

**ALGEBRA LINEARE I (A) PER SCIENZE STATISTICHE,  
SGI, A.A. 2009/2010, GEMMA PARMEGGIANI**

Università degli Studi di Padova  
Dipartimento di Matematica Pura e Applicata  
via Trieste, 63  
35131 Padova

- Programma del corso.
- Nota 1: Matrici elementari ed operazioni elementari sulle righe di una matrice.
- Nota 2: Osservazioni sul rango di una matrice.
- Nota 3: Basi dello spazio delle colonne di una matrice: applicazioni.
- Nota 4: Calcolo di determinanti.
- Esercizi Tipo.
- Testi degli esercizi per casa.
- Svolgimenti degli esercizi per casa.

## PROGRAMMA SVOLTO

**Il testo di riferimento è:** Algebra Lineare, E. Gregorio, S. Salce, ed. Libreria Progetto Padova

### Programma svolto nella prima settimana:

**28/9/09** La forma algebrica, il modulo ed il coniugato di un numero complesso.

**Dal libro:** Appendice A: da pag. 267 a pag. 270.

**Esercizi per casa:** Esercizi 1 e 3 degli "Esercizi per casa 1".

**29/9/09** La forma algebrica dell'inverso di un numero complesso non nullo. Enunciato del Teorema fondamentale dell'Algebra. Matrici. Esempi. Tipi particolari di matrici. Prodotto di una matrice per uno scalare. Somma di due matrici. Proprietà della somma e del prodotto per uno scalare. Prodotto di un vettore riga per un vettore colonna.

**Dal libro:** Pag. 273, da pag. 1 a pag. 6.

**Esercizi per casa:** Esercizi 2 e 4 degli "Esercizi per casa 1".

**30/9/09** Prodotto righe per colonne di matrici. Esempi. Proprietà del prodotto righe per colonne. Pre-moltiplicazione e postmoltiplicazione per matrici diagonali. Il prodotto righe per colonne non è commutativo. Esercizi teorici. Potenze di matrici quadrate.

**Dal libro:** Pag. 7, da pag. 9 a pag. 12.

**Esercizi per casa:** Esercizi 5, 6, 7, 8 e 9 degli "Esercizi per casa 1".

### Programma svolto nella seconda settimana:

**5/10/09** Le matrici  $n \times n$  che commutano con ogni matrice  $n \times n$  sono esattamente le matrici scalari di ordine  $n$ . Trasposta, coniugata ed  $H$ -trasposta di una matrice. Matrici simmetriche, anti-simmetriche, hermitiane, anti-hermitiane e loro proprietà.

**Dal libro:** Da pag. 12 a pag. 15.

**Esercizi per casa:** Esercizi 1, 2 e 3 degli "Esercizi per casa 2".

**6/10/09** Ogni matrice quadrata si scrive in modo unico come somma di una matrice hermitiana ed una matrice anti-hermitiana (parte hermitiana ed anti-hermitiana di una matrice quadrata). Sottomatrici. Decomposizioni a blocchi ed operazioni a blocchi.

**Dal libro:** Da pag. 15 a pag. 19.

**Esercizi per casa:** Esercizio 4 degli "Esercizi per casa 2".

**7/10/09** Casi particolari di decomposizioni a blocchi. Esercizio Tipo 1. Scrittura matriciale di un sistema lineare.

**Dal libro:** Pag. 8, da pag. 20 a pag. 22.

**Esercizi per casa:** Esercizi 5 e 6 degli "Esercizi per casa 2".

**Programma svolto nella terza settimana:**

**12/10/09** Operazioni elementari sulle equazioni di un sistema. Matrici elementari ed operazioni elementari sulle righe di una matrice. Eliminazione di Gauss (EG). Forma ridotta di Gauss di una matrice, colonne dominanti, colonne libere. Esempi.

**Dal libro:** Pag. 46 e pag. 47; pag. 23 e pag. 24. Nota 1 (file sulla pag. web).

**Esercizi per casa:** Esercizi 1, 2, 3 e 4 degli "Esercizi per casa 3".

**13/10/09** Risoluzione di sistemi lineari. Esercizi Tipo 2 e 3.

**Dal libro:** Da pag. 25 a pag. 30.

**Esercizi per casa:** Esercizi 5 e 6 degli "Esercizi per casa 3".

**14/10/09** Rango di una matrice. Inverse destre, sinistre, bilatere. Esempi. Criteri per l'esistenza di una inversa destra e per l'esistenza di un'inversa sinistra. Costruzione di un'inversa destra.

**Dal libro:** Da pag. 30 a pag. 35. Nota 2 (file sulla pag. web).

**Esercizi per casa:** Esercizio 7 degli "Esercizi per casa 3".

**Programma svolto nella quarta settimana:**

**19/10/09** Esercizio Tipo 4. Come costruire le inverse sinistre di una matrice la cui trasposta abbia inverse destre. Esercizio Tipo 4bis. Algoritmo di Gauss-Jordan per il calcolo dell'inversa. Esercizio Tipo 5. Inverse di matrici  $2 \times 2$ .

**Dal libro:** Da pag. 41 a pag. 46.

**Esercizi per casa:** Esercizi 8 e 9 degli "Esercizi per casa 3". Esercizi 1, 2 e 3 degli "Esercizi per casa 4".

**20/10/09** Inverse e trasposte delle matrici elementari. Decomposizioni a rango pieno. Decomposizione  $LU$ . Prima domanda dell' Esercizio Tipo 6.

**Dal libro:** Da pag. 47 a pag. 51.

**Esercizi per casa:** Esercizi 4 e 5, e prima domanda dell'esercizio 6 degli "Esercizi per casa 4".

**21/10/09** Fine dell'Esercizio Tipo 6. Decomposizione  $P^T LU$ . Prima parte dell'esercizio Tipo 7.

**Dal libro:** Da pag. 52 a pag. 58.

**Esercizi per casa:** Fine dell' esercizio 6 e prima domanda dell'esercizio 7 degli "Esercizi per casa 4".

**Programma svolto nella quinta settimana:**

**26/10/09** Seconda parte dell'Esercizio Tipo 7. Spazi vettoriali. Esempi. Sottospazi di spazi vettoriali. Esempi.

**Dal libro:** Da pag. 63 a pag. 69.

**Esercizi per casa:** Seconda domanda dell'esercizio 7 degli "Esercizi per casa 4". Esercizi 1, 2, 3 e 4 degli "Esercizi per casa 5".

**27/10/09** Altri esempi di sottospazi. Lo spazio nullo di una matrice. Insiemi di vettori. Sottoinsiemi ed unioni di insiemi di vettori. Combinazioni lineari. Sottospazi generati da insiemi di vettori. Insiemi di generatori. Esempi.

**Dal libro:** Da pag. 69 a pag. 73.

**28/10/09** Esercizio Tipo 8. Insiemi di vettori linearmente dipendenti ed insiemi di vettori linearmente indipendenti. Esercizio Tipo 9.

**Dal libro:** Da pag. 73 a pag. 76.

**Esercizi per casa:** Esercizi 5, 6, 7 e 8 degli "Esercizi per casa 5".

**Programma svolto nella sesta settimana:**

**2/11/09** Prima domanda dell'esercizio 8 degli "Esercizi per casa 5". Basi. Esempi di basi. Caratterizzazione delle basi come insiemi di generatori minimali. Ogni spazio vettoriale finitamente generato ha una base. Come estrarre una base da un insieme di generatori. Esercizio Tipo 10.

**Dal libro:** Da pag. 76 a pag. 82.

**Esercizi per casa:** Esercizi 1 e 2 degli "Esercizi per casa 6".

**3/11/09** Caratterizzazione delle basi come insiemi linearmente indipendenti massimali. Teorema di Steinitz. Equipotenza delle basi di uno spazio vettoriale finitamente generato. Dimensione di uno spazio vettoriale. Definizione di somma e di somma diretta di sottospazi. Applicazioni lineari. Esempi. Applicazione lineare indotta da una matrice.

**Dal libro:** Da pag. 82 a pag. 91.

**Esercizi per casa:** Esercizi 3, 4 e domanda (a) dell'esercizio 5 degli "Esercizi per casa 6".

**4/11/09** Spazio nullo e spazio immagine di un'applicazione lineare. Il caso di un'applicazione lineare indotta da una matrice. Teorema nullità+rango. I 4 sottospazi fondamentali di una matrice. Come trovare una base dello spazio nullo di una matrice. Esercizio Tipo 11.

**Dal libro:** Da pag. 92 a pag. 98. Pag. 102.

**Esercizi per casa:** Domanda (b) dell'esercizio 5, ed esercizi 6, 7 ed 8 degli "Esercizi per casa 6".

**Programma svolto nella settima settimana:**

**9/11/09** Basi dello spazio delle colonne e dello spazio delle righe di una matrice. Applicazioni. Esercizio Tipo 12. Teorema 5.10 con dimostrazione. Basi ordinate.

**Dal libro:** Da pag. 98 a pag. 101, da pag. 103 a pag. 104. Nota 3 (file sulla pag. web).

**Esercizi per casa:** Esercizi 1 e 2 degli "Esercizi per casa 7".

**10/11/09** Coordinate di un vettore rispetto ad una base ordinata. Esempi. Applicazione delle coordinate. Matrice associata ad un'applicazione lineare rispetto a fissate basi ordinate su dominio e codominio. Matrice di passaggio da una base ordinata ad un'altra. Esercizi Tipo 13 e 14.

**Dal libro:** Da pag. 105 a pag. 110. Da pag. 105 a pag. 107. Pag. 110.

**Esercizi per casa:** Esercizio 3 e 4 degli "Esercizi per casa 7".

**11/11/09** Come cambia la matrice associata ad un'applicazione lineare rispetto a fissate basi ordinate su dominio e codominio cambiando le basi. Esercizio Tipo 15. Interpretazione geometrica di  $\mathbb{R}^2$  ed  $\mathbb{R}^3$ . Regola del parallelogramma. Definizione di norma.

**Dal libro:** Da pag. 111 a pag. 113. Appendice C: da pag. 285 a pag. 290. Da pag. 119 a pag. 121.

**Esercizi per casa:** Esercizio 5 degli "Esercizi per casa 7".

**Programma svolto nell'ottava settimana:**

**16/11/09** Le norme  $\|\cdot\|_2$ ,  $\|\cdot\|_1$  e  $\|\cdot\|_\infty$ . Esercizio Tipo 16. Il coseno dell'angolo tra due vettori di  $\mathbb{R}^2$ . Prodotti interni. Il prodotto interno standard.

**Dal libro:** Da pag. 121 a pag. 128.

**Esercizi per casa:** Esercizi 6, 7 e 8 degli "Esercizi per casa 7".

**17/11/09** Esercizio Tipo 17. La norma indotta da un prodotto interno. Il coseno dell'angolo tra due vettori in uno spazio vettoriale euclideo. Vettori ortogonali in uno spazio euclideo. Insiemi ortogonali e basi ortogonali. Basi ortonormali.

**Dal libro:** Da pag 130 a pag. 133. Pag. 141 e pag. 144.

**Esercizi per casa:** Esercizio 1 e domande (a) e (b) dell' Esercizio 2 degli "Esercizi per casa 8".

**18/11/09** L'algoritmo di Gram-Schmidt. Esercizio Tipo 18.

**Dal libro:** Da pag. 145 a pag. 150.

**Esercizi per casa:** Esercizio 3 degli "Esercizi per casa 8".

**Programma svolto nella nona settimana:**

**23/11/09** Il complemento ortogonale di un sottospazio di uno spazio euclideo. La proiezione ortogonale di un vettore di uno spazio euclideo su di un sottospazio, ed il suo calcolo. Esercizio Tipo 19. Decomposizione  $Q_0R_0$ -non-normalizzata di una matrice **A**.

**Dal libro:** Da pag. 133 a pag. 140. Pag. 143. Da pag.154 a pag. 155.

**Esercizi per casa:** Domanda (c) dell'esercizio 2 ed esercizi 4 e 5 degli "Esercizi per casa 8".

**24/11/09** Decomposizione  $QR$ -normalizzata di una matrice **A**. Esercizio Tipo 20. Sistema delle equazioni normali.

**Dal libro:** Da pag. 155 a pag. 158.

**Esercizi per casa:** Esercizi 1 e 2 degli "Esercizi per casa 9".

**25/11/09** Calcolo del determinante di una matrice. Proprietà del determinante. Esercizio Tipo 21.

**Dal libro:** Nota 4 (file sulla pag. web).

**Esercizi per casa:** Esercizi 3 e 4 degli "Esercizi per casa 9".

## NOTE

**Nota 1: Matrici elementari ed operazioni elementari sulle righe di una matrice**

Sia  $A$  una matrice  $m \times n$ . Si chiamano **operazioni elementari sulle righe di  $A$**  le tre seguenti operazioni:

- 1] sommare ad una riga un'altra riga di  $A$  moltiplicata per uno scalare,
- 2] moltiplicare una riga di  $A$  per uno scalare non nullo,
- 3] scambiare due righe di  $A$ .

Studiando i prodotti a blocchi abbiamo visto:

(\*) la  $i$ -esima riga di  $A$  è uguale a  $\mathbf{e}_i^T A$ ;

(\*\*) se  $C = \begin{pmatrix} \mathbf{s}_1^T \\ \mathbf{s}_2^T \\ \vdots \\ \mathbf{s}_t^T \end{pmatrix}$  si può premoltiplicare ad  $A$ , allora  $CA = \begin{pmatrix} \mathbf{s}_1^T A \\ \mathbf{s}_2^T A \\ \vdots \\ \mathbf{s}_t^T A \end{pmatrix}$ .

1] Sia  $B$  la matrice che si ottiene da  $A$  sommando alla  $i$ -esima riga di  $A$  la  $j$ -esima riga di  $A$  moltiplicata per lo scalare  $c$ , ossia sia  $B = [b_{kr}]$  la matrice con tutte le righe diverse dalla  $i$ -esima uguali alle corrispondenti righe di  $A = [a_{kr}]$ , e con  $i$ -esima riga il vettore riga

$$(b_{i1} \quad b_{i2} \quad \dots \quad b_{in}) = (a_{i1} + ca_{j1} \quad a_{i2} + ca_{j2} \quad \dots \quad a_{in} + ca_{jn}).$$

Allora da (\*) e (\*\*) segue che

$$B = E_{ij}(c)A$$

dove  $E_{ij}(c)$  è la matrice che ha tutte le righe uguali a quelle della matrice  $I_m$ , tranne eventualmente la  $i$ -esima, che è  $\mathbf{e}_i^T + c\mathbf{e}_j^T$  (ed è uguale alla  $i$ -esima riga di  $I_m$  solo se  $c = 0$ ). Dunque  $E_{ij}(c)$  si ottiene da  $I_m$  sommando alla  $i$ -esima riga di  $I_m$  la  $j$ -esima riga di  $I_m$  moltiplicata per lo scalare  $c$ .

Per indicare che  $B$  è la matrice ottenuta dalla matrice  $A$  eseguendo l'operazione elementare "sommare alla  $i$ -esima riga la  $j$ -esima riga moltiplicata per lo scalare  $c$ ", scriviamo:

$$A \xrightarrow{E_{ij}(c)} B.$$

2] Sia  $B$  la matrice che si ottiene da  $A$  moltiplicando la  $i$ -esima riga di  $A$  per lo scalare  $c$  ( $c \neq 0$ ), ossia sia  $B = [b_{kr}]$  la matrice con tutte le righe diverse dalla  $i$ -esima uguali alle corrispondenti righe di  $A = [a_{kr}]$ , ed con  $i$ -esima riga il vettore riga

$$(b_{i1} \quad b_{i2} \quad \dots \quad b_{in}) = (ca_{i1} \quad ca_{i2} \quad \dots \quad ca_{in}).$$

Allora da (\*) e (\*\*) segue che

$$B = E_i(c)A$$

dove  $E_i(c)$  è la matrice che ha tutte le righe uguali a quelle della matrice  $I_m$ , tranne eventualmente la  $i$ -esima, che è  $c\mathbf{e}_i^T$  (ed è uguale alla  $i$ -esima riga di  $I_m$  solo se  $c = 1$ ). Dunque  $E_i(c)$  si ottiene da  $I_m$  moltiplicando la  $i$ -esima riga di  $I_m$  per lo scalare  $c$  ( $c \neq 0$ ).

Per indicare che  $\mathbf{B}$  è la matrice ottenuta dalla matrice  $\mathbf{A}$  eseguendo l'operazione elementare "moltiplicare la  $i$ -esima riga per lo scalare (non nullo)  $c$ ", scriviamo:

$$\mathbf{A} \xrightarrow{E_i(c)} \mathbf{B}.$$

**3** Sia  $B$  la matrice che si ottiene da  $\mathbf{A}$  scambiando la  $i$ -esima riga di  $\mathbf{A}$  con la  $j$ -esima, ossia sia  $\mathbf{B} = [b_{kr}]$  la matrice con tutte le righe diverse dalla  $i$ -esima e dalla  $j$ -esima uguali alle corrispondenti righe di  $\mathbf{A}$ , e con  $i$ -esima e  $j$ -esima riga rispettivamente:

$$(b_{i1} \ b_{i2} \ \dots \ b_{in}) = (a_{j1} \ a_{j2} \ \dots \ a_{jn}),$$

$$(b_{j1} \ b_{j2} \ \dots \ b_{jn}) = (a_{i1} \ a_{i2} \ \dots \ a_{in}).$$

Allora da (\*) e (\*\*) segue che

$$\mathbf{B} = \mathbf{E}_{ij}\mathbf{A}$$

dove  $\mathbf{E}_{ij}$  è la matrice che si ottiene da  $\mathbf{I}_m$  scambiando la  $i$ -esima riga di  $\mathbf{I}_m$  con la  $j$ -esima.

Per indicare che  $\mathbf{B}$  è la matrice ottenuta dalla matrice  $\mathbf{A}$  eseguendo l'operazione elementare "scambiare la  $i$ -esima riga con la  $j$ -esima riga", scriviamo:

$$\mathbf{A} \xrightarrow{E_{ij}} \mathbf{B}.$$

**N.B.** Le matrici  $\mathbf{E}_{ij}(c)$ ,  $\mathbf{E}_i(c)$  e  $\mathbf{E}_{ij}$  si chiamano matrici elementari, sono il "risultato" delle operazioni elementari sulle righe di una matrice identica, e la loro premoltiplicazione per una matrice  $\mathbf{A}$  "produce" le operazioni elementari sulle righe di  $\mathbf{A}$ .

**Nota 2: Osservazioni sul rango di una matrice**

[1] Sia  $\mathbf{A}$  una matrice  $m \times n$ . Se  $\mathbf{U}_1$  ed  $\mathbf{U}_2$  sono due forme ridotte di Gauss per  $\mathbf{A}$ , allora il numero delle righe non nulle di  $\mathbf{U}_1$  è uguale al numero delle righe non nulle di  $\mathbf{U}_2$ . Ciò dipende dal fatto che l'esistenza di diverse forme ridotte di Gauss per una matrice dipende esclusivamente dalla eventuale possibilità di fare delle scelte negli scambi di righe in una EG su  $\mathbf{A}$ , e gli scambi di righe non decrescono il numero delle righe non nulle.

Il numero delle righe non nulle di una forma ridotta di Gauss di  $\mathbf{A}$  dipende quindi esclusivamente da  $\mathbf{A}$  (e non dalle operazioni elementari che si fanno in una EG su  $\mathbf{A}$ ) e si chiama **il rango di  $\mathbf{A}$**  (più avanti nel corso daremo un'altra definizione di rango di una matrice, equivalente a questa). Si indica con il simbolo  $\text{rk}(\mathbf{A})$ .

[2] Siano  $\mathbf{A}$  una matrice  $m \times n$  di rango  $k$  ed  $\mathbf{U}$  una forma ridotta di Gauss per  $\mathbf{A}$ . Poiché ogni "scalino" di  $\mathbf{U}$  è "alto" una riga, allora

$$k = \text{numero delle righe non nulle di } \mathbf{U} = \text{numero delle colonne dominanti di } \mathbf{U}.$$

[3] Se  $\mathbf{A}$  una matrice  $m \times n$  di rango  $k$  allora

$$k \leq m \quad \text{e} \quad k \leq n.$$

Infatti se  $\mathbf{U}$  è una forma ridotta di Gauss per  $\mathbf{A}$  allora  $\mathbf{U}$  è  $m \times n$  e

$$k = \text{numero delle righe non nulle di } \mathbf{U} \leq \text{numero delle righe di } \mathbf{U} = m$$

$$k = \text{numero delle colonne dominanti di } \mathbf{U} \leq \text{numero delle colonne di } \mathbf{U} = n$$

**Nota 3: Basi dello spazio delle colonne di una matrice: applicazioni.**

**1** Siano  $\mathbf{v}_1; \mathbf{v}_2; \dots; \mathbf{v}_n \in K^m$ , con  $K \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ ,  $\mathcal{S} = \{\mathbf{v}_1; \mathbf{v}_2; \dots; \mathbf{v}_n\}$  e  $W = \langle \mathcal{S} \rangle$  il sottospazio di  $K^m$  generato da  $\mathcal{S}$ .

Per trovare una base  $\mathcal{B}$  di  $W$  contenuta in  $\mathcal{S}$ , piuttosto che procedere come nell'Esercizio Tipo 10, conviene:

(1) costruire la matrice  $m \times n$   $\mathbf{A} = (\mathbf{v}_1 \ \mathbf{v}_2 \ \dots \ \mathbf{v}_n)$ , ossia costruire una matrice le cui colonne siano gli elementi di  $\mathcal{S}$ ;

(2) fare una EG su  $\mathbf{A}$ , trovando una forma ridotta di Gauss  $\mathbf{U}$  per  $\mathbf{A}$ ;

(3) se  $\mathbf{u}_{i_1}, \mathbf{u}_{i_2}, \dots, \mathbf{u}_{i_k}$  sono le colonne dominanti di  $\mathbf{U}$ , allora  $\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_{i_1}; \mathbf{v}_{i_2}; \dots; \mathbf{v}_{i_k}\}$ , ossia l'insieme delle colonne di  $\mathbf{A}$  corrispondenti alle colonne dominanti di  $\mathbf{U}$ , è una base di  $C(\mathbf{A}) = \langle \mathbf{v}_1; \mathbf{v}_2; \dots; \mathbf{v}_n \rangle = W$  contenuta in  $\mathcal{S}$ .

**2** Siano  $\mathbf{v}_1; \mathbf{v}_2; \dots; \mathbf{v}_n \in K^n$ , con  $K \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ , e  $\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_1; \mathbf{v}_2; \dots; \mathbf{v}_n\}$ .

Per verificare se  $\mathcal{B}$  è o meno una base di  $K^n$ , piuttosto che verificare se  $\mathcal{B}$  è un insieme di generatori linearmente indipendente di  $K^n$ , conviene considerare la matrice  $n \times n$   $\mathbf{A} = (\mathbf{v}_1 \ \mathbf{v}_2 \ \dots \ \mathbf{v}_n)$  (ossia una matrice le cui colonne siano gli elementi di  $\mathcal{B}$ ).

Da  $C(\mathbf{A}) \leq K^n$  segue che

$$\dim C(\mathbf{A}) = rk(\mathbf{A}) = n \iff C(\mathbf{A}) = K^n;$$

inoltre, dal momento che  $\mathcal{B}$  ha  $n$  elementi e contiene una base di  $C(\mathbf{A})$ ,

$$\dim C(\mathbf{A}) = rk(\mathbf{A}) = n \iff \text{ogni base di } C(\mathbf{A}) \text{ ha } n \text{ elementi} \iff \mathcal{B} \text{ è una base di } C(\mathbf{A}).$$

Quindi

$$\dim C(\mathbf{A}) = rk(\mathbf{A}) = n \iff \mathcal{B} \text{ è una base di } K^n.$$

**Nota 4: Calcolo di determinanti**

Sia  $\mathbf{A}$  una matrice **quadrata** di ordine  $n$ .

Il **determinante di  $\mathbf{A}$**  è un numero che dipende da  $\mathbf{A}$ . Esso si indica con il simbolo  $\det(\mathbf{A})$ , oppure  $\text{Det}(\mathbf{A})$ . Impariamo a calcolarlo, cominciando con i casi  $n = 1, 2, 3$ .

**Il caso  $n=1$ .** Se  $\mathbf{A} = (a_{11})$ , è  $\text{Det}(\mathbf{A}) = a_{11}$ .

**Il caso  $n=2$ .** Se  $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ , è  $\text{Det}(\mathbf{A}) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ .

**Esempio 1.** Il determinante di  $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$  è  $\text{Det}(\mathbf{A}) = 2 \times 5 - 3 \times 4 = 10 - 12 = -2$ .

Abbiamo detto che  $\text{Det} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ . Osserviamo che

$$\begin{aligned} a_{11}a_{22} &= a_{11}(-1)^{1+1}\text{Det}(a_{22}) = \\ &= a_{11}(-1)^{(\text{la somma degli indici di } a_{11})}\text{Det}(a_{22}) = \\ &= a_{11}(-1)^{(\text{la somma degli indici di } a_{11})} \left( \begin{array}{l} \text{il determinante della matrice che} \\ \text{si ottiene da } \mathbf{A} \text{ sopprimendo} \\ \text{la } 1^{\text{a}} \text{ riga e la } 1^{\text{a}} \text{ colonna di } \mathbf{A} \end{array} \right) = \\ &= a_{11}(-1)^{(\text{la somma degli indici di } a_{11})} \left( \begin{array}{l} \text{il determinante della matrice che si ottiene da } \mathbf{A} \\ \text{sopprimendo la riga e la colonna in cui si trova } a_{11} \end{array} \right) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} -a_{12}a_{21} &= a_{12}(-1)^{1+2}\text{Det}(a_{21}) = \\ &= a_{12}(-1)^{(\text{la somma degli indici di } a_{12})}\text{Det}(a_{21}) = \\ &= a_{12}(-1)^{(\text{la somma degli indici di } a_{12})} \left( \begin{array}{l} \text{il determinante della matrice che} \\ \text{si ottiene da } \mathbf{A} \text{ sopprimendo} \\ \text{la } 1^{\text{a}} \text{ riga e la } 2^{\text{a}} \text{ colonna di } \mathbf{A} \end{array} \right) = \\ &= a_{12}(-1)^{(\text{la somma degli indici di } a_{12})} \left( \begin{array}{l} \text{il determinante della matrice che si ottiene da } \mathbf{A} \\ \text{sopprimendo la riga e la colonna in cui si trova } a_{12} \end{array} \right). \end{aligned}$$

Indicando con i simboli

- $\mathbf{C}_{11}$  la matrice che si ottiene da  $\mathbf{A}$  sopprimendo la  $1^{\text{a}}$  riga e la  $1^{\text{a}}$  colonna,
- $\mathbf{C}_{12}$  la matrice che si ottiene da  $\mathbf{A}$  sopprimendo la  $1^{\text{a}}$  riga e la  $2^{\text{a}}$  colonna,

ed inoltre

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{11} &= (-1)^{1+1}\text{Det}\mathbf{C}_{11}, \\ \mathbf{A}_{12} &= (-1)^{1+2}\text{Det}\mathbf{C}_{12}, \end{aligned}$$

abbiamo:

$$\text{Det} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11}\mathbf{A}_{11} + a_{12}\mathbf{A}_{12}.$$

Si tenga a mente che  $a_{11}$  ed  $a_{12}$  sono gli elementi della 1<sup>a</sup> riga di  $\mathbf{A}$ .

Quindi se  $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ , quello che abbiamo fatto per calcolare  $\text{Det}(\mathbf{A})$  è stato:

(1) mettere in evidenza gli elementi della 1<sup>a</sup> riga di  $\mathbf{A}$ :  $\begin{pmatrix} \boxed{a_{11}} & \boxed{a_{12}} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ ,

(2) per ciascuna posizione  $(1, j)$  della 1<sup>a</sup> riga di  $\mathbf{A}$  (posto  $(1, 1)$  e posto  $(1, 2)$ )

- costruire la matrice  $\mathbf{C}_{1j}$  (ottenuta sopprimendo da  $A$  la 1<sup>a</sup> riga e la  $j$ -esima colonna di  $\mathbf{A}$ ),
- calcolare  $\text{Det}(\mathbf{C}_{1j})$ ,
- calcolare  $(-1)^{1+j}$ ,
- calcolare  $\mathbf{A}_{1j} = (-1)^{1+j}\text{Det}(\mathbf{C}_{1j})$ ,

(3) calcolare il prodotto  $(a_{11} \ a_{12}) \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11} \\ \mathbf{A}_{12} \end{pmatrix}$ .

**Il caso  $n=3$ .** Sia  $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ . Per calcolare  $\text{Det}(\mathbf{A})$  procediamo come abbiamo fatto nel caso  $n = 2$ .

(1) Mettiamo in evidenza gli elementi della 1<sup>a</sup> riga di  $\mathbf{A}$ :  $\begin{pmatrix} \boxed{a_{11}} & \boxed{a_{12}} & \boxed{a_{13}} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ .

(2) per ciascuna posizione  $(1, j)$  della 1<sup>a</sup> riga di  $\mathbf{A}$  (posto  $(1, 1)$ , posto  $(1, 2)$  e posto  $(1, 3)$ )

- costruiamo la matrice  $\mathbf{C}_{1j}$  (ottenuta sopprimendo da  $A$  la 1<sup>a</sup> riga e la  $j$ -esima colonna di  $A$ ):

$$\mathbf{C}_{11} = \begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C}_{12} = \begin{pmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C}_{13} = \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}.$$

- calcoliamo  $\text{Det}(\mathbf{C}_{1j})$ , usando il caso  $n = 2$ , ossia il caso precedente a quello che stiamo analizzando ora (che è  $n = 3$ ):

$$\text{Det}\mathbf{C}_{11} = \text{Det} \begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32},$$

$$\text{Det}\mathbf{C}_{12} = \text{Det} \begin{pmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{pmatrix} = a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31},$$

$$\text{Det}\mathbf{C}_{13} = \text{Det} \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} = a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31},$$

– calcoliamo  $(-1)^{1+j}$ :  $(-1)^{1+1} = 1$ ,  $(-1)^{1+2} = -1$ ,  $(-1)^{1+3} = 1$ ,

– calcoliamo  $\mathbf{A}_{1j} = (-1)^{1+j}\text{Det}(\mathbf{C}_{1j})$ :

$$\begin{aligned}\mathbf{A}_{11} &= (-1)^{1+1}\text{Det}\mathbf{C}_{11} = a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}, \\ \mathbf{A}_{12} &= (-1)^{1+2}\text{Det}\mathbf{C}_{12} = -(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}), \\ \mathbf{A}_{13} &= (-1)^{1+3}\text{Det}\mathbf{C}_{13} = a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}.\end{aligned}$$

(3) Il determinante di  $\mathbf{A}$  è il prodotto

$$\begin{aligned}\text{Det} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} &= (a_{11} \quad a_{12} \quad a_{13}) \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11} \\ \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{13} \end{pmatrix} = a_{11}\mathbf{A}_{11} + a_{12}\mathbf{A}_{12} + a_{13}\mathbf{A}_{13} = \\ &= a_{11}(-1)^{1+1}\text{Det}\mathbf{C}_{11} + a_{12}(-1)^{1+2}\text{Det}\mathbf{C}_{12} + a_{13}(-1)^{1+3}\text{Det}\mathbf{C}_{13}\end{aligned}$$

**Esempio 2.** Calcoliamo il determinante della matrice  $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \\ 2 & 6 & 3 \end{pmatrix}$ .

In questo caso abbiamo

$$\begin{aligned}a_{11} &= 3, & a_{12} &= -2, & a_{13} &= 1, \\ \mathbf{C}_{11} &= \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}, & \mathbf{C}_{12} &= \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, & \mathbf{C}_{13} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 6 \end{pmatrix},\end{aligned}$$

per cui

$$\begin{aligned}\text{Det}A &= 3(-1)^{1+1}\text{Det} \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 6 & 3 \end{pmatrix} + (-2)(-1)^{1+2}\text{Det} \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} + 1(-1)^{1+3}\text{Det} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} = \\ &= 3(3 - 24) + (-2)(-1)(0 - 8) + (0 - 2) = 3(-21) - 16 - 2 = \\ &= -81.\end{aligned}$$

Quello che abbiamo fatto è quindi:

(a) per le matrici  $1 \times 1$  porre  $\text{Det}(a_{11}) = a_{11}$ ,

(b) dare una formula che permetta di calcolare il determinante delle matrici  $2 \times 2$  sapendo come calcolare il determinante delle matrici  $1 \times 1$ , ossia dare una formula che permetta di calcolare il determinante delle matrici nel caso  $n = 2$  sapendo come calcolare il determinante delle matrici nel caso precedente, cioè il caso  $n = 1$  (si veda il punto (a)),

(c) dare una formula che permetta di calcolare il determinante delle matrici  $3 \times 3$  sapendo come calcolare il determinante delle matrici  $2 \times 2$ , ossia dare una formula che permetta di calcolare il determinante delle matrici nel caso  $n = 3$  sapendo come calcolare il determinante delle matrici nel caso precedente, cioè il caso  $n = 2$  (si veda il punto (b)).

