpha_1\mathbf{v}_1+\alpha_2\mathbf{v}_2+\alpha_3\mathbf{v}_3=\mathbf{0}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$ se e solo se

$$(*)\qquad \begin{cases}-4\alpha_1+4\alpha_2+2\alpha_3=0\\-2\alpha_1+6\alpha_2-\alpha_3=0\\-2\alpha_1+2\alpha_2+\alpha_3=0\end{cases}$$

Il problema diventa quindi stabilire se il sistema $(*)$ (nelle incognite $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$) abbia un'unica soluzione (e quindi la soluzione nulla $\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$), oppure no.

La matrice aumentata di $(*)$ è: $\begin{pmatrix}-4&4&2&|&0\\-2&6&-1&|&0\\-2&2&1&|&0\end{pmatrix}$.

Facendo un'eliminazione di Gauss si ottiene:

$$\begin{pmatrix}-4&4&2&|&0\\-2&6&-1&|&0\\-2&2&1&|&0\end{pmatrix}\xrightarrow{E_{31}(2)E_{21}(2)E_1(-\frac{1}{4})}\begin{pmatrix}1&-1&-1/2&|&0\\0&4&-2&|&0\\0&0&0&|&0\end{pmatrix}\rightarrow$$

$$\xrightarrow{E_2(\frac{1}{4})}\begin{pmatrix}1&-1&-1/2&|&0\\0&1&-1/2&|&0\\0&0&0&|&0\end{pmatrix}=(\,\mathbf{U}\quad|\quad\mathbf{0}\,).$$

Poichè **non tutte** le colonne di $\mathbf{U}$ sono **dominanti**, allora $(*)$ ha ∞ soluzioni. In particolare $(*)$ ha una soluzione non nulla, e quindi $\{\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3\}$ è **linearmente dipendente** (ad esempio, poichè $(*)$ è equivalente a

$$\begin{cases}\alpha_1-\alpha_2-\frac{1}{2}\alpha_3=0\\ \qquad\alpha_2-\frac{1}{2}\alpha_3=0\end{cases}$$

prendendo $\alpha_3=1$ con la sostituzione all'indietro si ottiene $\alpha_2=\frac{1}{2}$ ed $\alpha_1=\alpha_2+\frac{1}{2}\alpha_3=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$, ossia $\begin{pmatrix}1\\\frac{1}{2}\\1\end{pmatrix}$ è una soluzione non nulla di $(*)$ e $\mathbf{v}_1+\frac{1}{2}\mathbf{v}_2+\mathbf{v}_3=\mathbf{0}$ è una combinazione lineare nulla di $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3$ con coefficienti non tutti nulli).

(2) $$\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}=\alpha_1\mathbf{w}_1+\alpha_2\mathbf{w}_2+\alpha_3\mathbf{w}_3=\alpha_1\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}+\alpha_2\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}+\alpha_3\begin{pmatrix}0\\4\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha_1+\alpha_2\\-\alpha_1+4\alpha_3\\\alpha_1+2\alpha_2\end{pmatrix}$$

$$\iff\qquad(*)\qquad\begin{cases}\alpha_1+\alpha_2=0\\-\alpha_1+4\alpha_3=0\\\alpha_1+2\alpha_2=0\end{cases}$$

Facendo un'eliminazione di Gauss sulla matrice aumentata di $(*)$ si ottiene:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & | & 0 \\ -1 & 0 & 4 & | & 0 \\ 1 & 2 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{31}(-1)E_{21}(1)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 1 & 4 & | & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\xrightarrow{E_{32}(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 1 & 4 & | & 0 \\ 0 & 0 & -4 & | & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_3(-\frac{1}{4})} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 1 & 4 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 \end{pmatrix} = (\mathbf{U} \quad | \quad \mathbf{0}).$$

Poichè **tutte** le colonne di $\mathbf{U}$ sono **dominanti**, allora $(*)$ ha come unica soluzione la soluzione nulla $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, ossia

$$\alpha_1\mathbf{w}_1 + \alpha_2\mathbf{w}_2 + \alpha_3\mathbf{w}_3 = \mathbf{0} \quad \Longrightarrow \quad \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0.$$

Quindi $\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3\}$ è **linearmente indipendente**.

$\boxed{4}$ Siano V uno spazio vettoriale ed $\mathcal{S} = \{\mathbf{v}_1; \mathbf{v}_2; \mathbf{v}_3\}$ un insieme linearmente indipendente di vettori di V.

Si dica quale dei seguenti insiemi di vettori di V è linearmente indipendente:

$$(1) \quad \mathcal{S}_1 = \{\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3; \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_3; \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3\},$$
$$(2) \quad \mathcal{S}_2 = \{\mathbf{v}_1 - 2\mathbf{v}_3; \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2; \mathbf{v}_2 + 2\mathbf{v}_3\}.$$

(1)

$$\underline{0} = \alpha(\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3) + \beta(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_3) + \delta(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3) = (\beta + \delta)\mathbf{v}_1 + (\alpha + \delta)\mathbf{v}_2 + (\alpha + \beta + \delta)\mathbf{v}_3$$

$$\underset{\uparrow \atop \boxed{\text{poichè } \mathcal{S} \text{ è L.I.}}}{\Longleftrightarrow} \qquad (*) \quad \begin{cases} \beta + \delta = 0 \\ \alpha + \delta = 0 \\ \alpha + \beta + \delta = 0 \end{cases}$$

Facendo un'eliminazione di Gauss sulla matrice aumentata di $(*)$ si ottiene:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & | & 0 \\ 1 & 0 & 1 & | & 0 \\ 1 & 1 & 1 & | & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{12}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & | & 0 \\ 0 & 1 & 1 & | & 0 \\ 1 & 1 & 1 & | & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{31}(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & | & 0 \\ 0 & 1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\xrightarrow{E_{32}(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & | & 0 \\ 0 & 1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & -1 & | & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_3(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & | & 0 \\ 0 & 1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 \end{pmatrix} = (\,\mathbf{U} \quad | \quad \mathbf{0}\,).$$

Poichè **tutte** le colonne di $\mathbf{U}$ sono **dominanti**, l'unica soluzione di $(*)$ è $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, quindi $\mathcal{S}_1$ è **linearmente indipendente**.

(2)

$$\underline{0} = \alpha(\mathbf{v}_1 - 2\mathbf{v}_3) + \beta(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) + \delta(\mathbf{v}_2 + 2\mathbf{v}_3) = (\alpha + \beta)\mathbf{v}_1 + (\beta + \delta)\mathbf{v}_2 + (-2\alpha + 2\delta)\mathbf{v}_3$$

$$\underset{\uparrow \atop \boxed{\text{poichè } \mathcal{S} \text{ è L.I.}}}{\Longleftrightarrow} \qquad (*) \quad \begin{cases} \alpha + \beta = 0 \\ \beta + \delta = 0 \\ -2\alpha + 2\delta = 0 \end{cases}$$

Facendo un'eliminazione di Gauss sulla matrice aumentata di $(*)$ si ottiene:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 1 & 1 & | & 0 \\ -2 & 0 & 2 & | & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{31}(2)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 2 & 2 & | & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{32}(-2)}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} = (\,\mathbf{U} \quad | \quad \mathbf{0}\,).$$

Poichè $\mathbf{U}$ ha una colonna non dominante, $(*)$ ha ∞ soluzioni, in particolare $(*)$ ha una soluzione non nulla, quindi $\mathcal{S}_2$ è **linearmente dipendente**.

$\boxed{5}$ Sia W l'insieme delle matrici 2×2 reali simmetriche. L'insieme

$$\mathcal{S} = \left\{ \mathbf{C}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}; \mathbf{C}_2 = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}; \mathbf{C}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \mathbf{C}_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \mathbf{C}_5 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

è un insieme di generatori di W.

Si trovi una base di W contenuta in $\mathcal{S}$.

$\boxed{1^0 \text{ MODO}}$ "Restringiamo" un insieme di generatori di W.

Sia $\alpha_1\mathbf{C}_1 + \alpha_2\mathbf{C}_2 + \alpha_3\mathbf{C}_3 + \alpha_4\mathbf{C}_4 + \alpha_5\mathbf{C}_5 = \mathbf{O}$ una combinazione lineare nulla dei vettori di $\mathcal{S}$. Allora da

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \alpha_1 \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \alpha_4 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \alpha_5 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 & 2\alpha_1 + 3\alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_5 \\ 2\alpha_1 + 3\alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_5 & \alpha_4 + \alpha_5 \end{pmatrix}$$

si ottiene il sistema lineare, nelle incognite $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5$

$$\begin{cases} \alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = 0 \\ 2\alpha_1 + 3\alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_5 = 0 \\ \alpha_4 + \alpha_5 = 0 \end{cases}$$

Facendo una E.G. sulla sua matrice aumentata si ha:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{E_2(-1)E_{21}(-2)} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right),$$

per cui il sistema è equivalente al sistema

$$(*) \qquad \begin{cases} \alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = 0 \\ \alpha_2 + \alpha_3 + 2\alpha_4 - \alpha_5 = 0 \\ \alpha_4 + \alpha_5 = 0 \end{cases}$$

il cui insieme delle soluzioni è

$$\left\{ \begin{pmatrix} h - 5k \\ -h + 3k \\ h \\ -k \\ k \end{pmatrix} | h, k \in \mathbb{R} \right\}$$

Prendendo una sua soluzione non nulla, ad esempio $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ (si ponga $h = 1$ e $k = 0$), si ottiene

$$\mathbf{C}_1 - \mathbf{C}_2 + \mathbf{C}_3 = \mathbf{O},$$

per cui $\mathbf{C}_1$,$\mathbf{C}_2$ e $\mathbf{C}_3$ sono combinazioni lineari degli altri elementi di $\mathcal{S}$ e ciascuno di loro puó essere scelto come elemento da eliminare da $\mathcal{S}$.

Scegliamo di togliere da $\mathcal{S}$ la matrice $\mathbf{C}_1$ (combinazione lineare degli altri elementi di $\mathcal{S}$) e poniamo

$$\mathcal{S}_1 = \left\{ \mathbf{C}_2 = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}; \mathbf{C}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \mathbf{C}_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \mathbf{C}_5 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$\mathcal{S}_1$ è ancora un insieme di generatori di W.

Sia $\alpha_1\mathbf{C}_2 + \alpha_2\mathbf{C}_3 + \alpha_3\mathbf{C}_4 + \alpha_4\mathbf{C}_5 = \mathbf{O}$ una combinazione lineare nulla dei vettori di $\mathcal{S}_1$. Allora da

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \alpha_1 \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \alpha_4 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 & 3\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_4 \\ 3\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_4 & \alpha_3 + \alpha_4 \end{pmatrix}$$

si ottiene il sistema lineare, nelle incognite $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$

$$\begin{cases} 2\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \\ 3\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_4 = 0 \\ \alpha_3 + \alpha_4 = 0 \end{cases}$$

Facendo una E.G. sulla sua matrice aumentata si ha:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{E_{21}(-3)E_1(\frac{1}{2})} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{E_2(-2)} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right),$$

per cui il sistema è equivalente al sistema

$$(*) \qquad \begin{cases} \alpha_1 + \frac{1}{2}\alpha_2 + \frac{1}{2}\alpha_3 = 0 \\ \alpha_2 + 3\alpha_3 - 2\alpha_4 = 0 \\ \alpha_3 + \alpha_4 = 0 \end{cases}$$

il cui insieme delle soluzioni è

$$\left\{ \begin{pmatrix} -2h \\ 5h \\ -h \\ h \end{pmatrix} | h \in \mathbb{R} \right\}$$

Prendendo una sua soluzione non nulla, ad esempio $\begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ (si ponga $h = 1$), si ottiene

$$-2\mathbf{C}_2 + 5\mathbf{C}_3 - \mathbf{C}_4 + \mathbf{C}_5 = \mathbf{O},$$

per cui $\mathbf{C}_2$,$\mathbf{C}_3$, $\mathbf{C}_4$ e $\mathbf{C}_5$ sono combinazioni lineari degli altri elementi di $\mathcal{S}_1$ e ciascuno di loro puó essere scelto come elemento da eliminare da $\mathcal{S}_1$.

Scegliamo di togliere da $\mathcal{S}_1$ la matrice $\mathbf{C}_2$ (combinazione lineare degli altri elementi di $\mathcal{S}_1$) e poniamo

$$\mathcal{S}_2 = \left\{ \mathbf{C}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \mathbf{C}_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \mathbf{C}_5 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$\mathcal{S}_2$ è ancora un insieme di generatori di W.

Sia $\alpha_1\mathbf{C}_3 + \alpha_2\mathbf{C}_4 + \alpha_3\mathbf{C}_5 = \mathbf{O}$ una combinazione lineare nulla dei vettori di $\mathcal{S}_2$. Allora da

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \alpha_1 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1+\alpha_2 & \alpha_1+\alpha_3 \\ \alpha_1+\alpha_3 & \alpha_2+\alpha_3 \end{pmatrix}$$

si ottiene il sistema lineare, nelle incognite $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$

$$\begin{cases} \alpha_1+\alpha_2 = 0 \\ \alpha_1+\alpha_3 = 0 \\ \alpha_2+\alpha_3 = 0 \end{cases}$$

Facendo una E.G. sulla sua matrice aumentata si ottiene:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{E_{21}(-1)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{E_{32}(-1)E_2(-1)}$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{E_3(\frac{1}{2})} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

L'unica soluzione del sistema è quella nulla, per cui $\mathcal{S}_2$ è linearmente indipendente, ed è una base di W contenuta in $\mathcal{S}$.

$\boxed{2^0 \text{ MODO}}$ Invece di togliere successivamente vettori che siano combinazioni lineari di quelli rimasti, ossia invece di "restringere"insiemi di generatori, si puó "allargare"insiemi L.I.

Ad esempio:

1. $\mathbf{C}_1 \neq \mathbf{0}$ per cui $\{\mathbf{C}_1\}$ è L.I. Teniamo $\mathbf{C}_1$. Chiamiamo $\mathcal{S}_1 = \mathcal{S}$.

2. $\{\mathbf{C}_1; \mathbf{C}_2\}$ è L.I. Teniamo $\mathbf{C}_2$. Chiamiamo $\mathcal{S}_2 = \mathcal{S}_1$.

3. $\{\mathbf{C}_1; \mathbf{C}_2; \mathbf{C}_3\}$ è L.D. Togliamo $\mathbf{C}_3$. Chiamiamo $\mathcal{S}_3 = \mathcal{S}_2 \setminus \{\mathbf{C}_3\} = \{\mathbf{C}_1; \mathbf{C}_2; \mathbf{C}_4; \mathbf{C}_5\}$.

4. $\{\mathbf{C}_1; \mathbf{C}_2; \mathbf{C}_4\}$ è L.I. Teniamo $\mathbf{C}_4$. Chiamiamo $\mathcal{S}_4 = \mathcal{S}_3$.

5. $\{\mathbf{C}_1; \mathbf{C}_2; \mathbf{C}_4; \mathbf{C}_5\}$ è L.D. Togliamo $\mathbf{C}_5$. Chiamiamo $\mathcal{S}_5 = \mathcal{S}_4 \setminus \{\mathbf{C}_5\} = \{\mathbf{C}_1; \mathbf{C}_2; \mathbf{C}_4\}$.

Dunque $\mathcal{S}_5 = \{\mathbf{C}_1; \mathbf{C}_2; \mathbf{C}_4\}$ è una base di W contenuta in $\mathcal{S}$.

ESERCITAZIONI* 5

$\boxed{1}$ (a) Esiste un'applicazione lineare $f_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tale che $N(f_1) = \mathbb{R}^2$?

(b) Esiste un'applicazione lineare $f_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tale che $N(f_2) = \mathbb{R}^2 \setminus \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$?

(c) Esiste un'applicazione lineare $f_3 : \mathbb{R}^2 \setminus \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \to \mathbb{R}^2$ tale che $N(f_3) = \mathbb{R}^2 \setminus \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$?

$\boxed{2}$ Sia $\quad \mathbf{A}_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & -\alpha^2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & \alpha+1 \\ 3 & -3\alpha^2 & 3 & \alpha+3 \end{pmatrix}, \quad$ dove $\alpha \in \mathbb{C}$.

(a) Per ogni $\alpha \in \mathbb{C}$ si dica qual è $rk(\mathbf{A}_\alpha)$ e si trovino una base $\mathcal{B}_\alpha$ di $C(\mathbf{A}_\alpha)$ ed una base $\mathcal{D}_\alpha$ di $R(\mathbf{A}_\alpha)$.

(b) Sia $\mathbf{A} = \mathbf{A}_0$ la matrice che si ottiene ponendo $\alpha = 0$. Si trovi una base dello spazio nullo $N(\mathbf{A})$ di $\mathbf{A}$.

$\boxed{3}$ Siano $\mathbf{w}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{w}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \mathbf{w}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{z}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \mathbf{z}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{z}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(a) Si provi che $\mathcal{B} = \{\mathbf{w}_1; \mathbf{w}_2; \mathbf{w}_3\}$ e $\mathcal{B}' = \{\mathbf{z}_1; \mathbf{z}_2; \mathbf{z}_3\}$ sono due basi ordinate di $\mathbb{R}^3$.

(b) Si scriva la matrice di passaggio da $\mathcal{B}'$ a $\mathcal{B}$.

$\boxed{4}$ Sia $f : M_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^2$ definita da $f(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} a+b \\ a+c \end{pmatrix}$.

(a) Si provi che f è un'applicazione lineare.

(b) Si determini la matrice $\mathbf{A}$ associata ad f rispetto alle basi ordinate

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} \quad \text{e} \quad \mathcal{D} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

su dominio e codominio rispettivamente.

$\boxed{5}$ Sia $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ la matrice associata ad un'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ rispetto alle basi ordinate $\mathcal{B} = \left\{ \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ e $\mathcal{D} = \left\{ \mathbf{w}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}; \mathbf{w}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ su dominio e codominio rispettivamente. Si determini la matrice $\mathbf{A}'$ associata ad f rispetto alle basi ordinate $\mathcal{B}' = \left\{ \mathbf{v}_1' = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \mathbf{v}_2' = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}; \mathbf{v}_3' = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ e $\mathcal{D}' = \left\{ \mathbf{w}_1' = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \mathbf{w}_2' = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ su dominio e codominio rispettivamente.

Svolgimento delle Esercitazioni *5

$\boxed{1}$ (a) Esiste un'applicazione lineare $f_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tale che $N(f_1) = \mathbb{R}^2$?

(b) Esiste un'applicazione lineare $f_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tale che $N(f_2) = \mathbb{R}^2 \setminus \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$?

(c) Esiste un'applicazione lineare $f_3 : \mathbb{R}^2 \setminus \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \to \mathbb{R}^2$ tale che $N(f_3) = \mathbb{R}^2 \setminus \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$?