Procediamo quindi allo stesso modo, dando una formula che permetta di calcolare il determinante delle matrici  $n \times n$  sapendo come calcolare il determinante delle matrici  $(n - 1) \times (n - 1)$ , ossia dare una formula

che permetta di calcolare il determinante delle matrici nel caso  $n$  sapendo come calcolare il determinante delle matrici nel caso precedente, cioè il caso  $n - 1$ .

Sia dunque  $\mathbf{A} = (a_{ij})$  una matrice  $n \times n$ . Cominciamo con il dare la seguente definizione:

**Def. 1.** Per ogni  $1 \leq i \leq n$  e  $1 \leq j \leq n$  si chiama **matrice complementare dell'elemento  $a_{ij}$**  od anche **matrice complementare di posto  $(i,j)$  in  $\mathbf{A}$** , e si indica con il simbolo  $\mathbf{C}_{ij}$ , la matrice che si ottiene da  $\mathbf{A}$  sopprimendo la  $i$ -esima riga e la  $j$ -esima colonna. Dunque  $\mathbf{C}_{ij}$  è una matrice  $(n - 1) \times (n - 1)$ .

**Esempio 3.** Se  $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & i & 3 & 4 & 11 \\ 0 & 2 & 7 & -3 & 8 \\ 1+i & 2 & 5 & -5 & 17 \\ -1 & 6i & 0 & 5i & 1-4i \\ 12 & 7+2i & 34 & 4-6i & 14i \end{pmatrix}$ , allora

$$\begin{pmatrix} 1 & i & 3 & \boxed{4} & 11 \\ \boxed{0} & \boxed{2} & \boxed{7} & \boxed{-3} & \boxed{8} \\ 1+i & 2 & 5 & \boxed{-5} & 17 \\ -1 & 6i & 0 & \boxed{5i} & 1-4i \\ 12 & 7+2i & 34 & \boxed{4-6i} & 14i \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{\text{togliendo la } 2^{\text{a}} \text{ riga} \\ \text{e la } 4^{\text{a}} \text{ colonna}}} \mathbf{C}_{24} = \begin{pmatrix} 1 & i & 3 & 11 \\ 1+i & 2 & 5 & 17 \\ -1 & 6i & 0 & 1-4i \\ 12 & 7+2i & 34 & 14i \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & i & 3 & 4 & \boxed{11} \\ 0 & 2 & 7 & -3 & \boxed{8} \\ 1+i & 2 & 5 & -5 & \boxed{17} \\ \boxed{-1} & \boxed{6i} & \boxed{0} & \boxed{5i} & \boxed{1-4i} \\ 12 & 7+2i & 34 & 4-6i & \boxed{14i} \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{\text{togliendo la } 3^{\text{a}} \text{ riga} \\ \text{e la } 5^{\text{a}} \text{ colonna}}} \mathbf{C}_{35} = \begin{pmatrix} 1 & i & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 7 & -3 \\ 1+i & 2 & 5 & -5 \\ 12 & 7+2i & 34 & 4-6i \end{pmatrix}$$

**Def. 2.** Per ogni  $1 \leq i \leq n$  e  $1 \leq j \leq n$  si chiama **cofattore di posto  $(i,j)$  di  $\mathbf{A}$** , e si indica con il simbolo  $\mathbf{A}_{ij}$ , il numero

$$\mathbf{A}_{ij} = (-1)^{i+j} \text{Det}(\mathbf{C}_{ij}),$$

dove  $\mathbf{C}_{ij}$  è la matrice complementare di posto  $(i,j)$  in  $\mathbf{A}$ .

Si ha:

**Formula del determinante di una matrice sviluppato rispetto alla 1<sup>a</sup> riga**

se  $\mathbf{A} = (a_{ij})$  è una matrice  $n \times n$  allora

$$\text{Det} \mathbf{A} = a_{11} \mathbf{A}_{11} + a_{12} \mathbf{A}_{12} + \dots + a_{1,n-1} \mathbf{A}_{1,n-1} + a_{1n} \mathbf{A}_{1n}$$

dove  $\mathbf{A}_{11}, \mathbf{A}_{12}, \dots, \mathbf{A}_{1,n-1}, \mathbf{A}_{1n}$  sono i cofattori di  $\mathbf{A}$  di posti  $(1,1), (1,2), \dots, (1,n-1), (1,n)$  (ossia i posti della 1<sup>a</sup> riga) rispettivamente.

**Esempio 4.** Calcoliamo il determinante della matrice  $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -5 & 0 & 3 \\ 6 & 2 & 0 & 4 \\ -2 & 0 & 0 & 2 \\ -1 & 7 & 5 & 1 \end{pmatrix}$ .

Usando la formula dello sviluppo del determinante rispetto alla 1<sup>a</sup> riga di  $\mathbf{A}$  abbiamo:

$$\text{Det}\mathbf{A} = 1 \times \mathbf{A}_{11} + (-5) \times \mathbf{A}_{12} + 0 \times \mathbf{A}_{13} + 3 \times \mathbf{A}_{14} = \mathbf{A}_{11} - 5\mathbf{A}_{12} + 3\mathbf{A}_{14}.$$

Dobbiamo quindi calcolare  $\mathbf{A}_{11}$ ,  $\mathbf{A}_{12}$  ed  $\mathbf{A}_{14}$ .

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{11} &= (-1)^{1+1} \text{Det} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \\ 7 & 5 & 1 \end{pmatrix} = \\ &= \text{Det} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \\ 7 & 5 & 1 \end{pmatrix} = \\ &= 2(-1)^{1+1} \text{Det} \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} + 0(-1)^{1+2} \text{Det} \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 7 & 1 \end{pmatrix} + 4(-1)^{1+3} \text{Det} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 7 & 5 \end{pmatrix} = \\ &= 2(0 - 10) + 4(0 - 0) = -20, \\ \mathbf{A}_{12} &= (-1)^{1+2} \text{Det} \begin{pmatrix} 6 & 0 & 4 \\ -2 & 0 & 2 \\ -1 & 5 & 1 \end{pmatrix} = \\ &= -\text{Det} \begin{pmatrix} 6 & 0 & 4 \\ -2 & 0 & 2 \\ -1 & 5 & 1 \end{pmatrix} = \\ &= -(6(-1)^{1+1} \text{Det} \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} + 0(-1)^{1+2} \text{Det} \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} + 4(-1)^{1+3} \text{Det} \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}) = \\ &= -(6(0 - 10) + 4(-10 - 0)) = -(-60 - 40) = 100, \\ \mathbf{A}_{14} &= (-1)^{1+4} \text{Det} \begin{pmatrix} 6 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ -1 & 7 & 5 \end{pmatrix} = \\ &= -\text{Det} \begin{pmatrix} 6 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ -1 & 7 & 5 \end{pmatrix} = \\ &= -(6(-1)^{1+1} \text{Det} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 7 & 5 \end{pmatrix} + 2(-1)^{1+2} \text{Det} \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} + 0(-1)^{1+3} \text{Det} \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ -1 & 7 \end{pmatrix}) = \\ &= -(6(0 - 0) - 2(-10 - 0)) = 2(-10) = -20. \end{aligned}$$

Dunque otteniamo:

$$\text{Det}\mathbf{A} = \mathbf{A}_{11} - 5\mathbf{A}_{12} + 3\mathbf{A}_{14} = -20 - 5 \times 100 + 3(-20) = -580.$$

Si può dimostrare il seguente

**Teorema.** Sia  $\mathbf{A}$  una matrice  $n \times n$ . Allora, fissato  $i \in \{1, \dots, n\}$  si ha che

$$a_{i1}\mathbf{A}_{i1} + a_{i2}\mathbf{A}_{i2} + \dots + a_{i,n-1}\mathbf{A}_{i,n-1} + a_{in}\mathbf{A}_{in} = a_{11}\mathbf{A}_{11} + a_{12}\mathbf{A}_{12} + \dots + a_{1,n-1}\mathbf{A}_{1,n-1} + a_{1n}\mathbf{A}_{1n},$$

ossia che

$$(*) \quad \text{Det}\mathbf{A} = a_{i1}\mathbf{A}_{i1} + a_{i2}\mathbf{A}_{i2} + \dots + a_{i,n-1}\mathbf{A}_{i,n-1} + a_{in}\mathbf{A}_{in}.$$

(\*) si chiama **lo sviluppo di Laplace del determinante di  $\mathbf{A}$  rispetto alla  $i$ -esima riga di  $\mathbf{A}$** .

Quindi, per calcolare il determinante di una matrice  $\mathbf{A}$ , si può partire mettendo in evidenza gli elementi di una riga qualunque, e non necessariamente la  $1^a$ , come abbiamo fatto fino ad ora.

**Esempio 5.** Sia  $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$  una matrice  $2 \times 2$ . Sviluppiamo il determinante di  $\mathbf{A}$  rispetto alla  $2^a$  riga di  $\mathbf{A}$ :

– mettiamo in evidenza gli elementi della  $2^a$  riga di  $\mathbf{A}$ :  $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ \boxed{a_{21}} & \boxed{a_{22}} \end{pmatrix}$ ,

–  $\mathbf{C}_{21}$  è la matrice che si ottiene da  $\mathbf{A}$  togliendo la  $2^a$  riga e la  $1^a$  colonna, quindi  $\mathbf{C}_{21} = (a_{12})$ ;  $\mathbf{C}_{22}$  è la matrice che si ottiene da  $\mathbf{A}$  togliendo la  $2^a$  riga e la  $2^a$  colonna, quindi  $\mathbf{C}_{22} = (a_{11})$ .

Allora

$$\begin{aligned} a_{21}\mathbf{A}_{21} + a_{22}\mathbf{A}_{22} &= a_{21}(-1)^{2+1}\text{Det}\mathbf{C}_{21} + a_{22}(-1)^{2+2}\text{Det}\mathbf{C}_{22} = \\ &= -a_{21}\text{Det}(a_{12}) + a_{22}\text{Det}(a_{11}) = -a_{21}a_{12} + a_{22}a_{11} = \\ &= a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \end{aligned}$$

dà lo stesso risultato che abbiamo ottenuto partendo dalla  $1^a$  riga.

Conviene quindi sviluppare il determinante rispetto alla riga che contiene più zeri.

**Esempio 6.** Riconsideriamo la matrice dell'Esempio 4,  $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -5 & 0 & 3 \\ 6 & 2 & 0 & 4 \\ -2 & 0 & 0 & 2 \\ -1 & 7 & 5 & 1 \end{pmatrix}$ , e calcoliamo il suo

determinante rispetto alla  $3^a$  riga (che contiene due zeri). Allora

$$\text{Det}\mathbf{A} = (-2)(-1)^{3+1}\text{Det}\begin{pmatrix} -5 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 4 \\ 7 & 5 & 1 \end{pmatrix} + 2(-1)^{3+4}\text{Det}\begin{pmatrix} 1 & -5 & 0 \\ 6 & 2 & 0 \\ -1 & 7 & 5 \end{pmatrix}.$$

Calcoliamo separatamente  $\text{Det}\begin{pmatrix} -5 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 4 \\ 7 & 5 & 1 \end{pmatrix}$  e  $\text{Det}\begin{pmatrix} 1 & -5 & 0 \\ 6 & 2 & 0 \\ -1 & 7 & 5 \end{pmatrix}$ . Per entrambe queste matrici  $3 \times 3$  non è conveniente calcolare il determinante rispetto alla  $3^a$  riga, ma è indifferente scegliere la  $1^a$  o la  $2^a$ . Per fare esercizio scegliamo in entrambi i casi la  $2^a$  riga:

$$\begin{aligned} \text{Det}\begin{pmatrix} -5 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 4 \\ 7 & 5 & 1 \end{pmatrix} &= 2(-1)^{2+1}\text{Det}\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} + 4(-1)^{2+3}\text{Det}\begin{pmatrix} -5 & 0 \\ 7 & 5 \end{pmatrix} = \\ &= -2(0 - 15) - 4(-25 - 0) = 30 + 100 = 130 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Det}\begin{pmatrix} 1 & -5 & 0 \\ 6 & 2 & 0 \\ -1 & 7 & 5 \end{pmatrix} &= 6(-1)^{2+1}\text{Det}\begin{pmatrix} -5 & 0 \\ 7 & 5 \end{pmatrix} + 2(-1)^{2+2}\text{Det}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} = \\ &= -6(-25 - 0) + 2(5 - 0) = 150 + 10 = 160 \end{aligned}$$

Quindi  $\text{Det}(\mathbf{A}) = (-2) \times 130 + (-2) \times 160 = -580$  (lo stesso numero che avevamo ottenuto sviluppando il determinante rispetto alla  $1^a$  riga).

Così come si può sviluppare il determinante di una matrice rispetto ad una qualunque sua riga, lo si può sviluppare rispetto ad una qualunque sua colonna, dal momento che vale il seguente

**Teorema.** Sia  $\mathbf{A}$  una matrice  $n \times n$ . Allora, fissati  $j \in \{1, \dots, n\}$  e si ha che

$$(**) \quad \text{Det} \mathbf{A} = a_{1j} \mathbf{A}_{1j} + a_{2j} \mathbf{A}_{2j} + \dots + a_{n-1,j} \mathbf{A}_{n-1,j} + a_{nj} \mathbf{A}_{nj}.$$

(\*\*) si chiama **lo sviluppo di Laplace del determinante di  $\mathbf{A}$  rispetto alla  $j$ -esima colonna di  $\mathbf{A}$** .

Conviene quindi sviluppare il determinante rispetto alla riga oppure alla colonna che contiene più zeri.

**Esempio 7.** Riconsideriamo la matrice degli Esempi 4 e 6,  $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -5 & 0 & 3 \\ 6 & 2 & 0 & 4 \\ -2 & 0 & 0 & 2 \\ -1 & 7 & 5 & 1 \end{pmatrix}$ , e calcoliamo il suo determinante rispetto alla 3<sup>a</sup> colonna (che contiene tre zeri). Allora

$$\begin{aligned} \text{Det} \mathbf{A} &= 0 \times (-1)^{1+3} \text{Det} \begin{pmatrix} 6 & 2 & 4 \\ -2 & 0 & 2 \\ -1 & 7 & 1 \end{pmatrix} + 0 \times (-1)^{2+3} \text{Det} \begin{pmatrix} 1 & -5 & 3 \\ -2 & 0 & 2 \\ -1 & 7 & 1 \end{pmatrix} + \\ &+ 0 \times (-1)^{3+3} \text{Det} \begin{pmatrix} 1 & -5 & 3 \\ 6 & 2 & 4 \\ -1 & 7 & 1 \end{pmatrix} + 5(-1)^{4+3} \text{Det} \begin{pmatrix} 1 & -5 & 3 \\ 6 & 2 & 4 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \\ &= -5 \text{Det} \begin{pmatrix} 1 & -5 & 3 \\ 6 & 2 & 4 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Calcoliamo  $\text{Det} \begin{pmatrix} 1 & -5 & 3 \\ 6 & 2 & 4 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ , ad esempio rispetto alla 2<sup>a</sup> colonna:

$$\begin{aligned} \text{Det} \begin{pmatrix} 1 & -5 & 3 \\ 6 & 2 & 4 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix} &= \\ &= (-5)(-1)^{1+2} \text{Det} \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} + 2(-1)^{2+2} \text{Det} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} + 0 \times (-1)^{3+2} \text{Det} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 6 & 4 \end{pmatrix} = \\ &= (-5)(-1)(12 + 8) + 2(2 + 6) = 100 + 16 = 116 \end{aligned}$$

quindi  $\text{Det}(\mathbf{A}) = (-5) \times 116 = -580$  (si noti che è lo stesso numero che abbiamo ottenuto sviluppando il determinante rispetto alla 1<sup>a</sup> oppure alla 3<sup>a</sup> riga).

### Proprietà del determinante.

Sia  $\mathbf{A}$  una matrice  $n \times n$ .

(1) Se  $\mathbf{A}$  ha una riga (risp. una colonna) nulla, oppure se  $\mathbf{A}$  ha due righe (risp. due colonne) uguali, allora  $\text{Det}(\mathbf{A}) = 0$ .

(2) Se  $\mathbf{A}'$  è la matrice che si ottiene da  $\mathbf{A}$  mediante lo scambio di due righe (risp. due colonne) allora  $\text{Det}(\mathbf{A}') = -\text{Det}(\mathbf{A})$ .

(3) Se  $\mathbf{A}'$  è la matrice che si ottiene da  $\mathbf{A}$  sommando ad una riga (risp. ad una colonna) di  $\mathbf{A}$  un'altra riga (risp. un'altra colonna) di  $\mathbf{A}$  moltiplicata per un numero  $c$ , allora  $\text{Det}(\mathbf{A}') = \text{Det}(\mathbf{A})$ .

(4) Se  $\mathbf{A}'$  è la matrice che si ottiene da  $\mathbf{A}$  moltiplicando una riga (risp. una colonna) di  $\mathbf{A}$  per un numero  $c$ , allora  $\text{Det}(\mathbf{A}') = c\text{Det}(\mathbf{A})$ .

(5)  $\text{Det}(\mathbf{A}^T) = \text{Det}(\mathbf{A})$ .

(6) Se  $\mathbf{B}$  è un'altra matrice  $n \times n$  allora  $\text{Det}(\mathbf{AB}) = \text{Det}(\mathbf{A}) \text{Det}(\mathbf{B})$ .

(7)  $\mathbf{A}$  è non singolare se e solo se  $\text{Det}(\mathbf{A}) \neq 0$ , e se  $\mathbf{A}$  è non singolare si ha

$$\text{Det}(\mathbf{A}^{-1}) = \frac{1}{\text{Det}(\mathbf{A})}.$$

N.B.

Per quanto riguarda la proprietà (7), si ricordi che avevamo già osservato che una matrice  $2 \times 2$   $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  è non singolare se e solo se il numero  $ad - bc \neq 0$ , e tale numero è proprio  $\text{Det}(\mathbf{A})$ .

**Esercizio.** Si provi che il determinante di una matrice triangolare superiore (risp. inferiore) è il prodotto degli elementi diagonali.

Sia  $\mathbf{T}$  una matrice  $n \times n$  triangolare superiore (la dimostrazione è simile per le matrici triangolari inferiori):

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} t_{11} & & & & & \\ 0 & t_{22} & & & & \\ 0 & 0 & t_{33} & & & * \\ 0 & 0 & 0 & t_{44} & & \\ \vdots & & & & \ddots & \\ 0 & & \circ & & & \ddots \\ 0 & & & & \dots & \dots & t_{nn} \end{pmatrix}.$$

Chiamiamo:

$\mathbf{T}_1$  la matrice che si ottiene da  $\mathbf{T}$  sopprimendo la  $1^a$  riga e la  $1^a$  colonna ( $\mathbf{T}_1$  è triangolare superiore  $(n-1) \times (n-1)$ ):

$$\mathbf{T}_1 = \begin{pmatrix} t_{22} & & & & \\ 0 & t_{33} & & & * \\ 0 & 0 & t_{44} & & \\ \vdots & & & \ddots & \\ 0 & & \circ & & \ddots \\ 0 & & & \dots & \dots & t_{nn} \end{pmatrix},$$

$\mathbf{T}_2$  la matrice che si ottiene da  $\mathbf{T}_1$  sopprimendo la  $1^a$  riga e la  $1^a$  colonna ( $\mathbf{T}_2$  è triangolare superiore

$(n - 2) \times (n - 2)$ ):

$$\mathbf{T}_2 = \begin{pmatrix} t_{33} & & & & \\ 0 & t_{44} & & * & \\ \vdots & & \ddots & & \\ & \textcircled{0} & & & \\ & & & \dots & t_{nn} \end{pmatrix},$$

e così via per ogni  $k = 2, \dots, n - 1$  chiamiamo  $\mathbf{T}_k$  la matrice che si ottiene da  $\mathbf{T}_{k-1}$  sopprimendo la 1<sup>a</sup> riga e la 1<sup>a</sup> colonna.  $\mathbf{T}_k$  è una matrice triangolare superiore  $(n - k) \times (n - k)$ .

Sviluppiamo il determinante di  $\mathbf{T}$  rispetto alla 1<sup>a</sup> colonna di  $\mathbf{T}$ :

$$\text{Det}\mathbf{T} = t_{11}(-1)^{1+1}\text{Det}\mathbf{T}_1 = t_{11}\text{Det}\mathbf{T}_1.$$

Sviluppiamo il determinante di  $T_1$  rispetto alla 1<sup>a</sup> colonna di  $T_1$ :

$$\text{Det}\mathbf{T} = t_{11}\text{Det}\mathbf{T}_1 = t_{11}(t_{22}(-1)^{1+1}\text{Det}\mathbf{T}_2) = t_{11}t_{22}\text{Det}\mathbf{T}_2.$$

Così procedendo otteniamo:

$$\begin{aligned} \text{Det}\mathbf{T} &= t_{11}t_{22}\text{Det}\mathbf{T}_2 = \\ &= t_{11}t_{22}t_{33}\text{Det}\mathbf{T}_3 = \\ &= t_{11}t_{22}t_{33}t_{44}\text{Det}\mathbf{T}_4 = \\ &= \dots = \\ &= t_{11}t_{22} \dots t_{n-1,n-1}\text{Det}\mathbf{T}_{n-1} = \\ &= t_{11}t_{22} \dots t_{n-1,n-1}\text{Det}(t_{nn}) = \\ &= t_{11}t_{22} \dots t_{n-1,n-1}t_{nn}. \end{aligned}$$

In particolare da ciò segue:

**Il determinante di una matrice diagonale è il prodotto degli elementi diagonali,**  
poichè le matrici diagonali sono particolari matrici triangolari superiori.

**Esercizio.** Sia  $\mathbf{A}$  una matrice  $n \times n$ . Si provi che per ogni scalare  $c$  si ha:

$$\text{Det}(c\mathbf{A}) = c^n\text{Det}(\mathbf{A}).$$

Si ha:

$$\text{Det}(c\mathbf{A}) \underset{c\mathbf{A}=c(\mathbf{I}_n\mathbf{A})=(c\mathbf{I}_n)\mathbf{A}}{=} \text{Det}((c\mathbf{I}_n)\mathbf{A}) \underset{\substack{=} \\ \text{proprietà 6 del det.}}{=} \text{Det}(c\mathbf{I}_n)\text{Det}(\mathbf{A}).$$

Poichè  $c\mathbf{I}_n$  è una matrice scalare  $n \times n$ , in particolare una matrice diagonale, per l'esercizio precedente si ha che

$$\text{Det}(c\mathbf{I}_n) = \text{prodotto degli elementi diagonali di } c\mathbf{I}_n.$$

Tali elementi sono tutti uguali a  $c$ , ed il loro prodotto ha  $n$  fattori (perchè  $c\mathbf{I}_n$  è  $n \times n$ ), dunque  $\text{Det}(c\mathbf{I}_n) = c^n$ , per cui

$$\text{Det}(c\mathbf{A}) = c^n\text{Det}(\mathbf{A}).$$

## ESERCIZI TIPO

## ESERCIZIO TIPO 1

Siano  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^{n-1}$  ed  $a \in \mathbb{R}$ . Si consideri la matrice a blocchi

$$\mathbf{A} = \left( \begin{array}{c|c} 1 & \mathbf{u}^T \\ \hline - & - \\ \mathbf{v} & a\mathbf{I}_{n-1} \end{array} \right) \in M_n(\mathbb{R}).$$

(a) Sia  $\mathbf{w} = \begin{pmatrix} -a \\ - \\ \mathbf{v} \end{pmatrix}$ . Si provi che  $\mathbf{A}\mathbf{w} = \mathbf{0}$  se e solo se  $\mathbf{u}^T\mathbf{v} = a$ .

(b) Dopo aver calcolato  $\mathbf{A}^2$  a blocchi, si provi che se  $a \neq 0$  ed  $\mathbf{A} = \mathbf{A}^2$  allora  $\mathbf{A} = \mathbf{I}_n$ .

(a) Calcolando  $\mathbf{A}\mathbf{w}$  a blocchi si ottiene

$$\mathbf{A}\mathbf{w} = \left( \begin{array}{c|c} 1 & \mathbf{u}^T \\ \hline - & - \\ \mathbf{v} & a\mathbf{I}_{n-1} \end{array} \right) \begin{pmatrix} -a \\ - \\ \mathbf{v} \end{pmatrix} \underset{\mathbf{v} \cdot (-a) = -a\mathbf{v}}{=} \begin{pmatrix} -a + \mathbf{u}^T\mathbf{v} \\ - \\ -a\mathbf{v} + (a\mathbf{I}_{n-1})\mathbf{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a + \mathbf{u}^T\mathbf{v} \\ - \\ -a\mathbf{v} + a\mathbf{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a + \mathbf{u}^T\mathbf{v} \\ - \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}.$$

Dunque

$$\mathbf{A}\mathbf{w} = \mathbf{0} \iff -a + \mathbf{u}^T\mathbf{v} = 0 \iff \mathbf{u}^T\mathbf{v} = a.$$

(b) Calcolando  $\mathbf{A}^2$  a blocchi si ottiene

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^2 &= \left( \begin{array}{c|c} 1 & \mathbf{u}^T \\ \hline - & - \\ \mathbf{v} & a\mathbf{I}_{n-1} \end{array} \right) \left( \begin{array}{c|c} 1 & \mathbf{u}^T \\ \hline - & - \\ \mathbf{v} & a\mathbf{I}_{n-1} \end{array} \right) = \left( \begin{array}{c|c} 1 + \mathbf{u}^T\mathbf{v} & \mathbf{u}^T + \mathbf{u}^T(a\mathbf{I}_{n-1}) \\ \hline - & - \\ \mathbf{v} + (a\mathbf{I}_{n-1})\mathbf{v} & \mathbf{v}\mathbf{u}^T + (a\mathbf{I}_{n-1})^2 \end{array} \right) = \\ &\underset{\mathbf{u}^T(a\mathbf{I}_{n-1}) = a\mathbf{u}^T\mathbf{I}_{n-1} = a\mathbf{u}^T}{=} \left( \begin{array}{c|c} 1 + \mathbf{u}^T\mathbf{v} & \mathbf{u}^T + a\mathbf{u}^T \\ \hline - & - \\ \mathbf{v} + a\mathbf{v} & \mathbf{v}\mathbf{u}^T + a^2\mathbf{I}_{n-1} \end{array} \right) \end{aligned}$$

Per ipotesi  $\mathbf{A} = \mathbf{A}^2$ , quindi

$$\begin{cases} 1 = 1 + \mathbf{u}^T\mathbf{v} \\ \mathbf{u}^T = \mathbf{u}^T + a\mathbf{u}^T \\ \mathbf{v} = \mathbf{v} + a\mathbf{v} \\ a\mathbf{I}_{n-1} = \mathbf{v}\mathbf{u}^T + a^2\mathbf{I}_{n-1} \end{cases}$$

Dalla seconda equazione si ricava  $a\mathbf{u}^T = \mathbf{0}^T$ , per cui, essendo  $a \neq 0$ ,  $\mathbf{u}^T = \mathbf{0}^T$  (in particolare,  $\mathbf{u}^T\mathbf{v} = \mathbf{0}^T\mathbf{v} = 0$ , e la prima equazione non fornisce informazioni).

Dalla terza equazione si ricava  $a\mathbf{v} = \mathbf{0}$ , e quindi, essendo  $a \neq 0$ ,  $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ .

Sostituendo  $\mathbf{v} = \mathbf{0}$  nella quarta equazione, si ottiene

$$a\mathbf{I}_{n-1} = \mathbf{v}\mathbf{u}^T + a^2\mathbf{I}_{n-1} = \mathbf{0} + a^2\mathbf{I}_{n-1} = a^2\mathbf{I}_{n-1},$$

da cui segue

$$(a - a^2)\mathbf{I}_{n-1} = a\mathbf{I}_{n-1} - a^2\mathbf{I}_{n-1} = \mathbf{0}.$$

Dunque  $a - a^2 = 0$ , e poichè  $a \neq 0$  concludiamo che  $a = 1$ . Allora

$$\mathbf{A} = \left( \begin{array}{c|c} 1 & \mathbf{u}^T \\ \hline - & - \\ \mathbf{v} & a\mathbf{I}_{n-1} \end{array} \right) = \left( \begin{array}{c|c} 1 & \mathbf{0}^T \\ \hline - & - \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_{n-1} \end{array} \right) = \mathbf{I}_n.$$

**ESERCIZIO TIPO 2**

Risolvere il sistema lineare  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$  nei tre seguenti casi:

$$(a) \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 7 \end{pmatrix} \text{ e } \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix};$$

$$(b) \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 1 & 2 \\ 2 & 6 & -4 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & -1 & 3 & 6 \end{pmatrix} \text{ e } \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 10 \\ 12 \end{pmatrix};$$

$$(c) \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & -8 & 4 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \text{ e } \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

(a) Troviamo una forma ridotta di Gauss della matrice aumentata del sistema:

$$\begin{aligned} (\mathbf{A} \mid \mathbf{b}) &= \left( \begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & -1 \\ 3 & 3 & 7 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{E_{31}(-3)E_{21}(-1)E_1(\frac{1}{2})} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \\ &\xrightarrow{E_{32}(-1)} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) = (\mathbf{U} \mid \mathbf{d}) \end{aligned}$$

Poichè  $\mathbf{d}$  è dominante, allora  $\mathbf{Ux} = \mathbf{d}$ , e quindi anche  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ , non ha soluzioni.

(Infatti: il sistema  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$  è equivalente al sistema  $\mathbf{Ux} = \mathbf{d}$ , che è una scrittura compatta per

$$(*) \quad \begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 & = 0 \\ x_3 & = -1, \\ 0 & = 1 \end{cases}$$

e poichè l'ultima equazione di (\*) non ha soluzioni, (\*) non ha soluzioni).

(b) Troviamo una forma ridotta di Gauss della matrice aumentata del sistema:

$$\begin{aligned} (\mathbf{A} \mid \mathbf{b}) &= \left( \begin{array}{ccccc|c} 1 & 3 & -2 & 1 & 2 & 4 \\ 2 & 6 & -4 & 2 & 5 & 10 \\ 1 & 3 & -1 & 3 & 6 & 12 \end{array} \right) \xrightarrow{E_{31}(-1)E_{21}(-2)} \left( \begin{array}{ccccc|c} 1 & 3 & -2 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 4 & 8 \end{array} \right) \rightarrow \\ &\xrightarrow{E_{23}} \left( \begin{array}{ccccc|c} 1 & 3 & -2 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 4 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array} \right) = (\mathbf{U} \mid \mathbf{d}). \end{aligned}$$

Il sistema  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$  è equivalente al sistema  $\mathbf{Ux} = \mathbf{d}$ , che è una scrittura compatta per

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 2x_3 + x_4 + 2x_5 & = 4 \\ x_3 + 2x_4 + 4x_5 & = 8. \\ x_5 & = 2 \end{cases}$$

Poichè  $\mathbf{d}$  è libera,  $\mathbf{U}\mathbf{x} = \mathbf{d}$  ammette soluzioni.

Poichè  $\mathbf{U}$  ha esattamente due colonne libere (la  $2^a$  e la  $4^a$ ),  $\mathbf{U}\mathbf{x} = \mathbf{d}$  ha  $\infty^2$  soluzioni.

Scegliamo come parametri le variabili corrispondenti alle colonne libere di  $\mathbf{U}$  e con la sostituzione all'indietro otteniamo:

$$\begin{cases} x_2 = h \\ x_4 = k \\ x_5 = 2 \\ x_3 = -2x_4 - 4x_5 + 8 = -2k - 4 \times 2 + 8 = -2k \\ x_1 = -3x_2 + 2x_3 - x_4 - 2x_5 + 4 = -3h + 2 \times (-2k) - k - 2 \times 2 + 4 = -3h - 5k \end{cases}$$

Dunque l'insieme delle soluzioni di  $\mathbf{U}\mathbf{x} = \mathbf{d}$ , e quindi anche di  $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ , è

$$\left\{ \left( \begin{pmatrix} -3h - 5k \\ h \\ -2k \\ k \\ 2 \end{pmatrix} \mid h, k \in \mathbb{C} \right) \right\}.$$

(c) Troviamo una forma ridotta di Gauss della matrice aumentata del sistema:

$$\begin{aligned} (\mathbf{A} \mid \mathbf{b}) &= \left( \begin{array}{ccc|c} 4 & -8 & 4 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & 5 \end{array} \right) \xrightarrow{E_{31}(-1)E_{21}(-1)E_1(\frac{1}{4})} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \end{array} \right) \rightarrow \\ &\xrightarrow{E_{32}(-1)} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array} \right) = (\mathbf{U} \mid \mathbf{d}) \end{aligned}$$

Il sistema  $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$  è equivalente al sistema  $\mathbf{U}\mathbf{x} = \mathbf{d}$ , che è una scrittura compatta per

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ x_2 - x_3 = 3 \\ x_3 = 2 \end{cases}.$$

Poichè  $\mathbf{d}$  è libera,  $\mathbf{U}\mathbf{x} = \mathbf{d}$  ammette soluzioni.

Poichè  $\mathbf{U}$  non ha colonne libere,  $\mathbf{U}\mathbf{x} = \mathbf{d}$  ha esattamente una soluzione.

Con la sostituzione all'indietro otteniamo:

$$\begin{cases} x_3 = 2 \\ x_2 = x_3 + 3 = 2 + 3 = 5 \\ x_1 = 2x_2 - x_3 = 2 \times 5 - 2 = 8 \end{cases}$$

Dunque l'unica soluzione di  $\mathbf{U}\mathbf{x} = \mathbf{d}$ , e quindi anche di  $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ , è il vettore  $\begin{pmatrix} 8 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$ .

**ESERCIZIO TIPO 3**

Si risolva il sistema lineare  $\mathbf{A}(\alpha)\mathbf{x} = \mathbf{b}(\alpha)$  dipendente dal parametro complesso  $\alpha$  dove

$$\mathbf{A}(\alpha) = \begin{pmatrix} 3 & 3\alpha & 3 \\ 1 & \alpha+1 & \alpha+1 \\ 1 & \alpha & \alpha+1-i \\ 0 & 2 & 2\alpha \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{b}(\alpha) = \begin{pmatrix} 3\alpha \\ \alpha+1 \\ \alpha \\ \alpha^2+3 \end{pmatrix}.$$

Troviamo una forma ridotta di Gauss della matrice aumentata del sistema.

$$\begin{aligned} (\mathbf{A}(\alpha) \mid \mathbf{b}(\alpha)) &= \left( \begin{array}{ccc|c} 3 & 3\alpha & 3 & 3\alpha \\ 1 & \alpha+1 & \alpha+1 & \alpha+1 \\ 1 & \alpha & \alpha+1-i & \alpha \\ 0 & 2 & 2\alpha & \alpha^2+3 \end{array} \right) \xrightarrow{E_{31}(-1)E_{21}(-1)E_1(\frac{1}{3})} \\ &\rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & \alpha & 1 & \alpha \\ 0 & 1 & \alpha & 1 \\ 0 & 0 & \alpha-i & 0 \\ 0 & 2 & 2\alpha & \alpha^2+3 \end{array} \right) \xrightarrow{E_{42}(-2)} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & \alpha & 1 & \alpha \\ 0 & 1 & \alpha & 1 \\ 0 & 0 & \alpha-i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha^2+1 \end{array} \right) = (\mathbf{B}(\alpha) \mid \mathbf{c}(\alpha)). \end{aligned}$$

$$\boxed{1^0 \text{ CASO}} \quad \alpha = i \quad (\mathbf{B}(i) \mid \mathbf{c}(i)) = \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & i & 1 & i \\ 0 & 1 & i & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \text{ è una forma ridotta di Gauss per}$$

$(\mathbf{A}(i) \mid \mathbf{b}(i))$ , quindi  $\mathbf{A}(i)\mathbf{x} = \mathbf{b}(i)$  è equivalente a  $\mathbf{B}(i)\mathbf{x} = \mathbf{c}(i)$  che è una forma compatta per

$$(*) \quad \begin{cases} x_1 + ix_2 + x_3 = i \\ x_2 + ix_3 = 1 \end{cases}$$

Poichè  $\mathbf{c}(i)$  è libera,  $\mathbf{B}(i)\mathbf{x} = \mathbf{c}(i)$  ammette soluzioni.

Poichè  $\mathbf{B}(i)$  ha esattamente una colonna libera,  $\mathbf{B}(i)\mathbf{x} = \mathbf{c}(i)$  ha  $\infty^1$  soluzioni.

Scegliamo come parametro la variabile corrispondente alla colonna libera di  $\mathbf{B}(i)$  (la 3<sup>a</sup>) e con la sostituzione all'indietro da (\*) otteniamo

$$\begin{cases} x_3 = h \\ x_2 = -ix_3 + 1 = -ih + 1 \\ x_1 = -ix_2 - x_3 + i = -i(-ih + 1) - h + i = -h - i - h + i = -2h \end{cases}$$

L'insieme delle soluzioni del sistema  $\mathbf{B}(i)\mathbf{x} = \mathbf{c}(i)$  ( e quindi l'insieme delle soluzioni del sistema  $\mathbf{A}(i)\mathbf{x} = \mathbf{b}(i)$  ) è

$$\left\{ \begin{pmatrix} -2h \\ ih+1 \\ h \end{pmatrix} \mid h \in \mathbb{C} \right\}.$$

$$\boxed{2^0 \text{ CASO}} \quad \alpha \neq i$$

$$\begin{aligned}
 (\mathbf{B}(\alpha) \mid \mathbf{c}(\alpha)) &= \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & \alpha & 1 & \alpha \\ 0 & 1 & \alpha & 1 \\ 0 & 0 & \alpha - i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha^2 + 1 \end{array} \right) \xrightarrow{E_3(\frac{1}{\alpha-i})} \\
 &\rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & \alpha & 1 & \alpha \\ 0 & 1 & \alpha & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha^2 + 1 \end{array} \right) \xrightarrow{E_4(\frac{1}{\alpha+i})} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & \alpha & 1 & \alpha \\ 0 & 1 & \alpha & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha + i \end{array} \right) = (\mathbf{C}(\alpha) \mid \mathbf{d}(\alpha)).
 \end{aligned}$$

**1<sup>o</sup> Sottocaso**  $\alpha = -i$   $(\mathbf{C}(-i) \mid \mathbf{d}(-i)) = \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -i & 1 & -i \\ 0 & 1 & -i & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$  è una forma ridotta di

Gauss per  $(\mathbf{A}(-i) \mid \mathbf{b}(-i))$ , quindi  $\mathbf{A}(-i)\mathbf{x} = \mathbf{b}(-i)$  è equivalente a  $\mathbf{C}(-i)\mathbf{x} = \mathbf{d}(-i)$  che è una forma compatta per

$$(*) \quad \begin{cases} x_1 - ix_2 + x_3 = -i \\ x_2 - ix_3 = 1 \\ x_3 = 0 \end{cases}$$

Poichè  $\mathbf{d}(-i)$  è libera,  $\mathbf{C}(-i)\mathbf{x} = \mathbf{d}(-i)$  ammette soluzioni.

Poichè tutte le colonne di  $\mathbf{C}(-i)$  sono dominanti,  $\mathbf{C}(-i)\mathbf{x} = \mathbf{d}(-i)$  ammette un'unica soluzione. Con la sostituzione all'indietro da (\*) otteniamo

$$\begin{cases} x_3 = 0 \\ x_2 = ix_3 + 1 = 1 \\ x_1 = ix_2 - x_3 - i = i - i = 0 \end{cases}$$

L'unica soluzione di  $\mathbf{C}(-i)\mathbf{x} = \mathbf{d}(-i)$  ( e quindi di  $\mathbf{A}(-i)\mathbf{x} = \mathbf{b}(-i)$  ) è  $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

**2<sup>o</sup> Sottocaso**  $\alpha \notin \{i, -i\}$

$$(\mathbf{C}(\alpha) \mid \mathbf{d}(\alpha)) = \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & \alpha & 1 & \alpha \\ 0 & 1 & \alpha & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha + i \end{array} \right) \xrightarrow{E_4(\frac{1}{\alpha+i})} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & \alpha & 1 & \alpha \\ 0 & 1 & \alpha & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) = (\mathbf{D}(\alpha) \mid \mathbf{e}(\alpha))$$

è una forma ridotta di Gauss per  $(\mathbf{A}(\alpha) \mid \mathbf{b}(\alpha))$ . Poichè  $\mathbf{e}(\alpha)$  è dominante,  $\mathbf{D}(\alpha)\mathbf{x} = \mathbf{e}(\alpha)$  ( e quindi di  $\mathbf{A}(\alpha)\mathbf{x} = \mathbf{b}(\alpha)$  ) non ammette soluzioni.

**ESERCIZIO TIPO 4**

Si trovino tutte le inverse destre della matrice  $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ .

Un'inversa destra di  $\mathbf{A}$  è una matrice  $3 \times 2$   $\mathbf{R}$  tale che se  $\mathbf{R} = (\mathbf{c}_1 \mid \mathbf{c}_2)$ , allora

$\mathbf{c}_1$  è soluzione di (1)  $\mathbf{Ax} = \mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  e

$\mathbf{c}_2$  è soluzione di (2)  $\mathbf{Ax} = \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

Cerchiamo tutte le soluzioni di (1) e (2).

$$\begin{aligned} (\mathbf{A} \mid \mathbf{I}_2) &= \left( \begin{array}{ccc|cc} 2 & -2 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{E_{21}(-1)E_1(\frac{1}{2})} \left( \begin{array}{ccc|cc} 1 & -1 & 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -\frac{1}{2} & 1 \end{array} \right) \rightarrow \\ &\xrightarrow{E_2(-\frac{1}{2})} \left( \begin{array}{ccc|cc} 1 & -1 & 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \end{array} \right) = (\mathbf{U} \mid \mathbf{b}_1 \quad \mathbf{b}_2). \end{aligned}$$

(1) è equivalente a (1')  $\mathbf{Ux} = \mathbf{b}_1$  che è una forma compatta per

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = \frac{1}{2} \\ x_3 = \frac{1}{4} \end{cases}$$

Scegliamo come parametro la variabile corrispondente all'unica colonna libera di  $\mathbf{U}$  (la 2<sup>a</sup>) e con la sostituzione all'indietro otteniamo

$$\begin{cases} x_2 = h \\ x_3 = \frac{1}{4} \\ x_1 = x_2 - x_3 + \frac{1}{2} = h - \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = h + \frac{1}{4} \end{cases}$$

L'insieme delle soluzioni di (1) è

$$\left\{ \begin{pmatrix} h + \frac{1}{4} \\ h \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix} \mid h \in \mathbb{C} \right\}.$$

(2) è equivalente a (2')  $\mathbf{Ux} = \mathbf{b}_2$  che è una forma compatta per

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ x_3 = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Scegliamo come parametro la variabile corrispondente all'unica colonna libera di  $\mathbf{U}$  (la 2<sup>a</sup>) e con la sostituzione all'indietro otteniamo

$$\begin{cases} x_2 = k \\ x_3 = -\frac{1}{2} \\ x_1 = x_2 - x_3 = k + \frac{1}{2} \end{cases}$$

L'insieme delle soluzioni di (2) è

$$\left\{ \begin{pmatrix} k + \frac{1}{2} \\ k \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \mid k \in \mathbb{C} \right\}.$$

Le inverse destre di  $\mathbf{A}$  sono esattamente tutte le matrici del tipo  $\mathbf{R}(\mathbf{h}, \mathbf{k}) = \begin{pmatrix} h + \frac{1}{4} & k + \frac{1}{2} \\ h & k \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ , al variare di  $h, k \in \mathbb{C}$ .

### ESERCIZIO TIPO 4 bis

Si trovino tutte le inverse sinistre della matrice  $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ .

1. Poniamo  $\mathbf{B} = \mathbf{A}^T$ .
2. Cerchiamo tutte le inverse destre di  $\mathbf{B}$ . Dall'ESERCIZIO TIPO 4 sappiamo che sono tutte e sole le matrici del tipo  $\begin{pmatrix} h + \frac{1}{4} & k + \frac{1}{2} \\ h & k \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$  con  $h, k \in \mathbb{C}$ .
3. Una matrice è inversa sinistra di  $\mathbf{A}$  se e solo se è la trasposta di una inversa destra di  $\mathbf{B}$ . Quindi le inverse sinistre di  $\mathbf{A}$  sono esattamente tutte le matrici del tipo  $\begin{pmatrix} h + \frac{1}{4} & h & \frac{1}{4} \\ k + \frac{1}{2} & k & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$  al variare di  $h, k \in \mathbb{C}$ .

**ESERCIZIO TIPO 5**

Sia  $\mathbf{A}(\alpha) = \begin{pmatrix} \alpha-1 & 1 & \alpha-1 \\ \alpha-1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ , dove  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Per quegli  $\alpha \in \mathbb{R}$  per cui  $\mathbf{A}(\alpha)$  è non singolare, si calcoli  $\mathbf{A}(\alpha)^{-1}$ .

$$\begin{aligned}
 (\mathbf{A}(\alpha) \mid \mathbf{I}_3) &= \left( \begin{array}{ccc|ccc} \alpha-1 & 1 & \alpha-1 & 1 & 0 & 0 \\ \alpha-1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{E_{21}(-\alpha+1)E_1(\frac{1}{\alpha-1})} \boxed{\alpha \neq 1 : \mathbf{A}(1) \text{ non ha inversa}} \\
 &\rightarrow \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{1}{\alpha-1} & 1 & \frac{1}{\alpha-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\alpha & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{E_{23}} \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{1}{\alpha-1} & 1 & \frac{1}{\alpha-1} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -\alpha & -1 & 1 & 0 \end{array} \right) \\
 &\xrightarrow{E_3(-\frac{1}{\alpha})} \boxed{\alpha \neq 0 : \mathbf{A}(0) \text{ non ha inversa}} \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{1}{\alpha-1} & 1 & \frac{1}{\alpha-1} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{\alpha} & -\frac{1}{\alpha} & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{E_{13}(-1)} \\
 &\rightarrow \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{1}{\alpha-1} & 0 & \frac{1}{\alpha(1-\alpha)} & \frac{1}{\alpha} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{\alpha} & -\frac{1}{\alpha} & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{E_{12}(-\frac{1}{\alpha-1})} \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{\alpha(\alpha-1)} & \frac{1}{\alpha} & -\frac{1}{\alpha-1} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{\alpha} & -\frac{1}{\alpha} & 0 \end{array} \right) = (\mathbf{I}_3 \mid \mathbf{A}(\alpha)^{-1}).
 \end{aligned}$$

Se  $\boxed{\alpha \notin \{0, 1\}}$   $\mathbf{A}(\alpha)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\alpha(\alpha-1)} & \frac{1}{\alpha} & -\frac{1}{\alpha-1} \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{\alpha} & -\frac{1}{\alpha} & 0 \end{pmatrix}$ .

**ESERCIZIO TIPO 6**

Sia  $\mathbf{A}(\alpha) = \begin{pmatrix} \alpha - 1 & 3\alpha - 3 & 2\alpha - 2 \\ 0 & \alpha^2 + 4 & 0 \\ 2 & 6 & 2\alpha - 6 \\ \alpha & 3\alpha + 2 & \alpha + 5 \end{pmatrix}$ , dove  $\alpha \in \mathbb{C}$ .

(a) Per ogni  $\alpha \notin \{1, 2i, -2i\}$  si trovi una decomposizione  $\mathbf{A}(\alpha) = \mathbf{L}(\alpha)\mathbf{U}(\alpha)$ , scrivendo anche  $\mathbf{L}(\alpha)$  come prodotto di matrici elementari.

(b) Per ogni  $\alpha \notin \{1, 2i, -2i\}$  si trovi una decomposizione a rango pieno  $\mathbf{A}(\alpha) = \mathbf{L}_0(\alpha)\mathbf{U}_0(\alpha)$ .

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(\alpha) &= \begin{pmatrix} \boxed{\alpha - 1} & 3\alpha - 3 & 2\alpha - 2 \\ \boxed{0} & \alpha^2 + 4 & 0 \\ \boxed{2} & 6 & 2\alpha - 6 \\ \boxed{\alpha} & 3\alpha + 2 & \alpha + 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{41}(-\alpha)E_{31}(-2)E_1(\frac{1}{\alpha-1})} \begin{pmatrix} \boxed{\alpha - 1} & 3\alpha - 3 & 2\alpha - 2 \\ \boxed{0} & \alpha^2 + 4 & 0 \\ \boxed{2} & 6 & 2\alpha - 6 \\ \boxed{\alpha} & 3\alpha + 2 & \alpha + 5 \end{pmatrix} \quad \boxed{\alpha \neq 1} \\ &\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & \boxed{\alpha^2 + 4} & 0 \\ 0 & \boxed{0} & 2\alpha - 10 \\ 0 & \boxed{2} & 5 - \alpha \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{42}(-2)E_2(\frac{1}{\alpha^2+4})} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & \boxed{\alpha^2 + 4} & 0 \\ 0 & \boxed{0} & 2\alpha - 10 \\ 0 & \boxed{2} & 5 - \alpha \end{pmatrix} \quad \boxed{\alpha \notin \{2i, -2i\}} \\ &\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2\alpha - 10 \\ 0 & 0 & 5 - \alpha \end{pmatrix} = \mathbf{B}(\alpha) \end{aligned}$$

**1°CASO**  $\alpha \neq 5$  (nonchè  $\alpha \neq 1, 2i, -2i$ )

$$\mathbf{B}(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{2\alpha - 10} \\ 0 & 0 & \boxed{5 - \alpha} \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{43}(-5+\alpha)E_3(\frac{1}{2\alpha-10})} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{U}(\alpha)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{L}(\alpha) &= \begin{pmatrix} \boxed{\alpha - 1} & 0 & 0 & 0 \\ \boxed{0} & \boxed{\alpha^2 + 4} & 0 & 0 \\ \boxed{2} & \boxed{0} & \boxed{2\alpha - 10} & 0 \\ \boxed{\alpha} & \boxed{2} & \boxed{5 - \alpha} & 1 \end{pmatrix} = \\ &= \mathbf{E}_1(\alpha - 1)\mathbf{E}_{31}(2)\mathbf{E}_{41}(\alpha)\mathbf{E}_2(\alpha^2 + 4)\mathbf{E}_{42}(2)\mathbf{E}_3(2\alpha - 10)\mathbf{E}_{43}(5 - \alpha) \end{aligned}$$

**2°CASO**  $\alpha = 5$

$$\mathbf{B}(\mathbf{5}) = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{U}(\mathbf{5})$$

$$\mathbf{L}(\mathbf{5}) = \begin{pmatrix} \boxed{4} & 0 & 0 & 0 \\ \boxed{0} & \boxed{29} & 0 & 0 \\ \boxed{2} & \boxed{0} & 1 & 0 \\ \boxed{5} & \boxed{2} & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{E}_1(4)\mathbf{E}_{31}(2)\mathbf{E}_{41}(5)\mathbf{E}_2(29)\mathbf{E}_{42}(2)$$

**N.B.** Se  $\alpha \in \{1, 2i, -2i\}$  non è possibile trovare una forma ridotta di Gauss di  $\mathbf{A}(\alpha)$  senza fare scambi di righe, quindi  $\mathbf{A}(\alpha)$  **NON** ha una decomposizione  $\mathbf{L}(\alpha)\mathbf{U}(\alpha)$ .

Per ogni  $\alpha \notin \{5, 1, 2i, -2i\}$ , si ha una decomposizione a rango pieno  $\mathbf{A}(\alpha) = \mathbf{L}_0(\alpha)\mathbf{U}_0(\alpha)$  prendendo

$$\mathbf{U}_0(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ e } \mathbf{L}_0(\alpha) = \begin{pmatrix} \alpha - 1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha^2 + 4 & 0 \\ 2 & 0 & 2\alpha - 10 \\ \alpha & 2 & 5 - \alpha \end{pmatrix};$$

per  $\alpha = 5$  si ha una decomposizione a rango pieno  $\mathbf{A}(\mathbf{5}) = \mathbf{L}_0(\mathbf{5})\mathbf{U}_0(\mathbf{5})$  prendendo

$$\mathbf{U}_0(\mathbf{5}) = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ e } \mathbf{L}_0(\mathbf{5}) = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 29 \\ 2 & 0 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}.$$

**ESERCIZIO TIPO 7**

Sia  $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -4 \\ -2 & -6 & -10 \\ 1 & 3 & 6 \\ 1 & -4 & 10 \end{pmatrix}$ .

Si trovino una decomposizione  $\mathbf{A} = \mathbf{P}^T \mathbf{L} \mathbf{U}$  ed una decomposizione a rango pieno per  $\mathbf{A}$ .

Applicando l'algoritmo di Gauss ad  $A$  si ottiene:

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \begin{pmatrix} 0 & 2 & -4 \\ -2 & -6 & -10 \\ 1 & 3 & 6 \\ 1 & -4 & 10 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{13}} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 \\ -2 & -6 & -10 \\ 0 & 2 & -4 \\ 1 & -4 & 10 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{41}(1)E_{21}(2)} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & -7 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{23}} \\ &\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & -7 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{42}(7)E_2(\frac{1}{2})} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -10 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{43}(10)E_3(\frac{1}{2})} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Sia

$$\mathbf{P} = \mathbf{E}_{23} \mathbf{E}_{13} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Allora

$$\mathbf{P} \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 & -4 \\ -2 & -6 & -10 \\ 1 & 3 & 6 \\ 1 & -4 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 0 & 2 & -4 \\ -2 & -6 & -10 \\ 1 & -4 & 10 \end{pmatrix}.$$

Applicando l'algoritmo di Gauss senza scambi di righe a  $\mathbf{P} \mathbf{A}$  otteniamo una decomposizione  $\mathbf{L} \mathbf{U}$  per  $\mathbf{P} \mathbf{A}$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{P} \mathbf{A} &= \begin{pmatrix} \boxed{1} & 3 & 6 \\ \boxed{0} & 2 & -4 \\ \boxed{-2} & -6 & -10 \\ \boxed{1} & -4 & 10 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{41}(-1)E_{31}(2)} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 0 & \boxed{2} & -4 \\ 0 & \boxed{0} & 2 \\ 0 & \boxed{-7} & 4 \end{pmatrix} \rightarrow \\ &\xrightarrow{E_{42}(7)E_2(\frac{1}{2})} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & \boxed{2} \\ 0 & 0 & \boxed{-10} \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{43}(-10)E_3(\frac{1}{2})} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{U}, \end{aligned}$$

ed  $\mathbf{L} = \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 & 0 \\ \boxed{0} & \boxed{2} & 0 & 0 \\ \boxed{-2} & \boxed{0} & \boxed{2} & 0 \\ \boxed{1} & \boxed{-7} & \boxed{-10} & 1 \end{pmatrix}$ .

Dunque  $\mathbf{A} = \mathbf{P}^T \mathbf{L} \mathbf{U}$  dove

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{L} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & -7 & -10 & 1 \end{pmatrix} \text{ e } \mathbf{U} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

**SI NOTI:**

**[1]**  $\mathbf{P}$  ha

la 3<sup>a</sup> riga di  $\mathbf{I}_4$  in 1<sup>a</sup> posizione (procedendo dall'alto verso il basso)

la 1<sup>a</sup> riga di  $\mathbf{I}_4$  in 2<sup>a</sup> posizione

la 2<sup>a</sup> riga di  $\mathbf{I}_4$  in 3<sup>a</sup> posizione

la 4<sup>a</sup> riga di  $\mathbf{I}_4$  in 4<sup>a</sup> posizione.

Invertendo le righe con le posizioni, la matrice che ha

la 1<sup>a</sup> riga di  $\mathbf{I}_4$  in 3<sup>a</sup> posizione

la 2<sup>a</sup> riga di  $\mathbf{I}_4$  in 1<sup>a</sup> posizione

la 3<sup>a</sup> riga di  $\mathbf{I}_4$  in 2<sup>a</sup> posizione

la 4<sup>a</sup> riga di  $\mathbf{I}_4$  in 4<sup>a</sup> posizione

è quindi

$$\mathbf{P}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (= \mathbf{P}^T).$$

(d'altronde da  $\mathbf{P} = \mathbf{E}_{23}\mathbf{E}_{13}$  segue

$$\mathbf{P}^{-1} = (\mathbf{E}_{23}\mathbf{E}_{13})^{-1} = \mathbf{E}_{13}^{-1}\mathbf{E}_{23}^{-1} = \mathbf{E}_{13}\mathbf{E}_{23} = \mathbf{E}_{13}^T\mathbf{E}_{23}^T = (\mathbf{E}_{23}\mathbf{E}_{13})^T = \mathbf{P}^T.)$$

**[2]**

$$\mathbf{H} = \mathbf{E}_{13}\mathbf{E}_{23} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \neq \mathbf{P}$$

e facendo un'eliminazione di Gauss su  $\mathbf{H}\mathbf{A}$  si ottiene:

$$\mathbf{H}\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 & -4 \\ -2 & -6 & -10 \\ 1 & 3 & 6 \\ 1 & -4 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -6 & -10 \\ 1 & 3 & 6 \\ 0 & 2 & -4 \\ 1 & -4 & 10 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{41}(-1)E_{21}(-1)E_1(-\frac{1}{2})} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & -7 & 5 \end{pmatrix}.$$

Dunque  $\mathbf{H}\mathbf{A}$  non ha una decomposizione  $\mathbf{LU}$ .

Quindi è fondamentale, per costruire  $\mathbf{P}$ , l'ordine in cui si moltiplicano le matrici corrispondenti agli scambi di righe effettuati (si parte dall'ultimo procedendo a ritroso).

3] Dall'eliminazione di Gauss fatta su  $\mathbf{A}$  si ottiene che

$$\mathbf{E}_{43}(10)\mathbf{E}_3\left(\frac{1}{2}\right)\mathbf{E}_{42}(7)\mathbf{E}_2\left(\frac{1}{2}\right)\mathbf{E}_{23}\mathbf{E}_{41}(1)\mathbf{E}_{21}(2)\mathbf{E}_{13}\mathbf{A} = \mathbf{U}.$$

Quindi la tentazione di intuire  $\mathbf{L}$  direttamente da questa eliminazione di Gauss è fuorviante: posto

$$\mathbf{B} = \mathbf{E}_{43}(10)\mathbf{E}_3\left(\frac{1}{2}\right)\mathbf{E}_{42}(7)\mathbf{E}_2\left(\frac{1}{2}\right)\mathbf{E}_{41}(1)\mathbf{E}_{21}(2)$$

il prodotto delle matrici elementari diverse da quelle corrispondenti agli scambi di righe, si ha che  $\mathbf{BPA} \neq \mathbf{U}$ , e quindi  $\mathbf{PA} \neq \mathbf{B}^{-1}\mathbf{U}$ , ossia  $\mathbf{B}^{-1}$  non è un buon candidato per  $\mathbf{L}$ .

4] Mostriamo che esistono una forma ridotta di Gauss  $\mathbf{U}^*$  per  $\mathbf{A}$ , una matrice di permutazione  $\mathbf{P}^*$  ed una matrice triangolare inferiore non singolare  $\mathbf{L}^*$  tali che

$$\mathbf{U}^* \neq \mathbf{U}, \quad \mathbf{P}^* \neq \mathbf{P}, \quad \mathbf{L}^* \neq \mathbf{L}, \quad \text{ma } \mathbf{A} = (\mathbf{P}^*)^T \mathbf{L}^* \mathbf{U}^* = \mathbf{P}^T \mathbf{L} \mathbf{U},$$

ossia la decomposizione  $\mathbf{A} = \mathbf{P}^T \mathbf{L} \mathbf{U}$  non è unica.

Facciamo una eliminazione di Gauss su  $\mathbf{A}$  scegliendo degli scambi di riga diverse da quelli scelti nell'eliminazione che abbiamo fatto precedentemente.

$$\begin{aligned} \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -4 \\ -2 & -6 & -10 \\ 1 & 3 & 6 \\ 1 & -4 & 10 \end{pmatrix} &\xrightarrow{E_{14}} \begin{pmatrix} 1 & -4 & 10 \\ -2 & -6 & -10 \\ 1 & 3 & 6 \\ 0 & 2 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{31}(-1)E_{21}(2)} \begin{pmatrix} 1 & -4 & 10 \\ 0 & -14 & 10 \\ 0 & 7 & -4 \\ 0 & 2 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{32}(-7)E_2(-\frac{1}{14})} \\ &\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -4 & 10 \\ 0 & 1 & -\frac{5}{7} \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{42}(-2)} \begin{pmatrix} 1 & -4 & 10 \\ 0 & 1 & -\frac{5}{7} \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{18}{7} \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{43}(\frac{18}{7})} \begin{pmatrix} 1 & -4 & 10 \\ 0 & 1 & -\frac{5}{7} \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Sia  $\mathbf{P}^* = \mathbf{E}_{14} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ . Allora

$$\begin{aligned} \mathbf{P}^* \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 & -4 \\ -2 & -6 & -10 \\ 1 & 3 & 6 \\ 1 & -4 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{1} & -4 & 10 \\ \boxed{-2} & -6 & -10 \\ \boxed{1} & 3 & 6 \\ \boxed{0} & 2 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{31}(-1)E_{21}(2)} \\ \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -4 & 10 \\ 0 & \boxed{-14} & 10 \\ 0 & \boxed{7} & -4 \\ 0 & \boxed{2} & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{42}(-2)E_{32}(-7)E_2(-\frac{1}{14})} \begin{pmatrix} 1 & -4 & 10 \\ 0 & 1 & -\frac{5}{7} \\ 0 & 0 & \boxed{1} \\ 0 & 0 & \boxed{-\frac{18}{7}} \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{43}(\frac{18}{7})} \begin{pmatrix} 1 & -4 & 10 \\ 0 & 1 & -\frac{5}{7} \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{U}^*. \end{aligned}$$

Quindi  $\mathbf{A} = (\mathbf{P}^*)^T \mathbf{L}^* \mathbf{U}^*$  con

$$\mathbf{P}^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \neq \mathbf{P}, \quad \mathbf{U}^* = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 10 \\ 0 & 1 & -\frac{5}{7} \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \neq \mathbf{U}, \quad \mathbf{L}^* = \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 & 0 \\ \boxed{-2} & \boxed{-14} & 0 & 0 \\ \boxed{1} & \boxed{7} & \boxed{1} & 0 \\ \boxed{0} & \boxed{2} & \boxed{-\frac{18}{7}} & 1 \end{pmatrix} \neq \mathbf{L}.$$

Per trovare una decomposizione a rango pieno per  $\mathbf{A}$ , partiamo, ad esempio, dalla decomposizione  $\mathbf{A} = \mathbf{P}^T \mathbf{L} \mathbf{U}$  dove

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{L} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & -7 & -10 & 1 \end{pmatrix} \text{ e } \mathbf{U} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Calcoliamo  $\mathbf{P}^T \mathbf{L}$ :

$$\mathbf{P}^T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{P}^T \mathbf{L} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & -7 & -10 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -7 & -10 & 1 \end{pmatrix} =: \mathbf{B}$$

Allora  $\mathbf{A} = \mathbf{B} \mathbf{U}$  e si ottiene una decomposizione a rango pieno  $\mathbf{A} = \mathbf{B}_0 \mathbf{U}_0$  prendendo

$$\mathbf{U}_0 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ e } \mathbf{B}_0 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -7 & -10 \end{pmatrix}$$

ossia prendendo come  $\mathbf{U}_0$  la matrice che si ottiene da  $\mathbf{U}$  togliendo le ultime  $m-k$  righe, dove  $m=4$  = numero delle righe di  $\mathbf{U}$  e  $k=3$  = rango di  $\mathbf{U}$  (e quindi anche  $k$  = rango di  $\mathbf{A}$ ), e prendendo come  $\mathbf{B}_0$  la matrice che si ottiene da  $\mathbf{B}$  togliendo le ultime  $m-k$  colonne (ossia le colonne in posizioni corrispondenti alle ultime righe nulle tolte da  $\mathbf{U}$ ).