(a) Supponiamo che f_1 esista, e vediamo se la condizione imposta, ossia

$$\bullet \quad N(f_1) = \mathbb{R}^2,$$

contraddice o meno le condizioni che f_1 deve soddisfare per essere un'applicazione lineare, ossia:

(I) il dominio ed il codominio di f_1 devono essere spazi vettoriali (entrambi complessi oppure entrambi reali),

(II) $f_1(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) = f_1(\mathbf{v}_1) + f_1(\mathbf{v}_2)$ per ogni $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ nel dominio di f_1,

(III) $f_1(\alpha \mathbf{v}) = \alpha f_1(\mathbf{v})$ per ogni $\mathbf{v}$ nel dominio di f_1, ed ogni scalare α.

Osserviamo subito che il dominio ed il codominio di f_1 sono entrambi $\mathbb{R}^2$, che è uno spazio vettoriale reale, e quindi che (I) è soddisfatta a prescindere da $\bullet$.

Poichè $N(f_1) = \{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2 | f_1(\mathbf{v}) = \mathbf{0}\}$, allora

$$N(f_1) = \mathbb{R}^2 \quad \iff \quad f_1(\mathbf{v}) = \mathbf{0} \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbb{R}^2 \quad \iff f_1 = 0,$$

ossia se e solo se f_1 è la funzione definita in $\mathbb{R}^2$ e a valori in $\mathbb{R}^2$ che associa ad ogni vettore di $\mathbb{R}^2$ il vettore $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ (chiamiamo tale funzione 0 e scriviamo che $0(\mathbf{v}) = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^2$ per ogni $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$).

Occorre quindi vedere se la funzione 0 definita in $\mathbb{R}^2$ e a valori in $\mathbb{R}^2$ verifica (II) e (III), oppure no.

Per (II): $0(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) = \mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{0} = 0(\mathbf{v}_1) + 0(\mathbf{v}_2)$ per ogni $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in \mathbb{R}^2$.

Per (III): $0(\alpha \mathbf{v}) = \mathbf{0} = \alpha \mathbf{0} = 0(\mathbf{v})$ per ogni $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$, ed ogni scalare α.

Dunque esiste un'applicazione lineare $f_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tale che $N(f_1) = \mathbb{R}^2$, anzi ne esiste una sola ed è definita da $f_1(\mathbf{v}) = \mathbf{0}$ per ogni $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$.

D'altra parte sapevamo già che per ogni scalare λ la funzione $f_\lambda : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definita da $f_\lambda(\mathbf{v}) = \lambda \mathbf{v}$ è un'applicazione lineare. In particolare prendendo $\lambda = 0$ si ottiene l'applicazione lineare 0.

(b) Procediamo come al punto precedente supponendo che f_2 esista ed osserviamo subito che la condizione (I) è verificata a prescindere dalla condizione imposta, che in questo caso è

$$\bullet \quad \{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2 | f_2(\mathbf{v}) = \mathbf{0}\} = N(f_2) = \mathbb{R}^2 \setminus \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Dunque si richiede che

$$f_2(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}) \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad f_2(\mathbf{v}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{per ogni} \quad \mathbf{v} \neq \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Perchè sia soddisfatta la condizione (II), occorre che

$$f_2(\mathbf{v}_1+\mathbf{v}_2)=f_1(\mathbf{v}_1)+f_1(\mathbf{v}_2) \quad \forall \quad \mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2\in\mathbb{R}^2,$$

in particolare per ogni $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2\in\mathbb{R}^2$ con $\mathbf{v}_1\neq\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\neq\mathbf{v}_2$ e $\mathbf{v}_1+\mathbf{v}_2=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ (ad esempio $\mathbf{v}_1=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ e $\mathbf{v}_2=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$) si dovrebbe avere

$$\mathbf{0}\neq f_2\left(\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right) \underset{\mathbf{v}_1+\mathbf{v}_2=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}}{\underset{\uparrow}{=}} f_2(\mathbf{v}_1+\mathbf{v}_2) \underset{f_2 \text{ appl. lineare}}{\underset{\uparrow}{=}} f_2(\mathbf{v}_1)+f_2(\mathbf{v}_2) \underset{\mathbf{v}_1\neq\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\neq\mathbf{v}_2}{\underset{\uparrow}{=}} \mathbf{0}+\mathbf{0}=\mathbf{0},$$

che non è possibile. Dunque f_2 soddisfacente a tutte le condizioni richieste non esiste.

Avremmo potuto rispondere alla domanda con meno fatica "ricordandoci" che lo spazio nullo di un'applicazione lineare è sempre un sottospazio del dominio. Quindi se f_2 esistesse il suo spazio nullo, che si richiede essere $\mathbb{R}^2\setminus\left\{\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right\}$, dovrebbe essere un sottospazio di $\mathbb{R}^2$. Ma

$$(*) \quad \mathbb{R}^2\setminus\left\{\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right\} \quad \textbf{non è un sottospazio di} \quad \mathbb{R}^2.$$

Un modo per vedere $(*)$ è osservare che, ad esempio, $\mathbf{u}=\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^2\setminus\left\{\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right\}$, ma il multiplo scalare $\alpha\mathbf{u}$ di $\mathbf{u}$ con $\alpha=\frac{1}{2}$ non appartiene a $\mathbb{R}^2\setminus\left\{\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right\}$: $\frac{1}{2}\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$.

(c) Abbiamo visto al punto precedente che $\mathbb{R}^2\setminus\left\{\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right\}$ non è uno spazio vettoriale (esiste $\mathbf{u}\in\mathbb{R}^2\setminus\left\{\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right\}$ ed un suo multiplo scalare $\frac{1}{2}\mathbf{u}\notin\mathbb{R}^2\setminus\left\{\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right\}$) quindi ogni funzione definita su $\mathbb{R}^2\setminus\left\{\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right\}$, non essendo definita su di uno spazio vettoriale, non può essere un'applicazione lineare. In altre parole una f_3 soddisfacente le condizioni richieste non esiste.

$\boxed{2}$ Sia $\quad \mathbf{A}_\alpha=\begin{pmatrix}1&-\alpha^2&1&1\\1&3&2&\alpha+1\\3&-3\alpha^2&3&\alpha+3\end{pmatrix}, \quad$ dove $\alpha\in\mathbb{C}$.

(a) Per ogni $\alpha\in\mathbb{C}$ si dica qual è $rk(\mathbf{A}_\alpha)$ e si trovino una base $\mathcal{B}_\alpha$ di $C(\mathbf{A}_\alpha)$ ed una base $\mathcal{D}_\alpha$ di $R(\mathbf{A}_\alpha)$.

(b) Sia $\mathbf{A}=\mathbf{A}_0$ la matrice che si ottiene ponendo $\alpha=0$. Si trovi una base dello spazio nullo $N(\mathbf{A})$ di $\mathbf{A}$.

(a) $$\mathbf{A}_\alpha=\begin{pmatrix}1&-\alpha^2&1&1\\1&3&2&\alpha+1\\3&-3\alpha^2&3&\alpha+3\end{pmatrix}\xrightarrow{E_{31}(-3)E_{21}(-1)}\begin{pmatrix}1&-\alpha^2&1&1\\0&\alpha^2+3&1&\alpha\\0&0&0&\alpha\end{pmatrix}=\mathbf{B}_\alpha$$

$\boxed{1^0 \text{ CASO}}$ $\alpha^2+3=0$ cioè $\alpha \in \{\sqrt{3}i, -\sqrt{3}i\}$

$$\mathbf{B}_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \alpha \\ 0 & 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix} \xrightarrow{E_3(\frac{1}{\alpha}) \quad (\alpha \neq 0!)} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \alpha \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{U}_\alpha$$

$\text{rk}(A_\alpha) = 3$

Una base $\mathcal{B}_\alpha$ di $C(\mathbf{A}_\alpha)$ è $\mathcal{B}_\alpha = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha+1 \\ \alpha+3 \end{pmatrix} \right\}$.

Una base $\mathcal{D}_\alpha$ di $R(\mathbf{A}_\alpha)$ è $\mathcal{D}_\alpha = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ \overline{\alpha} \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

(Quindi:

$$\mathcal{B}_{\sqrt{3}i} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ 1+\sqrt{3}i \\ 3+\sqrt{3}i \end{pmatrix} \right\} \quad \text{e} \quad \mathcal{D}_{\sqrt{3}i} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -\sqrt{3}i \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\},$$

e

$$\mathcal{B}_{-\sqrt{3}i} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ 1-\sqrt{3}i \\ 3-\sqrt{3}i \end{pmatrix} \right\} \quad \text{e} \quad \mathcal{D}_{-\sqrt{3}i} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ \sqrt{3}i \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.)$$

$\boxed{2^0 \text{ CASO}}$ $\alpha^2+3 \neq 0$ cioè $\alpha \notin \{\sqrt{3}i, -\sqrt{3}i\}$

$$\mathbf{B}_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & -\alpha^2 & 1 & 1 \\ 0 & \alpha^2+3 & 1 & \alpha \\ 0 & 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix} \xrightarrow{E_2(\frac{1}{\alpha^2+3})} \begin{pmatrix} 1 & -\alpha^2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{\alpha^2+3} & \frac{\alpha}{\alpha^2+3} \\ 0 & 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix} = \mathbf{C}_\alpha$$

$\boxed{1^0 \text{ Sottocaso}}$ $\alpha = 0$ $\quad \mathbf{C}_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{U}_0$

$\text{rk}(\mathbf{A}_0) = 2$

Una base $\mathcal{B}_0$ di $C(\mathbf{A}_0)$ è $\mathcal{B}_0 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$.

Una base $\mathcal{D}_0$ di $R(\mathbf{A}_0)$ è $\mathcal{D}_0 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{1}{3} \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$.

$\boxed{2^0 \text{ Sottocaso}}$ $\alpha \notin \{\sqrt{3}i, -\sqrt{3}i, 0\}$

$$\mathbf{C}_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & -\alpha^2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{\alpha^2+3} & \frac{\alpha}{\alpha^2+3} \\ 0 & 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix} \xrightarrow{E_3(\frac{1}{\alpha})} \begin{pmatrix} 1 & -\alpha^2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{\alpha^2+3} & \frac{\alpha}{\alpha^2+3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{U}_\alpha$$

$\mathrm{rk}(A_\alpha) = 3$

Una base $\mathcal{B}_\alpha$ di $C(\mathbf{A}_\alpha)$ è $\mathcal{B}_\alpha = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} -\alpha^2 \\ 3 \\ -3\alpha^2 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha+1 \\ \alpha+3 \end{pmatrix} \right\}$.

Una base $\mathcal{D}_\alpha$ di $R(\mathbf{A}_\alpha)$ è $\mathcal{D}_\alpha = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -\overline{\alpha}^2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{1}{\overline{\alpha}^2+3} \\ \frac{\overline{\alpha}}{\overline{\alpha}^2+3} \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

(b) $\qquad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}$

Una forma ridotta di Gauss per $\mathbf{A}$ è $\mathbf{U}_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ trovata nel 1^0 sottocaso.

Per il Teorema nullità+rango,

$$\dim N(\mathbf{A}) = \text{(numero delle colonne di } \mathbf{A}) - \mathrm{rk}\,(\mathbf{A}) = 4 - 2 = 2.$$

Poichè $N(\mathbf{A}) = N(\mathbf{U}_0) = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{C}^4 | \mathbf{U}_0\mathbf{x} = \mathbf{0} \right\}$, allora

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in N(\mathbf{A}) \iff \begin{cases} x_1 + x_3 + x_4 &= 0 \\ \quad x_2 + \frac{1}{3}x_3 &= 0 \end{cases}$$

Prendendo come parametri le variabili corrispondenti alle colonne libere di $\mathbf{U}_0$, ossia la 3^a e la 4^a, con la sostituzione all'indietro si ottiene

$$\begin{cases} x_3 &= & h & & \\ x_4 &= & k & & \\ x_2 &= & -\frac{1}{3}x_3 &= & -\frac{1}{3}h \\ x_1 &= & -x_3 - x_4 &= & -h-k \end{cases}$$

Quindi $N(\mathbf{A}) = N(\mathbf{U}_0) = \left\{ \begin{pmatrix} -h-k \\ -\frac{1}{3}h \\ h \\ k \end{pmatrix} | h, k \in \mathbb{C} \right\}$. Ponendo:

$$\mathbf{v}_1 \underset{\substack{\uparrow \\ \boxed{\substack{h=1 \\ k=0}}}}{=} \begin{pmatrix} -1 \\ -\frac{1}{3} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{v}_2 \underset{\substack{\uparrow \\ \boxed{\substack{h=0 \\ k=1}}}}{=} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

si ottiene che una base di $N(\mathbf{A})$ è

$$\left\{ \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -\frac{1}{3} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

$\boxed{3}$ Siano $\mathbf{w}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{w}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \mathbf{w}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{z}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \mathbf{z}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{z}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(a) Si provi che $\mathcal{B} = \{\mathbf{w}_1; \mathbf{w}_2; \mathbf{w}_3\}$ e $\mathcal{B}' = \{\mathbf{z}_1; \mathbf{z}_2; \mathbf{z}_3\}$ sono due basi ordinate di $\mathbb{R}^3$.

(b) Si scriva la matrice di passaggio da $\mathcal{B}'$ a $\mathcal{B}$.

(a) Siano $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ ed $\mathbf{A}' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ le matrici che hanno come colonne gli elementi di $\mathcal{B}$ e di $\mathcal{B}'$ rispettivamente.

Occorre provare che entrambe hanno rango uguale a 3 (si veda l'Esercizio Tipo 10).

Facendo una E.G. su $\mathbf{A}$ si ottiene:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{21}(-2)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{31}(1)E_2(-\frac{1}{2})} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \xrightarrow{E_3(-2)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{U}$$

per cui rk($\mathbf{A}$)=rk($\mathbf{U}$) $= 3$, ed, analogamente, facendo una E.G. su $\mathbf{A}'$ si ottiene:

$$\mathbf{A}' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{31}(-3)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & -6 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{32}(6)E_2(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{U}'$$

per cui rk($\mathbf{A}'$)=rk($\mathbf{U}'$) $= 3$.

(b) La matrice di passaggio $\mathbf{M}_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{B}'}$ da $\mathcal{B}'$ a $\mathcal{B}$ è

$$\mathbf{M}_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{B}'} = (\,C_{\mathcal{B}}(\mathbf{z}_1) \quad C_{\mathcal{B}}(\mathbf{z}_2) \quad C_{\mathcal{B}}(\mathbf{z}_3)\,) = \left(C_{\mathcal{B}}(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}) \quad C_{\mathcal{B}}(\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}) \quad C_{\mathcal{B}}(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}) \right).$$

Piuttosto che calcolare separatamente $C_{\mathcal{B}}(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix})$, $C_{\mathcal{B}}(\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix})$ e $C_{\mathcal{B}}(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix})$, calcoliamo $C_{\mathcal{B}}(\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix})$ per un generico vettore $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$, e specializziamo la formula ottenuta ai tre diversi vettori $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Poichè

$$C_{\mathcal{B}}(\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \delta \end{pmatrix} \quad | \quad \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \delta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

allora

$$C_{\mathcal{B}}(\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \delta \end{pmatrix} \quad | \quad \begin{pmatrix} \alpha+\beta \\ 2\alpha+\delta \\ -\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

ossia α, β e δ sono tali che

$$\begin{cases} \alpha+\beta = a \\ 2\alpha+\delta = b \\ -\beta = c \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} \alpha = a+c \\ \beta = -c \\ \delta = -2a+b-2c \end{cases}$$

per cui

$$C_{\mathcal{B}}(\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} a+c \\ -c \\ -2a+b-2c \end{pmatrix}$$

Dunque

$$\mathbf{M}_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ -3 & 0 & -1 \\ -8 & -5 & -2 \end{pmatrix}.$$

$\boxed{4}$ Sia $f : M_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^2$ definita da $f(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} a+b \\ a+c \end{pmatrix}$.

(a) Si provi che f è un'applicazione lineare.

(b) Si determini la matrice $\mathbf{A}$ associata ad f rispetto alle basi ordinate

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} \quad \text{e} \quad \mathcal{D} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

su dominio e codominio rispettivamente.

(a) Per provare che f è un'applicazione lineare occorre provare :

1. $f(\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix}) \underset{?}{=} f(\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}) + f(\begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix})$
   per ogni $a_1, b_1, c_1, d_1, a_2, b_2, c_2, d_2 \in \mathbb{R}$
2. $f(\alpha \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}) \underset{?}{=} \alpha f(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix})$ per ogni $\alpha, a, b, c, d \in \mathbb{R}$

1. $$f(\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix}) \underset{\boxed{\text{def. somma matrici}}}{\underset{\uparrow}{=}} f(\begin{pmatrix} a_1+a_2 & b_1+b_2 \\ c_1+c_2 & d_1+d_2 \end{pmatrix}) \underset{\boxed{\text{def. f}}}{\underset{\uparrow}{=}}$$

$$= \begin{pmatrix} (a_1+a_2)+(b_1+b_2) \\ (a_1+a_2)+(c_1+c_2) \end{pmatrix} \underset{\boxed{\text{propr. assoc. e commut. di + in } \mathbb{R}}}{\underset{\uparrow}{=}} \begin{pmatrix} (a_1+b_1)+(a_2+b_2) \\ (a_1+c_1)+(a_2+c_2) \end{pmatrix} \underset{\boxed{\text{def. somma vettori colonna}}}{\underset{\uparrow}{=}}$$

$$= \begin{pmatrix} a_1+b_1 \\ a_1+c_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2+b_2 \\ a_2+c_2 \end{pmatrix} \underset{\boxed{\text{def. f}}}{\underset{\uparrow}{=}} f(\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}) + f(\begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix})$$

2. $$f(\alpha \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}) \underset{\boxed{\text{def. prod. di uno scal. per una matr.}}}{\underset{\uparrow}{=}} f(\begin{pmatrix} \alpha a & \alpha b \\ \alpha c & \alpha d \end{pmatrix}) \underset{\boxed{\text{def. f}}}{\underset{\uparrow}{=}} \begin{pmatrix} \alpha a + \alpha b \\ \alpha a + \alpha c \end{pmatrix} \underset{\boxed{\text{propr. distr. in } \mathbb{R}}}{\underset{\uparrow}{=}}$$

$$= \begin{pmatrix} \alpha(a+b) \\ \alpha(a+c) \end{pmatrix} \underset{\boxed{\text{def. prod. di uno scal. per un vett. colonna}}}{\underset{\uparrow}{=}} \alpha \begin{pmatrix} a+b \\ a+c \end{pmatrix} \underset{\boxed{\text{def. f}}}{\underset{\uparrow}{=}} \alpha f(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix})$$

(b) La matrice $\mathbf{A}$ associata ad f rispetto alle basi ordinate $\mathcal{B}$ e $\mathcal{D}$ su dominio e codominio rispettivamente è la matrice

$$\mathbf{A} = \left(C_{\mathcal{D}}(f(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix})) \quad C_{\mathcal{D}}(f(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix})) \quad C_{\mathcal{D}}(f(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix})) \quad C_{\mathcal{D}}(f(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix})) \right).$$

Dalla definizione di f si ottiene:

$$f(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad f(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix},$$

$$f(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad f(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

quindi $A = \left(C_{\mathcal{D}}(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}) \quad C_{\mathcal{D}}(\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}) \quad C_{\mathcal{D}}(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}) \quad C_{\mathcal{D}}(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}) \right)$.