**ESERCIZIO TIPO 8**

- (1) Si provi che  $\mathcal{S}_1 = \left\{ \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}; \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}; \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}; \mathbf{v}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$  è un insieme di generatori di  $\mathbb{R}^3$ .
- (2) Si dica se  $\mathcal{S}_2 = \left\{ \mathbf{w}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \mathbf{w}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}; \mathbf{w}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \mathbf{w}_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$  è un insieme di generatori di  $\mathbb{R}^3$ .

(1) Per provare che  $\mathcal{S}_1$  è un insieme di generatori di  $\mathbb{R}^3$  occorre provare che per ogni  $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$  esistono  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 \in \mathbb{R}$  tali che

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \alpha_1 \mathbf{v}_1 + \alpha_2 \mathbf{v}_2 + \alpha_3 \mathbf{v}_3 + \alpha_4 \mathbf{v}_4 = \alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + \alpha_4 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 + 3\alpha_2 + \alpha_3 \\ 2\alpha_1 + 6\alpha_2 \\ 4\alpha_3 + \alpha_4 \end{pmatrix}$$

ossia che il sistema lineare

$$(*) \quad \begin{cases} \alpha_1 + 3\alpha_2 + \alpha_3 = a \\ 2\alpha_1 + 6\alpha_2 = b \\ 4\alpha_3 + \alpha_4 = c \end{cases}$$

nelle incognite  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$  ha soluzione **qualunque** siano  $a, b, c \in \mathbb{R}$ .

Facendo una eliminazione di Gauss sulla matrice aumentata del sistema si ottiene

$$\begin{aligned} & \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 1 & 0 & a \\ 2 & 6 & 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 4 & 1 & c \end{array} \right) \xrightarrow{E_{21}(-2)} \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 1 & 0 & a \\ 0 & 0 & -2 & 0 & b - 2a \\ 0 & 0 & 4 & 1 & c \end{array} \right) \rightarrow \\ & \xrightarrow{E_{32}(-4)E_2(-1/2)} \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 1 & 0 & a \\ 0 & 0 & 1 & 0 & (2a - b)/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & c - 4a + 2b \end{array} \right) = (\mathbf{U}_1 \mid \mathbf{d}_1). \end{aligned}$$

Poichè  $\mathbf{d}_1$  è libera qualunque siano  $a, b, c \in \mathbb{R}$ , allora  $(*)$  ha soluzione qualunque siano  $a, b, c \in \mathbb{R}$ , per cui  $\mathcal{S}$  è un insieme di generatori di  $\mathbb{R}^3$ .

(2) Per sapere se  $\mathcal{S}_2$  è o meno un insieme di generatori di  $\mathbb{R}^3$  dobbiamo verificare se per ogni  $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$  esistono o meno  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 \in \mathbb{R}$  tali che

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} &= \alpha_1 \mathbf{w}_1 + \alpha_2 \mathbf{w}_2 + \alpha_3 \mathbf{w}_3 + \alpha_4 \mathbf{w}_4 = \\ &= \alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_4 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3 + 2\alpha_4 \\ \alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_4 \\ \alpha_3 + \alpha_4 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

ossia se il sistema lineare

$$(*) \quad \begin{cases} \alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3 + 2\alpha_4 = a \\ \alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_4 = b \\ \alpha_3 + \alpha_4 = c \end{cases}$$

nelle incognite  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$  abbia o meno soluzione **per ogni**  $a, b, c \in \mathbb{R}$ .

Se (\*) avesse soluzione **per ogni**  $a, b, c \in \mathbb{R}$  allora  $\mathcal{S}_2$  sarebbe un insieme di generatori di  $\mathbb{R}^3$ , in caso contrario (ossia se esistono  $a, b, c \in \mathbb{R}$  per cui (\*) non ha soluzione) no.

Facendo una eliminazione di Gauss sulla matrice aumentata del sistema si ottiene

$$\begin{aligned} & \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 & a \\ 1 & 2 & 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 & 1 & c \end{array} \right) \xrightarrow{E_{21}(-1)} \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 & a \\ 0 & 0 & -1 & -1 & b-a \\ 0 & 0 & 1 & 1 & c \end{array} \right) \rightarrow \\ & \xrightarrow{E_{32}(-1)E_2(-1)} \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 & a \\ 0 & 0 & 1 & 1 & a-b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c+b-a \end{array} \right) = (\mathbf{U}_2 \mid \mathbf{d}_2). \end{aligned}$$

Poichè esistono  $a, b, c \in \mathbb{R}$  per cui  $\mathbf{d}_2$  è dominante (ad esempio si prendano  $a = b = 0$  e  $c = 1$ ), allora  $\mathcal{S}_2$  non è un insieme di generatori di  $\mathbb{R}^3$

(in altre parole: poichè esistono dei vettori di  $\mathbb{R}^3$  che **NON** si possono esprimere come combinazione lineare degli elementi di  $\mathcal{S}_2$ , ad esempio il vettore  $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ , allora  $\mathcal{S}_2$  **NON** è un insieme di generatori di  $\mathbb{R}^3$ ).

**ESERCIZIO TIPO 9**

Siano  $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ ,  $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ ,  $\mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

Si dica se  $\mathcal{S} = \{\mathbf{v}_1; \mathbf{v}_2; \mathbf{v}_3\} \subset \mathbb{C}^3$  è linearmente dipendente o linearmente indipendente.

Siano  $\alpha, \beta, \delta \in \mathbb{C}$  tali che

$$(*) \quad \mathbf{0} = \alpha\mathbf{v}_1 + \beta\mathbf{v}_2 + \delta\mathbf{v}_3 = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + \delta \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha + 2\beta + \delta \\ \beta + \delta \\ 3\alpha + 4\beta + \delta \end{pmatrix}.$$

Allora (\*) equivale a (1)  $\begin{cases} \alpha + 2\beta + \delta = 0 \\ \beta + \delta = 0 \\ 3\alpha + 4\beta + \delta = 0 \end{cases}$ .

(1) è un sistema lineare nelle incognite  $\alpha, \beta, \delta$ .

(1) ha sempre la soluzione nulla  $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  (ossia  $\alpha = \beta = \delta = 0$ ).

Se essa dovesse essere l'unica soluzione di (1) (quindi se (1) avesse un'unica soluzione) allora  $\mathcal{S}$  sarebbe L.I., altrimenti, se (1) ha anche una soluzione non nulla (quindi se (1) ha più di una soluzione) allora  $\mathcal{S}$  è L.D.

Vediamo allora quante soluzioni ha (1). Facendo una eliminazione di Gauss sulla sua matrice aumentata si ottiene

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{E_{31}(-3)} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{E_{32}(2)} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) = (\mathbf{U} \mid \mathbf{0})$$

L'ultima colonna di  $(\mathbf{U} \mid \mathbf{0})$ , ossia  $\mathbf{0}$ , è libera, per cui (1) ha, come avevamo già osservato, soluzioni.

Poichè non tutte le colonne di  $\mathbf{U}$  sono dominanti, il sistema (1) non ha un'unica soluzione, quindi  $\mathcal{S}$  è L.D.

Volendo risolvere (1), si ha che (1) è equivalente ad (1')  $\begin{cases} \alpha + 2\beta + \delta = 0 \\ \beta + \delta = 0 \end{cases}$

Scegliendo come parametro la variabile corrispondente alla colonna libera di  $\mathbf{U}$  (la 3<sup>a</sup>), con la sostituzione all'indietro si ottiene  $\begin{cases} \delta = k \\ \beta = -\delta = -k \\ \alpha = -2\beta - \delta = -2(-k) - k = k \end{cases}$

Il sistema (1') ha  $\infty^1$  soluzioni: tutti gli elementi dell'insieme  $\left\{ \begin{pmatrix} k \\ -k \\ k \end{pmatrix} \mid k \in \mathbb{C} \right\}$ .

Prendendo ad esempio  $k = 1$  si ottiene  $\alpha = 1 = \delta$  e  $\beta = -1$ :

$$\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3 = \mathbf{0}$$

è una combinazione lineare nulla di  $\{\mathbf{v}_1; \mathbf{v}_2; \mathbf{v}_3\}$  con coefficienti non tutti nulli.

**ESERCIZIO TIPO 10**

Sia  $W$  l'insieme delle matrici  $2 \times 2$  reali triangolari superiori. L'insieme

$$\mathcal{S} = \left\{ \mathbf{C}_1 = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}; \mathbf{C}_2 = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \mathbf{C}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \mathbf{C}_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \mathbf{C}_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \mathbf{C}_6 = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} \right\}$$

è un insieme di generatori di  $W$ . Si trovi una base di  $W$  contenuta in  $\mathcal{S}$ .

“Restringiamo” un insieme di generatori di  $W$ .

1<sup>o</sup> **passaggio.** Esistono in  $\mathcal{S}$  vettori che siano combinazioni lineari degli altri vettori di  $\mathcal{S}$  ?

$\mathbf{C}_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  è senz'altro combinazione degli altri:

$$\mathbf{C}_4 = \mathbf{O} = 0\mathbf{C}_1 + 0\mathbf{C}_2 + 0\mathbf{C}_3 + 0\mathbf{C}_5 + 0\mathbf{C}_6,$$

per cui togliamo subito  $\mathbf{C}_4$  (**togliamo** comunque subito **tutti gli eventuali vettori di  $\mathcal{S}$  che siano nulli**), **e poniamo**

$$\mathcal{S}_1 = \left\{ \mathbf{C}_1 = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}; \mathbf{C}_2 = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \mathbf{C}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \mathbf{C}_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \mathbf{C}_6 = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} \right\}.$$

2<sup>o</sup> **passaggio.**  $\mathcal{S}_1$  è ancora un insieme di generatori di  $W$ . Esistono in  $\mathcal{S}_1$  vettori che siano combinazioni lineari degli altri vettori di  $\mathcal{S}_1$  ? Poichè

$$\mathbf{C}_1 = -\frac{1}{2}\mathbf{C}_6 = 0\mathbf{C}_2 + 0\mathbf{C}_3 + 0\mathbf{C}_5 - \frac{1}{2}\mathbf{C}_6$$

ma anche

$$\mathbf{C}_6 = -2\mathbf{C}_1 = -2\mathbf{C}_1 + 0\mathbf{C}_2 + 0\mathbf{C}_3 + 0\mathbf{C}_5$$

possiamo togliere da  $\mathcal{S}_1$  il vettore  $\mathbf{C}_1$ , oppure possiamo togliere da  $\mathcal{S}_1$  il vettore  $\mathbf{C}_6$ , ottenendo ancora un insieme di generatori di  $W$ . Dunque, **guardiamo se tra i vettori di  $\mathcal{S}_1$  ci siano coppie di vettori di cui l'uno è multiplo dell'altro, e per ciascuna di queste eventuali coppie togliamo uno dei due vettori.** In questo caso abbiamo individuato la coppia  $\mathbf{C}_1, \mathbf{C}_6$  e scegliamo di togliere  $\mathbf{C}_1$ .

**Poniamo**

$$\mathcal{S}_2 = \left\{ \mathbf{C}_2 = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \mathbf{C}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \mathbf{C}_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \mathbf{C}_6 = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} \right\}.$$

3<sup>o</sup> **passaggio.**  $\mathcal{S}_2$  è ancora un insieme di generatori di  $W$ . Esistono in  $\mathcal{S}_2$  vettori che siano combinazioni lineari degli altri vettori di  $\mathcal{S}_2$  ?

Sia  $\alpha_1\mathbf{C}_2 + \alpha_2\mathbf{C}_3 + \alpha_3\mathbf{C}_5 + \alpha_4\mathbf{C}_6 = \mathbf{O}$  una combinazione lineare nulla dei vettori di  $\mathcal{S}_2$ . Allora da

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \alpha_1 \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \alpha_4 \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + 2\alpha_4 & 3\alpha_1 + \alpha_2 - 4\alpha_4 \\ 0 & \alpha_3 - 4\alpha_4 \end{pmatrix}$$

si ottiene il sistema lineare, nelle incognite  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$

$$\begin{cases} 2\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + 2\alpha_4 = 0 \\ 3\alpha_1 + \alpha_2 - 4\alpha_4 = 0 \\ \alpha_3 - 4\alpha_4 = 0 \end{cases}$$

Facendo una E.G. sulla sua matrice aumentata si ha:

$$\left( \begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{E_{21}(-3)E_1(\frac{1}{2})} \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & -7 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{E_2(-2)} \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 14 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & 0 \end{array} \right),$$

per cui il sistema è equivalente al sistema

$$(*) \quad \begin{cases} \alpha_1 + \frac{1}{2}\alpha_2 + \frac{1}{2}\alpha_3 + \alpha_4 = 0 \\ \alpha_2 + 3\alpha_3 + 14\alpha_4 = 0 \\ \alpha_3 - 4\alpha_4 = 0 \end{cases}$$

il cui insieme delle soluzioni è

$$\left\{ \left( \begin{array}{c} 10h \\ -26h \\ 4h \\ h \end{array} \right) \mid h \in \mathbb{R} \right\}$$

Prendendo una sua soluzione non nulla, ad esempio  $\begin{pmatrix} 10 \\ -26 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$  (si ponga  $h = 1$ ), si ottiene

$$10\mathbf{C}_2 - 26\mathbf{C}_3 + 4\mathbf{C}_5 + \mathbf{C}_6 = \mathbf{O},$$

per cui  $\mathbf{C}_2, \mathbf{C}_3, \mathbf{C}_5$  e  $\mathbf{C}_6$  sono combinazioni lineari degli altri elementi di  $\mathcal{S}_2$  e ciascuno di loro può essere scelto come elemento da eliminare da  $\mathcal{S}_2$ .

Scegliamo di togliere da  $\mathcal{S}_2$  la matrice  $\mathbf{C}_2$  (combinazione lineare degli altri elementi di  $\mathcal{S}_2$ ) e poniamo

$$\mathcal{S}_3 = \left\{ \mathbf{C}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \mathbf{C}_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \mathbf{C}_6 = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} \right\}$$

**4<sup>o</sup> passaggio.**  $\mathcal{S}_3$  è ancora un insieme di generatori di  $W$ . Esistono in  $\mathcal{S}_3$  vettori che siano combinazioni lineari degli altri vettori di  $\mathcal{S}_3$  ?

Sia  $\alpha_1\mathbf{C}_3 + \alpha_2\mathbf{C}_5 + \alpha_3\mathbf{C}_6 = \mathbf{O}$  una combinazione lineare nulla dei vettori di  $\mathcal{S}_3$ . Allora da

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \alpha_1 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3 & \alpha_1 - 4\alpha_3 \\ 0 & \alpha_2 - 4\alpha_3 \end{pmatrix}$$

si ottiene il sistema lineare, nelle incognite  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3 = 0 \\ \alpha_1 - 4\alpha_3 = 0 \\ \alpha_2 - 4\alpha_3 = 0 \end{cases}$$

Facendo una E.G. sulla sua matrice aumentata si ottiene:

$$\begin{aligned} & \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{E_{21}(-1)} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -6 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{E_{32}(-1)E_2(-1)} \\ \rightarrow & \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & -10 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{E_3(-\frac{1}{10})} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right) \end{aligned}$$

L'unica soluzione del sistema è quella nulla, per cui  $\mathcal{S}_3$  è linearmente indipendente, ed è una base di  $W$  contenuta in  $\mathcal{S}$ .

**ESERCIZIO TIPO 11**

Si trovi una base dello spazio nullo  $N(\mathbf{A})$  della matrice  $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ .

Poichè  $N(\mathbf{A}) = N(\mathbf{U})$  per ogni forma ridotta di Gauss  $\mathbf{U}$  di  $\mathbf{A}$ , troviamo una base dello spazio nullo di una forma ridotta di Gauss per  $\mathbf{A}$ .

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{21}(-2)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{U}$$

$\mathbf{U}$  è una forma ridotta di Gauss per  $\mathbf{A}$ . Per il teorema “nullità + rango” si ha

$$\dim N(\mathbf{U}) = (\text{numero delle colonne di } \mathbf{U} - \text{rk}(\mathbf{U})) = 4 - 2 = 2.$$

Poichè

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in N(\mathbf{U}) \iff \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

scegliendo come parametri le variabili corrispondenti alle colonne libere di  $\mathbf{U}$  (la 2<sup>a</sup> e la 4<sup>a</sup>) con la sostituzione all'indietro si ottiene

$$\begin{cases} x_2 = & h \\ x_4 = & k \\ x_3 = & -x_4 = -k \\ x_1 = & -2x_2 - x_3 = -2h - (-k) = -2h + k \end{cases}$$

Quindi

$$N(\mathbf{A}) = N(\mathbf{U}) = \left\{ \begin{pmatrix} -2h + k \\ h \\ -k \\ k \end{pmatrix} \mid h, k \in \mathbb{C} \right\}$$

e chiamando  $\mathbf{v}_1$  l'elemento di  $N(\mathbf{A})$  che si ottiene ponendo  $h = 1$  e  $k = 0$  e  $\mathbf{v}_2$  l'elemento di  $N(\mathbf{A})$  che si ottiene ponendo  $h = 0$  e  $k = 1$ , si ha che una base di  $N(\mathbf{A})$  è

$$\left\{ \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

**ESERCIZIO TIPO 12**

Sia  $\mathbf{A}_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & i & 0 \\ 1 & \alpha + 2i & 0 \\ 2 & 2i & \alpha^2 + 1 \end{pmatrix}$ , dove  $\alpha \in \mathbb{C}$ .

Per ogni  $\alpha \in \mathbb{C}$  si dica qual è  $rk(\mathbf{A}_\alpha)$  e si trovino una base  $\mathcal{B}_\alpha$  di  $C(\mathbf{A}_\alpha)$  ed una base  $\mathcal{D}_\alpha$  di  $R(\mathbf{A}_\alpha)$ .

$$\mathbf{A}_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & i & 0 \\ 1 & \alpha + 2i & 0 \\ 2 & 2i & \alpha^2 + 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{31}(-2)E_{21}(-1)} \begin{pmatrix} 1 & i & 0 \\ 0 & \alpha + i & 0 \\ 0 & 0 & \alpha^2 + 1 \end{pmatrix} = \mathbf{B}_\alpha$$

**1°CASO**  $\alpha \neq -i$   $\mathbf{B}_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & i & 0 \\ 0 & \alpha + i & 0 \\ 0 & 0 & \alpha^2 + 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_2(\frac{1}{\alpha+i})} \begin{pmatrix} 1 & i & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha^2 + 1 \end{pmatrix} = \mathbf{C}_\alpha$

**1°Sottocaso**  $\alpha \neq -i, i$ :  $\mathbf{C}_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & i & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha^2 + 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_3(\frac{1}{\alpha^2+1})} \begin{pmatrix} 1 & i & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{U}_\alpha$

$$rk(\mathbf{A}_\alpha) = 3, \quad \mathcal{D}_\alpha = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, \quad \mathcal{B}_\alpha = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} i \\ \alpha + 2i \\ 2i \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \alpha^2 + 1 \end{pmatrix} \right\}$$

**2°Sottocaso**  $\alpha = i$ :  $\mathbf{C}_i = \begin{pmatrix} 1 & i & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{U}_i$

$$rk(\mathbf{A}_i) = 2, \quad \mathcal{D}_i = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}, \quad \mathcal{B}_i = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} i \\ 3i \\ 2i \end{pmatrix} \right\}$$

**2°CASO**  $\alpha = -i$ :  $\mathbf{B}_{-i} = \begin{pmatrix} 1 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{U}_{-i}, rk(\mathbf{A}_{-i}) = 1, \mathcal{D}_{-i} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ 0 \end{pmatrix} \right\}, \mathcal{B}_{-i} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$

**ESERCIZIO TIPO 13** Si consideri l'applicazione lineare  $f: \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^3$  definita da

$$f\left(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 4a + b \\ 3a \\ a - 2b \end{pmatrix}.$$

Si determini la matrice  $\mathbf{A}$  associata ad  $f$  rispetto alle basi ordinate

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix} \right\} \quad \text{e} \quad \mathcal{D} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

su dominio e codominio rispettivamente.

La matrice che cerchiamo è  $\mathbf{A} = \left( C_{\mathcal{D}}(f\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}\right)) \quad C_{\mathcal{D}}(f\left(\begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}\right)) \right)$ . Poichè

$$f\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 14 \\ 6 \\ -10 \end{pmatrix}, \quad f\left(\begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 10 \end{pmatrix},$$

$\begin{matrix} \uparrow & & \uparrow \\ \boxed{a=2, b=6} & & \boxed{a=2, b=-4} \end{matrix}$

allora  $\mathbf{A} = \left( C_{\mathcal{D}}\left(\begin{pmatrix} 14 \\ 6 \\ -10 \end{pmatrix}\right) \quad C_{\mathcal{D}}\left(\begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 10 \end{pmatrix}\right) \right)$ . Piuttosto che calcolare separatamente  $C_{\mathcal{D}}\left(\begin{pmatrix} 8 \\ 3 \\ -13 \end{pmatrix}\right)$  e  $C_{\mathcal{D}}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix}\right)$ , e calcoliamo  $C_{\mathcal{D}}\left(\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}\right)$  per un generico vettore  $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ , e specializziamo la formula ottenuta ai due diversi vettori  $\begin{pmatrix} 14 \\ 6 \\ -10 \end{pmatrix}$  e  $\begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 10 \end{pmatrix}$ . Poichè

$$C_{\mathcal{D}}\left(\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \delta \end{pmatrix} \quad | \quad \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \delta \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha + \delta \\ 3\beta \\ \alpha - \delta \end{pmatrix}$$

allora

$$\begin{cases} \alpha + \delta = a \\ 3\beta = b \\ \alpha - \delta = c \end{cases} \implies \begin{cases} \alpha = (a+c)/2 \\ \beta = b/3 \\ \delta = (a-c)/2 \end{cases} \implies C_{\mathcal{D}}\left(\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} (a+c)/2 \\ b/3 \\ (a-c)/2 \end{pmatrix}.$$

Ponendo  $a = 14$ ,  $b = 6$  e  $c = -10$  otteniamo  $C_{\mathcal{D}}\left(\begin{pmatrix} 14 \\ 6 \\ -10 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 12 \end{pmatrix}$ ; ponendo  $a = 4$ ,  $b = 6$  e  $c = 10$

otteniamo  $C_{\mathcal{D}}\left(\begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 10 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ . Quindi

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 2 & 2 \\ 12 & -3 \end{pmatrix}.$$

**ESERCIZIO TIPO 14**

Si calcoli la matrice di passaggio  $M_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{B}'}$  da  $\mathcal{B}'$  a  $\mathcal{B}$ , dove  $\mathcal{B}$  e  $\mathcal{B}'$  sono le seguenti basi ordinate di  $\mathbb{R}^3$ :

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}, \quad \mathcal{B}' = \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

La matrice di passaggio  $M_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{B}'}$  da  $\mathcal{B}'$  a  $\mathcal{B}$  è

$$M_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{B}'} = \left( C_{\mathcal{B}} \left( \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \quad C_{\mathcal{B}} \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \quad C_{\mathcal{B}} \left( \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \right).$$

Nell'ESERCIZIO TIPO 13 abbiamo calcolato

$$C_{\mathcal{B}} \left( \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} (a+c)/2 \\ b/3 \\ (a-c)/2 \end{pmatrix}.$$

Specializzando la formula ottenuta ai tre diversi vettori  $\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ,  $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ ,  $\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  otteniamo

$$C_{\mathcal{B}} \left( \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad C_{\mathcal{B}} \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad C_{\mathcal{B}} \left( \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Dunque

$$M_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

**ESERCIZIO TIPO 15**

Sia  $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 2 & 2 \\ 12 & -3 \end{pmatrix}$  la matrice associata ad un'applicazione lineare

$f : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^3$  rispetto alle basi ordinate

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix} \right\} \quad \text{e} \quad \mathcal{D} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

su dominio e codominio rispettivamente. Si determini la matrice  $\mathbf{A}'$  associata ad  $f$  rispetto alle basi ordinate

$$\mathcal{B}' = \left\{ \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix} \right\} \quad \text{e} \quad \mathcal{D}' = \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

su dominio e codominio rispettivamente.

La matrice che cerchiamo è

$$\mathbf{A}' = \mathbf{M}_{\mathcal{D}' \leftarrow \mathcal{D}'}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{M}_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{B}'}$$

dove  $\mathbf{M}_{\mathcal{D}' \leftarrow \mathcal{D}'}$  è la matrice di passaggio da  $\mathcal{D}'$  a  $\mathcal{D}$ , e  $\mathbf{M}_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{B}'}$  è la matrice di passaggio da  $\mathcal{B}'$  a  $\mathcal{B}$ .

Nell'ESERCIZIO TIPO 14 abbiamo calcolato  $\mathbf{M}_{\mathcal{D}' \leftarrow \mathcal{D}'} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ . Calcoliamo la sua inversa:

$$\begin{aligned} (\mathbf{M}_{\mathcal{D}' \leftarrow \mathcal{D}'} \mid \mathbf{I}_3) &= \left( \begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{E_{13}} \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \\ &\xrightarrow{E_{31}(-2)} \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & -2 \end{array} \right) \xrightarrow{E_{32}(-1)} \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & -2 \end{array} \right) \xrightarrow{E_3(-1)} \\ &\rightarrow \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 2 \end{array} \right) \xrightarrow{E_{13}(-2)} \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 2 \end{array} \right) = (\mathbf{I}_3 \mid \mathbf{M}_{\mathcal{D}' \leftarrow \mathcal{D}'}^{-1}). \end{aligned}$$

$$\mathbf{M}_{\mathcal{D}' \leftarrow \mathcal{D}'}^{-1} = \mathbf{M}_{\mathcal{D}' \leftarrow \mathcal{D}'}^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Calcoliamo

$$\mathbf{M}_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{B}'} = \left( C_{\mathcal{B}} \left( \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \end{pmatrix} \right) \quad C_{\mathcal{B}} \left( \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix} \right) \right).$$

Calcoliamo  $C_{\mathcal{B}} \left( \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \right)$  per un generico vettore  $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2$ , e specializziamo la formula ottenuta ai due diversi vettori  $\begin{pmatrix} 6 \\ 8 \end{pmatrix}$  e  $\begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}$ . Poichè

$$C_{\mathcal{B}} \left( \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \quad \mid \quad \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\alpha + 2\beta \\ 6\alpha - 4\beta \end{pmatrix}$$

risolvendo il sistema lineare  $\begin{cases} 2\alpha + 2\beta = a \\ 6\alpha - 4\beta = b \end{cases}$  (nelle incognite  $\alpha$  e  $\beta$ ) si ottiene

$$C_{\mathcal{B}}\left(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \frac{2a+b}{10} \\ \frac{3a-b}{10} \end{pmatrix}.$$

Ponendo  $a = 6$  e  $b = 8$  otteniamo  $C_{\mathcal{B}}\left(\begin{pmatrix} 6 \\ 8 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ ; ponendo  $a = 2$  e  $b = -4$  otteniamo  $C_{\mathcal{B}}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

Quindi

$$\mathbf{M}_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{B}'} = \left( C_{\mathcal{B}}\left(\begin{pmatrix} 6 \\ 8 \end{pmatrix}\right) \quad C_{\mathcal{B}}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}\right) \right) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dunque

$$\begin{aligned} \mathbf{A}' &= \mathbf{M}_{\mathcal{D}' \leftarrow \mathcal{D}}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{M}_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 2 & 2 \\ 12 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} -36 & 19 \\ 2 & 2 \\ 24 & -11 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -53 & 19 \\ 6 & 2 \\ 37 & -11 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

**ESERCIZIO TIPO 16**

Si verifichi che  $\phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$  definita da  $\phi\left(\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix}\right) = |a_0 + a_1| + |a_0 - a_1|$  è una norma.

$$\boxed{1} \quad \phi(\mathbf{0}) = \phi\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = |0 + 0| + |0 - 0| = 0.$$

Sia  $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix}$ . Poichè  $\phi(\mathbf{v}) \geq 0$ , per provare che

$$\mathbf{v} \neq \mathbf{0} \quad \implies \quad \phi(\mathbf{v}) > 0$$

basta provare che

$$\mathbf{v} \neq \mathbf{0} \quad \implies \quad \phi(\mathbf{v}) \neq 0,$$

ossia basta provare che

$$\phi(\mathbf{v}) = 0 \quad \implies \quad \mathbf{v} = \mathbf{0}.$$

Ora:

$$\left. \begin{matrix} \phi(\mathbf{v}) = 0 \\ \mathbf{v} = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} \end{matrix} \right\} \implies \left\{ \begin{matrix} |a_0 + a_1| = 0 \\ |a_0 - a_1| = 0 \end{matrix} \right. \implies \left\{ \begin{matrix} a_0 + a_1 = 0 \\ a_0 - a_1 = 0 \end{matrix} \right. \implies a_0 = a_1 = 0 \implies \mathbf{v} = \mathbf{0}.$$

$\boxed{2}$

$$\begin{aligned} \phi(\alpha\mathbf{v}) &= \phi\left(\alpha \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix}\right) = \phi\left(\begin{pmatrix} \alpha a_0 \\ \alpha a_1 \end{pmatrix}\right) = |\alpha a_0 + \alpha a_1| + |\alpha a_0 - \alpha a_1| = \\ &= |\alpha||a_0 + a_1| + |\alpha||a_0 - a_1| = |\alpha|(|a_0 + a_1| + |a_0 - a_1|) = |\alpha|\phi(\mathbf{v}). \end{aligned}$$

$\boxed{3}$

Siano  $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix}$  e  $\mathbf{w} = \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \end{pmatrix}$ .

$$\begin{aligned} \phi(\mathbf{v} + \mathbf{w}) &= \phi\left(\begin{pmatrix} a_0 + b_0 \\ a_1 + b_1 \end{pmatrix}\right) = |(a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)| + |(a_0 + b_0) - (a_1 + b_1)| = \\ &= |(a_0 + a_1) + (b_0 + b_1)| + |(a_0 - a_1) + (b_0 - b_1)| \leq \\ &\leq |a_0 + a_1| + |b_0 + b_1| + |a_0 - a_1| + |b_0 - b_1| = \phi(\mathbf{v}) + \phi(\mathbf{w}). \end{aligned}$$

**ESERCIZIO TIPO 17**

Si verifichi che  $(\cdot|\cdot) : \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}$  definita da

$$\left( \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \right) = \bar{x}_1 y_1 + 2\bar{x}_2 y_2$$

è un prodotto interno.

1 Siano  $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2$ .

$$\begin{aligned} \overline{(\mathbf{y}|\mathbf{x})} &\stackrel{?}{=} (\mathbf{x}|\mathbf{y}) \\ \overline{(\mathbf{y}|\mathbf{x})} &= \overline{\bar{y}_1 x_1 + 2\bar{y}_2 x_2} = y_1 \bar{x}_1 + 2y_2 \bar{x}_2 = (\mathbf{x}|\mathbf{y}). \end{aligned}$$

2 Siano  $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, \mathbf{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2$  e  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ .

$$(\mathbf{x}|\alpha\mathbf{y} + \beta\mathbf{w}) \stackrel{?}{=} \alpha(\mathbf{x}|\mathbf{y}) + \beta(\mathbf{x}|\mathbf{w})$$

$$\begin{aligned} (\mathbf{x}|\alpha\mathbf{y} + \beta\mathbf{w}) &= \bar{x}_1(\alpha y_1 + \beta w_1) + 2\bar{x}_2(\alpha y_2 + \beta w_2) = \alpha\bar{x}_1 y_1 + \beta\bar{x}_1 w_1 + 2\alpha\bar{x}_2 y_2 + 2\beta\bar{x}_2 w_2 = \\ &= \alpha(\bar{x}_1 y_1 + 2\bar{x}_2 y_2) + \beta(\bar{x}_1 w_1 + 2\bar{x}_2 w_2) = \alpha(\mathbf{x}|\mathbf{y}) + \beta(\mathbf{x}|\mathbf{w}). \end{aligned}$$

3

- $(\mathbf{0}|\mathbf{0}) \stackrel{?}{=} 0$
- $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \neq \mathbf{0} \stackrel{?}{\implies} (\mathbf{x}|\mathbf{x}) \in \mathbb{R}_{>0}$

- $(\mathbf{0}|\mathbf{0}) = 0 + 2 \times 0 = 0$
- $(\mathbf{x}|\mathbf{x}) = \bar{x}_1 x_1 + 2\bar{x}_2 x_2 = |x_1|^2 + 2|x_2|^2$

Essendo  $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ , si ha che  $x_1 \neq 0$  oppure  $x_2 \neq 0$ , per cui  $|x_1|^2 \in \mathbb{R}_{>0}$  oppure  $|x_2|^2 \in \mathbb{R}_{>0}$ .