Calcoliamo le coordinate rispetto alla base ordinata $\mathcal{D}$ di un generico elemento $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$.

$$C_{\mathcal{D}}(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \quad \text{t.c.} \quad \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Facendo un'eliminazione di Gauss sulla matrice aumentata del sistema

$$\begin{cases} \alpha+\beta & = & a \\ 2\alpha-\beta & = & b \end{cases}$$

otteniamo:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & a \\ 2 & -1 & b \end{array}\right) \xrightarrow{E_{21}(-2)} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & a \\ 0 & -3 & b-2a \end{array}\right) \xrightarrow{E_{2}(-1/3)} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & a \\ 0 & 1 & (2a-b)/3 \end{array}\right),$$

per cui con la sostituzione all'indietro

$$\begin{cases} \beta & = & (2a-b)/3 \\ \alpha & = & -\beta+a & = & (b-2a)/3+a & = & (a+b)/3 \end{cases}$$

Dunque $C_{\mathcal{D}}(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} (a+b)/3 \\ (2a-b)/3 \end{pmatrix}$, e in particolare si ha:

$$C_{\mathcal{D}}(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}) \underset{\substack{\uparrow \\ \boxed{\begin{array}{c} a=2 \\ b=1 \end{array}}}}{=} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad C_{\mathcal{D}}(\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}) \underset{\substack{\uparrow \\ \boxed{\begin{array}{c} a=2 \\ b=2 \end{array}}}}{=} \begin{pmatrix} 4/3 \\ 4/3 \end{pmatrix},$$

$$C_{\mathcal{D}}(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}) \underset{\substack{\uparrow \\ \boxed{\begin{array}{c} a=1 \\ b=0 \end{array}}}}{=} \begin{pmatrix} 1/3 \\ 2/3 \end{pmatrix}, \qquad C_{\mathcal{D}}(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}) \underset{\substack{\uparrow \\ \boxed{\begin{array}{c} a=0 \\ b=0 \end{array}}}}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

La matrice $\mathbf{A}$ associata ad f rispetto alle basi ordinate $\mathcal{B}$ e $\mathcal{D}$ su dominio e codominio rispettivamente è quindi la matrice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 4/3 & 1/3 & 0 \\ 1 & 2/3 & 2/3 & 0 \end{pmatrix}.$$

$\boxed{5}$ Sia $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ la matrice associata ad un'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ rispetto alle basi ordinate $\mathcal{B} = \left\{ \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ e $\mathcal{D} = \left\{ \mathbf{w}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}; \mathbf{w}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ su dominio e codominio rispettivamente. Si determini la matrice $\mathbf{A}'$ associata ad f rispetto alle basi ordinate $\mathcal{B}' = \left\{ \mathbf{v}_1' = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \mathbf{v}_2' = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}; \mathbf{v}_3' = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ e $\mathcal{D}' = \left\{ \mathbf{w}_1' = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \mathbf{w}_2' = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ su dominio e codominio rispettivamente.

La matrice $\mathbf{A}'$ associata ad f rispetto alle basi ordinate $\mathcal{B}'$ e $\mathcal{D}'$ su dominio e codominio rispettivamente è la matrice

$$\mathbf{A}' = \mathbf{M}_{\mathcal{D}\leftarrow\mathcal{D}'}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{M}_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{B}'} \quad \text{dove } \mathbf{M}_{\mathcal{D}\leftarrow\mathcal{D}'} \text{ è la matrice di passaggio da } \mathcal{D}' \text{ a } \mathcal{D} \text{ e}$$
$$\mathbf{M}_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{B}'} \text{ è la matrice di passaggio da } \mathcal{B}' \text{ a } \mathcal{B}.$$

Per calcolare $\mathbf{M}_{\mathcal{D}\leftarrow\mathcal{D}'} = (\, C_{\mathcal{D}}(\mathbf{w}_1') \quad C_{\mathcal{D}}(\mathbf{w}_2')\,)$, calcoliamo per prima cosa le coordinate rispetto a $\mathcal{D}$ di un generico $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$.

$$C_{\mathcal{D}}(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \quad | \quad \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \alpha\mathbf{w}_1 + \beta\mathbf{w}_2 = \alpha\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ -\alpha+\beta \end{pmatrix}$$

Risolvendo il sistema $\begin{cases} \alpha & = & a \\ -\alpha+\beta & = & b \end{cases}$ otteniamo $\begin{cases} \alpha & = & a \\ \beta & = & a+b \end{cases}$, quindi

$$C_{\mathcal{D}}(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} a \\ a+b \end{pmatrix}.$$

In particolare, specializzando a $\mathbf{w}_1'$ e $\mathbf{w}_2'$ otteniamo

$$C_{\mathcal{D}}(\mathbf{w}_1') = C_{\mathcal{D}}(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}) \underset{\uparrow \atop \boxed{\begin{matrix} a=1 \\ b=1 \end{matrix}}}{=} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad C_{\mathcal{D}}(\mathbf{w}_2') = C_{\mathcal{D}}(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}) \underset{\uparrow \atop \boxed{\begin{matrix} a=0 \\ b=1 \end{matrix}}}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

per cui $\mathbf{M}_{\mathcal{D}\leftarrow\mathcal{D}'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. L'inversa di $\mathbf{M}_{\mathcal{D}\leftarrow\mathcal{D}'}$ e' quindi $\mathbf{M}^{-1}_{\mathcal{D}\leftarrow\mathcal{D}'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$.

Per calcolare $\mathbf{M}_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{B}'} = (\, C_{\mathcal{B}}(\mathbf{v}_1') \quad C_{\mathcal{B}}(\mathbf{v}_2') \quad C_{\mathcal{B}}(\mathbf{v}_3')\,)$, calcoliamo per prima cosa le coordinate rispetto a $\mathcal{B}$ di un generico $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$.

$$C_{\mathcal{B}}(\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \delta \end{pmatrix} \quad | \quad \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \alpha\mathbf{v}_1 + \beta\mathbf{v}_2 + \delta\mathbf{v}_3 = \alpha\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \delta\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha+\beta \\ \alpha+\delta \\ \beta \end{pmatrix}$$

Risolvendo il sistema

$$\begin{cases} \alpha+\beta & = & a \\ \alpha+\delta & = & b \\ \beta & = & c \end{cases}$$

otteniamo

$$\begin{cases} \beta & = & c \\ \alpha & = & -\beta+a & = & -c+a \\ \delta & = & -\alpha+b & = & -(-c+a)+b & = & c-a+b \end{cases},$$

quindi

$$C_{\mathcal{B}}(\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} a-c \\ c \\ -a+b+c \end{pmatrix}.$$

In particolare, specializzando a $\mathbf{v}_1'$, $\mathbf{v}_2'$ e $\mathbf{v}_3'$ otteniamo

$$C_{\mathcal{B}}(\mathbf{v}_1') = C_{\mathcal{B}}(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}) \underset{\uparrow \atop \boxed{\begin{matrix} a=1 \\ b=0 \\ c=0 \end{matrix}}}{=} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad C_{\mathcal{B}}(\mathbf{v}_2') = C_{\mathcal{B}}(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}) \underset{\uparrow \atop \boxed{\begin{matrix} a=1 \\ b=-1 \\ c=0 \end{matrix}}}{=} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix},$$

$$C_{\mathcal{B}}(\mathbf{v}_3') = C_{\mathcal{B}}(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}) \underset{\substack{\uparrow \\ \boxed{\begin{array}{c} a=0 \\ b=0 \\ c=1 \end{array}}}}{=} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

per cui $\mathbf{M}_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

La matrice $\mathbf{A}'$ che cerchiamo è quindi

$$\mathbf{A}' = \mathbf{M}^{-1}_{\mathcal{D}\leftarrow\mathcal{D}'}\mathbf{A}\mathbf{M}_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

ESERCITAZIONI* 6

$\boxed{1}$ Si verifichi che $\phi : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ definita da $\phi(\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}) = |a-b|+|a-c|+|b+c|$ è una norma.

$\boxed{2}$ Siano $\mathbf{z} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}$ ed $S = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \quad | \quad \|\mathbf{x}-\mathbf{z}\|_\infty \leq 1\}$. Si provi che esistono $\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1 \in S$ tali che

$$\|\mathbf{x}_0\|_2 \quad \leq \quad \|\mathbf{x}\|_2 \quad \leq \quad \|\mathbf{x}_1\|_2 \qquad \text{per ogni } \mathbf{x} \in S,$$

e si calcolino $\|\mathbf{x}_0\|_2$ e $\|\mathbf{x}_1\|_2$.

$\boxed{3}$ Sia V il sottospazio di $\mathbb{C}^2$ generato da $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ (quindi $V = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle = \{\begin{pmatrix} a \\ a \end{pmatrix} \quad | \quad a \in \mathbb{C}\}$).

Si verifichi che $(\cdot,\cdot) : V \times V \to \mathbb{C}$ definito da $(\begin{pmatrix} a \\ a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b \\ b \end{pmatrix}) = 3\overline{a}b$ è un prodotto interno.

$\boxed{4}$ Si trovi una base di $V^\perp$ nei seguenti casi:

(a) $\quad V = \langle \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \rangle$ sottospazio di $\mathbb{C}^3$,

(b) $\quad V = \langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1-i \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \rangle$ sottospazio di $\mathbb{C}^4$,

(c) $\quad V = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 1 \\ i \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} i \\ -1 \\ i \\ -1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$ sottospazio di $\mathbb{C}^4$.

$\boxed{5}$ Si trovi una base ortonormale del sottospazio di $\mathbb{C}^4$

$$V = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 1 \\ i \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} i \\ -1 \\ i \\ -1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle.$$

Svolgimento delle Esercitazioni *6

$\boxed{1}$ Si verifichi che $\phi : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ definita da $\phi(\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}) = |a-b|+|a-c|+|b+c|$ è una norma.

(1) $\phi(\mathbf{0}) = \phi(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}) = |0-0| + |0-0| + |0+0| = 0.$

Poichè $\phi(\mathbf{x}) \geq 0$ per ogni $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^3$, per provare che

$$\mathbf{x} \neq \mathbf{0} \quad \Longrightarrow \quad \phi(\mathbf{x}) > 0$$

basta provare che

$$\mathbf{x} \neq \mathbf{0} \quad \Longrightarrow \quad \phi(\mathbf{x}) \neq 0,$$

ossia basta provare che

$$\phi(\mathbf{x}) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \mathbf{x} = \mathbf{0}.$$

Dalla definizione di ϕ si ottiene:

$$\left.\begin{array}{lcl} \phi(\mathbf{x}) & = & 0 \\ \mathbf{x} & = & \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \end{array}\right\} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} |a-b| & = & 0 \\ |a-c| & = & 0 \\ |b+c| & = & 0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} a & = & b \\ a & = & c \\ b+c & = & 0 \end{array}\right. \Longrightarrow \quad a=b=c=0 \quad \Longrightarrow \quad \mathbf{x} = \mathbf{0}.$$

(2) $$\phi(\alpha \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}) = \phi(\begin{pmatrix} \alpha a \\ \alpha b \\ \alpha c \end{pmatrix}) = |\alpha a - \alpha b| + |\alpha a - \alpha c| + |\alpha b + \alpha c| =$$

$$= |\alpha||a-b| + |\alpha||a-c| + |\alpha||b+c| = |\alpha|(|a-b| + |a-c| + |b+c|) = |\alpha|\phi(\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}).$$

(3) $$\phi(\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{pmatrix}) = \phi(\begin{pmatrix} a_1+a_2 \\ b_1+b_2 \\ c_1+c_2 \end{pmatrix}) =$$

$$= |(a_1+a_2)-(b_1+b_2)| + |(a_1+a_2)-(c_1+c_2)| + |(b_1+b_2)+(c_1+c_2)| =$$

$$= |(a_1-b_1)+(a_2-b_2)| + |(a_1-c_1)+(a_2-c_2)| + |(b_1+c_1)+(b_2+c_2)| \leq$$

$$\leq |a_1-b_1| + |a_2-b_2| + |a_1-c_1| + |a_2-c_2| + |b_1+c_1| + |b_2+c_2| = \phi(\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix}) + \phi(\begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{pmatrix}).$$

$\boxed{2}$ Siano $\mathbf{z} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}$ ed $S = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \quad | \quad \|\mathbf{x} - \mathbf{z}\|_\infty \leq 1\}$. Si provi che esistono $\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1 \in S$ tali che

$$\|\mathbf{x}_0\|_2 \quad \leq \quad \|\mathbf{x}\|_2 \quad \leq \quad \|\mathbf{x}_1\|_2 \quad \text{per ogni } \mathbf{x} \in S,$$

e si calcolino $\|\mathbf{x}_0\|_2$ e $\|\mathbf{x}_1\|_2$.

$$\begin{aligned} S \quad &= \quad \{ \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \quad | \quad \max\{|x_1 - 5|, |x_2 - 4|\} \leq 1 \quad \} = \\ &= \quad \{ \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \quad | \quad -1 \leq x_1 - 5 \leq 1 \quad \text{e} \quad -1 \leq x_2 - 4 \leq 1 \quad \} = \\ &= \quad \{ \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \quad | \quad 4 \leq x_1 \leq 6 \quad \text{e} \quad 3 \leq x_2 \leq 5 \quad \} \end{aligned}$$

Quindi se $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in S$ allora $\|\mathbf{x}\|_2 = \sqrt{|x_1|^2 + |x_2|^2} \geq \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$, e poichè $\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} \in S$ e $\| \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} \|_2 = 5$, allora $\mathbf{x}_0 = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ (e $\|\mathbf{x}_0\|_2 = 5$).

Inoltre se $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in S$ allora $\|\mathbf{x}\|_2 = \sqrt{|x_1|^2 + |x_2|^2} \leq \sqrt{6^2 + 5^2} = \sqrt{61}$, e poichè $\begin{pmatrix} 6 \\ 5 \end{pmatrix} \in S$ e $\| \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \end{pmatrix} \|_2 = \sqrt{61}$, allora $\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \end{pmatrix}$ (e $\|\mathbf{x}_1\|_2 = \sqrt{61}$).

$\boxed{3}$ Sia V il sottospazio di $\mathbb{C}^2$ generato da $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ (quindi $V = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle = \{ \begin{pmatrix} a \\ a \end{pmatrix} \quad | \quad a \in \mathbb{C}\}$).

Si verifichi che $(\cdot, \cdot) : V \times V \to \mathbb{C}$ definito da $(\begin{pmatrix} a \\ a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b \\ b \end{pmatrix}) = 3\overline{a}b$ è un prodotto interno.

$$\textbf{(1)} \qquad \overline{(\mathbf{v}, \mathbf{u})} \overset{?}{=} (\mathbf{u}, \mathbf{v}) \quad \text{per ogni } \mathbf{u} = \begin{pmatrix} a \\ a \end{pmatrix}, \mathbf{v} = \begin{pmatrix} b \\ b \end{pmatrix} \in V$$

$$\overline{(\begin{pmatrix} b \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a \\ a \end{pmatrix})} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{def. di } (\cdot,\cdot)}}{=} \overline{3\overline{b}a} = 3\overline{a}b \underset{\substack{\uparrow \\ \text{def. di } (\cdot,\cdot)}}{=} (\begin{pmatrix} a \\ a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b \\ b \end{pmatrix}).$$

$$\textbf{(2)} \qquad (\mathbf{u}, \alpha\mathbf{v} + \beta\mathbf{z}) \overset{?}{=} \alpha(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + \beta(\mathbf{u}, \mathbf{z}) \quad \text{per ogni } \mathbf{u} = \begin{pmatrix} a \\ a \end{pmatrix}, \mathbf{v} = \begin{pmatrix} b \\ b \end{pmatrix}, \mathbf{z} = \begin{pmatrix} c \\ c \end{pmatrix} \in V, \alpha, \beta \in \mathbb{C}$$

$$(\mathbf{u}, \alpha\mathbf{v} + \beta\mathbf{z}) = (\begin{pmatrix} a \\ a \end{pmatrix}, \alpha\begin{pmatrix} b \\ b \end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix} c \\ c \end{pmatrix}) = (\begin{pmatrix} a \\ a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \alpha b + \beta c \\ \alpha b + \beta c \end{pmatrix}) = 3\overline{a}(\alpha b + \beta c) =$$

$$= \alpha(3\overline{a}b) + \beta(3\overline{a}c) = \alpha(\begin{pmatrix} a \\ a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b \\ b \end{pmatrix}) + \beta(\begin{pmatrix} a \\ a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c \\ c \end{pmatrix}) = \alpha(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + \beta(\mathbf{u}, \mathbf{z})$$

(3) $\quad(\bullet)\quad (\mathbf{0}, \mathbf{0}) \stackrel{?}{=} 0$

$(\bullet\bullet)\quad \begin{pmatrix} a \\ a \end{pmatrix} \neq \mathbf{0} \quad \stackrel{?}{\Longrightarrow} \quad (\begin{pmatrix} a \\ a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a \\ a \end{pmatrix}) \in \mathbb{R}_{>0}$

$(\bullet)\quad (\mathbf{0}, \mathbf{0}) = (\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}) = 3\overline{0}0 = 0$

$(\bullet\bullet)\quad \begin{pmatrix} a \\ a \end{pmatrix} \neq \mathbf{0} \quad \Longrightarrow \quad (\begin{pmatrix} a \\ a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a \\ a \end{pmatrix}) = 3\overline{a}a = 3|a|^2 \quad \Longrightarrow \quad (\begin{pmatrix} a \\ a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a \\ a \end{pmatrix}) \in \mathbb{R}_{>0}$

$\boxed{4}$ Si trovi una base di $V^\perp$ nei seguenti casi:

$(a)\quad V = \langle \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \rangle$ sottospazio di $\mathbb{C}^3$,

$(b)\quad V = \langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1-i \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \rangle$ sottospazio di $\mathbb{C}^4$,

$(c)\quad V = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 1 \\ i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i \\ -1 \\ i \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$ sottospazio di $\mathbb{C}^4$.

(a) Se $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ allora $C(\mathbf{A}) = V$ e $V^\perp = C(\mathbf{A})^\perp = N(\mathbf{A}^H)$.

Facendo un'eliminazione di Gauss su $\mathbf{A}^H$ otteniamo:

$\mathbf{A}^H = \begin{pmatrix} -i & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[E_1(i)]{} \begin{pmatrix} 1 & i & 2i \end{pmatrix} = \mathbf{U}$

Poichè $N(\mathbf{A}^H) = N(\mathbf{U})$ e

$$\dim(N(\mathbf{U})) = \text{numero delle colonne di } \mathbf{U} - \text{rango di } \mathbf{U} = 3 - 1 = 2,$$

una base di $V^\perp$ ha 2 elementi (d'altra parte $\dim V$=1 e $\dim\mathbb{C}^3$=3, per cui a priori potevamo dedurre che $\dim V^\perp = \dim\mathbb{C}^3 - \dim V = 3 - 1 = 2$).

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in N(\mathbf{A}^H) = N(\mathbf{U}) \quad \Longleftrightarrow \quad x_1 + ix_2 + 2ix_3 = 0$$

quindi $N(\mathbf{U}) = \left\{ \begin{pmatrix} -ih-2ik \\ h \\ k \end{pmatrix} |h,k \in \mathbb{C} \right\}$.

Una base di $V^\perp$ è

$$\left\{ \begin{pmatrix} -i \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2i \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

(*b*) Se $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1-i \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ allora $C(\mathbf{A}) = V$ e $V^\perp = C(\mathbf{A})^\perp = N(\mathbf{A}^H)$.

Facendo un'eliminazione di Gauss su $\mathbf{A}^H$ otteniamo:

$$\mathbf{A}^H = \begin{pmatrix} 0 & 1+i & 0 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[E_1(\frac{1-i}{2})]{} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1-i \end{pmatrix} = \mathbf{U}$$

Poichè $N(\mathbf{A}^H) = N(\mathbf{U})$ e

$$\dim(N(\mathbf{U})) = \text{numero delle colonne di } \mathbf{U} - \text{rango di } \mathbf{U} = 4-1 = 3,$$

una base di $V^\perp$ ha 3 elementi (d'altra parte dim$V$=1 e dim$\mathbb{C}^4$=4, per cui a priori potevamo dedurre che dim$V^\perp$ = dim$\mathbb{C}^4$ − dim$V = 4-1 = 3$).

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in N(\mathbf{A}^H) = N(\mathbf{U}) \quad \Longleftrightarrow \quad x_2 + (1-i)x_4 = 0$$

quindi $N(\mathbf{U}) = \left\{ \begin{pmatrix} h \\ -(1-i)r \\ k \\ r \end{pmatrix} |h,k,r \in \mathbb{C} \right\}$.

Una base di $V^\perp$ è

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1+i \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

(*c*) Se $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & i & 1 & 0 \\ i & -1 & 0 & 1 \\ 1 & i & 1 & 0 \\ i & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, allora $C(\mathbf{A}) = V$ e $V^\perp = C(\mathbf{A})^\perp = N(\mathbf{A}^H)$.

Facendo un'eliminazione di Gauss su $\mathbf{A}^H$ otteniamo:

$$\mathbf{A}^H = \begin{pmatrix} 1 & -i & 1 & -i \\ -i & -1 & -i & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[E_{31}(-1)E_{21}(i)]{} \begin{pmatrix} 1 & -i & 1 & -i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & i \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[E_{23}]{}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & -i & 1 & -i \\ 0 & i & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[E_{42}(-1)E_2(-i)]{} \begin{pmatrix} 1 & -i & 1 & -i \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{U}$$

Poichè $N(\mathbf{A}^H) = N(\mathbf{U})$ e

$$\dim(N(\mathbf{A})) = \text{numero delle colonne di } \mathbf{U} - \text{rango di } \mathbf{U} = 4 - 2 = 2,$$

una base di $V^\perp$ ha 2 elementi.

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in N(\mathbf{A}^H) = N(\mathbf{U}) \iff \begin{cases} x_1 - ix_2 + x_3 - ix_4 & = & 0 \\ \\ x_2 + x_4 & = & 0 \end{cases}$$

Quindi $N(\mathbf{A}^H) = \left\{ \begin{pmatrix} -h \\ -k \\ h \\ k \end{pmatrix} | h, k \in \mathbb{C} \right\}$.

Una base di $V^\perp = N(\mathbf{A}^H)$ è

$$\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

$\boxed{5}$ Si trovi una base ortonormale del sottospazio di $\mathbb{C}^4$

$$V = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 1 \\ i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i \\ -1 \\ i \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle.$$

$\boxed{1}$ Costruiamo dapprima **una base di V**: poniamo

$$\mathbf{w}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 1 \\ i \end{pmatrix}, \quad \mathbf{w}_2 = \begin{pmatrix} i \\ -1 \\ i \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{w}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{w}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

e calcoliamo una base di $C(\mathbf{A})$ dove $\mathbf{A} = (\, \mathbf{w}_1 \quad \mathbf{w}_2 \quad \mathbf{w}_3 \quad \mathbf{w}_4 \,)$.

$$\mathbf{A} = (\, \mathbf{w}_1 \quad \mathbf{w}_2 \quad \mathbf{w}_3 \quad \mathbf{w}_4 \,) = \begin{pmatrix} 1 & i & 1 & 0 \\ i & -1 & 0 & 1 \\ 1 & i & 1 & 0 \\ i & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[E_{41}(-i)E_{31}(-1)E_{21}(-i)]{}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & i & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -i & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[E_{42}(i)E_2(i)]{} \begin{pmatrix} 1 & i & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{U}$$

Poichè $\mathbf{U}$ ha come colonne dominanti la 1^a e la 3^a, allora una base di $C(\mathbf{A}) = V$ è $\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_3\}$.

$\boxed{2}$ Troviamo **una base ortogonale di V** applicando l'algoritmo di Gram-Schmidt a

$$\left\{ \mathbf{v}_1 = \mathbf{w}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 1 \\ i \end{pmatrix}, \mathbf{v}_2 = \mathbf{w}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

$$\mathbf{u}_1 = \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 1 \\ i \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{u}_2 = \mathbf{v}_2 - \alpha_{12}\mathbf{u}_1, \qquad \mathbf{u}_1 \neq \mathbf{0} \quad \Longrightarrow \quad \alpha_{12} = \frac{(\mathbf{u}_1, \mathbf{v}_2)}{(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_1)}$$

$$(\mathbf{u}_1, \mathbf{v}_2) = \mathbf{u}_1^H \mathbf{v}_2 = (\, 1 \quad -i \quad 1 \quad -i \,) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1 + 1 = 2$$

$$(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_1) = \mathbf{u}_1^H \mathbf{u}_1 = (\, 1 \quad -i \quad 1 \quad -i \,) \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 1 \\ i \end{pmatrix} = 1 + 1 + 1 + 1 = 4$$

$$\Longrightarrow \quad \alpha_{12} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$\mathbf{u}_2 = \mathbf{v}_2 - \alpha_{12}\mathbf{u}_1 = \mathbf{v}_2 - \frac{1}{2}\mathbf{u}_1 =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 1 \\ i \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ 1 \\ -i \end{pmatrix}$$

Dunque $\{\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ i \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{u}_2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ 1 \\ -i \end{pmatrix}\}$ è una base ortogonale di V.

$\boxed{3}$ Costruiamo **base ortonormale di V** normalizzando la base ortogonale trovata al punto $\boxed{2}$, ossia dividendo ciascun elemento della base ortogonale trovata in $\boxed{2}$ per la propria norma euclidea.

Cominciamo con il calcolare la norma euclidea di $\mathbf{u}_1$ ed $\mathbf{u}_2$:

$$\|\mathbf{u}_1\|_2 = \sqrt{(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_1)} = \sqrt{4} = 2$$

$$\|\mathbf{u}_2\|_2 = \sqrt{(\mathbf{u}_2, \mathbf{u}_2)} = \sqrt{\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & i & 1 & i \end{pmatrix} \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ 1 \\ -i \end{pmatrix}} = \sqrt{\frac{1}{4}(1+1+1+1+1)} = 1$$

Allora

$$\mathcal{B} = \{\frac{\mathbf{u}_1}{\|\mathbf{u}_1\|_2}, \frac{\mathbf{u}_2}{\|\mathbf{u}_2\|_2}\} = \left\{ \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 1 \\ i \end{pmatrix}, \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ 1 \\ -i \end{pmatrix} \right\}$$

è una base ortonormale di V.

ESERCITAZIONI* 7

$\boxed{1}$ Si calcoli la proiezione ortogonale di $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ sul sottospazio $U = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} i \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$ di $\mathbb{C}^3$.

$\boxed{2}$ Si calcoli la proiezione ortogonale di $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ sul complemento ortogonale $U^\perp$ del sottospazio $U = \langle \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \rangle$ di $\mathbb{C}^3$.

$\boxed{3}$ Si calcoli il determinante delle seguenti matrici:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1-i & 1 & 0 \\ 2 & 1+i & 3 \\ i & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1+i & 1 \\ i & 2 & 1 \\ 1 & 1 & i \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1+i \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

$\boxed{4}$ Sia $\mathbf{A}$ una matrice $n \times n$ antisimmetrica, cioè tale che $\mathbf{A}^T = -\mathbf{A}$. Si provi che se n è dispari allora $\mathbf{A}$ è singolare (ossia $\mathbf{A}$ non ha inversa).

Svolgimento delle Esercitazioni *7

$\boxed{1}$ Si calcoli la proiezione ortogonale di $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ sul sottospazio $U = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} i \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$ di $\mathbb{C}^3$.

$\boxed{I}$ Troviamo una base ortonormale di U.

Poniamo $\mathbf{w}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{w}_2 = \begin{pmatrix} i \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{w}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ e calcoliamo una base di $C(\mathbf{A})$ dove $\mathbf{A} = (\, \mathbf{w}_1 \quad \mathbf{w}_2 \quad \mathbf{w}_3 \,)$.

$$\mathbf{A} = (\, \underline{w}_1 \quad \underline{w}_2 \quad \underline{w}_3 \,) = \begin{pmatrix} 1 & i & 2 \\ i & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[E_{21}(-i)]{} \begin{pmatrix} 1 & i & 2 \\ 0 & 0 & -2i \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[E_{32}(-1)E_2(\frac{1}{2}i)]{} \begin{pmatrix} 1 & i & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{U}$$

Poichè $\mathbf{U}$ ha come colonne dominanti la 1^a e la 3^a, allora una base di $C(\mathbf{A}) = U$ è $\{\mathbf{w}_1; \mathbf{w}_3\}$.

Applichiamo ora l'algoritmo di Gram-Schmidt a

$$\left\{ \mathbf{v}_1 = \mathbf{w}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 0 \end{pmatrix} ; \mathbf{v}_2 = \mathbf{w}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

per trovare una base ortogonale di U.

$$\mathbf{u}_1 = \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{u}_2 = \mathbf{v}_2 - \alpha_{12}\mathbf{u}_1, \qquad \mathbf{u}_1 \neq \mathbf{0} \quad \Longrightarrow \quad \alpha_{12} = \frac{(\mathbf{u}_1, \mathbf{v}_2)}{(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_1)}$$

$$(\mathbf{u}_1, \mathbf{v}_2) = \mathbf{u}_1^H \mathbf{v}_2 = (\, 1 \quad -i \quad 0 \,) \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 2$$

$$(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_1) = \mathbf{u}_1^H \mathbf{u}_1 = (\, 1 \quad -i \quad 0 \,) \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 0 \end{pmatrix} = 2$$

$$\Longrightarrow \quad \alpha_{12} = \frac{2}{2} = 1$$

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_2 &= \mathbf{v}_2 - \alpha_{12}\mathbf{u}_1 = \\ &= \mathbf{v}_2 - \mathbf{u}_1 = \\ &= \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$\left\{ \mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 0 \end{pmatrix}; \mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ è una base ortogonale di U.

$$\|\mathbf{u}_1\|_2 = \sqrt{(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_1)} = \sqrt{2}$$

$$\|\mathbf{u}_2\|_2 = \sqrt{(\mathbf{u}_2, \mathbf{u}_2)} = \sqrt{\mathbf{u}_2^H \mathbf{u}_2} = \sqrt{\begin{pmatrix} 1 & i & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ 1 \end{pmatrix}} = \sqrt{1+1+1} = \sqrt{3}$$

$\left\{ \mathbf{u}_1^* = \frac{\mathbf{u}_1}{\|\mathbf{u}_1\|_2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 0 \end{pmatrix}; \mathbf{u}_2^* = \frac{\mathbf{u}_2}{\|\mathbf{u}_2\|_2} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ è una base ortonormale di V.

$\boxed{II}$ La proiezione ortogonale di $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ su U è

$$P_U(\mathbf{v}) = (\mathbf{u}_1^*, \mathbf{v})\mathbf{u}_1^* + (\mathbf{u}_2^*, \mathbf{v})\mathbf{u}_2^*$$

dove

$$(\mathbf{u}_1^*, \mathbf{v}) = (\mathbf{u}_1^*)^H \mathbf{v} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

$$(\mathbf{u}_2^*, \mathbf{v}) = (\mathbf{u}_2^*)^H \mathbf{v} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & i & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Quindi $P_U(\mathbf{v}) = \frac{1}{\sqrt{3}} \mathbf{u}_2^* = \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ 1 \end{pmatrix}$.

$\boxed{2}$ Si calcoli la proiezione ortogonale di $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ sul complemento ortogonale $U^\perp$ del sottospazio $U = \langle \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \rangle$ di $\mathbb{C}^3$.

Nell'esercizio $\boxed{4}$ (a) delle Esercitazioni *6 abbiamo trovato una base di $U^\perp$:

$$\left\{ \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} -i \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} -2i \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Applichiamo l'algoritmo di Gram-Schmidt a $\{\mathbf{v}_1; \mathbf{v}_2\}$ per trovare una base ortogonale di $U^\perp$.

$$\mathbf{u}_1 = \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} -i \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{u}_2 = \mathbf{v}_2 - \alpha_{12}\mathbf{u}_1,$$

$$\mathbf{u}_1 \neq \mathbf{0} \quad \Longrightarrow \quad \alpha_{12} = \frac{(\mathbf{u}_1, \mathbf{v}_2)}{(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_1)}$$

$$(\mathbf{u}_1, \mathbf{v}_2) = \mathbf{u}_1^H \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} i & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2i \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -2i^2 = 2$$

$$(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_1) = \mathbf{u}_1^H \mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} i & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -i \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1 + 1 = 2$$

$$\Longrightarrow \quad \alpha_{12} = 1$$

$$\mathbf{u}_2 = \mathbf{v}_2 - \mathbf{u}_1 =$$

$$= \begin{pmatrix} -2i \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -i \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -i \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Una base ortogonale di $U^\perp$ è:

$$\left\{ \mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} -i \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} -i \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Per trovare una base ortonormale di $U^\perp$ normalizziamo quella appena trovata:

$$\|\mathbf{u}_1\|_2 = \sqrt{\mathbf{u}_1^H \mathbf{u}_1} = \sqrt{2}$$

$$\|\mathbf{u}_2\|_2 = \sqrt{\mathbf{u}_2^H \mathbf{u}_2} = \sqrt{\begin{pmatrix} i & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -i \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}} = \sqrt{3}$$

Dunque $\left\{ \mathbf{u}_1^* = \frac{\mathbf{u}_1}{\|\mathbf{u}_1\|_2} = \begin{pmatrix} -\frac{i}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}; \mathbf{u}_2^* = \frac{\mathbf{u}_2}{\|\mathbf{u}_2\|_2} = \begin{pmatrix} -\frac{i}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \right\}$ è una base ortonormale di $U^\perp$.

La proiezione ortogonale di $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ su $U^\perp$ è

$$P_{U^\perp}(\mathbf{v}) = (\mathbf{u}_1^*, \mathbf{v})\mathbf{u}_1^* + (\mathbf{u}_2^*, \mathbf{v})\mathbf{u}_2^*$$

dove

$$(\mathbf{u}_1^*, \mathbf{v}) = (\mathbf{u}_1^*)^H \mathbf{v} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} i & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)$$

$$(\mathbf{u}_2^*, \mathbf{v}) = (\mathbf{u}_2^*)^H \mathbf{v} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} i & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{i}{\sqrt{3}}.$$

Quindi

$$P_{U^\perp}(\mathbf{v}) = \frac{1}{\sqrt{2}}(1+i) \begin{pmatrix} -\frac{i}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{i}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} -\frac{i}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 5-3i \\ 3+i \\ 2i \end{pmatrix}.$$

$\boxed{3}$ Si calcoli il determinante delle seguenti matrici:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1-i & 1 & 0 \\ 2 & 1+i & 3 \\ i & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1+i & 1 \\ i & 2 & 1 \\ 1 & 1 & i \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1+i \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Conviene sviluppare Det($\mathbf{A}$) rispetto alla riga o alla colonna che contengono piú zeri. In questo caso conviene svilupparlo ripetto alla 1^a riga oppure alla 3^a colonna. Facciamolo in entrambi i modi, per esercizio.

Rispetto alla 1^a riga:

$$\begin{aligned} \mathrm{Det}\mathbf{A} &= (1-i)(-1)^{1+1}\mathrm{Det}\begin{pmatrix} 1+i & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + (-1)^{1+2}\mathrm{Det}\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ i & 1 \end{pmatrix} = \\ &= (1-i)(1+i-3) - (2-3i) = (1-i)(-2+i) - 2 + 3i = \\ &= -2 + 2i + i - i^2 - 2 + 3i = -3 + 6i \end{aligned}$$

Rispetto alla 3^a colonna:

$$\begin{aligned} \mathrm{Det}\mathbf{A} &= 3(-1)^{2+3}\mathrm{Det}\begin{pmatrix} 1-i & 1 \\ i & 1 \end{pmatrix} + (-1)^{3+3}\mathrm{Det}\begin{pmatrix} 1-i & 1 \\ 2 & 1+i \end{pmatrix} = \\ &= -3(1-i-i) + ((1-i)(1+i) - 2) = \\ &= -3(1-2i) + 1^2 - i^2 - 2 = -3 + 6i \end{aligned}$$

Sviluppiamo Det($\mathbf{B}$), ad esempio rispetto alla 1^a colonna:

$$\mathrm{Det}\begin{pmatrix} 1 & 1+i & 1 \\ i & 2 & 1 \\ 1 & 1 & i \end{pmatrix} = (-1)^{1+1}\mathrm{Det}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & i \end{pmatrix} + i(-1)^{2+1}\mathrm{Det}\begin{pmatrix} 1+i & 1 \\ 1 & i \end{pmatrix} + (-1)^{3+1}\mathrm{Det}\begin{pmatrix} 1+i & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= 2i - 1 - i((1+i)i - 1) + 1 + i - 2 = 2i - 1 - i(i-2) + i - 1 = -1 + 5i$$

Infine sviluppiamo Det($\mathbf{C}$) ad esempio rispetto alla 3^a riga:

$$\mathrm{Det}\mathbf{C} = \mathrm{Det}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1+i \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= (-1)^{3+1}\mathrm{Det}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1+i \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} + (-1)^{3+2}\mathrm{Det}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1+i \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} + (-1)^{3+3}\mathrm{Det}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+i \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Sviluppiamo il primo addendo rispetto alla 2^a colonna, mentre il secondo ed il terzo addendo rispetto alla 1^a riga.

$$\mathrm{Det}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1+i \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = (-1)^{1+2}\mathrm{Det}\begin{pmatrix} 1 & 1+i \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + 2(-1)^{3+2}\mathrm{Det}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1+i \end{pmatrix} =$$

$$= -(1-1-i) - 2(1+i-1) = -i$$

$$\mathrm{Det}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1+i \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} = (-1)^{1+2}\mathrm{Det}\begin{pmatrix} 1 & 1+i \\ 2 & 1 \end{pmatrix} + (-1)^{1+3}\mathrm{Det}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$= -(1-2(1+i)) + 2 = -(1-2-2i) + 2 = 1 + 2i + 2 = 3 + 2i$$

$$\mathrm{Det}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+i \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} = (-1)^{1+2}\mathrm{Det}\begin{pmatrix} 1 & 1+i \\ 2 & 1 \end{pmatrix} + (-1)^{1+3}\mathrm{Det}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= -(1-2(1+i)) + (1-2) + = -(1-2-2i) - 1 = 2i$$

Quindi

$$\mathrm{Det}(\mathbf{C}) = -i - (3+2i) + 2i = -i - 3 - 2i + 2i = -3 - i.$$

$\boxed{4}$ Sia $\mathbf{A}$ una matrice $n \times n$ antisimmetrica, cioè tale che $\mathbf{A}^T = -\mathbf{A}$. Si provi che se n è dispari allora $\mathbf{A}$ è singolare (ossia $\mathbf{A}$ non ha inversa).