Quindi  $|x_1|^2 + 2|x_2|^2 \in \mathbb{R}_{>0}$ .

**ESERCIZIO TIPO 18**

Si trovi una base ortonormale del sottospazio di  $\mathbb{C}^4$

$$V = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ i \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ i \end{pmatrix} \right\rangle.$$

**1<sup>o</sup>MODO**

**1** Troviamo una base  $\mathcal{B}_1$  di  $V$ .

Poniamo

$$\mathbf{w}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ i \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{w}_2 = \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{w}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{w}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ i \end{pmatrix}$$

e costruiamo la matrice  $\mathbf{A} = (\mathbf{w}_1 \ \mathbf{w}_2 \ \mathbf{w}_3 \ \mathbf{w}_4)$ , ossia una matrice tale che  $C(\mathbf{A}) = V$ .

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \begin{pmatrix} 1 & i & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ i & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & i \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{31}(-i)} \begin{pmatrix} 1 & i & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & i \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{42}(1)E_{32}(-1)} \begin{pmatrix} 1 & i & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \end{pmatrix} \rightarrow \\ &\xrightarrow{E_{34}} \begin{pmatrix} 1 & i & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_3(-i)} \begin{pmatrix} 1 & i & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{U} \end{aligned}$$

Dunque  $\mathcal{B}_1 = \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_4\}$  è una base di  $C(\mathbf{A}) = V$ .

**2** Troviamo una base ortogonale  $\mathcal{B}_2$  di  $V$ : poniamo  $\mathbf{v}_1 = \mathbf{w}_1, \mathbf{v}_2 = \mathbf{w}_2$  e  $\mathbf{v}_3 = \mathbf{w}_4$ , e applichiamo l'algoritmo di Gram-Schmidt a  $\{\mathbf{v}_1; \mathbf{v}_2; \mathbf{v}_3\}$ .

$$\mathbf{u}_1 = \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ i \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{u}_2 = \mathbf{v}_2 - \alpha_{12}\mathbf{u}_1,$$

$$\mathbf{u}_1 \neq \mathbf{0} \implies \alpha_{12} = \frac{(\mathbf{u}_1|\mathbf{v}_2)}{(\mathbf{u}_1|\mathbf{u}_1)}$$

$$(\mathbf{u}_1|\mathbf{v}_2) = \mathbf{u}_1^H \mathbf{v}_2 = (1 \ 0 \ -i \ 0) \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = i$$

$$(\mathbf{u}_1|\mathbf{u}_1) = \mathbf{u}_1^H \mathbf{u}_1 = (1 \ 0 \ -i \ 0) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ i \\ 0 \end{pmatrix} = 2$$

$$\implies \alpha_{12} = i/2$$

$$\mathbf{u}_2 = \mathbf{v}_2 - \alpha_{12}\mathbf{u}_1 =$$

$$= \mathbf{v}_2 - \frac{i}{2}\mathbf{u}_1 =$$

$$= \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} - \frac{i}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ i \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{i}{2} \\ 1 \\ \frac{1}{2} \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{u}_3 = \mathbf{v}_3 - \alpha_{13}\mathbf{u}_1 - \alpha_{23}\mathbf{u}_2,$$

$$\mathbf{u}_1 \neq \mathbf{0} \implies \alpha_{13} = \frac{(\mathbf{u}_1|\mathbf{v}_3)}{(\mathbf{u}_1|\mathbf{u}_1)}$$

$$(\mathbf{u}_1|\mathbf{v}_3) = \mathbf{u}_1^H \mathbf{v}_3 = (1 \ 0 \ -i \ 0) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ i \end{pmatrix} = 0$$

$$\implies \alpha_{13} = 0$$

$$\mathbf{u}_2 \neq \mathbf{0} \implies \alpha_{23} = \frac{(\mathbf{u}_2|\mathbf{v}_3)}{(\mathbf{u}_2|\mathbf{u}_2)}$$

$$(\mathbf{u}_2|\mathbf{v}_3) = \mathbf{u}_2^H \mathbf{v}_3 = \left(-\frac{i}{2} \ 1 \ \frac{1}{2} \ -1\right) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ i \end{pmatrix} = -i$$

$$(\mathbf{u}_2|\mathbf{u}_2) = \mathbf{u}_2^H \mathbf{u}_2 = \left(-\frac{i}{2} \ 1 \ \frac{1}{2} \ -1\right) \begin{pmatrix} \frac{i}{2} \\ 1 \\ \frac{1}{2} \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{5}{2}$$

$$\implies \alpha_{23} = -\frac{2}{5}i$$

$$\begin{aligned}\mathbf{u}_3 &= \mathbf{v}_3 - \alpha_{13}\mathbf{u}_1 - \alpha_{23}\mathbf{u}_2 = \\ &= \mathbf{v}_3 + \frac{2i}{5}\mathbf{u}_2 = \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ i \end{pmatrix} + \frac{2i}{5} \begin{pmatrix} \frac{i}{2} \\ 1 \\ \frac{1}{2} \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -1 \\ 2i \\ i \\ 3i \end{pmatrix}\end{aligned}$$

$\mathcal{B}_2 = \{\mathbf{u}_1; \mathbf{u}_2; \mathbf{u}_3\}$ , dove

$$\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ i \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}_2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} i \\ 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}_3 = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -1 \\ 2i \\ i \\ 3i \end{pmatrix},$$

è una base ortogonale di  $V$ .

**[3]** Troviamo una base ortonormale  $\mathcal{B}$  di  $V$ , normalizzando gli elementi di  $\mathcal{B}_2$ .

$$\begin{aligned}\|\mathbf{u}_1\|_2 &= \sqrt{(\mathbf{u}_1|\mathbf{u}_1)} = \sqrt{2} \\ \|\mathbf{u}_2\|_2 &= \sqrt{(\mathbf{u}_2|\mathbf{u}_2)} = \sqrt{5/2} \\ \|\mathbf{u}_3\|_2 &= \sqrt{(\mathbf{u}_3|\mathbf{u}_3)} = \sqrt{\mathbf{u}_3^H \mathbf{u}_3} = \sqrt{\frac{1}{5} \begin{pmatrix} -1 & -2i & -i & -3i \end{pmatrix} \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -1 \\ 2i \\ i \\ 3i \end{pmatrix}} = \frac{\sqrt{15}}{5}\end{aligned}$$

$\mathcal{B} = \left\{ \frac{\mathbf{u}_1}{\|\mathbf{u}_1\|_2}; \frac{\mathbf{u}_2}{\|\mathbf{u}_2\|_2}; \frac{\mathbf{u}_3}{\|\mathbf{u}_3\|_2} \right\}$ , dove

$$\frac{\mathbf{u}_1}{\|\mathbf{u}_1\|_2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ i \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \frac{\mathbf{u}_2}{\|\mathbf{u}_2\|_2} = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} i \\ 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \frac{\mathbf{u}_3}{\|\mathbf{u}_3\|_2} = \frac{1}{\sqrt{15}} \begin{pmatrix} -1 \\ 2i \\ i \\ 3i \end{pmatrix},$$

è una base ortonormale di  $V$ .

**2<sup>0</sup>MODO**

**[1]** Costruiamo dapprima **un insieme di generatori ortogonale di  $V$** : poniamo

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ i \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ i \end{pmatrix}$$

e applichiamo l'algoritmo di Gram-Schmidt a  $\{\mathbf{v}_1; \mathbf{v}_2; \mathbf{v}_3; \mathbf{v}_4\}$ . Otterremo 4 vettori,  $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4$ , e l'insieme  $\{\mathbf{u}_1; \mathbf{u}_2; \mathbf{u}_3; \mathbf{u}_4\}$  sarà un insieme di generatori ortogonale di  $V$ .

Per sapere se alcuni degli  $\mathbf{u}_i$  saranno nulli, e in tal caso quali, troviamo innanzitutto una forma ridotta di Gauss  $U$  della matrice  $A$  che ha come colonne  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4$ : le eventuali colonne libere di  $U$  corrisponderanno

agli  $\mathbf{u}_i$  nulli.

$$\begin{aligned} \mathbf{A} = (\mathbf{v}_1 \quad \mathbf{v}_2 \quad \mathbf{v}_3 \quad \mathbf{v}_4) &= \begin{pmatrix} 1 & i & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ i & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & i \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{31}(-i)} \begin{pmatrix} 1 & i & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & i \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{42}(1)E_{32}(-1)} \\ &\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & i & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{34}} \begin{pmatrix} 1 & i & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_3(-i)} \begin{pmatrix} 1 & i & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{U} \end{aligned}$$

Poichè  $\mathbf{U}$  ha come unica colonna libera la 3<sup>a</sup>, allora applicando l'algoritmo di Gram-Schmidt a  $\{\mathbf{v}_1; \mathbf{v}_2; \mathbf{v}_3; \mathbf{v}_4\}$  otterremo  $\mathbf{u}_3 = \mathbf{0}$ .

$$\mathbf{u}_1 = \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ i \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{u}_2 = \mathbf{v}_2 - \alpha_{12}\mathbf{u}_1,$$

$$\mathbf{u}_1 \neq \mathbf{0} \implies \alpha_{12} = \frac{(\mathbf{u}_1|\mathbf{v}_2)}{(\mathbf{u}_1|\mathbf{u}_1)}$$

$$(\mathbf{u}_1|\mathbf{v}_2) = \mathbf{u}_1^H \mathbf{v}_2 = (1 \quad 0 \quad -i \quad 0) \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = i$$

$$(\mathbf{u}_1|\mathbf{u}_1) = \mathbf{u}_1^H \mathbf{u}_1 = (1 \quad 0 \quad -i \quad 0) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ i \\ 0 \end{pmatrix} = 2$$

$$\implies \alpha_{12} = i/2$$

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_2 &= \mathbf{v}_2 - \alpha_{12}\mathbf{u}_1 = \mathbf{v}_2 - \frac{i}{2}\mathbf{u}_1 = \\ &= \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} - \frac{i}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ i \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{i}{2} \\ 1 \\ \frac{1}{2} \\ -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\mathbf{u}_3 = \mathbf{v}_3 - \alpha_{13}\mathbf{u}_1 - \alpha_{23}\mathbf{u}_2,$$

$$\mathbf{u}_1 \neq \mathbf{0} \implies \alpha_{13} = \frac{(\mathbf{u}_1|\mathbf{v}_3)}{(\mathbf{u}_1|\mathbf{u}_1)}$$

$$(\mathbf{u}_1|\mathbf{v}_3) = \mathbf{u}_1^H \mathbf{v}_3 = (1 \ 0 \ -i \ 0) \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = i$$

$$(\mathbf{u}_1|\mathbf{u}_1) = 2$$

$$\implies \alpha_{13} = \frac{i}{2}$$

$$\mathbf{u}_2 \neq \mathbf{0} \implies \alpha_{23} = \frac{(\mathbf{u}_2|\mathbf{v}_3)}{(\mathbf{u}_2|\mathbf{u}_2)}$$

$$(\mathbf{u}_2|\mathbf{v}_3) = \mathbf{u}_2^H \mathbf{v}_3 = \left(-\frac{i}{2} \ 1 \ \frac{1}{2} \ -1\right) \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$= -1 - \frac{1}{2} - 1 = -\frac{5}{2}$$

$$(\mathbf{u}_2|\mathbf{u}_2) = \mathbf{u}_2^H \mathbf{u}_2 = \left(-\frac{i}{2} \ 1 \ \frac{1}{2} \ -1\right) \begin{pmatrix} \frac{i}{2} \\ 1 \\ \frac{1}{2} \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{5}{2}$$

$$\implies \alpha_{23} = -1$$

$$\mathbf{u}_3 = \mathbf{v}_3 - \alpha_{13}\mathbf{u}_1 - \alpha_{23}\mathbf{u}_2 =$$

$$= \mathbf{v}_3 - \frac{i}{2}\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{i}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ i \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{i}{2} \\ 1 \\ \frac{1}{2} \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{u}_4 = \mathbf{v}_4 - \alpha_{14}\mathbf{u}_1 - \alpha_{24}\mathbf{u}_2 - \alpha_{34}\mathbf{u}_3$$

$$\mathbf{u}_1 \neq \mathbf{0} \implies \alpha_{14} = \frac{(\mathbf{u}_1|\mathbf{v}_4)}{(\mathbf{u}_1|\mathbf{u}_1)}$$

$$(\mathbf{u}_1|\mathbf{v}_4) = \mathbf{u}_1^H \mathbf{v}_4 = (1 \ 0 \ -i \ 0) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ i \end{pmatrix} = 0$$

$$\implies \alpha_{14} = 0$$

$$\mathbf{u}_2 \neq \mathbf{0} \implies \alpha_{24} = \frac{(\mathbf{u}_2|\mathbf{v}_4)}{(\mathbf{u}_2|\mathbf{u}_2)}$$

$$\begin{aligned}
 (\mathbf{u}_2|\mathbf{v}_4) &= \mathbf{u}_2^H \mathbf{v}_4 = \begin{pmatrix} -\frac{i}{2} & 1 & \frac{1}{2} & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ i \end{pmatrix} = -i \\
 (\mathbf{u}_2|\mathbf{u}_2) &= \mathbf{u}_2^H \mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} -\frac{i}{2} & 1 & \frac{1}{2} & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{i}{2} \\ 1 \\ \frac{1}{2} \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{5}{2} \\
 \implies \alpha_{24} &= -\frac{2}{5}i \\
 \mathbf{u}_3 = \mathbf{0} &\implies \alpha_{34} = 0 \text{ per def.}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{u}_4 &= \mathbf{v}_4 - \alpha_{24} \mathbf{u}_2 = \\
 &= \mathbf{v}_4 + \frac{2i}{5} \mathbf{u}_2 = \\
 &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ i \end{pmatrix} + \frac{2i}{5} \begin{pmatrix} \frac{i}{2} \\ 1 \\ \frac{1}{2} \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -1 \\ 2i \\ i \\ 3i \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Dunque  $\left\{ \mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ i \\ 0 \end{pmatrix}; \mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} \frac{i}{2} \\ 1 \\ \frac{1}{2} \\ -1 \end{pmatrix}; \mathbf{u}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \mathbf{u}_4 = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -1 \\ 2i \\ i \\ 3i \end{pmatrix} \right\}$  è un insieme di generatori ortogonale di  $V$ .

**[2]** Costruiamo **una base ortogonale di  $V$**  togliendo dall'insieme di generatori ortogonale di  $V$  trovato al punto **[1]** gli eventuali  $\mathbf{u}_i$  nulli. In questo caso poniamo:

$$\mathbf{w}_1 = \mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ i \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{w}_2 = \mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} \frac{i}{2} \\ 1 \\ \frac{1}{2} \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{w}_3 = \mathbf{u}_4 = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -1 \\ 2i \\ i \\ 3i \end{pmatrix}.$$

L'insieme  $\left\{ \mathbf{w}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ i \\ 0 \end{pmatrix}; \mathbf{w}_2 = \begin{pmatrix} \frac{i}{2} \\ 1 \\ \frac{1}{2} \\ -1 \end{pmatrix}; \mathbf{w}_3 = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -1 \\ 2i \\ i \\ 3i \end{pmatrix} \right\}$  è una base ortogonale di  $V$ .

**[3]** Costruiamo **base ortonormale di  $V$**  normalizzando la base ortogonale trovata al punto **[2]**, ossia dividendo ciascun elemento della base ortogonale trovata in **[2]** per la propria norma euclidea.

Cominciamo con il calcolare la norma euclidea di  $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3$  :

$$\|\mathbf{w}_1\|_2 = \sqrt{(\mathbf{u}_1|\mathbf{u}_1)} = \sqrt{2}$$

$$\|\mathbf{w}_2\|_2 = \sqrt{(\mathbf{u}_2|\mathbf{u}_2)} = \sqrt{5/2}$$

$$\|\mathbf{w}_3\|_2 = \sqrt{(\mathbf{u}_4|\mathbf{u}_4)} = \sqrt{\mathbf{u}_4^H \mathbf{u}_4} = \sqrt{\frac{1}{5} \begin{pmatrix} -1 & -2i & -i & -3i \end{pmatrix} \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -1 \\ 2i \\ i \\ 3i \end{pmatrix}} = \frac{\sqrt{15}}{5}$$

Allora  $\mathcal{B} = \left\{ \frac{\mathbf{w}_1}{\|\mathbf{w}_1\|_2}; \frac{\mathbf{w}_2}{\|\mathbf{w}_2\|_2}; \frac{\mathbf{w}_3}{\|\mathbf{w}_3\|_2} \right\}$ , dove

$$\frac{\mathbf{w}_1}{\|\mathbf{w}_1\|_2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ i \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \frac{\mathbf{w}_2}{\|\mathbf{w}_2\|_2} = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} i \\ 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \frac{\mathbf{w}_3}{\|\mathbf{w}_3\|_2} = \frac{1}{\sqrt{15}} \begin{pmatrix} -1 \\ 2i \\ i \\ 3i \end{pmatrix},$$

è una base ortonormale di  $V$ .

**ESERCIZIO TIPO 19**

Si consideri il sottospazio  $W = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ i \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} -i \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle$  di  $\mathbb{C}^3$ .

(a) Si trovi il complemento ortogonale  $W^\perp$  di  $W$  in  $\mathbb{C}^3$ .

(b) Si calcoli la proiezione ortogonale  $P_W(\mathbf{v})$  del vettore  $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 5i \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$  su  $W$ .

Posto  $\mathbf{w}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ i \end{pmatrix}$ ,  $\mathbf{w}_2 = \begin{pmatrix} -i \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ,  $\mathbf{w}_3 = \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ , sia  $\mathbf{A} = (\mathbf{w}_1 \ \mathbf{w}_2 \ \mathbf{w}_3) = \begin{pmatrix} 1 & -i & i \\ 0 & 0 & 1 \\ i & 1 & -1 \end{pmatrix}$  una matrice tale che  $C(\mathbf{A}) = \langle \mathbf{w}_1; \mathbf{w}_2; \mathbf{w}_3 \rangle = W$ .

(a) Da  $W = C(\mathbf{A})$  segue  $W^\perp = C(\mathbf{A})^\perp = N(\mathbf{A}^H)$ . Facendo una EG su  $\mathbf{A}^H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -i \\ i & 0 & 1 \\ -i & 1 & -1 \end{pmatrix}$  si ottiene

$$\mathbf{A}^H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -i \\ i & 1 & 1 \\ -i & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{31}(i)E_{21}(-i)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{23}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -i \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{U}$$

Poichè

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in N(\mathbf{U}) \iff \begin{cases} x_1 - ix_3 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases} \quad \text{allora} \quad N(\mathbf{A}^H) = N(\mathbf{U}) = \left\{ \begin{pmatrix} ih \\ 0 \\ h \end{pmatrix} \mid h \in \mathbb{C} \right\}.$$

(b) Troviamo una base ortonormale di  $W$ . Facendo una EG su  $\mathbf{A}$  si ottiene:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -i & i \\ 0 & 0 & 1 \\ i & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{31}(-i)} \begin{pmatrix} 1 & -i & i \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Poichè le colonne dominanti di una forma ridotta di Gauss per  $\mathbf{A}$  sono la 1<sup>a</sup> e la 3<sup>a</sup>,  $\mathcal{B}_1 = \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_3\}$  è una base di  $C(\mathbf{A}) = W$ . Posto

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{w}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ i \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{v}_2 = \mathbf{w}_3 = \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

applichiamo l'algoritmo di GS a  $\{\mathbf{v}_1; \mathbf{v}_2\}$  per trovare una base ortogonale  $\{\mathbf{u}_1; \mathbf{u}_2\}$  di  $W$ .

$$\mathbf{u}_1 = \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ i \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{u}_2 = \mathbf{v}_2 - \alpha_{12}\mathbf{u}_1,$$

$$\mathbf{u}_1 \neq \mathbf{0} \implies \alpha_{12} = \frac{(\mathbf{u}_1|\mathbf{v}_2)}{(\mathbf{u}_1|\mathbf{u}_1)}$$

$$(\mathbf{u}_1|\mathbf{v}_2) = \mathbf{u}_1^H \mathbf{v}_2 = (1 \ 0 \ -i) \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 2i$$

$$(\mathbf{u}_1|\mathbf{u}_1) = \mathbf{u}_1^H \mathbf{u}_1 = (1 \ 0 \ -i) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ i \end{pmatrix} = 2$$

$$\implies \alpha_{12} = 2i/2 = i$$

$$\mathbf{u}_2 = \mathbf{v}_2 - \alpha_{12}\mathbf{u}_1 =$$

$$= \mathbf{v}_2 - i\mathbf{u}_1 =$$

$$= \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} - i \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Dunque  $\mathcal{B}_2 = \left\{ \mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ i \end{pmatrix}; \mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$  è una base ortogonale di  $W$ .

Troviamo una base ortonormale  $\mathcal{B}$  di  $W$ , normalizzando gli elementi di  $\mathcal{B}_2$ . Essendo

$$\|\mathbf{u}_1\|_2 = \sqrt{(\mathbf{u}_1|\mathbf{u}_1)} = \sqrt{2} \text{ e } \|\mathbf{u}_2\|_2 = \sqrt{(\mathbf{u}_2|\mathbf{u}_2)} = \sqrt{1} = 1,$$

$\mathcal{B} = \left\{ \mathbf{u}_1^* = \frac{\mathbf{u}_1}{\|\mathbf{u}_1\|_2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ i \end{pmatrix}; \mathbf{u}_2^* = \frac{\mathbf{u}_2}{\|\mathbf{u}_2\|_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$  è una base ortonormale di  $W$ .

La proiezione ortogonale  $P_W(\mathbf{v})$  di  $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 5i \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$  su  $W$  è

$$\begin{aligned} P_W(\mathbf{v}) &= (\mathbf{u}_1^*|\mathbf{v})\mathbf{u}_1^* + (\mathbf{u}_2^*|\mathbf{v})\mathbf{u}_2^* = \\ &= (\mathbf{u}_1^*)^H \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}_1^* + (\mathbf{u}_2^*)^H \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}_2^* = \\ &= \frac{1}{2} (1 \ 0 \ -i) \begin{pmatrix} 5i \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ i \end{pmatrix} + (0 \ 1 \ 0) \begin{pmatrix} 5i \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \\ &= \frac{1}{2} (5i - i) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ i \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \\ &= 2i \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ i \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2i \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

**ESERCIZIO TIPO 20**

Sia  $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -5 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 5 & -1 & -2 \end{pmatrix}$ .

- (a) Si trovi una decomposizione  $\mathbf{Q}_0\mathbf{R}_0$ -non-normalizzata per  $\mathbf{A}$ .
- (b) Si trovi una decomposizione  $\mathbf{QR}$ -normalizzata per  $\mathbf{A}$ .
- (c) Si calcoli la matrice di proiezione sullo spazio delle colonne  $C(\mathbf{A})$  di  $\mathbf{A}$ .

(a) I Poniamo

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_4 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

e applichiamo l'algoritmo di Gram-Schmidt a  $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4\}$ .

Otterremo 4 vettori,  $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4$ . Per sapere se alcuni degli  $\mathbf{u}_i$  saranno nulli, e in tal caso quali, troviamo innanzitutto una forma ridotta di Gauss  $\mathbf{U}$  di  $\mathbf{A}$ : le eventuali colonne libere di  $\mathbf{U}$  corrisponderanno agli  $\mathbf{u}_i$  nulli.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -5 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 5 & -1 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{31}(1)} \begin{pmatrix} 1 & -5 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{32}(-2)} \begin{pmatrix} 1 & -5 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{U}$$

Poichè  $\mathbf{U}$  ha come colonne libere la 2<sup>a</sup> e la 4<sup>a</sup>, applicando l'algoritmo di Gram-Schmidt a  $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4\}$  otterremo  $\mathbf{u}_2 = \mathbf{0} = \mathbf{u}_4$ .

$$\mathbf{u}_1 = \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{u}_2 = \mathbf{v}_2 - \alpha_{12}\mathbf{u}_1, \quad \mathbf{u}_1 \neq \mathbf{0} \implies \alpha_{12} = \frac{(\mathbf{u}_1|\mathbf{v}_2)}{(\mathbf{u}_1|\mathbf{u}_1)}$$

$$(\mathbf{u}_1|\mathbf{v}_2) = \mathbf{u}_1^H \mathbf{v}_2 = (1 \ 0 \ -1) \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} = -10$$

$$(\mathbf{u}_1|\mathbf{u}_1) = \mathbf{u}_1^H \mathbf{u}_1 = (1 \ 0 \ -1) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = 2$$

$$\implies \alpha_{12} = -10/2 = -5$$

$$\begin{aligned}\mathbf{u}_2 &= \mathbf{v}_2 - \alpha_{12}\mathbf{u}_1 = \mathbf{v}_2 + 5\mathbf{u}_1 = \\ &= \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} + 5 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \boxed{\mathbf{0} = \mathbf{u}_2}\end{aligned}$$

$$\mathbf{u}_3 = \mathbf{v}_3 - \alpha_{13}\mathbf{u}_1 - \alpha_{23}\mathbf{u}_2,$$

$$\mathbf{u}_1 \neq \mathbf{0} \implies \alpha_{13} = \frac{(\mathbf{u}_1|\mathbf{v}_3)}{(\mathbf{u}_1|\mathbf{u}_1)}$$

$$(\mathbf{u}_1|\mathbf{v}_3) = \mathbf{u}_1^H \mathbf{v}_3 = (1 \ 0 \ -1) \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 4$$

$$\implies \boxed{\alpha_{13} = 4/2 = 2}$$

$$\mathbf{u}_2 = \mathbf{0} \implies \boxed{\alpha_{23} = 0}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{u}_3 &= \mathbf{v}_3 - \alpha_{13}\mathbf{u}_1 - \alpha_{23}\mathbf{u}_2 = \\ &= \mathbf{v}_3 - 2\mathbf{u}_1 =\end{aligned}$$

$$= \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \mathbf{u}_3}$$

$$\mathbf{u}_4 = \mathbf{v}_4 - \alpha_{14}\mathbf{u}_1 - \alpha_{24}\mathbf{u}_2 - \alpha_{34}\mathbf{u}_3,$$

$$\mathbf{u}_1 \neq \mathbf{0} \implies \alpha_{14} = \frac{(\mathbf{u}_1|\mathbf{v}_4)}{(\mathbf{u}_1|\mathbf{u}_1)}$$

$$(\mathbf{u}_1|\mathbf{v}_4) = \mathbf{u}_1^H \mathbf{v}_4 = (1 \ 0 \ -1) \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = 6$$

$$\implies \boxed{\alpha_{14} = 6/2 = 3}$$

$$\mathbf{u}_2 = \mathbf{0} \implies \boxed{\alpha_{24} = 0}$$

$$\mathbf{u}_3 \neq \mathbf{0} \implies \alpha_{34} = \frac{(\mathbf{u}_3|\mathbf{v}_4)}{(\mathbf{u}_3|\mathbf{u}_3)}$$

$$(\mathbf{u}_3|\mathbf{v}_4) = \mathbf{u}_3^H \mathbf{v}_4 = (1 \ 1 \ 1) \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = 3$$

$$(\mathbf{u}_3|\mathbf{u}_3) = \mathbf{u}_3^H \mathbf{u}_3 = (1 \ 1 \ 1) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 3$$

$$\implies \boxed{\alpha_{34} = 3/3 = 1}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_4 &= \mathbf{v}_4 - \alpha_{14}\mathbf{u}_1 - \alpha_{24}\mathbf{u}_2 - \alpha_{34}\mathbf{u}_3 = \\ &= \mathbf{v}_4 - 3\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_3 = \\ &= \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \boxed{\mathbf{0} = \mathbf{u}_4} \end{aligned}$$

$\boxed{II}$  Poniamo

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_0 &= (\mathbf{u}_1 \quad \mathbf{u}_2 \quad \mathbf{u}_3 \quad \mathbf{u}_4) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ \mathbf{R}_0 &= \begin{pmatrix} 1 & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \alpha_{14} \\ 0 & 1 & \alpha_{23} & \alpha_{24} \\ 0 & 0 & 1 & \alpha_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -5 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

$\mathbf{A} = \mathbf{Q}_0\mathbf{R}_0$  è una decomposizione  $\mathbf{Q}_0\mathbf{R}_0$ -non-normalizzata per  $\mathbf{A}$ .

(b)  $\boxed{III}$  Sia  $\mathbf{Q}_1$  la matrice che si ottiene dalla matrice  $\mathbf{Q}_0$ , ottenuta al punto (2), togliendo tutte le (eventuali) colonne nulle di  $\mathbf{Q}_0$ . In questo caso  $\mathbf{Q}_0$  ha due colonne nulle, la 2<sup>a</sup> e la 4<sup>a</sup>, quindi

$$\mathbf{Q}_1 = (\mathbf{u}_1 \quad \mathbf{u}_3) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Sia  $\mathbf{R}_1$  la matrice che si ottiene dalla matrice  $\mathbf{R}_0$ , ottenuta al punto (2), togliendo le righe di  $\mathbf{R}_0$  che corrispondono alle colonne che sono state tolte da  $\mathbf{Q}_0$  per ottenere  $\mathbf{Q}_1$ . In questo caso, poichè per ottenere  $\mathbf{Q}_1$  sono state tolte da  $\mathbf{Q}_0$  la 2<sup>a</sup> e la 4<sup>a</sup> colonna, allora per ottenere  $\mathbf{R}_1$  si toglie da  $\mathbf{R}_0$  la 2<sup>a</sup> riga e la 4<sup>a</sup> riga. Dunque

$$\mathbf{R}_1 = \begin{pmatrix} 1 & -5 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$\boxed{IV}$  Costruiamo la matrice diagonale  $\mathbf{D}$  che ha sulla diagonale la norma euclidea delle colonne di  $\mathbf{Q}_1$  (ossia delle colonne non nulle di  $\mathbf{Q}_0$ ), e calcoliamo  $\mathbf{D}^{-1}$ .

Poichè

$$\|\mathbf{u}_1\|_2 = \sqrt{(\mathbf{u}_1|\mathbf{u}_1)} = \sqrt{2} \quad \text{e} \quad \|\mathbf{u}_3\|_2 = \sqrt{(\mathbf{u}_3|\mathbf{u}_3)} = \sqrt{3},$$

allora

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} \|\mathbf{u}_1\|_2 & 0 \\ 0 & \|\mathbf{u}_3\|_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & \sqrt{3} \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{D}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}.$$

$\boxed{V}$  Poniamo

$$\begin{aligned} \mathbf{Q} &= \mathbf{Q}_1\mathbf{D}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \\ \mathbf{R} &= \mathbf{D}\mathbf{R}_1 = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & \sqrt{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -5 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & -5\sqrt{2} & 2\sqrt{2} & 3\sqrt{2} \\ 0 & 0 & \sqrt{3} & \sqrt{3} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Allora  $\mathbf{A} = \mathbf{QR}$  è una decomposizione  $\mathbf{QR}$ -normalizzata di  $\mathbf{A}$ .

(c) La matrice di proiezione sullo spazio delle colonne  $C(\mathbf{A})$  di  $\mathbf{A}$  è  $\mathbf{P} = \mathbf{QQ}^H$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{P} = \mathbf{QQ}^H &= \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} + \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{2} + \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{2} + \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

**ESERCIZIO TIPO 21**

Sia  $\mathbf{A}(z) = \begin{pmatrix} z & \bar{z} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & z-i \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ , dove  $z \in \mathbb{C}$ .

Si dica per quali  $z \in \mathbb{C}$  la matrice  $\mathbf{A}(z)$  è non singolare.

$\mathbf{A}(z)$  è non singolare se e solo se  $\text{Det}(\mathbf{A}(z)) \neq 0$ . Calcoliamo dunque  $\text{Det}(\mathbf{A}(z))$ .

$$\begin{aligned} \text{Det}(\mathbf{A}(z)) & \stackrel{\uparrow}{=} (-1)^{2+3} \text{Det} \begin{pmatrix} z & \bar{z} & 0 \\ 1 & 1 & z-i \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \\ & \text{sviluppato rispetto} \\ & \text{alla } 2^{\text{a}} \text{ riga} \\ & \stackrel{\uparrow}{=} -(z-i)(-1)^{2+3} \text{Det} \begin{pmatrix} z & \bar{z} \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \\ & \text{sviluppato rispetto} \\ & \text{alla } 3^{\text{a}} \text{ colonna} \\ & = (z-i)(z-\bar{z}) \end{aligned}$$

Quindi  $\mathbf{A}(z)$  è non singolare se e solo se  $(z-i)(z-\bar{z}) \neq 0$ .