Da $\mathbf{A}^T = -\mathbf{A}$ segue che Det($\mathbf{A}^T$) =Det($-\mathbf{A}$).

Per la proprietà (5) dei determinanti si ha che Det($\mathbf{A}^T$) =Det($\mathbf{A}$). Inoltre da

$$\mathrm{Det}(c\mathbf{A}) = (c)^n\mathrm{Det}(\mathbf{A})$$

ponendo $c = -1$ si ottiene

$$\mathrm{Det}(-\mathbf{A}) = (-1)^n\mathrm{Det}(\mathbf{A}) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{n dispari}}}{=} -\mathrm{Det}\mathbf{A}.$$

Dunque se n è dispari abbiamo

$$\mathrm{Det}(\mathbf{A}) = \mathrm{Det}(\mathbf{A}^T) = \mathrm{Det}(-\mathbf{A}) = -\mathrm{Det}(\mathbf{A}),$$

per cui Det($\mathbf{A}$) $= 0$. Dalla proprietà (7) dei determinanti segue ora che $\mathbf{A}$ è singolare.

ESERCIZIO TIPO 1

Risolvere il sistema lineare $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ dove

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 9 & 6 \\ 1 & -1 & 7 & 4 \\ 1 & -1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Troviamo una forma ridotta di Gauss della matrice aumentata del sistema.

$$(\mathbf{A} \mid \mathbf{b}) = \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & -3 & 9 & 6 & 6 \\ 1 & -1 & 7 & 4 & 4 \\ 1 & -1 & 3 & 2 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{E_{31}(-1)E_{21}(-1)E_1(\frac{1}{3})}$$

$$\to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{E_2(\frac{1}{4})} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) = (\mathbf{U} \mid \mathbf{d}).$$

Il sistema $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ è equivalente al sistema $\mathbf{Ux} = \mathbf{d}$ che è una forma compatta per

$$(*) \qquad \begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 + 2x_4 & = 2 \\ \qquad\qquad x_3 + \frac{1}{2}x_4 & = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Poichè $\mathbf{d}$ è libera, $\mathbf{Ux} = \mathbf{d}$ ammette soluzioni.

Poichè $\mathbf{U}$ ha esattamente due colonne libere, $\mathbf{Ux} = \mathbf{d}$ ha ∞^2 soluzioni.

Scegliamo come parametri le variabili corrispondenti alle colonne libere di $\mathbf{U}$ (la 2^a e la 4^a) e con la sostituzione all'indietro da $(*)$ otteniamo

$$\begin{cases} x_2 = h \\ x_4 = k \\ x_3 = -\dfrac{1}{2}x_4 + \dfrac{1}{2} = -\dfrac{1}{2}k + \dfrac{1}{2} \\ x_1 = x_2 - 3x_3 - 2x_4 + 2 = h - 3(-\dfrac{1}{2}k + \dfrac{1}{2}) - 2k + 2 = h - \dfrac{1}{2}k + \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

L'insieme delle soluzioni del sistema $\mathbf{Ux} = \mathbf{d}$ (e quindi l'insieme delle soluzioni del sistema $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$) è

$$\left\{ \begin{pmatrix} h - \frac{1}{2}k + \frac{1}{2} \\ h \\ -\frac{1}{2}k + \frac{1}{2} \\ k \end{pmatrix} | h, k \in \mathbb{C} \right\}.$$

ESERCIZIO TIPO 2

Si risolva il sistema lineare $\mathbf{A}(\alpha)\mathbf{x} = \mathbf{b}(\alpha)$ dipendente dal parametro reale α dove

$$\mathbf{A}(\alpha) = \begin{pmatrix} 2 & 2\alpha & 2 \\ 1 & \alpha+1 & \alpha+1 \\ 1 & \alpha & \alpha \\ 0 & 2 & 2\alpha \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{b}(\alpha) = \begin{pmatrix} 2\alpha \\ \alpha+1 \\ \alpha \\ \alpha^2+1 \end{pmatrix}.$$

Troviamo una forma ridotta di Gauss della matrice aumentata del sistema.

$$(\,\mathbf{A}(\alpha) \quad | \quad \mathbf{b}(\alpha)\,) = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2\alpha & 2 & 2\alpha \\ 1 & \alpha+1 & \alpha+1 & \alpha+1 \\ 1 & \alpha & \alpha & \alpha \\ 0 & 2 & 2\alpha & \alpha^2+1 \end{array}\right) \xrightarrow{E_{31}(-1)E_{21}(-1)E_1(\frac{1}{2})}$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \alpha & 1 & \alpha \\ 0 & 1 & \alpha & 1 \\ 0 & 0 & \alpha-1 & 0 \\ 0 & 2 & 2\alpha & \alpha^2+1 \end{array}\right) \xrightarrow{E_{42}(-2)}$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \alpha & 1 & \alpha \\ 0 & 1 & \alpha & 1 \\ 0 & 0 & \alpha-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha^2-1 \end{array}\right) = (\,\mathbf{B}(\alpha) \quad | \quad \mathbf{c}(\alpha)\,).$$

$\boxed{1^0 \text{ CASO}}$ $\alpha = 1$ $\quad (\,\mathbf{B}(\mathbf{1}) \quad | \quad \mathbf{c}(\mathbf{1})\,) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$ è una forma ridotta di Gauss per $(\,\mathbf{A}(\mathbf{1}) \quad | \quad \mathbf{b}(\mathbf{1})\,)$, quindi $\mathbf{A}(\mathbf{1})\mathbf{x} = \mathbf{b}(\mathbf{1})$ è equivalente a $\mathbf{B}(\mathbf{1})\mathbf{x} = \mathbf{c}(\mathbf{1})$ che è una forma compatta per

$$(*) \qquad \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 & = 1 \\ \qquad\; x_2 + x_3 & = 1 \end{cases}$$

Poichè $\mathbf{c}(\mathbf{1})$ è libera, $\mathbf{B}(\mathbf{1})\mathbf{x} = \mathbf{c}(\mathbf{1})$ ammette soluzioni.

Poichè $\mathbf{B}(\mathbf{1})$ ha esattamente una colonna libera, $\mathbf{B}(\mathbf{1})\mathbf{x} = \mathbf{c}(\mathbf{1})$ ha ∞^1 soluzioni.

Scegliamo come parametro la variabile corrispondente alla colonna libera di $\mathbf{B}(\mathbf{1})$ (la 3^a) e con la sostituzione all'indietro da $(*)$ otteniamo

$$\begin{cases} x_3 = h \\ x_2 = -x_3 + 1 = -h + 1 \\ x_1 = -x_2 - x_3 + 1 = -(-h+1) - h + 1 = 0 \end{cases}$$

L'insieme delle soluzioni del sistema $\mathbf{B(1)x} = \mathbf{c(1)}$ (e quindi l'insieme delle soluzioni del sistema $\mathbf{A(1)x} = \mathbf{b(1)}$) è

$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ -h+1 \\ h \end{pmatrix} | h \in \mathbb{C} \right\}.$$

$\boxed{2^0 \text{ CASO}}$ $\alpha \neq 1$

$$(\mathbf{B}(\alpha) \quad | \quad \mathbf{c}(\alpha)) = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & 1 & | & \alpha \\ 0 & 1 & \alpha & | & 1 \\ 0 & 0 & \alpha-1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & \alpha^2-1 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_3(\frac{1}{\alpha-1})}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & \alpha & 1 & | & \alpha \\ 0 & 1 & \alpha & | & 1 \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & \alpha^2-1 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_4(\frac{1}{\alpha-1})}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & \alpha & 1 & | & \alpha \\ 0 & 1 & \alpha & | & 1 \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & \alpha+1 \end{pmatrix} = (\mathbf{C}(\alpha) \quad | \quad \mathbf{d}(\alpha)).$$

$\boxed{1^0 \text{ Sottocaso}}$ $\alpha = -1$ $(\mathbf{C(-1)} \quad | \quad \mathbf{d(-1)}) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & | & -1 \\ 0 & 1 & -1 & | & 1 \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$ è una forma ridotta di Gauss per $(\mathbf{A(-1)} \quad | \quad \mathbf{b(-1)})$, quindi $\mathbf{A(-1)x} = \mathbf{b(-1)}$ è equivalente a $\mathbf{C(-1)x} = \mathbf{d(-1)}$ che è una forma compatta per

$$(*) \qquad \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 & = -1 \\ \qquad x_2 - x_3 & = 1 \\ \qquad\qquad x_3 & = 0 \end{cases}$$

Poichè $\mathbf{d(-1)}$ è libera, $\mathbf{C(-1)x} = \mathbf{d(-1)}$ ammette soluzioni.

Poichè tutte le colonne di $\mathbf{C(-1)}$ sono dominanti, $\mathbf{C(-1)x} = \mathbf{d(-1)}$ ammette un'unica soluzione. Con la sostituzione all'indietro da $(*)$ otteniamo

$$\begin{cases} x_3 = 0 \\ x_2 = x_3 + 1 = 1 \\ x_1 = x_2 - x_3 - 1 = 1 - 1 = 0 \end{cases}$$

L'unica soluzione di $\mathbf{C(-1)x} = \mathbf{d(-1)}$ (e quindi di $\mathbf{A(-1)x} = \mathbf{b(-1)}$) è

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$\boxed{2^0 \text{ Sottocaso}}$ $\alpha \notin \{1, -1\}$

$$
(\,\mathbf{C}(\alpha) \quad | \quad \mathbf{d}(\alpha)\,) = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & 1 & | & \alpha \\ 0 & 1 & \alpha & | & 1 \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & \alpha+1 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_4(\frac{1}{\alpha+1})}
$$

$$
\to \begin{pmatrix} 1 & \alpha & 1 & | & \alpha \\ 0 & 1 & \alpha & | & 1 \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 1 \end{pmatrix} = (\,\mathbf{D}(\alpha) \quad | \quad \mathbf{e}(\alpha)\,)
$$

è una forma ridotta di Gauss per $(\,\mathbf{A}(\alpha) \quad | \quad \mathbf{b}(\alpha)\,)$. Poichè $\mathbf{e}(\alpha)$ è dominante, $\mathbf{D}(\alpha)\mathbf{x} = \mathbf{e}(\alpha)$ (e quindi di $\mathbf{A}(\alpha)\mathbf{x} = \mathbf{b}(\alpha)$) non ammette soluzioni.

ESERCIZIO TIPO 3

Si trovino tutte le inverse destre della matrice $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

Un'inversa destra di $\mathbf{A}$ è una matrice 3×2 $\mathbf{R}$ tale che se $\mathbf{R} = (\mathbf{c}_1 \quad | \quad \mathbf{c}_2)$, allora

$\mathbf{c}_1$ è soluzione di (1) $\mathbf{Ax} = \mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e

$\mathbf{c}_2$ è soluzione di (2) $\mathbf{Ax} = \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Cerchiamo tutte le soluzioni di (1) e (2).

$$(\mathbf{A} \quad | \quad \mathbf{I}_2) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & | & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & | & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{21}(-1)E_1(\frac{1}{2})} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 & | & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 3 & | & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\xrightarrow{E_2(-2)} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 & | & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & -6 & | & 1 & -2 \end{pmatrix} = (\mathbf{U} \quad | \quad \mathbf{b}_1 \quad \mathbf{b}_2).$$

(1) è equivalente a $(1')$ $\mathbf{Ux} = \mathbf{b}_1$ che è una forma compatta per

$$\begin{cases} x_1 + \frac{1}{2}x_2 = \frac{1}{2} \\ x_2 - 6x_3 = 1 \end{cases}$$

Scegliamo come parametro la variabile corrispondente all'unica colonna libera di $\mathbf{U}$ (la 3^a) e con la sostituzione all'indietro otteniamo

$$\begin{cases} x_3 = h \\ x_2 = 6x_3 + 1 = 6h + 1 \\ x_1 = -\dfrac{1}{2}x_2 + \dfrac{1}{2} = -\dfrac{1}{2}(6h+1) + \dfrac{1}{2} = -3h \end{cases}$$

L'insieme delle soluzioni di (1) è

$$\left\{ \begin{pmatrix} -3h \\ 6h+1 \\ h \end{pmatrix} | h \in \mathbb{C} \right\}.$$

(2) è equivalente a $(2')$ $\mathbf{Ux} = \mathbf{b}_2$ che è una forma compatta per

$$\begin{cases} x_1 + \frac{1}{2}x_2 = 0 \\ x_2 - 6x_3 = -2 \end{cases}$$

Scegliamo come parametro la variabile corrispondente all'unica colonna libera di $\mathbf{U}$ (la 3^a) e con la sostituzione all'indietro otteniamo

$$\begin{cases} x_3 = k \\ x_2 = 6x_3 - 2 = 6k - 2 \\ x_1 = -\dfrac{1}{2}x_2 = -\dfrac{1}{2}(6k-2) = -3k + 1 \end{cases}$$

L'insieme delle soluzioni di (2) è

$$\left\{ \begin{pmatrix} -3k+1 \\ 6k-2 \\ k \end{pmatrix} | k \in \mathbb{C} \right\}.$$

Le inverse destre di $\mathbf{A}$ sono esattamente tutte le matrici del tipo $\mathbf{R}(\mathbf{h},\mathbf{k}) = \begin{pmatrix} -3h & -3k+1 \\ 6h+1 & 6k-2 \\ h & k \end{pmatrix}$, al variare di $h, k \in \mathbb{C}$.

ESERCIZIO TIPO 3 bis

Si trovino tutte le inverse sinistre della matrice $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.

1. Poniamo $\mathbf{B} = \mathbf{A}^T$.

2. Cerchiamo tutte le inverse destre di $\mathbf{B}$. Dall'ESERCIZIO TIPO 3 sappiamo che sono tutte e sole le matrici del tipo $\begin{pmatrix} -3h & -3k+1 \\ 6h+1 & 6k-2 \\ h & k \end{pmatrix}$ con $h, k \in \mathbb{C}$.

3. Una matrice è inversa sinistra di $\mathbf{A}$ se e solo se è la trasposta di una inversa destra di $\mathbf{B}$. Quindi le inverse sinistre di $\mathbf{A}$ sono esattamente tutte le matrici del tipo $\begin{pmatrix} -3h & 6h+1 & h \\ -3k+1 & 6k-2 & k \end{pmatrix}$ al variare di $h, k \in \mathbb{C}$.

ESERCIZIO TIPO 4

Sia $\quad \mathbf{A}(\alpha) = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & \alpha \\ \alpha & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad$ dove $\alpha \in \mathbb{C}$.

Per quegli $\alpha \in \mathbb{C}$ per cui $\mathbf{A}(\alpha)$ è non singolare, si calcoli $\mathbf{A}(\alpha)^{-1}$.

$$(\mathbf{A}(\alpha) \quad | \quad \mathbf{I}_3) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} \alpha & 1 & \alpha & 1 & 0 & 0 \\ \alpha & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{E_{21}(-\alpha)E_1(\frac{1}{\alpha}) \quad \boxed{\alpha \neq 0 : \mathbf{A}(0) \text{ non ha inversa}}}$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{1}{\alpha} & 1 & \frac{1}{\alpha} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\alpha & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{E_{23}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{1}{\alpha} & 1 & \frac{1}{\alpha} & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1-\alpha & -1 & 1 & 0 \end{array}\right) \to$$

$$\xrightarrow{E_2(\frac{1}{2})} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{1}{\alpha} & 1 & \frac{1}{\alpha} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1-\alpha & -1 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{E_3(\frac{1}{1-\alpha}) \quad \boxed{\alpha \neq 1 : \mathbf{A}(1) \text{ non ha inversa}}}$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{1}{\alpha} & 1 & \frac{1}{\alpha} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{1-\alpha} & \frac{1}{1-\alpha} & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{E_{23}(-\frac{1}{2})}$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{1}{\alpha} & 1 & \frac{1}{\alpha} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2(1-\alpha)} & -\frac{1}{2(1-\alpha)} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{1-\alpha} & \frac{1}{1-\alpha} & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{E_{13}(-1)}$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{1}{\alpha} & 0 & \frac{1}{\alpha(1-\alpha)} & -\frac{1}{1-\alpha} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2(1-\alpha)} & -\frac{1}{2(1-\alpha)} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{1-\alpha} & \frac{1}{1-\alpha} & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{E_{12}(-\frac{1}{\alpha})}$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2\alpha(1-\alpha)} & \frac{-2\alpha+1}{2\alpha(1-\alpha)} & -\frac{1}{2\alpha} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2(1-\alpha)} & -\frac{1}{2(1-\alpha)} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{1-\alpha} & \frac{1}{1-\alpha} & 0 \end{array}\right) = (I_3 \quad | \quad \mathbf{A}(\alpha)^{-1}).$$

Se $\boxed{\alpha \notin \{0,1\}}$ $\qquad \mathbf{A}(\alpha)^{-1} = \frac{1}{2\alpha(1-\alpha)} \begin{pmatrix} 1 & -2\alpha+1 & -1+\alpha \\ \alpha & -\alpha & \alpha(1-\alpha) \\ -2\alpha & 2\alpha & 0 \end{pmatrix}.$

ESERCIZIO TIPO 5

(1) Si provi che $\mathcal{S}_1 = \{\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}; \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \mathbf{v}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}; \mathbf{v}_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\}$ è un insieme di generatori di $\mathbb{R}^3$.

(2) Sia $\mathcal{S}_2 = \{\mathbf{w}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \mathbf{w}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}; \mathbf{w}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \mathbf{w}_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \mathbf{w}_5 = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}\}$. Si dica se $\mathcal{S}_2$ è un insieme di generatori di $\mathbb{R}^3$.

(1) Per provare che $\mathcal{S}$ è un insieme di generatori di $\mathbb{R}^3$ occorre provare che per ogni $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ esistono $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5 \in \mathbb{R}$ tali che

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \alpha_1\mathbf{v}_1 + \alpha_2\mathbf{v}_2 + \alpha_3\mathbf{v}_3 + \alpha_4\mathbf{v}_4 + \alpha_5\mathbf{v}_5 =$$

$$= \alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_4 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \alpha_5 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3 \\ \alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_4 \\ \alpha_3 - \alpha_4 + \alpha_5 \end{pmatrix}$$

ossia che il sistema lineare

$$(*) \qquad \begin{cases} \alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3 = a \\ \alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_4 = b \\ \alpha_3 - \alpha_4 + \alpha_5 = c \end{cases}$$

nelle incognite $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5$ ha soluzione **qualunque** siano $a, b, c \in \mathbb{R}$.

Facendo una eliminazione di Gauss sulla matrice aumentata del sistema si ottiene

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & a \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & c \end{array}\right) \xrightarrow[E_{21}(-1)]{} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & b-a \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & c \end{array}\right) \rightarrow$$

$$\xrightarrow[E_{32}(-1)E_2(-1)]{} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & a-b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & c+b-a \end{array}\right) = (\,\mathbf{U}_1 \quad | \quad \mathbf{d}_1\,).$$

Poichè $\mathbf{d}_1$ è libera qualunque siano $a, b, c \in \mathbb{R}$, allora $(*)$ ha soluzione qualunque siano $a, b, c \in \mathbb{R}$, per cui $\mathcal{S}$ è un insieme di generatori di $\mathbb{R}^3$.

(2) Per sapere se $\mathcal{S}_2$ è o meno un insieme di generatori di $\mathbb{R}^3$ dobbiamo verificare se per ogni

$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ esistano o meno $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5 \in \mathbb{R}$ tali che

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \alpha_1 \mathbf{w}_1 + \alpha_2 \mathbf{w}_2 + \alpha_3 \mathbf{w}_3 + \alpha_4 \mathbf{w}_4 + \alpha_5 \mathbf{w}_5 =$$

$$= \alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_4 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_5 \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 + 3\alpha_2 + \alpha_3 + 2\alpha_4 + 4\alpha_5 \\ \alpha_1 + 3\alpha_2 + \alpha_4 + 3\alpha_5 \\ \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5 \end{pmatrix}$$

ossia se il sistema lineare

$$(*) \qquad \begin{cases} \alpha_1 + 3\alpha_2 + \alpha_3 + 2\alpha_4 + 4\alpha_5 = a \\ \alpha_1 + 3\alpha_2 + \alpha_4 + 3\alpha_5 = b \\ \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5 = c \end{cases}$$

nelle incognite $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5$ abbia o meno soluzione **per ogni** $a, b, c \in \mathbb{R}$.

Se $(*)$ avesse soluzione **per ogni** $a, b, c \in \mathbb{R}$ allora $\mathcal{S}_2$ sarebbe un insieme di generatori di $\mathbb{R}^3$, in caso contrario (ossia se esistono $a, b, c \in \mathbb{R}$ per cui $(*)$ non ha soluzione) no.

Facendo una eliminazione di Gauss sulla matrice aumentata del sistema si ottiene

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 3 & 1 & 2 & 4 & a \\ 1 & 3 & 0 & 1 & 3 & b \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & c \end{array}\right) \xrightarrow[E_{21}(-1)]{} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 3 & 1 & 2 & 4 & a \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & b-a \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & c \end{array}\right) \rightarrow$$

$$\xrightarrow[E_{32}(-1)E_2(-1)]{} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 3 & 1 & 2 & 4 & a \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & a-b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c+b-a \end{array}\right) = (\mathbf{U}_2 \quad | \quad \mathbf{d}_2\,).$$

Poichè esistono $a, b, c \in \mathbb{R}$ per cui $\mathbf{d}_2$ è dominante (ad esempio si prendano $a = b = 0$ e $c = 1$), allora $\mathcal{S}_2$ non è un insieme di generatori di $\mathbb{R}^3$

(in altre parole: poichè esistono dei vettori di $\mathbb{R}^3$ che **NON** si possono esprimere come combinazione lineare degli elementi di $\mathcal{S}_2$, ad esempio il vettore $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, allora $\mathcal{S}_2$ **NON** è un insieme di generatori di $\mathbb{R}^3$).

ESERCIZIO TIPO 6

Siano $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Si dica se $\mathcal{S} = \{\mathbf{v}_1; \mathbf{v}_2; \mathbf{v}_3\} \subset \mathbb{C}^4$ è linearmente dipendente o linearmente indipendente.

Siano $\alpha, \beta, \delta \in \mathbb{C}$ tali che

$$(*) \qquad \mathbf{0} = \alpha\mathbf{v}_1 + \beta\mathbf{v}_2 + \delta\mathbf{v}_3 = \alpha\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + \delta\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha + 2\beta + \delta \\ \beta + \delta \\ 3\alpha + 4\beta + \delta \\ -\alpha + \delta \end{pmatrix}.$$

Allora $(*)$ equivale a (1) $\begin{cases} \alpha + 2\beta + \delta &= 0 \\ \beta + \delta &= 0 \\ 3\alpha + 4\beta + \delta &= 0 \\ -\alpha + \delta &= 0 \end{cases}$.

(1) è un sistema lineare nelle incognite α, β, δ.

(1) ha sempre la soluzione nulla $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ (ossia $\alpha = \beta = \delta = 0$).

Se essa dovesse essere l'unica soluzione di (1) (quindi se (1) avesse un'unica soluzione) allora $\mathcal{S}$ sarebbe L.I., altrimenti, se (1) ha anche una soluzione non nulla (quindi se (1) ha piú di una soluzione) allora $\mathcal{S}$ è L.D.

Cerchiamo allora le soluzioni di (1). Facendo una eliminazione di Gauss sulla sua matrice aumentata si ottiene

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[E_{41}(1)E_{31}(-3)]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \end{array}\right) \rightarrow$$

$$\xrightarrow[E_{42}(-2)E_{32}(2)]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) = (\mathbf{U} \mid \mathbf{0})$$

Dunque (1) è equivalente ad (1') $\begin{cases} \alpha + 2\beta + \delta &= 0 \\ \beta + \delta &= 0 \end{cases}$

Scegliendo come parametro la variabile corrispondente all'unica colonna non dominante di U (la 3^a), con la sostituzione all'indietro si ottiene $\begin{cases} \delta = h \\ \beta = -\delta = -h \\ \alpha = -2\beta - \delta = -2(-h) - h = h \end{cases}$

Il sistema (1') ha ∞^1 soluzioni: tutti gli elementi dell'insieme $\left\{ \begin{pmatrix} h \\ -h \\ h \end{pmatrix} | h \in \mathbb{R} \right\}$.

Prendendo ad esempio $h = 1$ si ottiene $\alpha = \delta = 1$ e $\beta = -1$ e $\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3 = \mathbf{0}$.

Quindi $\{\mathbf{v}_1; \mathbf{v}_2; \mathbf{v}_3\}$ è linearmente dipendente.

ESERCIZIO TIPO 7

Si consideri il seguente insieme di generatori di $\mathbb{R}^3$:

$$\mathcal{S} = \left\{ \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}; \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \mathbf{v}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \mathbf{v}_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}; \mathbf{v}_6 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Si trovi una base di $\mathbb{R}^3$ contenuta in $\mathcal{S}$.

$\boxed{1^0 \text{ MODO}}$

1^0 **passaggio**. Esistono in $\mathcal{S}$ vettori che siano combinazioni lineari degli altri vettori di $\mathcal{S}$?

$\mathbf{v}_4 = \mathbf{0}$ è senz'altro combinazione degli altri:

$$\mathbf{v}_4 = \mathbf{0} = 0\mathbf{v}_1 + 0\mathbf{v}_2 + 0\mathbf{v}_3 + 0\mathbf{v}_5 + 0\mathbf{v}_6,$$

per cui togliamo subito $\mathbf{v}_4$ (**togliamo** comunque subito **tutti gli eventuali vettori di $\mathcal{S}$ che siano nulli**), **e poniamo**

$$\mathcal{S}_1 = \left\{ \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}; \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \mathbf{v}_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}; \mathbf{v}_6 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

2^0 **passaggio**. $\mathcal{S}_1$ è ancora un insieme di generatori di $\mathbb{R}^3$. Esistono in $\mathcal{S}_1$ vettori che siano combinazioni lineari degli altri vettori di $\mathcal{S}_1$? Poichè

$$\mathbf{v}_2 = 2\mathbf{v}_1 = 2\mathbf{v}_1 + 0\mathbf{v}_3 + 0\mathbf{v}_5 + 0\mathbf{v}_6$$

ma anche

$$\mathbf{v}_1 = \frac{1}{2}\mathbf{v}_2 = \frac{1}{2}\mathbf{v}_2 + 0\mathbf{v}_3 + 0\mathbf{v}_5 + 0\mathbf{v}_6$$

possiamo togliere da $\mathcal{S}_1$ il vettore $\mathbf{v}_1$, oppure possiamo togliere da $\mathcal{S}_1$ il vettore $\mathbf{v}_2$, ottenendo ancora un insieme di generatori di $\mathbb{R}^3$. Dunque, **guardiamo se tra i vettori di $\mathcal{S}_1$ ci siano coppie di vettori di cui l'uno è multiplo dell'altro, e per ciascuna di queste eventuali coppie togliamo uno di due vettori**. In questo caso abbiamo individuato la coppia $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ e scegliamo di togliere $\mathbf{v}_2$.

Poniamo

$$\mathcal{S}_2 = \left\{ \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \mathbf{v}_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}; \mathbf{v}_6 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

3^0 **passaggio**. $\mathcal{S}_2$ è ancora un insieme di generatori di $\mathbb{R}^3$. Esistono in $\mathcal{S}_2$ vettori che siano combinazioni lineari degli altri vettori di $\mathcal{S}_2$?

Prendiamo una combinazione lineare nulla degli elementi di $\mathcal{S}_2$:

$$\alpha\mathbf{v}_1 + \beta\mathbf{v}_3 + \delta\mathbf{v}_5 + \gamma\mathbf{v}_6 = \mathbf{0}.$$

Se dovesse risultare che allora $\alpha = \beta = \delta = \gamma = 0$, $\mathcal{S}_2$ sarebbe L.I. e quindi una base di $\mathbb{R}^3$ contenuta in $\mathcal{S}$. Da

$$\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \delta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

otteniamo il sistema lineare, nelle incognite $\alpha, \beta, \delta, \gamma$

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 0 \\ \alpha + \delta = 0 \\ \beta - \delta + \gamma = 0 \end{cases}$$

Troviamo una forma ridotta di Gauss della matrice aumentata del sistema.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{E_{21}(-1)}$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{E_{32}(-1)E_2(-1)} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right).$$

Il sistema è equivalente al sistema

$$(*) \qquad \begin{cases} \alpha + \beta = 0 \\ \beta - \delta = 0 \\ \gamma = 0 \end{cases}$$

il cui insieme delle soluzioni è

$$\left\{ \begin{pmatrix} -h \\ h \\ h \\ 0 \end{pmatrix} | h \in \mathbb{R} \right\}.$$

Poichè esistono soluzioni non nulle, allora $\mathcal{S}_2$ non è L.I., e quindi non è una base.

Prendendo una soluzione non nulla del sistema, ad esempio quella che si ottiene ponendo $h = 1$ si ricava:

$$(-1)\mathbf{v}_1 + 1\mathbf{v}_3 + 1\mathbf{v}_5 + 0\mathbf{v}_6 = \mathbf{0}.$$

Dunque $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_3$ e $\mathbf{v}_5$ sono combinazioni lineari degli altri vettori di $\mathcal{S}_2$, e ciascuno di loro puó essere scelto come elemento da togliere da $\mathcal{S}_2$.

Scegliamo di **togliere da $\mathcal{S}_2$ il vettore $\mathbf{v}_1$** (**combinazione lineare degli altri vettori di $\mathcal{S}_2$**) **e poniamo**

$$\mathcal{S}_3 = \left\{ \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \mathbf{v}_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}; \mathbf{v}_6 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

4^0 **passaggio**. $\mathcal{S}_3$ è ancora un insieme di generatori di $\mathbb{R}^3$. Esistono in $\mathcal{S}_3$ vettori che siano combinazioni lineari degli altri vettori di $\mathcal{S}_3$?

Prendiamo una combinazione lineare nulla degli elementi di $\mathcal{S}_3$:

$$\alpha \mathbf{v}_3 + \beta \mathbf{v}_5 + \delta \mathbf{v}_6 = \mathbf{0}.$$

Se dovesse risultare che allora $\alpha = \beta = \delta = 0$, $\mathcal{S}_3$ sarebbe L.I. e quindi una base di $\mathbb{R}^3$ contenuta in $\mathcal{S}$. Da

$$\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \delta \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

otteniamo il sistema lineare, nelle incognite α, β, δ

$$\begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 0 \\ \alpha - \beta - \delta = 0 \end{cases}$$

Ovviamente l'unica soluzione del sistema è quella nulla, per cui $\mathcal{S}_3$ è una base di $\mathbb{R}^3$ contenuta in $\mathcal{S}$.

$\boxed{2^0 \text{ MODO}}$ Invece di togliere successivamente vettori che siano combinazioni lineari di quelli rimasti, ossia invece di "restringere" insiemi di generatori, si puó "allargare" insiemi L.I.

Ad esempio:

1. $\mathbf{v}_1 \neq \mathbf{0}$ per cui $\{\mathbf{v}_1\}$ è L.I. Teniamo $\mathbf{v}_1$. Chiamiamo $\mathcal{S}_1 = \mathcal{S}$.

2. $\{\mathbf{v}_1; \mathbf{v}_2\}$ è L.D. Togliamo $\mathbf{v}_2$. Chiamiamo $\mathcal{S}_2 = \mathcal{S}_1 \setminus \{\mathbf{v}_2\} = \{\mathbf{v}_1; \mathbf{v}_3; \mathbf{v}_4; \mathbf{v}_5; \mathbf{v}_6\}$.

3. $\{\mathbf{v}_1; \mathbf{v}_3\}$ è L.I. Teniamo $\mathbf{v}_3$. Chiamiamo $\mathcal{S}_3 = \mathcal{S}_2$.

4. $\{\mathbf{v}_1; \mathbf{v}_3; \mathbf{v}_4\}$ è L.D. Togliamo $\mathbf{v}_4$. Chiamiamo $\mathcal{S}_4 = \mathcal{S}_3 \setminus \{\mathbf{v}_3\} = \{\mathbf{v}_1; \mathbf{v}_4; \mathbf{v}_5; \mathbf{v}_6\}$.

5. $\{\mathbf{v}_1; \mathbf{v}_3; \mathbf{v}_5\}$ è L.D. Togliamo $\mathbf{v}_5$. Chiamiamo $\mathcal{S}_5 = \mathcal{S}_4 \setminus \{\mathbf{v}_5\} = \{\mathbf{v}_1; \mathbf{v}_4; \mathbf{v}_6\}$.

6. $\{\mathbf{v}_1; \mathbf{v}_3; \mathbf{v}_6\}$ è L.I. Teniamo $\mathbf{v}_6$. Chiamiamo $\mathcal{S}_6 = \mathcal{S}_5$.

Dunque $\mathcal{S}_6 = \{\mathbf{v}_1; \mathbf{v}_3; \mathbf{v}_6\}$ è una base di $\mathbb{R}^3$ contenuta in $\mathcal{S}$.

ESERCIZIO TIPO 8

Si trovi una base dello spazio nullo $N(\mathbf{A})$ della matrice $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

Poichè $N(\mathbf{A}) = N(\mathbf{U}$ per ogni forma ridotta di Gauss $\mathbf{U}$ di $\mathbf{A}$ (perchè $N(\mathbf{A})$ è l'insieme delle soluzioni del sistema omogeneo $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$, e se $\mathbf{U}$ è una forma ridotta di Gauss di $\mathbf{A}$ allora $(\mathbf{U} \quad | \quad \mathbf{0})$ è una forma ridotta di Gauss per $(\mathbf{A} \quad | \quad \mathbf{0})$, per cui $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ è equivalente al sistema $\mathbf{Ux} = \mathbf{0}$, il cui insieme delle soluzioni è $N(\mathbf{U})$), troviamo una base dello spazio nullo di una forma ridotta di Gauss per $\mathbf{A}$.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{21}(-2)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{U}$$

$\mathbf{U}$ è una forma ridotta di Gauss per $\mathbf{A}$. Per il teorema "nullità + rango"si ha

$$\dim \mathrm{N}(\mathbf{U}) = (\text{numero delle colonne di } \mathbf{U} \text{ - } \mathrm{rk}(\mathbf{U})) = 4 - 2 = 2.$$

Poichè

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in N(\mathbf{A}) \iff \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ \qquad x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

scegliendo come parametri le variabili corrispondenti alle colonne libere di $\mathbf{U}$ (la 2^a e la 4^a) con la sostituzione all'indietro si ottiene

$$\begin{cases} x_2 = h \\ x_4 = k \\ x_3 = -x_4 = -k \\ x_1 = -2x_2 - x_3 = -2h - (-k) = -2h + k \end{cases}$$

Quindi

$$N(\mathbf{A}) = N(\mathbf{U}) = \{ \begin{pmatrix} -2h + k \\ h \\ -k \\ k \end{pmatrix} | h, k \in \mathbb{C} \}$$

e chiamando $\mathbf{v}_1$ l'elemento di $N(\mathbf{A})$ che si ottiene ponendo $h = 1$ e $k = 0$, e $\mathbf{v}_2$ l'elemento di $N(\mathbf{A})$ che si ottiene ponendo $h = 0$ e $k = 1$, si ha che una base di $N(\mathbf{A})$ è

$$\left\{ \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

ESERCIZIO TIPO 9

Sia $\mathbf{A}_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \alpha & 4 \\ 0 & 0 & \alpha^2+4 & 2i \\ 2 & 1 & 2\alpha+1 & 8 \\ 1 & 0 & \alpha^2+\alpha+4 & \alpha+4 \end{pmatrix}$, dove $\alpha \in \mathbb{C}$.