Si osservi che  $(z-i)(z-\bar{z}) = 0$  se e solo se o  $z-i = 0$ , e quindi  $z = i$ , oppure  $z-\bar{z} = 0$ , e quindi  $z = \bar{z}$ . Poichè

$$z = \bar{z} \iff z \in \mathbb{R},$$

allora

$$\text{Det}(\mathbf{A}(z)) = 0 \iff z \in \mathbb{R} \cup \{i\}$$

e quindi

$$\text{Det}(\mathbf{A}(z)) \neq 0 \iff z \notin \mathbb{R} \cup \{i\}.$$

Concludendo

$$\mathbf{A}(z) \text{ è non singolare} \iff z \notin \mathbb{R} \cup \{i\}.$$

## TESTI DEGLI ESERCIZI PER CASA

## ESERCIZI PER CASA 1

- [1] Quanti sono i numeri complessi  $z$  tali che  $|z| = 1$  ?
- [2] Siano  $z_1 = i$ ,  $z_2 = -3i$ ,  $z_3 = 1 - 2i$  e  $z_4 = 5 + 3i$ . Si scrivano  $z_1^{-1}$ ,  $z_2^{-1}$ ,  $z_3^{-1}$  e  $z_4^{-1}$  in forma algebrica.
- [3] Quali sono i numeri complessi  $z$  tali che  $z = -\bar{z}$  ?
- [4] Di ciascuna delle seguenti matrici si dica se è scalare, diagonale, triangolare superiore, triangolare inferiore o nessuna delle precedenti:
- $$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 5 & 5 & 0 \\ 5 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 & 0 & 5 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$
- [5] Siano  $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 1 & -3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$ ,  $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 4 & -2 & -3 \end{pmatrix}$ ,  $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  e  $\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 0 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$ .
- Si calcoli  $\mathbf{B}(\mathbf{DC} - 2\mathbf{A}) + 4\mathbf{C}$ .
- [6] Sia  $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ . Si trovino tutte le matrici reali  $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$  tali che  $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$ .
- [7] Si trovino tutte le matrici reali  $2 \times 2$   $\mathbf{A}$  triangolari superiori tali che  $\mathbf{A}^2 = \mathbf{I}_2$ .
- [8] Si trovino tutte le matrici reali  $2 \times 2$   $\mathbf{A}$  tali che  $\mathbf{A}^2 = \mathbf{O}$ .
- [9] Sia  $\mathbf{A}$  una matrice reale  $m \times 3$  non nulla con tutte le colonne uguali. Si trovino tutte le matrici reali diagonali  $\mathbf{D}$  per cui ciascuna colonna di  $\mathbf{AD}$  è il doppio della precedente.

**ESERCIZI PER CASA 2**

[1] Siano  $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2-3i & 1+i \\ 0 & i \\ 1-i & 1 \end{pmatrix}$ ,  $\mathbf{B} = (2 \ 1+i)$ ,  $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 3+5i \\ 6 \\ 2-2i \end{pmatrix}$ ,  $\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 7+i & 2+3i \\ 3-2i & 0 \end{pmatrix}$ .

(a) Di ciascuna delle precedenti matrici si calcolino la trasposta, la coniugata e la H-trasposta.

(b) Si calcoli  $(\mathbf{A}^H \overline{\mathbf{C}} + i\mathbf{B}^T) \overline{\mathbf{B}} + (1+3i)\mathbf{D}^H$ .

[2] Di ciascuna delle seguenti matrici si dica se è simmetrica, anti-simmetrica, hermitiana, anti-hermitiana o nessuna delle precedenti:

$$\begin{pmatrix} 2 & 2+3i \\ 2-3i & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 2+3i \\ 2+3i & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2+3i \\ -2+3i & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2+3i \\ -2-3i & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

[3] Siano  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$  e  $\mathbf{C}$  matrici complesse quadrate di ordine  $n$ . Si supponga che  $\mathbf{A}$  sia anti-hermitiana,  $\mathbf{B}$  sia reale e  $\mathbf{C}$  sia simmetrica. Si provi che

(a)  $(\mathbf{AB} + \mathbf{C})^H + \mathbf{B}^T \mathbf{A} = \overline{\mathbf{C}}$ ;

(b)  $[(\mathbf{A} + \mathbf{B}^T) \overline{\mathbf{C}}]^H - (\overline{\mathbf{A}\mathbf{C}})^T = \mathbf{CB}$ .

[4] Si calcolino la parte hermitiana e la parte anti-hermitiana della matrice complessa  $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2+i & -2 \\ 3 & 1-i \end{pmatrix}$  e della sua H-trasposta  $\mathbf{A}^H$ .

[5] Siano  $\mathbf{B}$  una matrice quadrata di ordine  $n-1$  e  $\mathbf{v}, \mathbf{w}$  vettori colonna con  $n-1$  coordinate. Si consideri

la matrice a blocchi  $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & | & \mathbf{v}^T \\ - & | & - \\ \mathbf{w} & | & \mathbf{B} \end{pmatrix}$ , dove  $a \in \mathbb{R}$ .

(a) Si provi che se  $\mathbf{v}^T \mathbf{w} = 0$  e  $\mathbf{A} \begin{pmatrix} 0 \\ - \\ \mathbf{w} \end{pmatrix} = \mathbf{0}$ , allora la prima colonna di  $\mathbf{A}^2$  è  $a \begin{pmatrix} a \\ - \\ \mathbf{w} \end{pmatrix}$ .

(b) Si provi che se  $\mathbf{A}\mathbf{A}^T = \mathbf{I}_n$  e  $\mathbf{v}^T \mathbf{v} = 1$  allora  $a = 0$  e  $\mathbf{B}\mathbf{v} = \mathbf{0}$ .

[6] Siano  $\mathbf{X}$  ed  $\mathbf{Y}$  due matrici quadrate di ordine  $n$ . Si consideri la matrice a blocchi

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{X} & | & \mathbf{Y} \\ - & | & - \\ \mathbf{Y} & | & \mathbf{X} \end{pmatrix}.$$

Si provi che se  $\mathbf{A}^2 = \mathbf{I}_{2n}$  allora  $(\mathbf{X} + \mathbf{Y})^2 = \mathbf{I}_n$ .

**ESERCIZI PER CASA 3**

[1] Si scrivano le matrici elementari  $\mathbf{E}_{13}(4)$ ,  $\mathbf{E}_3(4)$  ed  $\mathbf{E}_{13}$  di ordine 3 e di ordine 4.

[2] Sia  $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{r}^T \\ \mathbf{r}^T \end{pmatrix}$  una matrice reale  $2 \times n$  non nulla con le righe uguali. Si trovino tutte le matrici elementari  $\mathbf{E}$  tali che  $\mathbf{EA} = \begin{pmatrix} \mathbf{r}^T \\ 3\mathbf{r}^T \end{pmatrix}$ .

[3] Siano  $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 4 & 0 \\ 3 & -3 & 9 & 6 \\ 3 & -3 & 3 & -6 \end{pmatrix}$  e  $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 3 & -9 \\ -2 & 6 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}$ . Si trovino forme ridotte di Gauss per  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{B}$ .

[4] Sia  $\mathbf{A}(\alpha) = \begin{pmatrix} 2i & 0 & -2i & 2i\alpha \\ 1 & \alpha^2 + 4 & 0 & \alpha \\ 2 & 2\alpha^2 + 8 & 0 & 4\alpha \end{pmatrix}$ , dove  $\alpha \in \mathbb{C}$ . Per ogni  $\alpha \in \mathbb{C}$  si trovi una forma ridotta di Gauss  $\mathbf{U}(\alpha)$  per  $\mathbf{A}(\alpha)$  e si dica quali sono le colonne dominanti e quali sono le colonne libere di  $\mathbf{U}(\alpha)$ .

[5] Si risolva il sistema lineare  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$  dove

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 9 & 6 \\ 1 & -1 & 7 & 4 \\ 1 & -1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

[6] Si risolva il sistema lineare  $\mathbf{A}(\alpha)\mathbf{x} = \mathbf{b}(\alpha)$  dipendente dal parametro complesso  $\alpha$  dove

$$\mathbf{A}(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & \alpha - i & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & \alpha - i & \alpha + i \\ -\alpha - i & -\alpha^2 - 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{b}(\alpha) = \begin{pmatrix} \alpha - i \\ \alpha^2 + 1 \\ 2\alpha \\ 0 \end{pmatrix}.$$

[7] Si provi che l'inversa di una matrice simmetrica non singolare è una matrice simmetrica.

[8] Si trovino tutte le inverse destre della matrice  $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ .

[9] Si trovino tutte le inverse sinistre della matrice  $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ .

**ESERCIZI PER CASA 4**

[1] Sia  $\mathbf{A}(\alpha) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \alpha & \alpha^2 & -\alpha \\ 2\alpha & 2\alpha^2 & 1 \end{pmatrix}$ , dove  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Per quegli  $\alpha \in \mathbb{R}$  per cui  $\mathbf{A}(\alpha)$  è non singolare, si calcoli  $\mathbf{A}(\alpha)^{-1}$ .

[2] Sia  $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 6i & 1-i \\ 3 & -i \end{pmatrix}$ . Si calcoli  $\mathbf{A}^{-1}$ .

[3] Si dica per quali  $\alpha \in \mathbb{C}$  la matrice  $\mathbf{A}(\alpha) = \begin{pmatrix} \alpha+3i & \alpha \\ \alpha+3i & \alpha-i \end{pmatrix}$  è non singolare. Per tali  $\alpha$ , si trovi l'inversa di  $\mathbf{A}(\alpha)$ .

[4] Si scriva la matrice  $\mathbf{T} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$  come prodotto di matrici elementari.

[5] (a) Si scriva esplicitamente la matrice  $4 \times 4$   $\mathbf{A} = \mathbf{E}_2(2)\mathbf{E}_{32}(7)\mathbf{E}_3(-2)$ .

(b) Si scrivano  $\mathbf{A}^{-1}$  ed  $\mathbf{A}^T$  come prodotti di matrici elementari.

[6] Sia  $\mathbf{A}(\alpha) = \begin{pmatrix} \alpha & 3\alpha & 2\alpha & -2\alpha \\ 0 & 0 & \alpha^2+9 & \alpha^2+9 \\ 2 & 6 & 4 & -3+\alpha \\ 1 & 3 & 1 & -6-3\alpha \\ \alpha+1 & 3\alpha+3 & 2\alpha+1 & -1 \end{pmatrix}$ , dove  $\alpha \in \mathbb{C}$ .

(a) Per ogni  $\alpha \notin \{0, 3i, -3i\}$  si trovi una decomposizione  $\mathbf{A}(\alpha) = \mathbf{L}(\alpha)\mathbf{U}(\alpha)$ , scrivendo anche  $\mathbf{L}(\alpha)$  come prodotto di matrici elementari.

(b) Per ogni  $\alpha \notin \{0, 3i, -3i\}$  si trovi una decomposizione a rango pieno  $\mathbf{A}(\alpha) = \mathbf{L}_0(\alpha)\mathbf{U}_0(\alpha)$ .

[7] Sia  $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 9 & -6 & 0 \\ -2 & -6 & 4 & -1 \\ 0 & 2 & -4 & 0 \\ 1 & 7 & 6 & 0 \\ 1 & -4 & 10 & -4 \end{pmatrix}$ .

(a) Si trovi una decomposizione  $\mathbf{A} = \mathbf{P}^T\mathbf{L}\mathbf{U}$ .

(b) Si trovi una decomposizione a rango pieno per  $\mathbf{A}$ .

**ESERCIZI PER CASA 5**

[1] Sia  $W = \{\mathbf{A} \in M_n(\mathbb{C}) \mid \mathbf{A} = \mathbf{A}^T\}$  l'insieme delle matrici simmetriche (complesse) di ordine  $n$ . Si provi che  $W$  è un sottospazio dello spazio vettoriale delle matrici quadrate (complesse) di ordine  $n$ .

[2] Sia  $W = \{\mathbf{A} \in M_n(\mathbb{C}) \mid \mathbf{A}^H = -\mathbf{A}\}$  l'insieme delle matrici anti-hermitiane (complesse) di ordine  $n$ . Si provi che  $W$  non è un sottospazio dello spazio vettoriale delle matrici quadrate (complesse) di ordine  $n$ .

[3] Sia  $\mathbf{A} \in M_n(\mathbb{C})$ . Si provi che i due seguenti sottoinsiemi di  $M_n(\mathbb{C})$  sono sottospazi vettoriali di  $M_n(\mathbb{C})$ :

(a)  $W_1 = \{\mathbf{B} \in M_n(\mathbb{C}) \mid \mathbf{A}\mathbf{B} = \mathbf{B}\mathbf{A}\}$ ;

(b)  $W_2 = \{\mathbf{B} \in M_n(\mathbb{C}) \mid \mathbf{A}\mathbf{B} \text{ è una matrice scalare}\}$ .

[4] Sia  $V = \mathbb{R}^2$  (spazio vettoriale reale). Si dica quale dei seguenti sottoinsiemi di  $V$  è un sottospazio vettoriale di  $V$ :

$$S_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}; S_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}; S_3 = \left\{ \begin{pmatrix} a-2 \\ b \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}; S_4 = \left\{ \begin{pmatrix} a-2 \\ a+1 \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R} \right\}.$$

[5] Sia  $W = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R} \right\}$  l'insieme delle matrici reali anti-simmetriche di ordine 2.

1. Si provi che  $W$  è un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale reale  $M_2(\mathbb{R})$ .

2. Si dica quali dei seguenti sottoinsiemi di  $M_2(\mathbb{R})$  è un insieme di generatori per  $W$ :

(a)  $\left\{ \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \right\}$  (b)  $\left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$  (c)  $\left\{ \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} \right\}$

[6] Si dica se  $\mathcal{S} = \left\{ \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}; \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 8 \end{pmatrix}; \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} \right\}$  è un insieme di generatori di  $\mathbb{R}^3$ .

[7] Si dica quale dei seguenti sottoinsiemi di  $\mathbb{R}^3$  è linearmente indipendente:

$$\left\{ \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}; \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}; \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, \quad \left\{ \mathbf{w}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}; \mathbf{w}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}; \mathbf{w}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}; \right\}.$$

[8] Siano  $V$  uno spazio vettoriale ed  $\mathcal{S} = \{\mathbf{v}_1; \mathbf{v}_2; \mathbf{v}_3\}$  un insieme linearmente indipendente di vettori di  $V$ .

Si dica quale dei seguenti insiemi di vettori di  $V$  è linearmente indipendente:

(1)  $\mathcal{S}_1 = \{\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3; \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_3; \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3\}$ ,

(2)  $\mathcal{S}_2 = \{\mathbf{v}_1 - 2\mathbf{v}_3; \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2; \mathbf{v}_2 + 2\mathbf{v}_3\}$ .

**ESERCIZI PER CASA 6**

[1] Si provi che

$$\mathcal{B} = \left\{ \mathbf{B}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}; \mathbf{B}_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}; \mathbf{B}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

è una base dello spazio vettoriale  $V$  delle matrici complesse triangolari inferiori  $2 \times 2$ .

[2] Sia  $W$  l'insieme delle matrici  $2 \times 2$  reali simmetriche. L'insieme

$$\mathcal{S} = \left\{ \mathbf{C}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}; \mathbf{C}_2 = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}; \mathbf{C}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \mathbf{C}_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \mathbf{C}_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \mathbf{C}_6 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

è un insieme di generatori di  $W$ . Si trovi una base di  $W$  contenuta in  $\mathcal{S}$ .

[3] Qual è la dimensione dello spazio vettoriale delle matrici  $2 \times 2$  reali simmetriche?

[4] Si dica quale delle seguenti posizioni, al variare di  $\mathbf{A} \in M_n(\mathbb{C})$ , definisce un'applicazione lineare da  $M_n(\mathbb{C})$  in  $M_n(\mathbb{C})$ :  $f_1(\mathbf{A}) = \overline{\mathbf{A}}$ ,  $f_2(\mathbf{A}) = \mathbf{A}^T$ ,  $f_3(\mathbf{A}) = \mathbf{A}^2$ .

[5] Sia  $g: M_2(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C}^2$  definita da  $g(\mathbf{A}) = \mathbf{A}\mathbf{e}_1$ .

(a) Si provi che  $g$  è un'applicazione lineare.

(b) Si trovino lo spazio nullo  $N(g)$  e lo spazio immagine  $Im(g)$  di  $g$ .

[6] Sia  $\mathbf{A}$  una matrice complessa  $n \times n$ . Si provi che  $\mathbf{A}^2 = \mathbf{A}$  se e solo se  $C(\mathbf{A} - \mathbf{I}_2) \subseteq N(\mathbf{A})$ .

[7] Siano  $\mathbf{A}$  una matrice complessa  $m \times n$  ed  $f_{\mathbf{A}}: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^m$  l'applicazione lineare indotta da  $\mathbf{A}$ . Si provi che  $f_{\mathbf{A}}$  è iniettiva se e solo se  $\mathbf{A}$  ha un'inversa sinistra.

[8] Sia  $\mathbf{A}_{\alpha} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 1 & \alpha + 2 & \alpha & \alpha + 2 \\ 2 & 4 & 0 & \alpha + 6 \end{pmatrix}$ . Per ogni  $\alpha \in \mathbb{C}$  si trovi una base dello spazio nullo  $N(\mathbf{A}_{\alpha})$  di  $\mathbf{A}_{\alpha}$ .

**ESERCIZI PER CASA 7**

$$\boxed{1} \text{ Sia } \mathbf{A}_\alpha = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 2i \\ 0 & \alpha & 0 & 2i \\ 4 & \alpha - 1 & 0 & 4i \\ 0 & 2 & 4\alpha - 6 & 0 \end{pmatrix}, \text{ dove } \alpha \in \mathbb{C}.$$

Per ogni  $\alpha \in \mathbb{C}$  si dica qual è  $rk(\mathbf{A}_\alpha)$  e si trovino una base  $\mathcal{B}_\alpha$  di  $C(\mathbf{A}_\alpha)$  ed una base  $\mathcal{D}_\alpha$  di  $R(\mathbf{A}_\alpha)$ .

$$\boxed{2} \text{ Si dica per quali } \alpha \in \mathbb{R} \text{ l'insieme } \mathcal{B}_\alpha = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \\ 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha + 1 \\ \alpha + 1 \end{pmatrix} \right\} \text{ è una base di } \mathbb{R}^3 \text{ (si usi la Nota 3).}$$

$$\boxed{3} \text{ Sia } f : \mathbb{R}^2 \rightarrow M_2(\mathbb{R}) \text{ definita da } f\left(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} a & a+b \\ a-b & b \end{pmatrix}.$$

(a) Si provi che  $f$  è un'applicazione lineare.

(b) Si determini la matrice  $\mathbf{A}$  associata ad  $f$  rispetto alle basi ordinate  $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$  e  $\mathcal{D} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$  su dominio e codominio rispettivamente.

$$\boxed{4} \text{ Siano } \mathcal{B} = \left\{ \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \text{ e } \mathcal{B}' = \left\{ \mathbf{v}'_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \mathbf{v}'_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \mathbf{v}'_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

(1) Si provi che  $\mathcal{B}$  e  $\mathcal{B}'$  sono due basi ordinate di  $\mathbb{R}^3$ .

(2) Si calcolino le matrici di passaggio  $\mathbf{M}_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{B}'}$  da  $\mathcal{B}'$  a  $\mathcal{B}$  e  $\mathbf{M}_{\mathcal{B}' \leftarrow \mathcal{B}}$  da  $\mathcal{B}$  a  $\mathcal{B}'$ .

$$\boxed{5} \text{ Sia } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 6 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \text{ la matrice associata ad un'applicazione lineare } f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3 \text{ rispetto alle basi}$$

ordinate  $\mathcal{B} = \left\{ \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$  e  $\mathcal{D} = \left\{ \mathbf{w}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \mathbf{w}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \mathbf{w}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$  su dominio

e codominio rispettivamente. Si determini la matrice  $\mathbf{A}'$  associata ad  $f$  rispetto alle basi ordinate  $\mathcal{B}' = \left\{ \mathbf{v}'_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}; \mathbf{v}'_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} \right\}$  e  $\mathcal{D}' = \left\{ \mathbf{w}'_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \mathbf{w}'_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}; \mathbf{w}'_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$  su dominio e codominio risp.

$$\boxed{6} \text{ Sia } \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n. \text{ Si provi che } \|\mathbf{v}\|_\infty = \|\mathbf{v}\|_1 \text{ se e solo se } \mathbf{v} \text{ è un multiplo di una colonna di } \mathbf{I}_n.$$

$$\boxed{7} \text{ Si verifichi che } \phi : \mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} \text{ definita da } \phi\left(\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}\right) = |2a - b| + |a + c| + |ib| \text{ è una norma.}$$

$$\boxed{8} \text{ Siano } V \text{ uno spazio vettoriale, } \mathcal{B} = \{\mathbf{v}_1; \dots; \mathbf{v}_n\} \text{ una sua base ordinata e } C_{\mathcal{B}} : V \rightarrow \mathbb{C}^n \text{ l'applicazione delle coordinate rispetto a } \mathcal{B}. \text{ Si provi che la funzione } \|\cdot\|_{\mathcal{B}} : V \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} \text{ definita da } \|\mathbf{w}\|_{\mathcal{B}} = \|C_{\mathcal{B}}(\mathbf{w})\|_\infty \text{ per ogni } \mathbf{w} \in V \text{ è una norma.}$$

**ESERCIZI PER CASA 8**

1 Si dica quali delle seguenti posizioni definisce un prodotto interno:

(a)  $(\cdot|\cdot) : V \times V \rightarrow \mathbb{C}$ , con  $V = M_2(\mathbb{C})$  e

$$\left( \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{pmatrix} \right) = \sum_{i=1}^4 \overline{a_i} b_i.$$

(b)  $(\cdot|\cdot) : V \times V \rightarrow \mathbb{C}$ , con  $V = \mathbb{C}^2$  e  $\left( \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \right) = \overline{x_1}y_1 - 3\overline{x_2}y_2$

(c)  $(\cdot|\cdot) : V \times V \rightarrow \mathbb{C}$ , con  $V = \mathbb{C}^2$  e  $\left( \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \right) = \overline{x_1}y_1 + 3\overline{x_2}y_2$

2 Siano  $\mathbf{u} = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2$  e  $\|\cdot\| : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$  la norma indotta dal prodotto interno definito nell'Esercizio Tipo 17.

(a) Si trovino tutti i vettori  $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$  tali che  $\|\mathbf{x}\| = \|\mathbf{x}\|_2$ .

(b) Si calcolino  $\cos(\widehat{\mathbf{e}_1 \mathbf{u}})$  e  $\cos(\widehat{\mathbf{e}_2 \mathbf{u}})$ .

(c) Si trovi  $\langle \mathbf{u} \rangle^\perp$ .

3 Si trovi una base ortonormale del sottospazio di  $\mathbb{C}^4$

$$V = \left\langle \begin{pmatrix} i \\ -1 \\ i \\ -1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} -1 \\ -i \\ -1 \\ -i \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2i \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

4 Si calcoli la proiezione ortogonale di  $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 2i \\ -6 \\ 8i \\ 10 \end{pmatrix}$  sul sottospazio  $U = \left\langle \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 8i \\ 0 \\ -i \\ 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 7i \\ -1 \\ -i \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$  di  $\mathbb{C}^4$ .

5 Si trovi una base di  $V^\perp$  nei seguenti casi:

$$V = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ i \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle, \quad V = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 1 \\ i \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} i \\ -1 \\ i \\ -1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

**ESERCIZI PER CASA 9**

$$\boxed{1} \text{ Sia } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & i & -2 & 9i \\ i & -1 & -2i & 0 \\ -1 & -i & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

- (a) Si trovi una decomposizione  $\mathbf{Q}_0\mathbf{R}_0$ -non-normalizzata per  $\mathbf{A}$ .  
 (b) Si trovi una decomposizione  $\mathbf{QR}$ -normalizzata per  $\mathbf{A}$ .  
 (c) Si calcoli la matrice di proiezione sullo spazio delle colonne  $C(\mathbf{A})$  di  $\mathbf{A}$ .

$\boxed{2}$  Siano  $\mathbf{0} \neq \mathbf{v} \in \mathbb{R}^m$  ed  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Si trovino una decomposizione  $\mathbf{Q}_0\mathbf{R}_0$ -non-normalizzata ed una decomposizione  $\mathbf{QR}$ -normalizzata della matrice  $\mathbf{A}(\alpha) = (\mathbf{v} \quad \alpha\mathbf{v})$ .

$\boxed{3}$  Si calcoli il determinante delle seguenti matrici:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2-i & 1 & 0 \\ 2 & 1+i & 3 \\ i & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} i & 1 & 1+i \\ -1 & 1 & 2 \\ i & i & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1+i \end{pmatrix}.$$

$\boxed{4}$  Sia  $\mathbf{A}(\alpha) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \alpha & 0 & 1 \\ 4 & \alpha-1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 3\alpha-1 & 1 \end{pmatrix}$ , dove  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Si dica per quali  $\alpha \in \mathbb{R}$  si ha che  $\mathbf{A}(\alpha)$  è non singolare (sugg.: si calcoli il determinante  $\text{Det}(\mathbf{A}(\alpha))$  di  $\mathbf{A}(\alpha)$ ).

## SVOLGIMENTO DEGLI ESERCIZI PER CASA

## Svolgimento degli Esercizi per casa 1

[1] Quanti sono i numeri complessi  $z$  tali che  $|z| = 1$  ?

Un numero complesso  $z$  ha modulo uguale ad 1 se e solo se è rappresentato nel piano di Gauss da un punto che dista 1 dall'origine degli assi, ossia da un punto sulla circonferenza di centro  $O$  e raggio 1. Poichè i punti su una circonferenza sono infiniti, e a punti distinti nel piano di Gauss corrispondono numeri complessi distinti, sono infiniti i numeri complessi  $z$  tali che  $|z| = 1$ .

[2] Siano  $z_1 = i$ ,  $z_2 = -3i$ ,  $z_3 = 1 - 2i$  e  $z_4 = 5 + 3i$ . Si scrivano  $z_1^{-1}$ ,  $z_2^{-1}$ ,  $z_3^{-1}$  e  $z_4^{-1}$  in forma algebrica.

Siano  $w_1 = z_1^{-1}$ ,  $w_2 = z_2^{-1}$ ,  $w_3 = z_3^{-1}$  e  $w_4 = z_4^{-1}$ . Allora

$$w_1 = \frac{1}{z_1} = \frac{1}{i} = \frac{1}{i} \cdot \frac{\bar{i}}{\bar{i}} = \frac{1}{i} \cdot \frac{(-i)}{(-i)} = \frac{-i}{-i^2} = \frac{-i}{1} = -i$$

è la forma algebrica di  $w_1$ :  $a_1 = 0$  e  $b_1 = -1$  sono la parte reale e la parte immaginaria di  $w_1$ ;

$$w_2 = \frac{1}{z_2} = \frac{1}{-3i} = \frac{1}{-3i} \cdot \frac{\overline{-3i}}{\overline{-3i}} = \frac{1}{-3i} \cdot \frac{3i}{3i} = \frac{3i}{-9i^2} = \frac{3i}{9} = \frac{1}{3}i$$

è la forma algebrica di  $w_2$ :  $a_2 = 0$  e  $b_2 = 1/3$  sono la parte reale e la parte immaginaria di  $w_2$ ;

$$w_3 = \frac{1}{z_3} = \frac{1}{1-2i} = \frac{1}{1-2i} \cdot \frac{\overline{1-2i}}{\overline{1-2i}} = \frac{1}{1-2i} \cdot \frac{1+2i}{1+2i} = \frac{1+2i}{1^2-(2i)^2} = \frac{1+2i}{1-4i^2} = \frac{1+2i}{1+4} = \frac{1}{5} + \frac{2}{5}i$$

è la forma algebrica di  $w_3$ :  $a_3 = 1/5$  e  $b_3 = 2/5$  sono la parte reale e la parte immaginaria di  $w_3$ ;

$$w_4 = \frac{1}{z_4} = \frac{1}{5+3i} = \frac{1}{5+3i} \cdot \frac{\overline{5+3i}}{\overline{5+3i}} = \frac{1}{5+3i} \cdot \frac{5-3i}{5-3i} = \frac{5-3i}{5^2-(3i)^2} = \frac{5-3i}{5^2-9i^2} = \frac{5-3i}{25+9} = \frac{5}{34} - \frac{3}{34}i$$

è la forma algebrica di  $w_4$ :  $a_4 = 5/34$  e  $b_4 = -3/34$  sono la parte reale e la parte immaginaria di  $w_4$ .

[3] Quali sono i numeri complessi  $z$  tali che  $z = -\bar{z}$  ?

Scrivendo  $z \in \mathbb{C}$  in forma algebrica, si ha  $z = a + ib$  con  $a, b \in \mathbb{R}$ . Il coniugato  $\bar{z}$  di  $z$  è  $\bar{z} = a - ib$ , e  $-\bar{z} = -a + ib$ . Poichè

$$a + ib = -a + ib \iff a = -a \iff a = 0,$$

si ottiene che

$$z = -\bar{z} \iff z = ib, \text{ con } b \in \mathbb{R},$$

ossia  $z$  è l'opposto del suo coniugato se e solo se  $z$  è un numero immaginario puro.

[4] Di ciascuna delle seguenti matrici si dica se è scalare, diagonale, triangolare superiore, triangolare inferiore o nessuna delle precedenti:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 & 0 & 5 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

<b>scalari:</b>	$\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$
<b>diagonali:</b>	$\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$
<b>triang. sup.:</b>	$\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 & 0 & 5 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$
<b>triang. inf.:</b>	$\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 5 & 5 & 0 \\ 5 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$
<b>nessuna delle precedenti:</b>	$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \end{pmatrix}$

5] Siano  $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 1 & -3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$ ,  $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 4 & -2 & -3 \end{pmatrix}$ ,  $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  e  $\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 0 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$ .

Si calcoli  $\mathbf{B}(\mathbf{DC} - 2\mathbf{A}) + 4\mathbf{C}$ .

$$4\mathbf{C} = 4 \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 4 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{DC} &= \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 0 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \times 2 + 2 \times 0 & 4 \times 1 + 2 \times 1 \\ 1 \times 2 + 0 \times 0 & 1 \times 1 + 0 \times 1 \\ (-1) \times 2 + (-2) \times 0 & (-1) \times 1 + (-2) \times 1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 8 + 0 & 4 + 2 \\ 2 + 0 & 1 + 0 \\ -2 + 0 & -1 - 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 6 \\ 2 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$-2\mathbf{A} = -2 \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 1 & -3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 & 0 \\ -2 & 6 \\ -4 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{DC} - 2\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 8 & 6 \\ 2 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -12 & 0 \\ -2 & 6 \\ -4 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 6 \\ 0 & 7 \\ -6 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{B}(\mathbf{DC} - 2\mathbf{A}) &= \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 4 & -2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 & 6 \\ 0 & 7 \\ -6 & 1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 2 \times (-4) + 1 \times 0 + 0 \times (-6) & 2 \times 6 + 1 \times 7 + 0 \times 1 \\ 4 \times (-4) - 2 \times 0 - 3 \times (-6) & 4 \times 6 - 2 \times 7 - 3 \times 1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} -8 + 0 + 0 & 12 + 7 + 0 \\ -16 + 0 + 18 & 24 - 14 - 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & 19 \\ 2 & 7 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{DC} - 2\mathbf{A}) + 4\mathbf{C} = \begin{pmatrix} -8 & 19 \\ 2 & 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 8 & 4 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 23 \\ 2 & 11 \end{pmatrix}$$

[6] Sia  $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ . Si trovino tutte le matrici reali  $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$  tali che  $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$ .