Per ogni $\alpha \in \mathbb{C}$ si dica qual è $rk(\mathbf{A}_\alpha)$ e si trovino una base $\mathcal{B}_\alpha$ di $C(\mathbf{A}_\alpha)$ ed una base $\mathcal{D}_\alpha$ di $R(\mathbf{A}_\alpha)$.

$$\mathbf{A}_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \alpha & 4 \\ 0 & 0 & \alpha^2+4 & 2i \\ 2 & 1 & 2\alpha+1 & 8 \\ 1 & 0 & \alpha^2+\alpha+4 & \alpha+4 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{41}(-1)E_{31}(-2)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \alpha & 4 \\ 0 & 0 & \alpha^2+4 & 2i \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha^2+4 & \alpha \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{23}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \alpha & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha^2+4 & 2i \\ 0 & 0 & \alpha^2+4 & \alpha \end{pmatrix} = \mathbf{B}_\alpha$$

$\boxed{1^o CASO}$ $\alpha \neq 2i, -2i$

$$\mathbf{B}_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \alpha & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha^2+4 & 2i \\ 0 & 0 & \alpha^2+4 & \alpha \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{43}(-\alpha^2-4)E_3(\frac{1}{\alpha^2+4})} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \alpha & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2i}{\alpha^2+4} \\ 0 & 0 & 0 & \alpha-2i \end{pmatrix} \xrightarrow{E_4(\frac{1}{\alpha-2i})} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \alpha & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2i}{\alpha^2+4} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{U}_\alpha$$

$$rk(\mathbf{A}_\alpha) = 4, \qquad \mathcal{D}_\alpha = \{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \overline{\alpha} \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -\frac{2i}{\overline{\alpha}^2+4} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \}$$

$$\mathcal{B}_\alpha = \{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \alpha \\ \alpha^2+4 \\ 2\alpha+1 \\ \alpha^2+\alpha+4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 2i \\ 8 \\ \alpha+4 \end{pmatrix} \}$$

$\boxed{2^o CASO}$ $\alpha \in \{2i, -2i\}$

$$\mathbf{B}_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \alpha & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2i \\ 0 & 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{43}(-\alpha)E_3(\frac{1}{2i})} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \alpha & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{U}_\alpha$$

$$rk(\mathbf{A}_\alpha) = 3, \qquad \mathcal{D}_\alpha = \{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \overline{\alpha} \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \}, \qquad \mathcal{B}_\alpha = \{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 2i \\ 8 \\ \alpha+4 \end{pmatrix} \}$$

ESERCIZIO TIPO 10

Osservazione 1. Siano $V \neq \{\mathbf{0}\}$ uno spazio vettoriale su $K \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ e W un suo sottospazio. Se $\dim(V) = \dim(W) = n$ allora $W = V$ (fascicolo II dispense, pag. 18).

Osservazione 2. Sia $\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_1; \mathbf{v}_2; \dots; \mathbf{v}_n\} \subset K^n$, dove $K \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$.

Per vedere se $\mathcal{B}$ è una base o meno di K^n si puó procedere nel seguente modo:

– si costruisce la matrice $n \times n$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \dots & \mathbf{v}_n \end{pmatrix}$$

le cui colonne sono gli elementi di $\mathcal{B}$;

– si trova una forma ridotta di Gauss $\mathbf{U}$ per $\mathbf{A}$.

– Se rk($\mathbf{U}$)=n (ossia il numero delle colonne dominanti di $\mathbf{U}$, o, equivalentemente, il numero delle righe non nulle di $\mathbf{U}$ è n), allora $\mathcal{B}$ è una base di K^n, altrimenti (ossia se $\text{rk}(\mathbf{U}) < n$) $\mathcal{B}$ non è una base di K^n.

Infatti:

– $\text{rk}(\mathbf{U}) = \text{rk}(\mathbf{A})$, essendo $\mathbf{U}$ una forma ridotta di Gauss per $\mathbf{A}$,

– $\text{rk}(\mathbf{A}) = \dim(C(\mathbf{A}))$ per definizione,

– $C(\mathbf{A}) = \langle \mathbf{v}_1; \mathbf{v}_2; \dots; \mathbf{v}_n \rangle = \langle \mathcal{B} \rangle$, per costruzione di $\mathbf{A}$.

Quindi

$$rk(\mathbf{U}) = n \iff \mathcal{B} \text{ base di } C(\mathbf{A}) \iff \mathrm{d}im(C(\mathbf{A})) = n \iff C(\mathbf{A}) = K^n$$

per cui

$$rk(\mathbf{U}) = n \iff \mathcal{B} \text{ base di } K^n.$$

ESERCIZIO Si dica per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ l'insieme $\mathcal{B}_\alpha = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \\ 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha+1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$ è una base di $\mathbb{R}^3$.

Costruiamo una matrice le cui colonne sisano gli elementi di $\mathcal{B}_\alpha$:

$$\mathbf{A}_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ \alpha & 0 & \alpha+1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Il problema diventa stabilire per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ si ha che $\text{rk}\mathbf{A}_\alpha = 3$.

Facciamo un'eliminazione di Gauss su $\mathbf{A}_\alpha$.

$$\mathbf{A}_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ \alpha & 0 & \alpha+1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{31}(-1)E_{21}(-\alpha)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2\alpha & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{B}_\alpha$$

1^0 CASO: $\alpha = 0$

$$\mathbf{B}_0 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{32}(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{U}_0$$

$$rk(\mathbf{A}_0) = rk(\mathbf{U}_0) = 2 \neq 3 \quad \Longrightarrow \quad \mathcal{B}_0 \quad \text{NON è una base di} \quad \mathbb{R}^3.$$

2^0 CASO: $\alpha \neq 0$

$$\mathbf{B}_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2\alpha & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_2(-1/2\alpha)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1/2\alpha \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{U}_\alpha$$

$$rk(\mathbf{A}_\alpha) = rk(\mathbf{U}_\alpha) = 3 \quad \Longrightarrow \quad \mathcal{B}_\alpha \quad \text{E' una base di} \quad \mathbb{R}^3.$$

ESERCIZIO TIPO 11

Si calcoli la matrice di passaggio $M_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{B}'}$ da $\mathcal{B}'$ a $\mathcal{B}$, dove $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$ sono le seguenti basi ordinate di $\mathbb{R}^3$:

$$\mathcal{B} = \{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \}, \qquad \mathcal{B}' = \{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \}.$$

La matrice di passaggio $M_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{B}'}$ da $\mathcal{B}'$ a $\mathcal{B}$ è

$$M_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} C_{\mathcal{B}}(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}) & C_{\mathcal{B}}(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}) & C_{\mathcal{B}}(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}) \end{pmatrix}.$$

Per calcolarla, piuttosto che calcolare separatamente $C_{\mathcal{B}}(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix})$, $C_{\mathcal{B}}(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix})$ e $C_{\mathcal{B}}(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix})$, calcoliamo $C_{\mathcal{B}}(\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix})$ per un generico vettore $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$, e specializziamo la formula ottenuta ai tre diversi vettori $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Poichè

$$C_{\mathcal{B}}(\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \delta \end{pmatrix} \quad | \quad \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \delta \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

allora

$$C_{\mathcal{B}}(\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \delta \end{pmatrix} \quad | \quad \begin{pmatrix} \alpha + 2\beta + \delta \\ \beta \\ \alpha - \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

ossia α, β e δ sono tali che

$$\begin{cases} \alpha + 2\beta + \delta = a \\ \beta = b \\ \alpha - \delta = c \end{cases} \implies \begin{cases} \alpha + \delta = a - 2b \\ \beta = b \\ \alpha - \delta = c \end{cases} \implies \begin{cases} \alpha = (a - 2b + c)/2 \\ \beta = b \\ \delta = (a - 2b - c)/2 \end{cases}$$

per cui

$$C_{\mathcal{B}}(\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} (a - 2b + c)/2 \\ b \\ (a - 2b - c)/2 \end{pmatrix}$$

Dunque

$$M_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & -1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

ESERCIZIO TIPO 12

Si consideri l'applicazione lineare $f : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^2$ definita da

$$f(\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} a_0 + a_2 \\ 2a_0 + a_1 \end{pmatrix}.$$

Si determini la matrice $\mathbf{A}$ associata ad f rispetto alle basi ordinate

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\} \quad \text{e} \quad \mathcal{D} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

su dominio e codominio rispettivamente.

La matrice che cerchiamo è

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} C_{\mathcal{D}}(f(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix})) & C_{\mathcal{D}}(f(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix})) & C_{\mathcal{D}}(f(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix})) \end{pmatrix}$$

Poichè

$$\underset{\boxed{\begin{array}{c} a_0 = 1 \\ a_1 = 0 \\ a_2 = 1 \end{array}}}{f(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}) \quad \overset{\uparrow}{=}} \quad \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad \underset{\boxed{\begin{array}{c} a_0 = 2 \\ a_1 = 1 \\ a_2 = 0 \end{array}}}{f(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}) \quad \overset{\uparrow}{=}} \quad \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix},$$

$$\underset{\boxed{\begin{array}{c} a_0 = 1 \\ a_1 = 0 \\ a_2 = -1 \end{array}}}{f(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}) \quad \overset{\uparrow}{=}} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix},$$

allora

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} C_{\mathcal{D}}(\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}) & C_{\mathcal{D}}(\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}) & C_{\mathcal{D}}(\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}) \end{pmatrix}$$

Piuttosto che calcolare separatamente $C_{\mathcal{D}}(\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix})$, $C_{\mathcal{D}}(\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix})$ e $C_{\mathcal{D}}(\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix})$, calcoliamo $C_{\mathcal{D}}(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix})$ per un generico vettore $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2$, e specializziamo la formula ottenuta ai tre diversi vettori $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Poichè

$$C_{\mathcal{D}}(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \quad | \quad \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

allora

$$C_{\mathcal{D}}(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \quad | \quad \begin{pmatrix} \alpha+\beta \\ \alpha-\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

ossia α e β sono tali che $\begin{cases} \alpha+\beta = a \\ \alpha-\beta = b \end{cases}$, per cui $\begin{cases} \alpha = (a+b)/2 \\ \beta = (a-b)/2 \end{cases}$

Quindi

$$C_{\mathcal{D}}(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} (a+b)/2 \\ (a-b)/2 \end{pmatrix}$$

Dunque

$$C_{\mathcal{D}}(\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}) \underset{\boxed{\begin{matrix} a=2 \\ b=2 \end{matrix}}}{\overset{}{\underset{\uparrow}{=}}} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad C_{\mathcal{D}}(\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}) \underset{\boxed{\begin{matrix} a=2 \\ b=5 \end{matrix}}}{\underset{\uparrow}{=}} \begin{pmatrix} \frac{7}{2} \\ -\frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

$$C_{\mathcal{D}}(\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}) \underset{\boxed{\begin{matrix} a=0 \\ b=2 \end{matrix}}}{\underset{\uparrow}{=}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

e quindi

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & \frac{7}{2} & 1 \\ 0 & -\frac{3}{2} & -1 \end{pmatrix}.$$

ESERCIZIO TIPO 13

Sia $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & \frac{7}{2} & 1 \\ 0 & -\frac{3}{2} & -1 \end{pmatrix}$ la matrice associata ad un'applicazione lineare $f : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^2$ rispetto alle basi ordinate

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\} \quad \text{e} \quad \mathcal{D} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

su dominio e codominio rispettivamente. Si determini la matrice $\mathbf{A}'$ associata ad f rispetto alle basi ordinate

$$\mathcal{B}' = \{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \} \quad \text{e} \quad \mathcal{D}' = \{ \mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \}$$

su dominio e codominio rispettivamente.

La matrice che cerchiamo è

$$\mathbf{A}' = \mathbf{M}^{-1}_{\mathcal{D} \leftarrow \mathcal{D}'} \mathbf{A} \mathbf{M}_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{B}'}$$

dove $\mathbf{M}_{\mathcal{D} \leftarrow \mathcal{D}'}$ è la matrice di passaggio da $\mathcal{D}'$ a $\mathcal{D}$, e $\mathbf{M}_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{B}'}$ è la matrice di passaggio da $\mathcal{B}'$ a $\mathcal{B}$.

Nell'ESERCIZIO TIPO 12 abbiamo visto che

$$C_{\mathcal{D}}(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} (a+b)/2 \\ (a-b)/2 \end{pmatrix}$$

quindi

$$\mathbf{M}_{\mathcal{D} \leftarrow \mathcal{D}'} = (C_{\mathcal{D}}(\underline{e}_1) \quad C_{\mathcal{D}}(\underline{e}_2)) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

per cui

$$\mathbf{M}^{-1}_{\mathcal{D} \leftarrow \mathcal{D}'} = \frac{1}{\frac{1}{2}(-\frac{1}{2}) - \frac{1}{2}\frac{1}{2}} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = (-2) \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Per calcolare $\mathbf{M}^{-1}_{\mathcal{D} \leftarrow \mathcal{D}'}$ avremmo potuto anche fare:

$$\mathbf{M}^{-1}_{\mathcal{D} \leftarrow \mathcal{D}'} = \mathbf{M}_{\mathcal{D}' \leftarrow \mathcal{D}} = \left(C_{\mathcal{D}'}(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}) \quad C_{\mathcal{D}'}(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}) \right),$$

e dal momento che

$$C_{\mathcal{D}'}(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \quad \forall \quad \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2$$

ottenere subito

$$\mathbf{M}^{-1}_{\mathcal{D} \leftarrow \mathcal{D}'} = \mathbf{M}_{\mathcal{D}' \leftarrow \mathcal{D}} = \left(C_{\mathcal{D}'}(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}) \quad C_{\mathcal{D}'}(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}) \right) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

La matrice $\mathbf{M}_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{B}'}$ è già stata calcolata nell'ESERCIZIO TIPO 11:

$$\mathbf{M}_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & -1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

e quindi

$$\mathbf{A}' = \mathbf{M}_{\mathcal{D}\leftarrow\mathcal{D}'}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{M}_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{B}'} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & \frac{7}{2} & 1 \\ 0 & -\frac{3}{2} & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & -1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & -1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

ESERCIZIO TIPO 14

Si verifichi che $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ definita da $\phi(\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix}) = |a_0 + a_1| + |a_0 - a_1|$ è una norma.

$\boxed{1}$ $\phi(\mathbf{0}) = \phi(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}) = |0+0| + |0-0| = 0.$

Sia $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix}$. Poichè $\phi(\mathbf{v}) \geq 0$, per provare che

$$\mathbf{v} \neq \mathbf{0} \qquad \Longrightarrow \qquad \phi(\mathbf{v}) > 0$$

basta provare che

$$\mathbf{v} \neq \mathbf{0} \qquad \Longrightarrow \qquad \phi(\mathbf{v}) \neq 0,$$

ossia basta provare che

$$\phi(\mathbf{v}) = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \mathbf{v} = \mathbf{0}.$$

Ora:

$$\left.\begin{array}{r} \phi(\mathbf{v}) = 0 \\ \mathbf{v} = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} \end{array}\right\} \Longrightarrow \begin{cases} |a_0 + a_1| = 0 \\ |a_0 - a_1| = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a_0 + a_1 = 0 \\ a_0 - a_1 = 0 \end{cases} \Longrightarrow \quad a_0 = a_1 = 0 \quad \Longrightarrow \quad \mathbf{v} = \mathbf{0}.$$

$\boxed{2}$

$$\begin{aligned} \phi(\alpha\mathbf{v}) = \phi(\alpha \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix}) = \phi(\begin{pmatrix} \alpha a_0 \\ \alpha a_1 \end{pmatrix}) &= |\alpha a_0 + \alpha a_1| + |\alpha a_0 - \alpha a_1| = \\ &= |\alpha||a_0 + a_1| + |\alpha||a_0 - a_1| = |\alpha|(|a_0 + a_1| + |a_0 - a_1|) = |\alpha|\phi(\mathbf{v}). \end{aligned}$$

$\boxed{3}$ Siano $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix}$ e $\mathbf{w} = \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned} \phi(\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \phi(\begin{pmatrix} a_0 + b_0 \\ a_1 + b_1 \end{pmatrix}) &= |(a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)| + |(a_0 + b_0) - (a_1 + b_1)| = \\ &= |(a_0 + a_1) + (b_0 + b_1)| + |(a_0 - a_1) + (b_0 - b_1)| \leq \\ &\leq |a_0 + a_1| + |b_0 + b_1| + |a_0 - a_1| + |b_0 - b_1| = \phi(\mathbf{v}) + \phi(\mathbf{w}). \end{aligned}$$

ESERCIZIO TIPO 15

Si verifichi che $(\cdot,\cdot\,) : \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$ definita da

$$\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) = \overline{x}_1 y_1 + 2\overline{x}_2 y_2$$

è un prodotto interno.

$\boxed{1}$ Siano $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ e $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$.

$$\overline{(\mathbf{y},\mathbf{x})} \stackrel{?}{=} (\mathbf{x},\mathbf{y})$$

$$\overline{(\mathbf{y},\mathbf{x})} = \overline{\overline{y}_1 x_1 + 2\overline{y}_2 x_2} = y_1\overline{x}_1 + 2y_2\overline{x}_2 = (\mathbf{x},\mathbf{y}).$$

$\boxed{2}$ Siano $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{z} = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$.

$$(\mathbf{x}, \alpha\mathbf{y} + \beta\mathbf{w}) \stackrel{?}{=} \alpha(\mathbf{x},\mathbf{y}) + \beta(\mathbf{x},\mathbf{w})$$

$$\begin{aligned}(\mathbf{x}, \alpha\mathbf{y} + \beta\mathbf{w}) &= \overline{x_1}(\alpha y_1 + \beta w_1) + 2\overline{x_2}(\alpha y_2 + \beta w_2) = \alpha\overline{x_1}y_1 + \beta\overline{x_1}w_1 + 2\alpha\overline{x_2}y_2 + 2\beta\overline{x_2}w_2 = \\ &= \alpha(\overline{x_1}y_1 + 2\overline{x_2}y_2) + \beta(\overline{x_1}w_1 + 2\overline{x_2}w_2) = \alpha(\mathbf{x},\mathbf{y}) + \beta(\mathbf{x},\mathbf{w}).\end{aligned}$$

$\boxed{3}$

- $(\mathbf{0},\mathbf{0}) \stackrel{?}{=} 0$

•• $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \neq \mathbf{0} \stackrel{?}{\Longrightarrow} (\mathbf{x},\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^+_{>0}$

- $(\mathbf{0},\mathbf{0}) = 0 + 2 \times 0 = 0$

•• $(\mathbf{x},\mathbf{x}) = \overline{x}_1 x_1 + 2\overline{x}_2 x_2 = |x_1|^2 + 2|x_2|^2$

Essendo $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$, si ha che $x_1 \neq 0$ oppure $x_2 \neq 0$, per cui $|x_1|^2 \in \mathbb{R}^+_{>0}$ oppure $|x_2|^2 \in \mathbb{R}^+_{>0}$.

Quindi $|x_1|^2 + 2|x_2|^2 \in \mathbb{R}^+_{>0}$.

ESERCIZIO TIPO 16

Si trovi una base ortonormale del sottospazio di $\mathbb{C}^4$

$$V = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ i \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ i \end{pmatrix} \right\rangle.$$

$\boxed{1^0\textbf{MODO}}$

$\boxed{1}$ Troviamo una base $\mathcal{B}_1$ di V.

Poniamo

$$\mathbf{w}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ i \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{w}_2 = \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{w}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{w}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ i \end{pmatrix}$$

e costruiamo la matrice $\mathbf{A} = (\, \mathbf{w}_1 \quad \mathbf{w}_2 \quad \mathbf{w}_3 \quad \mathbf{w}_4 \,)$, ossia una matrice tale che $C(\mathbf{A}) = V$.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & i & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ i & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & i \end{pmatrix} \xrightarrow[E_{31}(-i)]{} \begin{pmatrix} 1 & i & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & i \end{pmatrix} \xrightarrow[E_{42}(1)E_{32}(-1)]{} \begin{pmatrix} 1 & i & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\xrightarrow[E_{34}]{} \begin{pmatrix} 1 & i & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[E_{3}(-i)]{} \begin{pmatrix} 1 & i & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{U}$$

Dunque $\mathcal{B}_1 = \{\mathbf{w}_1; \mathbf{w}_2; \mathbf{w}_4\}$ è una base di $C(\mathbf{A}) = V$.

$\boxed{2}$ Troviamo una base ortogonale $\mathcal{B}_2$ di V: poniamo $\mathbf{v}_1 = \mathbf{w}_1, \mathbf{v}_2 = \mathbf{w}_2$ e $\mathbf{v}_3 = \mathbf{w}_4$, e applichiamo l'algoritmo di Gram-Schmidt a $\{\mathbf{v}_1; \mathbf{v}_2; \mathbf{v}_3\}$.

$$\mathbf{u}_1 = \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ i \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{u}_2 = \mathbf{v}_2 - \alpha_{12}\mathbf{u}_1, \qquad \mathbf{u}_1 \neq \mathbf{0} \implies \alpha_{12} = \frac{(\mathbf{u}_1, \mathbf{v}_2)}{(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_1)}$$

$$(\mathbf{u}_1, \mathbf{v}_2) = \mathbf{u}_1^H \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = i$$

$$(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_1) = \mathbf{u}_1^H \mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ i \\ 0 \end{pmatrix} = 2$$

$$\implies \alpha_{12} = i/2$$

$$\mathbf{u}_2 = \mathbf{v}_2 - \alpha_{12}\mathbf{u}_1 = $$
$$= \mathbf{v}_2 - \frac{i}{2}\mathbf{u}_1 =$$
$$= \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} - \frac{i}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ i \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{i}{2} \\ 1 \\ \frac{1}{2} \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{u}_3 = \mathbf{v}_3 - \alpha_{13}\mathbf{u}_1 - \alpha_{23}\mathbf{u}_2,$$

$$\mathbf{u}_1 \neq \mathbf{0} \implies \alpha_{13} = \frac{(\mathbf{u}_1, \mathbf{v}_3)}{(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_1)}$$

$$(\mathbf{u}_1, \mathbf{v}_3) = \mathbf{u}_1^H \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ i \end{pmatrix} = 0$$

$$\implies \alpha_{13} = 0$$

$$\mathbf{u}_2 \neq \mathbf{0} \implies \alpha_{23} = \frac{(\mathbf{u}_2, \mathbf{v}_3)}{(\mathbf{u}_2, \mathbf{u}_2)}$$

$$(\mathbf{u}_2, \mathbf{v}_3) = \mathbf{u}_2^H \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} -\frac{i}{2} & 1 & \frac{1}{2} & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ i \end{pmatrix} = -i$$

$$(\mathbf{u}_2, \mathbf{u}_2) = \mathbf{u}_2^H \mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} -\frac{i}{2} & 1 & \frac{1}{2} & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{i}{2} \\ 1 \\ \frac{1}{2} \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{5}{2}$$

$$\implies \alpha_{23} = -\frac{2}{5}i$$

$$\begin{aligned}\mathbf{u}_3 &= \mathbf{v}_3 - \alpha_{13}\mathbf{u}_1 - \alpha_{23}\mathbf{u}_2 = \\ &= \mathbf{v}_3 + \frac{2i}{5}\mathbf{u}_2 = \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ i \end{pmatrix} + \frac{2i}{5}\begin{pmatrix} \frac{i}{2} \\ 1 \\ \frac{1}{2} \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -1 \\ 2i \\ i \\ 3i \end{pmatrix}\end{aligned}$$

$\mathcal{B}_2 = \{\mathbf{u}_1; \mathbf{u}_2; \mathbf{u}_3\}$, dove

$$\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ i \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} i \\ 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}_3 = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -1 \\ 2i \\ i \\ 3i \end{pmatrix},$$

è una base ortogonale di V.

$\boxed{3}$ Troviamo una base ortonormale $\mathcal{B}$ di V, normalizzando gli elementi di $\mathcal{B}_2$.

$$\|\mathbf{u}_1\|_2 = \sqrt{(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_1)} = \sqrt{2}$$
$$\|\mathbf{u}_2\|_2 = \sqrt{(\mathbf{u}_2, \mathbf{u}_2)} = \sqrt{5/2}$$
$$\|\mathbf{u}_3\|_2 = \sqrt{(\mathbf{u}_3, \mathbf{u}_3)} = \sqrt{\mathbf{u}_3^H\mathbf{u}_3} = \sqrt{\frac{1}{5}\begin{pmatrix} -1 & -2i & -i & -3i \end{pmatrix}\frac{1}{5}\begin{pmatrix} -1 \\ 2i \\ i \\ 3i \end{pmatrix}} = \frac{\sqrt{15}}{5}$$

$\mathcal{B} = \{\frac{\mathbf{u}_1}{\|\mathbf{u}_1\|_2}; \frac{\mathbf{u}_2}{\|\mathbf{u}_2\|_2}; \frac{\mathbf{u}_3}{\|\mathbf{u}_3\|_2}\}$, dove

$$\frac{\mathbf{u}_1}{\|\mathbf{u}_1\|_2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ i \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \frac{\mathbf{u}_2}{\|\mathbf{u}_2\|_2} = \frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix} i \\ 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \frac{\mathbf{u}_3}{\|\mathbf{u}_3\|_2} = \frac{1}{\sqrt{15}}\begin{pmatrix} -1 \\ 2i \\ i \\ 3i \end{pmatrix},$$

è una base ortonormale di V.

$\boxed{2^0\textbf{MODO}}$

$\boxed{1}$ Costruiamo dapprima **un insieme di generatori ortogonale di V**: poniamo

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ i \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ i \end{pmatrix}$$

e applichiamo l'algoritmo di Gram-Schimdt a $\{\mathbf{v}_1; \mathbf{v}_2; \mathbf{v}_3; \mathbf{v}_4\}$. Otterremo 4 vettori, $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4$, e l'insieme $\{\mathbf{u}_1; \mathbf{u}_2; \mathbf{u}_3; \mathbf{u}_4\}$ sarà un insieme di generatori ortogonale di V.

Per sapere se alcuni degli $\mathbf{u}_i$ saranno nulli, e in tal caso quali, troviamo innanzitutto una forma ridotta di Gauss U della matrice A che ha come colnne $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4$: le eventuali colonne libere di U corrisponderanno agli $\mathbf{u}_i$ nulli.

$$\mathbf{A} = (\,\mathbf{v}_1 \quad \mathbf{v}_2 \quad \mathbf{v}_3 \quad \mathbf{v}_4\,) = \begin{pmatrix} 1 & i & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ i & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & i \end{pmatrix} \xrightarrow[E_{31}(-i)]{} \begin{pmatrix} 1 & i & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & i \end{pmatrix} \xrightarrow[E_{42}(1)E_{32}(-1)]{}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & i & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \end{pmatrix} \xrightarrow[E_{34}]{} \begin{pmatrix} 1 & i & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[E_3(-i)]{} \begin{pmatrix} 1 & i & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{U}$$

Poichè $\mathbf{U}$ ha come unica colonna libera la 3^a, allora applicando l'algoritmo di Gram-Schimdt a $\{\mathbf{v}_1; \mathbf{v}_2; \mathbf{v}_3; \mathbf{v}_4\}$ otterremo $\mathbf{u}_3 = \mathbf{0}$.

$$\mathbf{u}_1 = \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ i \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{u}_2 = \mathbf{v}_2 - \alpha_{12}\mathbf{u}_1, \qquad \mathbf{u}_1 \neq \mathbf{0} \implies \alpha_{12} = \frac{(\mathbf{u}_1, \mathbf{v}_2)}{(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_1)}$$

$$(\mathbf{u}_1, \mathbf{v}_2) = \mathbf{u}_1^H \mathbf{v}_2 = (\,1 \quad 0 \quad -i \quad 0\,) \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = i$$

$$(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_1) = \mathbf{u}_1^H \mathbf{u}_1 = (\,1 \quad 0 \quad -i \quad 0\,) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ i \\ 0 \end{pmatrix} = 2$$

$$\implies \quad \alpha_{12} = i/2$$

$$\mathbf{u}_2 = \mathbf{v}_2 - \alpha_{12}\mathbf{u}_1 = \mathbf{v}_2 - \frac{i}{2}\mathbf{u}_1 =$$

$$= \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} - \frac{i}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ i \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{i}{2} \\ 1 \\ \frac{1}{2} \\ -1 \end{pmatrix}$$

$\mathbf{u}_3 = \mathbf{v}_3 - \alpha_{13}\mathbf{u}_1 - \alpha_{23}\mathbf{u}_2,$

$$\mathbf{u}_1 \neq \mathbf{0} \quad \Longrightarrow \quad \alpha_{13} = \frac{(\mathbf{u}_1, \mathbf{v}_3)}{(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_1)}$$

$$(\mathbf{u}_1, \mathbf{v}_3) = \mathbf{u}_1^H \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = i$$

$$(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_1) = 2$$

$$\Longrightarrow \quad \alpha_{13} = \frac{i}{2}$$

$$\mathbf{u}_2 \neq \mathbf{0} \quad \Longrightarrow \quad \alpha_{23} = \frac{(\mathbf{u}_2, \mathbf{v}_3)}{(\mathbf{u}_2, \mathbf{u}_2)}$$

$$(\mathbf{u}_2, \mathbf{v}_3) = \mathbf{u}_2^H \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} -\frac{i}{2} & 1 & \frac{1}{2} & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$= -1 - \frac{1}{2} - 1 = -\frac{5}{2}$$

$$(\mathbf{u}_2, \mathbf{u}_2) = \mathbf{u}_2^H \mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} -\frac{i}{2} & 1 & \frac{1}{2} & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{i}{2} \\ 1 \\ \frac{1}{2} \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{5}{2}$$

$$\Longrightarrow \quad \alpha_{23} = -1$$

$$\mathbf{u}_3 = \mathbf{v}_3 - \alpha_{13}\mathbf{u}_1 - \alpha_{23}\mathbf{u}_2 =$$
$$= \mathbf{v}_3 - \frac{i}{2}\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 =$$
$$= \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{i}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ i \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{i}{2} \\ 1 \\ \frac{1}{2} \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\mathbf{u}_4 = \mathbf{v}_4 - \alpha_{14}\mathbf{u}_1 - \alpha_{24}\mathbf{u}_2 - \alpha_{34}\mathbf{u}_3$

$$\mathbf{u}_1 \neq \mathbf{0} \quad \Longrightarrow \quad \alpha_{14} = \frac{(\mathbf{u}_1, \mathbf{v}_4)}{(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_1)}$$

$$(\mathbf{u}_1, \mathbf{v}_4) = \mathbf{u}_1^H \mathbf{v}_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ i \end{pmatrix} = 0$$

$$\Longrightarrow \quad \alpha_{14} = 0$$

$$\mathbf{u}_2 \neq \mathbf{0} \quad \Longrightarrow \quad \alpha_{24} = \frac{(\mathbf{u}_2, \mathbf{v}_4)}{(\mathbf{u}_2, \mathbf{u}_2)}$$

$$(\mathbf{u}_2, \mathbf{v}_4) = \mathbf{u}_2^H \mathbf{v}_4 = \begin{pmatrix} -\frac{i}{2} & 1 & \frac{1}{2} & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ i \end{pmatrix} = -i$$

$$(\mathbf{u}_2, \mathbf{u}_2) = \mathbf{u}_2^H \mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} -\frac{i}{2} & 1 & \frac{1}{2} & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{i}{2} \\ 1 \\ \frac{1}{2} \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{5}{2}$$

$$\Longrightarrow \quad \alpha_{24} = -\frac{2}{5} i$$

$$\mathbf{u}_3 = \mathbf{0} \quad \Longrightarrow \quad \alpha_{34} = 0 \quad \text{per def.}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_4 &= \mathbf{v}_4 - \alpha_{24}\mathbf{u}_2 = \\ &= \mathbf{v}_4 + \frac{2i}{5}\mathbf{u}_2 = \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ i \end{pmatrix} + \frac{2i}{5} \begin{pmatrix} \frac{i}{2} \\ 1 \\ \frac{1}{2} \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -1 \\ 2i \\ i \\ 3i \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Dunque $\left\{ \mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ i \\ 0 \end{pmatrix}; \mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} \frac{i}{2} \\ 1 \\ \frac{1}{2} \\ -1 \end{pmatrix}; \mathbf{u}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \mathbf{u}_4 = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -1 \\ 2i \\ i \\ 3i \end{pmatrix} \right\}$ è un insieme di generatori ortogonale di V.

$\boxed{2}$ Costruiamo **una base ortogonale di V** togliendo dall'insieme di generatori ortogonale di V trovato al punto $\boxed{1}$ gli eventuali $\mathbf{u}_i$ nulli. In questo caso poniamo:

$$\mathbf{w}_1 = \mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ i \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{w}_2 = \mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} \frac{i}{2} \\ 1 \\ \frac{1}{2} \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{w}_3 = \mathbf{u}_4 = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -1 \\ 2i \\ i \\ 3i \end{pmatrix}.$$

L'insieme $\left\{ \mathbf{w}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ i \\ 0 \end{pmatrix}; \mathbf{w}_2 = \begin{pmatrix} \frac{i}{2} \\ 1 \\ \frac{1}{2} \\ -1 \end{pmatrix}; \mathbf{w}_3 = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -1 \\ 2i \\ i \\ 3i \end{pmatrix} \right\}$ è una base ortogonale di V.

$\boxed{3}$ Costruiamo **base ortonormale di V** normalizzando la base ortogonale trovata al punto $\boxed{2}$, ossia dividendo ciascun elemento della base ortogonale trovata in $\boxed{2}$ per la propria norma euclidea.

Cominciamo con il calcolare la norma euclidea di $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3$:

$$\|\mathbf{w}_1\|_2 = \sqrt{(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_1)} = \sqrt{2}$$
$$\|\mathbf{w}_2\|_2 = \sqrt{(\mathbf{u}_2, \mathbf{u}_2)} = \sqrt{5/2}$$
$$\|\mathbf{w}_3\|_2 = \sqrt{(\mathbf{u}_4, \mathbf{u}_4)} = \sqrt{\mathbf{u}_4^H \mathbf{u}_4} = \sqrt{\frac{1}{5}\begin{pmatrix} -1 & -2i & -i & -3i \end{pmatrix} \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -1 \\ 2i \\ i \\ 3i \end{pmatrix}} = \frac{\sqrt{15}}{5}$$

Allora $\mathcal{B} = \{\frac{\mathbf{w}_1}{\|\mathbf{w}_1\|_2}; \frac{\mathbf{w}_2}{\|\mathbf{w}_2\|_2}; \frac{\mathbf{w}_3}{\|\mathbf{w}_3\|_2}\}$, dove

$$\frac{\mathbf{w}_1}{\|\mathbf{w}_1\|_2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ i \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \frac{\mathbf{w}_2}{\|\mathbf{w}_2\|_2} = \frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix} i \\ 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \frac{\mathbf{w}_3}{\|\mathbf{w}_3\|_2} = \frac{1}{\sqrt{15}}\begin{pmatrix} -1 \\ 2i \\ i \\ 3i \end{pmatrix},$$

è una base ortonormale di V.

ESERCIZIO TIPO 17

Si calcoli la proiezione ortogonale del vettore $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$ sul sottospazio $U = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ i \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ i \end{pmatrix} \rangle$ di $\mathbb{C}^4$.

$\boxed{1}$ Troviamo una base ortonormale di U. Dall'ESERCIZIO TIPO 16 otteniamo che

$$\left\{ \mathbf{u}_1^* = \frac{\mathbf{u}_1}{\|\mathbf{u}_1\|_2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ i \\ 0 \end{pmatrix}; \mathbf{u}_2^* = \frac{\mathbf{u}_2}{\|\mathbf{u}_2\|_2} = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} i \\ 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}; \mathbf{u}_3^* = \frac{\mathbf{u}_3}{\|\mathbf{u}_3\|_2} = \frac{1}{\sqrt{15}} \begin{pmatrix} -1 \\ 2i \\ i \\ 3i \end{pmatrix} \right\}$$

è una base ortonormale di U.

$\boxed{2}$ La proiezione ortogonale di $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$ su U è

$$P_U(\mathbf{v}) = (\mathbf{u}_1^*, \mathbf{v})\mathbf{u}_1^* + (\mathbf{u}_2^*, \mathbf{v})\mathbf{u}_2^* + (\mathbf{u}_3^*, \mathbf{v})\mathbf{u}_3^*$$

dove

$$(\mathbf{u}_1^*, \mathbf{v}) = (\mathbf{u}_1^*)^H \mathbf{v} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot 2 \cdot i = \sqrt{2} \cdot i$$

$$(\mathbf{u}_2^*, \mathbf{v}) = (\mathbf{u}_2^*)^H \mathbf{v} = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} -i & 2 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

$$(\mathbf{u}_3^*, \mathbf{v}) = (\mathbf{u}_3^*)^H \mathbf{v} = \frac{1}{\sqrt{15}} \begin{pmatrix} -1 & -2i & -i & -3i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

Quindi

$$P_U(\mathbf{v}) = \sqrt{2} \cdot i \cdot \mathbf{u}_1^* = \sqrt{2} \cdot i \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ i \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

ESERCIZIO TIPO 18

Sia $\mathbf{A}(z) = \begin{pmatrix} z & \overline{z} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & z-i \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, dove $z \in \mathbb{C}$.

Si dica per quali $z \in \mathbb{C}$ la matrice $\mathbf{A}(z)$ è singolare.

$\mathbf{A}(z)$ è singolare se e solo se $\mathrm{Det}(\mathbf{A}(z)) = 0$. Calcoliamo dunque $\mathrm{Det}(\mathbf{A}(z))$.

$$\mathrm{Det}(\mathbf{A}(z)) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{sviluppato rispetto} \\ \text{alla } 2^a \text{ riga}}}{=} (-1)^{2+3}\mathrm{Det}\begin{pmatrix} z & \overline{z} & 0 \\ 1 & 1 & z-i \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{sviluppato rispetto} \\ \text{alla } 3^a \text{ colonna}}}{=} -(z-i)(-1)^{2+3}\mathrm{Det}\begin{pmatrix} z & \overline{z} \\ 1 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= (z-i)(z-\overline{z})$$

Quindi $\mathbf{A}(z)$ è singolare se e solo se $(z-i)(z-\overline{z}) = 0$, ossia se e solo se o $z - i = 0$, e quindi $z = i$, oppure $z - \overline{z} = 0$, e quindi $z = \overline{z}$. Poichè

$$z = \overline{z} \quad \Longleftrightarrow \quad z \in \mathbb{R},$$

allora

$$\mathbf{A}(z) \text{ è singolare} \quad \Longleftrightarrow \quad z \in \mathbb{R} \cup \{i\}.$$