Sia  $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$  una matrice reale  $2 \times 2$ . Poichè

$$\begin{aligned} \mathbf{AB} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z & t \\ x & y \end{pmatrix} \quad \text{e} \\ \mathbf{BA} &= \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y & x \\ t & z \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

la condizione  $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$  equivale a  $\begin{cases} z = y \\ t = x \\ x = t \\ y = z \end{cases}$ , ossia a  $\begin{cases} z = y \\ t = x \end{cases}$

Dunque le matrici  $2 \times 2$  reali  $\mathbf{B}$  tali che  $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$  sono tutte e sole le matrici del tipo

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} x & y \\ y & x \end{pmatrix}, \quad \text{dove } x, y \in \mathbb{R}.$$

[7] Si trovino tutte le matrici reali  $2 \times 2$   $\mathbf{A}$  triangolari superiori tali che  $\mathbf{A}^2 = \mathbf{I}_2$ .

Sia  $\mathbf{A}$  una matrice reale  $2 \times 2$  triangolare superiore. Dunque  $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & z \end{pmatrix}$ , con  $x, y, z \in \mathbb{R}$ . Poichè

$$\mathbf{A}^2 = \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2 & xy + yz \\ 0 & z^2 \end{pmatrix},$$

allora

$$\mathbf{A}^2 = \mathbf{I}_2 \iff \begin{cases} x^2 = 1 \\ z^2 = 1 \\ y(x+z) = 0 \end{cases}$$

Dalle prime due equazioni si ottiene che  $x, z \in \{1, -1\}$ .

Se  $z = -x$  (ossia se  $\{x, z\} = \{1, -1\}$ ), l'ultima equazione è soddisfatta per ogni valore di  $y$ . Si ottengono così le famiglie di matrici

$$\begin{pmatrix} 1 & y \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, y \in \mathbb{R}.$$

Se  $z \neq -x$  (per cui  $z = x = 1$  oppure  $z = x = -1$ ), dall'ultima equazione si deduce, dividendo ambo i membri per  $x+z \neq 0$ , che  $y = 0$ . Si ottengono così le due matrici

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

**[8]** Si trovino tutte le matrici reali  $2 \times 2$   $\mathbf{A}$  tali che  $\mathbf{A}^2 = \mathbf{O}$ .

Sia  $\mathbf{A}$  una matrice reale  $2 \times 2$ . Dunque  $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ , con  $x, y, z, t \in \mathbb{R}$ . Poiché

$$\mathbf{A}^2 = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2 + yz & xy + yt \\ zx + tz & zy + t^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2 + yz & (x+t)y \\ (x+t)z & zy + t^2 \end{pmatrix},$$

allora

$$\mathbf{A}^2 = \mathbf{O} \iff \begin{cases} x^2 + yz = 0 \\ (x+t)y = 0 \\ (x+t)z = 0 \\ zy + t^2 = 0 \end{cases}$$

Per la legge di cancellazione del prodotto, dall'equazione

$$(x+t)y = 0$$

si deduce

$$y = 0 \quad \text{o} \quad x + t = 0.$$

Conviene quindi dividere il problema in due parti:

(•) trovare tutte e sole le (eventuali) matrici  $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} x & 0 \\ z & t \end{pmatrix}$ , con  $x, z, t \in \mathbb{R}$  tali che  $\mathbf{A}^2 = \mathbf{O}$  (quelle cioè, tra le eventuali soluzioni del nostro problema, che hanno  $y = 0$ ),

(••) trovare tutte e sole le (eventuali) matrici  $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ , con  $x, y, z, t \in \mathbb{R}$  e  $y \neq 0$  tali che  $\mathbf{A}^2 = \mathbf{O}$ .

**In questo secondo caso, deve essere  $x + t = 0$ .**

Cerchiamo le soluzioni di (•).

$$\text{Da } \begin{cases} x^2 + yz = 0 \\ (x+t)y = 0 \\ (x+t)z = 0 \\ zy + t^2 = 0 \end{cases}, \text{ ricaviamo, se } y = 0, \text{ il sistema } \begin{cases} x^2 = 0 \\ (x+t)z = 0 \\ t^2 = 0 \end{cases}$$

La 1<sup>a</sup> e 3<sup>a</sup> equazione danno  $x = 0$  e  $t = 0$  rispettivamente. Ponendo  $x = 0 = t$  nella 2<sup>a</sup> equazione otteniamo  $(0 + 0)z = 0$ , che è soddisfatta per ogni  $z \in \mathbb{R}$ . Allora le matrici

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ z & 0 \end{pmatrix}, \quad z \in \mathbb{R}$$

sono tutte e sole le matrici reali  $2 \times 2$  triangolari inferiori (ossia, nelle nostre notazioni iniziali, con  $y = 0$ ) il cui quadrato è  $\mathbf{O}$ .

Cerchiamo le soluzioni di  $(\bullet\bullet)$ .

Ponendo  $x + t = 0$  in  $\begin{cases} x^2 + yz = 0 \\ (x + t)y = 0 \\ (x + t)z = 0 \\ zy + t^2 = 0 \end{cases}$ , otteniamo il sistema  $\begin{cases} x + t = 0 \\ x^2 + yz = 0 \\ zy + t^2 = 0 \end{cases}$ , di cui dobbiamo trovare le

soluzioni con  $y \neq 0$ .

Dalla 1<sup>a</sup> equazione si ricava  $t = -x$ , e, **essendo**  $y \neq 0$ , dalla 2<sup>a</sup> equazione si ricava  $z = -x^2/y$  (sostituendo poi  $t = -x$  e  $z = -x^2/y$  in  $zy + t^2$ , si ottiene  $zy + t^2 = (-x^2/y) \cdot y + (-x)^2 = -x^2 + x^2 = 0$ , per cui la 3<sup>a</sup> equazione non dà contributo).

Dunque le matrici

$$\begin{pmatrix} x & y \\ -x^2/y & -x \end{pmatrix}, \quad x, y \in \mathbb{R}, \quad y \neq 0$$

sono tutte e sole le matrici reali  $2 \times 2$  non triangolari inferiori (ossia, nelle nostre notazioni iniziali, con  $y \neq 0$ ) il cui quadrato è  $\mathbf{O}$ .

Concludendo, le matrici reali  $2 \times 2$  il cui quadrato è nullo sono gli elementi del seguente insieme:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ z & 0 \end{pmatrix} \mid z \in \mathbb{R} \right\} \cup \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ -x^2/y & -x \end{pmatrix} \mid x, y \in \mathbb{R}, \quad y \neq 0 \right\}$$

[9] Sia  $\mathbf{A}$  una matrice reale  $m \times 3$  non nulla con tutte le colonne uguali. Si trovino tutte le matrici reali diagonali  $\mathbf{D}$  per cui ciascuna colonna di  $\mathbf{AD}$  è il doppio della precedente.

Poichè  $\mathbf{A}$  ha tre colonne ed esiste  $\mathbf{AD}$ , allora  $\mathbf{D}$  ha tre righe. Quindi, essendo  $\mathbf{D}$  diagonale reale, è  $\mathbf{D} = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 \end{pmatrix}$  per opportuni numeri reali  $d_1, d_2$  e  $d_3$ .

Sia  $\mathbf{c}$  una colonna di  $\mathbf{A}$ . Avendo  $\mathbf{A}$   $m$  righe,  $\mathbf{c}$  è un vettore colonna con  $m$  coordinate, ed avendo  $\mathbf{A}$  tre colonne e tutte e tre le colonne uguali, è  $\mathbf{A} = (\mathbf{c} \quad \mathbf{c} \quad \mathbf{c})$ . Quindi

$$\mathbf{AD} = (\mathbf{c} \quad \mathbf{c} \quad \mathbf{c}) \begin{pmatrix} d_1 & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 \end{pmatrix} = (d_1\mathbf{c} \quad d_2\mathbf{c} \quad d_3\mathbf{c}).$$

La condizione che ciascuna colonna di  $\mathbf{AD}$  sia il doppio della precedente dà

$$\begin{cases} d_2\mathbf{c} = 2d_1\mathbf{c} \\ d_3\mathbf{c} = 2d_2\mathbf{c} = 2(2d_1\mathbf{c}) = 4d_1\mathbf{c} \end{cases}$$

da cui si ottiene

$$\begin{cases} (d_2 - 2d_1)\mathbf{c} = \mathbf{0} \\ (d_3 - 4d_1)\mathbf{c} = \mathbf{0} \end{cases}$$

**Se fosse  $\mathbf{c} = \mathbf{0}$  non potremmo trarre alcuna conclusione.**

Ma  $\mathbf{c} \neq \mathbf{0}$ , essendo  $\mathbf{A} = (\mathbf{c} \ \mathbf{c} \ \mathbf{c}) \neq \mathbf{O}$  per ipotesi. Allora

$$\begin{cases} (d_2 - 2d_1)\mathbf{c} = \mathbf{0} \\ (d_3 - 4d_1)\mathbf{c} = \mathbf{0} \\ \mathbf{c} \neq \mathbf{0} \end{cases} \implies \begin{cases} d_2 - 2d_1 = 0 \\ d_3 - 4d_1 = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} d_2 = 2d_1 \\ d_3 = 4d_1 \end{cases}$$

per cui ogni matrice  $\mathbf{D} = \begin{pmatrix} d & 0 & 0 \\ 0 & 2d & 0 \\ 0 & 0 & 4d \end{pmatrix}$  con  $d$  numero reale è soluzione del nostro problema.

**Svolgimento degli Esercizi per casa 2**

1 Siano  $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2-3i & 1+i \\ 0 & i \\ 1-i & 1 \end{pmatrix}$ ,  $\mathbf{B} = (2 \ 1+i)$ ,  $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 3+5i \\ 6 \\ 2-2i \end{pmatrix}$ ,  $\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 7+i & 2+3i \\ 3-2i & 0 \end{pmatrix}$ .

(a) Di ciascuna delle precedenti matrici si calcolino la trasposta, la coniugata e la H-trasposta.

(b) Si calcoli  $(\mathbf{A}^H \overline{\mathbf{C}} + i\mathbf{B}^T) \overline{\mathbf{B}} + (1+3i)\mathbf{D}^H$ .

$$\mathbf{A}^T = \begin{pmatrix} 2-3i & 0 & 1-i \\ 1+i & i & 1 \end{pmatrix} \quad \overline{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} 2+3i & 1-i \\ 0 & -i \\ 1+i & 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{A}^H = \begin{pmatrix} 2+3i & 0 & 1+i \\ 1-i & -i & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{B}^T = \begin{pmatrix} 2 \\ 1+i \end{pmatrix} \quad \overline{\mathbf{B}} = (2 \ 1-i) \quad \mathbf{B}^H = \begin{pmatrix} 2 \\ 1-i \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{C}^T = (3+5i \ 6 \ 2-2i) \quad \overline{\mathbf{C}} = \begin{pmatrix} 3-5i \\ 6 \\ 2+2i \end{pmatrix} \quad \mathbf{C}^H = (3-5i \ 6 \ 2+2i)$$

$$\mathbf{D}^T = \begin{pmatrix} 7+i & 3-2i \\ 2+3i & 0 \end{pmatrix} \quad \overline{\mathbf{D}} = \begin{pmatrix} 7-i & 2-3i \\ 3+2i & 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{D}^H = \begin{pmatrix} 7-i & 3+2i \\ 2-3i & 0 \end{pmatrix}$$

$$(\mathbf{A}^H \overline{\mathbf{C}} + i\mathbf{B}^T) \overline{\mathbf{B}} + (1+3i)\mathbf{D}^H =$$

$$= \left( \begin{pmatrix} 2+3i & 0 & 1+i \\ 1-i & -i & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3-5i \\ 6 \\ 2+2i \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 2 \\ 1+i \end{pmatrix} \right) (2 \ 1-i) + (1+3i) \begin{pmatrix} 7-i & 3+2i \\ 2-3i & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \left( \begin{pmatrix} (2+3i)(3-5i) + (1+i)(2+2i) \\ (1-i)(3-5i) - 6i + 2 + 2i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2i \\ i(1+i) \end{pmatrix} \right) (2 \ 1-i) + \begin{pmatrix} (1+3i)(7-i) & (1+3i)(3+2i) \\ (1+3i)(2-3i) & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 6+9i-10i+15+2+2i+2i-2 \\ 3-3i-5i-5-6i+2+2i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ -1+i \end{pmatrix} (2 \ 1-i) + \begin{pmatrix} 7+21i-i+3 & 3+9i+2i-6 \\ 2+6i-3i+9 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \left( \begin{pmatrix} 21+3i \\ -12i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2i \\ -1+i \end{pmatrix} \right) (2 \ 1-i) + \begin{pmatrix} 10+20i & -3+11i \\ 11+3i & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 21+5i \\ -1-11i \end{pmatrix} (2 \ 1-i) + \begin{pmatrix} 10+20i & -3+11i \\ 11+3i & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2(21+5i) & (21+5i)(1-i) \\ 2(-1-11i) & (-1-11i)(1-i) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 10+20i & -3+11i \\ 11+3i & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 42+10i & 21+5i-21i+5 \\ -2-22i & -1-11i+i-11 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 10+20i & -3+11i \\ 11+3i & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 42+10i & 26-16i \\ -2-22i & -12-10i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 10+20i & -3+11i \\ 11+3i & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 52+30i & 23-5i \\ 9-19i & -12-10i \end{pmatrix}$$

**2** Di ciascuna delle seguenti matrici si dica se è simmetrica, anti-simmetrica, hermitiana, anti-hermitiana o nessuna delle precedenti:

$$\begin{pmatrix} 2 & 2+3i \\ 2-3i & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 2+3i \\ 2+3i & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2+3i \\ -2+3i & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2+3i \\ -2-3i & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

<b>simmetriche:</b>	$\begin{pmatrix} 2 & 2+3i \\ 2+3i & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$
<b>anti-simmetriche:</b>	$\begin{pmatrix} 0 & 2+3i \\ -2-3i & 0 \end{pmatrix}$
<b>hermitiane:</b>	$\begin{pmatrix} 2 & 2+3i \\ 2-3i & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$
<b>anti-hermitiane:</b>	$\begin{pmatrix} 0 & 2+3i \\ -2+3i & 0 \end{pmatrix}$
<b>nessuna delle precedenti:</b>	$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

**3** Siano  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$  e  $\mathbf{C}$  matrici complesse quadrate di ordine  $n$ . Si supponga che  $\mathbf{A}$  sia anti-hermitiana,  $\mathbf{B}$  sia reale e  $\mathbf{C}$  sia simmetrica. Si provi che

- (a)  $(\mathbf{AB} + \mathbf{C})^H + \mathbf{B}^T \mathbf{A} = \overline{\mathbf{C}}$ ;  
 (b)  $[(\mathbf{A} + \mathbf{B}^T)\overline{\mathbf{C}}]^H - (\overline{\mathbf{A}\mathbf{C}})^T = \mathbf{CB}$ .

Poichè  $\mathbf{A}$  è anti-hermitiana,  $\mathbf{B}$  è reale e  $\mathbf{C}$  è simmetrica, si ha

$$(i) \quad \mathbf{A}^H = -\mathbf{A}, \quad (ii) \quad \overline{\mathbf{B}} = \mathbf{B}, \quad (iii) \quad \mathbf{C}^T = \mathbf{C}.$$

$$\begin{aligned} (a) \quad & (\mathbf{AB} + \mathbf{C})^H + \mathbf{B}^T \mathbf{A} \\ & \stackrel{\substack{= \\ \uparrow \\ \text{l'H-trasposta di una somma è la somma delle H-trasposte}}}{=} \\ & = (\mathbf{AB})^H + \mathbf{C}^H + \mathbf{B}^T \mathbf{A} \\ & \stackrel{\substack{= \\ \uparrow \\ \text{l'H-trasposta di un prodotto è il prodotto delle H-trasposte in ordine scambiato}}}{=} \\ & = \mathbf{B}^H \mathbf{A}^H + \mathbf{C}^H + \mathbf{B}^T \mathbf{A} \\ & \stackrel{\substack{= \\ \uparrow \\ \mathbf{B}=\overline{\mathbf{B}} \Rightarrow \mathbf{B}^H = \overline{\mathbf{B}}^H = (\overline{\overline{\mathbf{B}}})^T = \mathbf{B}^T}}{=} \\ & = \mathbf{B}^T \mathbf{A}^H + \mathbf{C}^H + \mathbf{B}^T \mathbf{A} \\ & \stackrel{\substack{= \\ \uparrow \\ (i)}}{=} \\ & = \mathbf{B}^T (-\mathbf{A}) + \mathbf{C}^H + \mathbf{B}^T \mathbf{A} \\ & \stackrel{\substack{= \\ \uparrow \\ \mathbf{x}(\alpha\mathbf{Y}) = \alpha\mathbf{xY} \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{Y} \in M_n(\mathbb{C}), \alpha \in \mathbb{C}}}{=} \\ & = -\mathbf{B}^T \mathbf{A} + \mathbf{C}^H + \mathbf{B}^T \mathbf{A} \\ & = \mathbf{C}^H \\ & \stackrel{\substack{= \\ \uparrow \\ \mathbf{C}=\mathbf{C}^T \Rightarrow \mathbf{C}^H = (\mathbf{C}^T)^H = \overline{(\mathbf{C}^T)^T} = \overline{\mathbf{C}}}}{=} \\ & = \overline{\mathbf{C}}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (b) \quad & ((\mathbf{A} + \mathbf{B}^T)\overline{\mathbf{C}})^H - (\overline{\mathbf{A}\mathbf{C}})^T && \stackrel{=}{\uparrow} \\
 & \text{l'H-trasposta di un prodotto è il prodotto delle H-trasposte in ordine scambiato} \\
 & = \overline{\mathbf{C}}^H (\mathbf{A} + \mathbf{B}^T)^H - (\overline{\mathbf{A}\mathbf{C}})^T && \stackrel{=}{\uparrow} \\
 & \text{l'H-trasposta di una somma è la somma delle H-trasposte} \\
 & = \overline{\mathbf{C}}^H (\mathbf{A}^H + (\mathbf{B}^T)^H) - (\overline{\mathbf{A}\mathbf{C}})^T && \stackrel{=}{\uparrow} \\
 & \text{la trasposta di un prodotto è il prodotto delle trasposte in ordine scambiato} \\
 & = \overline{\mathbf{C}}^H (\mathbf{A}^H + (\mathbf{B}^T)^H) - \mathbf{C}^T \overline{\mathbf{A}}^T && \stackrel{=}{\uparrow} \\
 & \overline{\mathbf{x}}^H = (\overline{\mathbf{x}})^T = \mathbf{x}^T \quad \forall \mathbf{x} \\
 & = \mathbf{C}^T (\mathbf{A}^H + (\mathbf{B}^T)^H) - \mathbf{C}^T \overline{\mathbf{A}}^T && \stackrel{=}{\uparrow} \\
 & (\mathbf{x}^T)^H = \overline{(\mathbf{x}^T)^T} = \overline{\mathbf{x}} \quad \forall \mathbf{x} \\
 & = \mathbf{C}^T (\mathbf{A}^H + \overline{\mathbf{B}}) - \mathbf{C}^T \overline{\mathbf{A}}^T && \stackrel{=}{\uparrow} \\
 & \overline{\mathbf{x}}^T = \mathbf{x}^H \quad \forall \mathbf{x} \\
 & = \mathbf{C}^T (\mathbf{A}^H + \overline{\mathbf{B}}) - \mathbf{C}^T \mathbf{A}^H && \stackrel{=}{\uparrow} \\
 & \text{(iii)} \\
 & = \mathbf{C} (\mathbf{A}^H + \overline{\mathbf{B}}) - \mathbf{C} \mathbf{A}^H && \stackrel{=}{\uparrow} \\
 & \text{(i)} \\
 & = \mathbf{C} (-\mathbf{A} + \overline{\mathbf{B}}) - \mathbf{C} (-\mathbf{A}) && \stackrel{=}{\uparrow} \\
 & \text{proprietà distributiva} \\
 & = \mathbf{C} (-\mathbf{A}) + \mathbf{C} \overline{\mathbf{B}} - \mathbf{C} (-\mathbf{A}) = \mathbf{C} \overline{\mathbf{B}} && \stackrel{=}{\uparrow} \\
 & \text{(ii)} \\
 & = \mathbf{C} \overline{\mathbf{B}} = \mathbf{C} \mathbf{B}.
 \end{aligned}$$

4] Si calcolino la parte hermitiana e la parte anti-hermitiana della matrice complessa  $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2+i & -2 \\ 3 & 1-i \end{pmatrix}$  e della sua  $H$ -trasposta  $\mathbf{A}^H$ .

Poichè  $\mathbf{A}^H = \begin{pmatrix} 2-i & 3 \\ -2 & 1+i \end{pmatrix}$ , la parte hermitiana di  $\mathbf{A}$  è

$$\mathbf{B} = \frac{\mathbf{A} + \mathbf{A}^H}{2} = \frac{1}{2} \left( \begin{pmatrix} 2+i & -2 \\ 3 & 1-i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2-i & 3 \\ -2 & 1+i \end{pmatrix} \right) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix},$$

e la parte anti-hermitiana di  $\mathbf{A}$  è

$$\mathbf{C} = \frac{\mathbf{A} - \mathbf{A}^H}{2} = \frac{1}{2} \left( \begin{pmatrix} 2+i & -2 \\ 3 & 1-i \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2-i & 3 \\ -2 & 1+i \end{pmatrix} \right) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2i & -5 \\ 5 & -2i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i & -\frac{5}{2} \\ \frac{5}{2} & -i \end{pmatrix}.$$

Dunque  $\mathbf{A} = \mathbf{B} + \mathbf{C}$  con  $\mathbf{B}^H = \mathbf{B}$  e  $\mathbf{C}^H = -\mathbf{C}$ .

Troviamo ora la parte hermitiana e la parte anti-hermitiana di  $\mathbf{A}^H$ . Facendo la  $H$ -trasposta di  $\mathbf{A} = \mathbf{B} + \mathbf{C}$  si ottiene

$$\mathbf{A}^H = (\mathbf{B} + \mathbf{C})^H = \mathbf{B}^H + \mathbf{C}^H = \mathbf{B} + (-\mathbf{C}),$$

e poichè  $\mathbf{B}^H = \mathbf{B}$  (ossia  $\mathbf{B}$  è hermitiana) e  $(-\mathbf{C})^H = -\mathbf{C}^H = -(-\mathbf{C})$  (ossia  $-\mathbf{C}$  è anti-hermitiana), allora  $\mathbf{B}$  è la parte hermitiana di  $\mathbf{A}^H$  e  $-\mathbf{C}$  è la parte anti-hermitiana di  $\mathbf{A}^H$ .

5] Siano  $\mathbf{B}$  una matrice reale quadrata di ordine  $n - 1$  e  $\mathbf{v}, \mathbf{w}$  vettori colonna reali con  $n - 1$  coordinate.

Si consideri la matrice a blocchi  $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & | & \mathbf{v}^T \\ - & | & - \\ \mathbf{w} & | & \mathbf{B} \end{pmatrix}$ , dove  $a \in \mathbb{R}$ .

(a) Si provi che se  $\mathbf{v}^T \mathbf{w} = 0$  e  $\mathbf{A} \begin{pmatrix} 0 \\ - \\ \mathbf{w} \end{pmatrix} = \mathbf{0}$ , allora la prima colonna di  $\mathbf{A}^2$  è  $a \begin{pmatrix} a \\ - \\ \mathbf{w} \end{pmatrix}$ .

(b) Si provi che se  $\mathbf{A}\mathbf{A}^T = \mathbf{I}_n$  e  $\mathbf{v}^T \mathbf{v} = 1$  allora  $a = 0$  e  $\mathbf{B}\mathbf{v} = \mathbf{0}$ .

(a) Calcolando il prodotto  $\mathbf{A} \begin{pmatrix} 0 \\ - \\ \mathbf{w} \end{pmatrix}$  a blocchi si ottiene

$$\mathbf{A} \begin{pmatrix} 0 \\ - \\ \mathbf{w} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & | & \mathbf{v}^T \\ - & | & - \\ \mathbf{w} & | & \mathbf{B} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ - \\ \mathbf{w} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \cdot 0 + \mathbf{v}^T \mathbf{w} \\ - \\ \mathbf{w} \cdot 0 + \mathbf{B}\mathbf{w} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 + \mathbf{v}^T \mathbf{w} \\ - \\ \mathbf{0} + \mathbf{B}\mathbf{w} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{v}^T \mathbf{w} \\ - \\ \mathbf{B}\mathbf{w} \end{pmatrix}.$$

Dunque dall'ipotesi  $\mathbf{A} \begin{pmatrix} 0 \\ - \\ \mathbf{w} \end{pmatrix} = \mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ - \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}$  si ottiene

$$(*) \quad \begin{cases} \mathbf{v}^T \mathbf{w} = 0 \\ \mathbf{B}\mathbf{w} = \mathbf{0} \end{cases}$$

Quindi l'ipotesi  $\mathbf{v}^T \mathbf{w} = 0$  è compresa (ossia "è implicata da") nell'ipotesi  $\mathbf{A} \begin{pmatrix} 0 \\ - \\ \mathbf{w} \end{pmatrix} = \mathbf{0}$ .

Calcolando il prodotto a blocchi

$$\mathbf{A}^2 = \begin{pmatrix} a & | & \mathbf{v}^T \\ - & | & - \\ \mathbf{w} & | & \mathbf{B} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & | & \mathbf{v}^T \\ - & | & - \\ \mathbf{w} & | & \mathbf{B} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 + \mathbf{v}^T \mathbf{w} & | & a\mathbf{v}^T + \mathbf{v}^T \mathbf{B} \\ - & | & - \\ \mathbf{w}a + \mathbf{B}\mathbf{w} & | & \mathbf{w}\mathbf{v}^T + \mathbf{B}^2 \end{pmatrix}$$

si ottiene che la prima colonna di  $\mathbf{A}^2$  è  $\begin{pmatrix} a^2 + \mathbf{v}^T \mathbf{w} \\ - \\ \mathbf{w}a + \mathbf{B}\mathbf{w} \end{pmatrix}$ .

Sostituendovi  $\mathbf{v}^T \mathbf{w} = 0$  e  $\mathbf{B}\mathbf{w} = \mathbf{0}$  (per (\*)) si deduce che la prima colonna di  $\mathbf{A}^2$  è

$$\begin{pmatrix} a^2 + \mathbf{v}^T \mathbf{w} \\ - \\ \mathbf{w}a + \mathbf{B}\mathbf{w} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 + 0 \\ - \\ \mathbf{w}a + \mathbf{0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 \\ - \\ \mathbf{w}a \end{pmatrix} \stackrel{\uparrow \mathbf{w}a = a\mathbf{w}}{=} \begin{pmatrix} a^2 \\ - \\ a\mathbf{w} \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} a \\ - \\ \mathbf{w} \end{pmatrix}.$$

(b) Da  $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & | & \mathbf{v}^T \\ - & | & - \\ \mathbf{w} & | & \mathbf{B} \end{pmatrix}$ , si ottiene che  $\mathbf{A}^T = \begin{pmatrix} a & | & \mathbf{w}^T \\ - & | & - \\ \mathbf{v} & | & \mathbf{B}^T \end{pmatrix}$ , pertanto il prodotto  $\mathbf{A}\mathbf{A}^T$  calcolato a blocchi è

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^T = \begin{pmatrix} a & | & \mathbf{v}^T \\ - & | & - \\ \mathbf{w} & | & \mathbf{B} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & | & \mathbf{w}^T \\ - & | & - \\ \mathbf{v} & | & \mathbf{B}^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 + \mathbf{v}^T \mathbf{v} & | & a\mathbf{w}^T + \mathbf{v}^T \mathbf{B}^T \\ - & | & - \\ \mathbf{w}a + \mathbf{B}\mathbf{v} & | & \mathbf{w}\mathbf{w}^T + \mathbf{B}\mathbf{B}^T \end{pmatrix}.$$

Dunque, essendo  $\mathbf{I}_n = \begin{pmatrix} 1 & | & \mathbf{0}^T \\ - & | & - \\ \mathbf{0} & | & \mathbf{I}_{n-1} \end{pmatrix}$ , da  $\mathbf{A}\mathbf{A}^T = \mathbf{I}_n$  segue

$$\begin{cases} a^2 + \mathbf{v}^T \mathbf{v} & = & 1 \\ a\mathbf{w}^T + \mathbf{v}^T \mathbf{B}^T & = & \mathbf{0}^T \\ \mathbf{w}a + \mathbf{B}\mathbf{v} & = & \mathbf{0} \\ \mathbf{w}\mathbf{w}^T + \mathbf{B}\mathbf{B}^T & = & \mathbf{I}_{n-1} \end{cases}$$

Poichè per ipotesi  $\mathbf{v}^T \mathbf{v} = 1$ , dalla prima condizione si ottiene  $a^2 = 0$ , e quindi  $a = 0$ .  
Sostituendo ora  $a = 0$  nella terza condizione si ricava

$$\mathbf{0} = \mathbf{w}a + \mathbf{B}\mathbf{v} = \mathbf{w}0 + \mathbf{B}\mathbf{v} = \mathbf{0} + \mathbf{B}\mathbf{v} = \mathbf{B}\mathbf{v}.$$

**[6]** Siano  $\mathbf{X}$  ed  $\mathbf{Y}$  due matrici quadrate di ordine  $n$ . Si consideri la matrice a blocchi

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{X} & | & \mathbf{Y} \\ - & | & - \\ \mathbf{Y} & | & \mathbf{X} \end{pmatrix}.$$

Si provi che se  $\mathbf{A}^2 = \mathbf{I}_{2n}$  allora  $(\mathbf{X} + \mathbf{Y})^2 = \mathbf{I}_n$ .

Calcolando il prodotto  $\mathbf{A}^2 = \mathbf{A}\mathbf{A}$  a blocchi si ottiene

$$\mathbf{A}^2 = \begin{pmatrix} \mathbf{X} & | & \mathbf{Y} \\ - & | & - \\ \mathbf{Y} & | & \mathbf{X} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{X} & | & \mathbf{Y} \\ - & | & - \\ \mathbf{Y} & | & \mathbf{X} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{X}^2 + \mathbf{Y}^2 & | & \mathbf{X}\mathbf{Y} + \mathbf{Y}\mathbf{X} \\ - & | & - \\ \mathbf{Y}\mathbf{X} + \mathbf{X}\mathbf{Y} & | & \mathbf{Y}^2 + \mathbf{X}^2 \end{pmatrix}.$$

Poichè  $\mathbf{I}_{2n} = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_n & | & \mathbf{0} \\ - & | & - \\ \mathbf{0} & | & \mathbf{I}_n \end{pmatrix}$ , dove  $\mathbf{0}$  è  $n \times n$ , da  $\mathbf{A}^2 = \mathbf{I}_{2n}$  segue

$$\begin{cases} \mathbf{X}^2 + \mathbf{Y}^2 & = & \mathbf{I}_n \\ \mathbf{X}\mathbf{Y} + \mathbf{Y}\mathbf{X} & = & \mathbf{0} \end{cases}$$

Quindi

$$(\mathbf{X} + \mathbf{Y})^2 = (\mathbf{X} + \mathbf{Y})(\mathbf{X} + \mathbf{Y}) = \mathbf{X}\mathbf{X} + \mathbf{X}\mathbf{Y} + \mathbf{Y}\mathbf{X} + \mathbf{Y}\mathbf{Y} = \mathbf{X}^2 + \mathbf{0} + \mathbf{Y}^2 = \mathbf{X}^2 + \mathbf{Y}^2 = \mathbf{I}_n.$$

**Svolgimento degli Esercizi per casa 3**

1 Si scrivano le matrici elementari  $\mathbf{E}_{13}(4)$ ,  $\mathbf{E}_3(4)$  ed  $\mathbf{E}_{13}$  di ordine 3 e di ordine 4.

$$\begin{aligned} \text{di ordine 3:} \quad \mathbf{E}_{13}(4) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{E}_3(4) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \mathbf{E}_{13} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \text{di ordine 4:} \quad \mathbf{E}_{13}(4) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{E}_3(4) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{E}_{13} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

2 Sia  $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{r}^T \\ \mathbf{r}^T \end{pmatrix}$  una matrice reale  $2 \times n$  non nulla con le righe uguali. Si trovino tutte le matrici elementari  $\mathbf{E}$  tali che  $\mathbf{EA} = \begin{pmatrix} \mathbf{r}^T \\ 3\mathbf{r}^T \end{pmatrix}$ .

Premoltiplicare  $\mathbf{A}$  per una matrice elementare equivale ad eseguire un'operazione elementare sulle sue righe.

Poichè  $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{r}^T \\ \mathbf{r}^T \end{pmatrix}$  con  $\mathbf{r}^T \neq \mathbf{0}^T$  (essendo  $\mathbf{A} \neq \mathbf{O}$ ), le operazioni elementari sulle righe di  $\mathbf{A}$  che permettono di ottenere la matrice  $\begin{pmatrix} \mathbf{r}^T \\ 3\mathbf{r}^T \end{pmatrix}$  da  $\mathbf{A}$  sono esattamente le seguenti:

- (a) moltiplicare la 2<sup>a</sup> riga di  $\mathbf{A}$  per il numero 3,
- (b) sommare alla 2<sup>a</sup> riga di  $\mathbf{A}$  la 1<sup>a</sup> riga di  $\mathbf{A}$  moltiplicata per il numero 2.

Eeguire l'operazione (a) equivale a premoltiplicare  $\mathbf{A}$  per la matrice elementare  $\mathbf{E}_2(\mathbf{3}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ ; eseguire l'operazione (b) equivale a premoltiplicare  $\mathbf{A}$  per la matrice elementare  $\mathbf{E}_{21}(\mathbf{2}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ .

Dunque  $\mathbf{E} \in \{\mathbf{E}_2(\mathbf{3}), \mathbf{E}_{21}(\mathbf{2})\}$ .

**N.B.** Se  $\mathbf{A}$  fosse nulla, anche  $\begin{pmatrix} \mathbf{r}^T \\ 3\mathbf{r}^T \end{pmatrix}$  sarebbe nulla, e per ogni matrice elementare  $\mathbf{E}$  di ordine 2 si avrebbe  $\mathbf{EA} = \begin{pmatrix} \mathbf{r}^T \\ 3\mathbf{r}^T \end{pmatrix}$ .

3 Siano  $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 4 & 0 \\ 3 & -3 & 9 & 6 \\ 3 & -3 & 3 & -6 \end{pmatrix}$  e  $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 3 & -9 \\ -2 & 6 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}$ . Si trovino forme ridotte di Gauss per  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{B}$ .

Facendo un'eliminazione di Gauss su  $\mathbf{A}$  si ottiene:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 4 & 0 \\ 3 & -3 & 9 & 6 \\ 3 & -3 & 3 & -6 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{31}(-3)E_{21}(-3)E_1(1/2)} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & -3 & -6 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\xrightarrow{E_{32}(3)E_2(1/3)} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{U}_1$$

ed  $\mathbf{U}_1$  è una forma ridotta di Gauss per  $\mathbf{A}$ .

Facendo un'eliminazione di Gauss su  $\mathbf{B}$  si ottiene:

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 3 & -9 \\ -2 & 6 \\ 4 & 8 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{31}(-4)E_{21}(2)E_1(1/3)} \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 0 \\ 0 & 20 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_2(\frac{1}{20})E_{23}} \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{U}_2$$

ed  $\mathbf{U}_2$  è una forma ridotta di Gauss per  $\mathbf{B}$ .

**4** Sia  $\mathbf{A}(\alpha) = \begin{pmatrix} 2i & 0 & -2i & 2i\alpha \\ 1 & \alpha^2 + 4 & 0 & \alpha \\ 2 & 2\alpha^2 + 8 & 0 & 4\alpha \end{pmatrix}$ , dove  $\alpha \in \mathbb{C}$ . Per ogni  $\alpha \in \mathbb{C}$  si trovi una forma ridotta di Gauss  $\mathbf{U}(\alpha)$  per  $\mathbf{A}(\alpha)$  e si dica quali sono le colonne dominanti e quali sono le colonne libere di  $\mathbf{U}(\alpha)$ .

Facciamo un'eliminazione di Gauss su  $\mathbf{A}(\alpha)$ :

$$\mathbf{A}(\alpha) = \begin{pmatrix} 2i & 0 & -2i & 2i\alpha \\ 1 & \alpha^2 + 4 & 0 & \alpha \\ 2 & 2\alpha^2 + 8 & 0 & 4\alpha \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{31}(-2)E_{21}(-1)E_1(-\frac{1}{2}i)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & \alpha \\ 0 & \alpha^2 + 4 & 1 & 0 \\ 0 & 2\alpha^2 + 8 & 2 & 2\alpha \end{pmatrix} = \mathbf{B}(\alpha)$$

**1°CASO**  $\alpha^2 + 4 \neq 0$  ossia  $\alpha \neq 2i$  ed  $\alpha \neq -2i$ .

$$\mathbf{B}(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & \alpha \\ 0 & \alpha^2 + 4 & 1 & 0 \\ 0 & 2\alpha^2 + 8 & 2 & 2\alpha \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{32}(-2\alpha^2 - 8)E_2(\frac{1}{\alpha^2 + 4})} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & \alpha \\ 0 & 1 & 1/(\alpha^2 + 4) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2\alpha \end{pmatrix} = \mathbf{C}(\alpha)$$

**1° sottocaso del 1° caso**  $\alpha \neq 2i, \alpha \neq -2i, \alpha \neq 0$

$$\mathbf{C}(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & \alpha \\ 0 & 1 & 1/(\alpha^2 + 4) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2\alpha \end{pmatrix} \xrightarrow{E_3(1/2\alpha)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & \alpha \\ 0 & 1 & 1/(\alpha^2 + 4) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{U}(\alpha)$$

$\mathbf{U}(\alpha)$  è una forma ridotta di Gauss per  $\mathbf{A}(\alpha)$ , le colonne dominanti sono la 1<sup>a</sup>, la 2<sup>a</sup> e la 4<sup>a</sup>, l'unica colonna libera è la 3<sup>a</sup>.

$$\boxed{2^{\circ} \text{ sottocaso del } 1^{\circ} \text{ caso}} \quad \alpha = 0 \quad \mathbf{C}(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{U}(0) \quad \text{è una forma ridotta}$$

di Gauss per  $\mathbf{A}(0)$ , le colonne dominanti sono la 1<sup>a</sup> e la 2<sup>a</sup>, quelle libere la 3<sup>a</sup> e la 4<sup>a</sup>.

$$\boxed{2^{\circ} \text{ CASO}} \quad \alpha^2 + 4 = 0 \text{ ossia } \alpha = 2i \text{ oppure } \alpha = -2i.$$

$$\mathbf{B}(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & \alpha \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2\alpha \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{32}(-2)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & \alpha \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2\alpha \end{pmatrix} \xrightarrow{E_3(1/2\alpha) \quad (\alpha \neq 0)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & \alpha \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{U}(\alpha)$$

$\mathbf{U}(\alpha)$  è una forma ridotta di Gauss per  $\mathbf{A}(\alpha)$ , le colonne dominanti sono la 1<sup>a</sup>, la 3<sup>a</sup> e la 4<sup>a</sup>, l'unica colonna libera è la 2<sup>a</sup>.

**5** Si risolva il sistema lineare  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$  dove

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 9 & 6 \\ 1 & -1 & 7 & 4 \\ 1 & -1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Troviamo una forma ridotta di Gauss della matrice aumentata del sistema.

$$\begin{aligned} (\mathbf{A} \mid \mathbf{b}) &= \left( \begin{array}{cccc|c} 3 & -3 & 9 & 6 & 6 \\ 1 & -1 & 7 & 4 & 4 \\ 1 & -1 & 3 & 2 & 2 \end{array} \right) \xrightarrow{E_{31}(-1)E_{21}(-1)E_1(\frac{1}{3})} \\ &\rightarrow \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{E_2(\frac{1}{4})} \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) = (\mathbf{U} \mid \mathbf{d}). \end{aligned}$$

Il sistema  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$  è equivalente al sistema  $\mathbf{Ux} = \mathbf{d}$  che è una forma compatta per

$$(*) \quad \begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 2 \\ x_3 + \frac{1}{2}x_4 = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Poichè  $\mathbf{d}$  è libera,  $\mathbf{Ux} = \mathbf{d}$  ammette soluzioni.

Poichè  $\mathbf{U}$  ha esattamente due colonne libere,  $\mathbf{Ux} = \mathbf{d}$  ha  $\infty^2$  soluzioni.

Scegliamo come parametri le variabili corrispondenti alle colonne libere di  $\mathbf{U}$  (la 2<sup>a</sup> e la 4<sup>a</sup>) e con la sostituzione all'indietro da (\*) otteniamo

$$\begin{cases} x_2 = h \\ x_4 = k \\ x_3 = -\frac{1}{2}x_4 + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}k + \frac{1}{2} \\ x_1 = x_2 - 3x_3 - 2x_4 + 2 = h - 3(-\frac{1}{2}k + \frac{1}{2}) - 2k + 2 = h - \frac{1}{2}k + \frac{1}{2} \end{cases}$$

L'insieme delle soluzioni del sistema  $\mathbf{U}\mathbf{x} = \mathbf{d}$  ( e quindi l'insieme delle soluzioni del sistema  $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$  ) è

$$\left\{ \left( \begin{array}{c} h - \frac{1}{2}k + \frac{1}{2} \\ h \\ -\frac{1}{2}k + \frac{1}{2} \\ k \end{array} \right) \mid h, k \in \mathbb{C} \right\}.$$

**6** Si risolva il sistema lineare  $\mathbf{A}(\alpha)\mathbf{x} = \mathbf{b}(\alpha)$  dipendente dal parametro complesso  $\alpha$  dove

$$\mathbf{A}(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & \alpha - i & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & \alpha - i & \alpha + i \\ -\alpha - i & -\alpha^2 - 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{b}(\alpha) = \begin{pmatrix} \alpha - i \\ \alpha^2 + 1 \\ 2\alpha \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^4.$$

Troviamo una forma ridotta di Gauss della matrice aumentata del sistema.

$$\begin{aligned} (\mathbf{A}(\alpha) \mid \mathbf{b}(\alpha)) &= \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & \alpha - i & 0 & \alpha - i \\ 0 & 1 & 0 & \alpha^2 + 1 \\ 1 & \alpha - i & \alpha + i & 2\alpha \\ -\alpha - i & -\alpha^2 - 1 & 0 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{E_{41}(\alpha+i)E_{31}(-1)} \\ &\rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & \alpha - i & 0 & \alpha - i \\ 0 & 1 & 0 & \alpha^2 + 1 \\ 0 & 0 & \alpha + i & \alpha + i \\ 0 & 0 & 0 & \alpha^2 + 1 \end{array} \right) = (\mathbf{B}(\alpha) \mid \mathbf{c}(\alpha)). \end{aligned}$$

**1° CASO**  $\alpha = -i$   $(\mathbf{B}(-i) \mid \mathbf{c}(-i)) = \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -2i & 0 & -2i \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$  è una forma ridotta di Gauss

per  $(\mathbf{A}(-i) \mid \mathbf{b}(-i))$ , quindi  $\mathbf{A}(-i)\mathbf{x} = \mathbf{b}(-i)$  è equivalente a  $\mathbf{B}(-i)\mathbf{x} = \mathbf{c}(-i)$  che è una forma compatta per

$$(*) \quad \begin{cases} x_1 - 2ix_2 & = -2i \\ x_2 & = 0 \end{cases}$$

Poichè  $\mathbf{c}(-i)$  è libera,  $\mathbf{B}(-i)\mathbf{x} = \mathbf{c}(-i)$  ammette soluzioni.

Poichè  $\mathbf{B}(-i)$  ha esattamente una colonna libera,  $\mathbf{B}(-i)\mathbf{x} = \mathbf{c}(-i)$  ha  $\infty^1$  soluzioni.

Scegliamo come parametro la variabile corrispondente alla colonna libera di  $\mathbf{B}(-i)$  (la 3<sup>a</sup>) e con la sostituzione all'indietro da (\*) otteniamo

$$\begin{cases} x_3 = h \\ x_2 = 0 \\ x_1 = 2ix_2 - 2i = -2i \end{cases}$$

L'insieme delle soluzioni del sistema  $\mathbf{B}(-i)\mathbf{x} = \mathbf{c}(-i)$  ( e quindi l'insieme delle soluzioni del sistema  $\mathbf{A}(-i)\mathbf{x} = \mathbf{b}(-i)$  ) è

$$\left\{ \left( \begin{array}{c} -2i \\ 0 \\ h \end{array} \right) \mid h \in \mathbb{C} \right\}.$$

**2<sup>0</sup> CASO**  $\alpha \neq -i$

$$\begin{aligned}
 (\mathbf{B}(\alpha) \mid \mathbf{c}(\alpha)) &= \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & \alpha - i & 0 & \alpha - i \\ 0 & 1 & 0 & \alpha^2 + 1 \\ 0 & 0 & \alpha + i & \alpha + i \\ 0 & 0 & 0 & \alpha^2 + 1 \end{array} \right) \xrightarrow{E_3(\frac{1}{\alpha+i})} \\
 &\rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & \alpha - i & 0 & \alpha - i \\ 0 & 1 & 0 & \alpha^2 + 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha^2 + 1 \end{array} \right) \xrightarrow{E_4(\frac{1}{\alpha+i})} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & \alpha - i & 0 & \alpha - i \\ 0 & 1 & 0 & \alpha^2 + 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha - i \end{array} \right) = (\mathbf{C}(\alpha) \mid \mathbf{d}(\alpha)).
 \end{aligned}$$

**1<sup>0</sup> Sottocaso**  $\alpha = i$   $(\mathbf{C}(\mathbf{i}) \mid \mathbf{d}(\mathbf{i})) = \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$  è una forma ridotta di Gauss per  $(\mathbf{A}(\mathbf{i}) \mid \mathbf{b}(\mathbf{i}))$ , quindi  $\mathbf{A}(\mathbf{i})\mathbf{x} = \mathbf{b}(\mathbf{i})$  è equivalente a  $\mathbf{C}(\mathbf{i})\mathbf{x} = \mathbf{d}(\mathbf{i})$  che è una forma compatta per

$$(*) \quad \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 1 \end{cases}$$

Poichè  $\mathbf{d}(\mathbf{i})$  è libera,  $\mathbf{C}(\mathbf{i})\mathbf{x} = \mathbf{d}(\mathbf{i})$  ammette soluzioni.

Poichè tutte le colonne di  $\mathbf{C}(\mathbf{i})$  sono dominanti,  $\mathbf{C}(\mathbf{i})\mathbf{x} = \mathbf{d}(\mathbf{i})$  ammette un'unica soluzione. L'unica soluzione di  $\mathbf{C}(\mathbf{i})\mathbf{x} = \mathbf{d}(\mathbf{i})$  ( e quindi di  $\mathbf{A}(\mathbf{i})\mathbf{x} = \mathbf{b}(\mathbf{i})$  ) è

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

**2<sup>0</sup> Sottocaso**  $\alpha \notin \{i, -i\}$   $(\mathbf{C}(\alpha) \mid \mathbf{d}(\alpha)) = \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & \alpha - i & 0 & \alpha - i \\ 0 & 1 & 0 & \alpha^2 + 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha - i \end{array} \right) \xrightarrow{E_4(\frac{1}{\alpha-i})}$

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & \alpha - i & 0 & \alpha - i \\ 0 & 1 & 0 & \alpha^2 + 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) = (\mathbf{D}(\alpha) \mid \mathbf{e}(\alpha)) \text{ è una forma ridotta di Gauss per } (\mathbf{A}(\alpha) \mid \mathbf{b}(\alpha)).$$

Poichè  $\mathbf{e}(\alpha)$  è dominante,  $\mathbf{D}(\alpha)\mathbf{x} = \mathbf{e}(\alpha)$  ( e quindi di  $\mathbf{A}(\alpha)\mathbf{x} = \mathbf{b}(\alpha)$  ) non ammette soluzioni.

**7** Si provi che l'inversa di una matrice simmetrica non singolare è una matrice simmetrica.

Sia  $\mathbf{A}$  una matrice simmetrica non singolare.

Poichè  $\mathbf{A}$  è simmetrica,  $\mathbf{A}$  coincide con la sua trasposta:

$$(i) \quad \mathbf{A} = \mathbf{A}^T.$$

Poichè  $\mathbf{A}$  è non singolare, la trasposta  $\mathbf{A}^T$  di  $\mathbf{A}$  è non singolare ed ha inversa uguale alla trasposta dell'inversa di  $\mathbf{A}$ :

$$(ii) \quad (\mathbf{A}^T)^{-1} = (\mathbf{A}^{-1})^T.$$

Allora

$$(\mathbf{A}^{-1})^T \underset{(ii)}{=} (\mathbf{A}^T)^{-1} \underset{(i)}{=} \mathbf{A}^{-1},$$

ossia  $\mathbf{A}^{-1}$  è simmetrica.

8 Si trovino tutte le inverse destre della matrice  $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ .

Un'inversa destra di  $\mathbf{A}$  è una matrice  $3 \times 2$   $\mathbf{R}$  tale che se  $\mathbf{R} = (\mathbf{c}_1 \mid \mathbf{c}_2)$ , allora

$\mathbf{c}_1$  è soluzione di (1)  $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  e

$\mathbf{c}_2$  è soluzione di (2)  $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

Cerchiamo tutte le soluzioni di (1) e (2).

$$\begin{aligned} (\mathbf{A} \mid \mathbf{I}_2) &= \left( \begin{array}{ccc|cc} 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{E_{21}(-1)E_1(\frac{1}{2})} \left( \begin{array}{ccc|cc} 1 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 3 & -\frac{1}{2} & 1 \end{array} \right) \rightarrow \\ &\xrightarrow{E_2(-2)} \left( \begin{array}{ccc|cc} 1 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & -6 & 1 & -2 \end{array} \right) = (\mathbf{U} \mid \mathbf{b}_1 \quad \mathbf{b}_2). \end{aligned}$$

(1) è equivalente a (1')  $\mathbf{U}\mathbf{x} = \mathbf{b}_1$  che è una forma compatta per

$$\begin{cases} x_1 + \frac{1}{2}x_2 = \frac{1}{2} \\ x_2 - 6x_3 = 1 \end{cases}$$

Scegliamo come parametro la variabile corrispondente all'unica colonna libera di  $\mathbf{U}$  (la 3<sup>a</sup>) e con la sostituzione all'indietro otteniamo

$$\begin{cases} x_3 = h \\ x_2 = 6x_3 + 1 = 6h + 1 \\ x_1 = -\frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}(6h + 1) + \frac{1}{2} = -3h \end{cases}$$

L'insieme delle soluzioni di (1) è

$$\left\{ \begin{pmatrix} -3h \\ 6h + 1 \\ h \end{pmatrix} \mid h \in \mathbb{C} \right\}.$$

(2) è equivalente a (2')  $\mathbf{U}\mathbf{x} = \mathbf{b}_2$  che è una forma compatta per

$$\begin{cases} x_1 + \frac{1}{2}x_2 = 0 \\ x_2 - 6x_3 = -2 \end{cases}$$

Scegliamo come parametro la variabile corrispondente all'unica colonna libera di  $\mathbf{U}$  (la 3<sup>a</sup>) e con la sostituzione all'indietro otteniamo

$$\begin{cases} x_3 = k \\ x_2 = 6x_3 - 2 = 6k - 2 \\ x_1 = -\frac{1}{2}x_2 = -\frac{1}{2}(6k - 2) = -3k + 1 \end{cases}$$

L'insieme delle soluzioni di (2) è

$$\left\{ \begin{pmatrix} -3k + 1 \\ 6k - 2 \\ k \end{pmatrix} \mid k \in \mathbb{C} \right\}.$$

Le inverse destre di  $\mathbf{A}$  sono esattamente tutte le matrici del tipo  $\mathbf{R}(\mathbf{h}, \mathbf{k}) = \begin{pmatrix} -3h & -3k + 1 \\ 6h + 1 & 6k - 2 \\ h & k \end{pmatrix}$ , al variare di  $h, k \in \mathbb{C}$ .

**9** Si trovino tutte le inverse sinistre della matrice  $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ .

Si trovino tutte le inverse sinistre della matrice  $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ .

1. Poniamo  $\mathbf{B} = \mathbf{A}^T$ .
2. Cerchiamo tutte le inverse destre di  $\mathbf{B}$ . Dall'esercizio **8** sappiamo che sono tutte e sole le matrici del tipo  $\begin{pmatrix} -3h & -3k + 1 \\ 6h + 1 & 6k - 2 \\ h & k \end{pmatrix}$  con  $h, k \in \mathbb{C}$ .
3. Una matrice è inversa sinistra di  $\mathbf{A}$  se e solo se è la trasposta di una inversa destra di  $\mathbf{B}$ . Quindi le inverse sinistre di  $\mathbf{A}$  sono esattamente tutte le matrici del tipo  $\begin{pmatrix} -3h & 6h + 1 & h \\ -3k + 1 & 6k - 2 & k \end{pmatrix}$  al variare di  $h, k \in \mathbb{C}$ .

**Svolgimento degli esercizi per casa 4**

[1] Sia  $\mathbf{A}(\alpha) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \alpha & \alpha^2 & -\alpha \\ 2\alpha & 2\alpha^2 & 1 \end{pmatrix}$ , dove  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Per quegli  $\alpha \in \mathbb{R}$  per cui  $\mathbf{A}(\alpha)$  è non singolare, si calcoli  $\mathbf{A}(\alpha)^{-1}$ .

$$\begin{aligned}
 (\mathbf{A}(\alpha) \mid \mathbf{I}_3) &= \left( \begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \alpha & \alpha^2 & -\alpha & 0 & 1 & 0 \\ 2\alpha & 2\alpha^2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{E_{21}} \\
 &\rightarrow \left( \begin{array}{ccc|ccc} \alpha & \alpha^2 & -\alpha & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2\alpha & 2\alpha^2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{E_{31}(-2\alpha)E_1(\frac{1}{\alpha})} \boxed{\alpha \neq 0 : \mathbf{A}(0) \text{ non ha inversa}} \\
 &\rightarrow \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & \alpha & -1 & 0 & \frac{1}{\alpha} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1+2\alpha & 0 & -2 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{E_3(\frac{1}{1+2\alpha})} \boxed{\alpha \neq -\frac{1}{2} : \mathbf{A}(-\frac{1}{2}) \text{ non ha inversa}} \\
 &\rightarrow \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & \alpha & -1 & 0 & \frac{1}{\alpha} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{2}{1+2\alpha} & \frac{1}{1+2\alpha} \end{array} \right) \xrightarrow{E_{13}(1)} \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & \alpha & 0 & 0 & \frac{1}{\alpha(1+2\alpha)} & \frac{1}{1+2\alpha} \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{2}{1+2\alpha} & \frac{1}{1+2\alpha} \end{array} \right) \xrightarrow{E_{12}(-\alpha)} \\
 &\rightarrow \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\alpha & \frac{1}{\alpha(1+2\alpha)} & \frac{1}{1+2\alpha} \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{2}{1+2\alpha} & \frac{1}{1+2\alpha} \end{array} \right).
 \end{aligned}$$

Se  $\alpha \notin \{0, -\frac{1}{2}\}$   $\mathbf{A}(\alpha)^{-1} = \begin{pmatrix} -\alpha & \frac{1}{\alpha(1+2\alpha)} & \frac{1}{1+2\alpha} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{2}{1+2\alpha} & \frac{1}{1+2\alpha} \end{pmatrix}$ .

[2] Sia  $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 6i & 1-i \\ 3 & -i \end{pmatrix}$ . Si calcoli  $\mathbf{A}^{-1}$ .

Ricordando che

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \quad \text{se } ad-bc \neq 0,$$

si ha:

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{6i(-i) - 3(1-i)} \begin{pmatrix} -i & -1+i \\ -3 & 6i \end{pmatrix} = \frac{1}{6-3+3i} \begin{pmatrix} -i & -1+i \\ -3 & 6i \end{pmatrix} = \frac{1}{3+3i} \begin{pmatrix} -i & -1+i \\ -3 & 6i \end{pmatrix}$$

Poichè

$$\frac{1}{3+3i} = \frac{1}{3+3i} \times \frac{\overline{3+3i}}{\overline{3+3i}} = \frac{3-3i}{(3+3i)(3-3i)} = \frac{3-3i}{3^2-3^2i^2} = \frac{3-3i}{9+9} = \frac{1}{6} - \frac{1}{6}i,$$

allora

$$\mathbf{A}^{-1} = \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{6}i\right) \begin{pmatrix} -i & -1+i \\ -3 & 6i \end{pmatrix}.$$

**3** Si dica per quali  $\alpha \in \mathbb{C}$  la matrice  $\mathbf{A}(\alpha) = \begin{pmatrix} \alpha+3i & \alpha \\ \alpha+3i & \alpha-i \end{pmatrix}$  è non singolare. Per tali  $\alpha$ , si trovi l'inversa di  $\mathbf{A}(\alpha)$ .

Ricordando che  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  è non singolare se e solo se  $ad - bc \neq 0$  ed in tal caso si ha

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix},$$

allora  $\mathbf{A}(\alpha)$  è non singolare se e solo se

$$(\alpha+3i)(\alpha-i) - \alpha(\alpha+3i) = -i(\alpha+3i) \neq 0,$$

ossia se e solo se  $\alpha \neq -3i$ , ed in tal caso si ha:

$$\mathbf{A}(\alpha)^{-1} = \frac{1}{-i(\alpha+3i)} \begin{pmatrix} \alpha-i & -\alpha \\ -\alpha-3i & \alpha+3i \end{pmatrix}.$$

**4** Si scriva la matrice  $\mathbf{T} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$  come prodotto di matrici elementari.

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \mathbf{E}_{31}(4)\mathbf{E}_2(3)\mathbf{E}_{42}(-1)\mathbf{E}_4(4).$$

**5** (a) Si scriva esplicitamente la matrice  $4 \times 4$   $\mathbf{A} = \mathbf{E}_2(2)\mathbf{E}_{32}(7)\mathbf{E}_3(-2)$ .

(b) Si scrivano  $\mathbf{A}^{-1}$  ed  $\mathbf{A}^T$  come prodotti di matrici elementari.

$$(a) \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(b)  $\mathbf{A}^{-1} = \left( \mathbf{E}_2(2)\mathbf{E}_{32}(7)\mathbf{E}_3(-2) \right)^{-1} = \mathbf{E}_3(-2)^{-1}\mathbf{E}_{32}(7)^{-1}\mathbf{E}_2(2)^{-1} = \mathbf{E}_3(-\frac{1}{2})\mathbf{E}_{32}(-7)\mathbf{E}_2(\frac{1}{2})$ .

$\mathbf{A}^T = \left( \mathbf{E}_2(2)\mathbf{E}_{32}(7)\mathbf{E}_3(-2) \right)^T = \mathbf{E}_3(-2)^T\mathbf{E}_{32}(7)^T\mathbf{E}_2(2)^T = \mathbf{E}_3(-2)\mathbf{E}_{23}(7)\mathbf{E}_2(2)$ .

6 Sia  $\mathbf{A}(\alpha) = \begin{pmatrix} \alpha & 3\alpha & 2\alpha & -2\alpha \\ 0 & 0 & \alpha^2 + 9 & \alpha^2 + 9 \\ 2 & 6 & 4 & -3 + \alpha \\ 1 & 3 & 1 & -6 - 3\alpha \\ \alpha + 1 & 3\alpha + 3 & 2\alpha + 1 & -1 \end{pmatrix}$ , dove  $\alpha \in \mathbb{C}$ .

(a) Per ogni  $\alpha \notin \{0, 3i, -3i\}$  si trovi una decomposizione  $\mathbf{A}(\alpha) = \mathbf{L}(\alpha)\mathbf{U}(\alpha)$ , scrivendo anche  $\mathbf{L}(\alpha)$  come prodotto di matrici elementari.

(b) Per ogni  $\alpha \notin \{0, 3i, -3i\}$  si trovi una decomposizione a rango pieno  $\mathbf{A}(\alpha) = \mathbf{L}_0(\alpha)\mathbf{U}_0(\alpha)$ .

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(\alpha) &= \begin{pmatrix} \boxed{\alpha} & 3\alpha & 2\alpha & -2\alpha \\ \boxed{0} & 0 & \alpha^2 + 9 & \alpha^2 + 9 \\ \boxed{2} & 6 & 4 & -3 + \alpha \\ \boxed{1} & 3 & 1 & -6 - 3\alpha \\ \boxed{\alpha + 1} & 3\alpha + 3 & 2\alpha + 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{51}(-\alpha-1)E_{41}(-1)E_{31}(-2)E_1(\frac{1}{\alpha})} \boxed{\alpha \neq 0} \\ &\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & \boxed{\alpha^2 + 9} & \alpha^2 + 9 \\ 0 & 0 & \boxed{0} & \alpha + 1 \\ 0 & 0 & \boxed{-1} & -3\alpha - 4 \\ 0 & 0 & \boxed{-1} & 2\alpha + 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{52}(1)E_{42}(1)E_2(\frac{1}{\alpha^2+9})} \boxed{\alpha \notin \{3i, -3i\}} \\ &\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha + 1 \\ 0 & 0 & 0 & -3\alpha - 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2\alpha + 2 \end{pmatrix} = \mathbf{B}(\alpha) \end{aligned}$$

1°CASO  $\alpha \neq -1$  (nonchè  $\alpha \neq 0, 3i, -3i$ )

$$\mathbf{B}(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{\alpha + 1} \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{-3\alpha - 3} \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{2\alpha + 2} \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{53}(-2\alpha-2)E_{43}(3\alpha+3)E_3(\frac{1}{\alpha+1})} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{U}(\alpha)$$

$$\mathbf{L}(\alpha) = \begin{pmatrix} \boxed{\alpha} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \boxed{0} & \boxed{\alpha^2 + 9} & 0 & 0 & 0 \\ \boxed{2} & \boxed{0} & \boxed{\alpha + 1} & 0 & 0 \\ \boxed{1} & \boxed{-1} & \boxed{-3\alpha - 3} & 1 & 0 \\ \boxed{\alpha + 1} & \boxed{-1} & \boxed{2\alpha + 2} & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \mathbf{E}_1(\alpha)\mathbf{E}_{31}(2)\mathbf{E}_{41}(1)\mathbf{E}_{51}(\alpha + 1)\mathbf{E}_2(\alpha^2 + 9)\mathbf{E}_{42}(-1)\mathbf{E}_{52}(-1)\mathbf{E}_3(\alpha + 1)\mathbf{E}_{43}(-3\alpha - 3)\mathbf{E}_{53}(2\alpha + 2)$$

$\boxed{2^\circ \text{CASO}}$   $\alpha = -1$

$$\mathbf{B}(-1) = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{U}(-1)$$

$$\mathbf{L}(-1) = \begin{pmatrix} \boxed{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \boxed{0} & \boxed{10} & 0 & 0 & 0 \\ \boxed{2} & \boxed{0} & 1 & 0 & 0 \\ \boxed{1} & \boxed{-1} & 0 & 1 & 0 \\ \boxed{0} & \boxed{-1} & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{E}_1(-1)\mathbf{E}_{31}(2)\mathbf{E}_{41}(1)\mathbf{E}_2(10)\mathbf{E}_{42}(-1)\mathbf{E}_{52}(-1)$$

$\boxed{N.B.}$  Se  $\alpha \in \{0, 3i, -3i\}$  non è possibile trovare una forma ridotta di Gauss di  $\mathbf{A}(\alpha)$  senza fare scambi di righe, quindi  $\mathbf{A}(\alpha)$  **NON** ha una decomposizione  $\mathbf{L}(\alpha)\mathbf{U}(\alpha)$ .

Per ogni  $\alpha \notin \{-1, 0, 3i, -3i\}$ , si ha una decomposizione a rango pieno  $\mathbf{A}(\alpha) = \mathbf{L}_0(\alpha)\mathbf{U}_0(\alpha)$  prendendo

$$\mathbf{U}_0(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ e } \mathbf{L}_0(\alpha) = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \alpha^2 + 9 & 0 \\ 2 & 0 & \alpha + 1 \\ 1 & -1 & -3\alpha - 3 \\ \alpha + 1 & -1 & 2\alpha + 2 \end{pmatrix};$$

per  $\alpha = -1$  si ha una decomposizione a rango pieno  $\mathbf{A}(-1) = \mathbf{L}_0(-1)\mathbf{U}_0(-1)$  prendendo

$$\mathbf{U}_0(-1) = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ e } \mathbf{L}_0(-1) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 10 \\ 2 & 0 \\ 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

$\boxed{7}$  Sia  $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 9 & -6 & 0 \\ -2 & -6 & 4 & -1 \\ 0 & 2 & -4 & 0 \\ 1 & 7 & 6 & 0 \\ 1 & -4 & 10 & -4 \end{pmatrix}$ .

- (a) Si trovi una decomposizione  $\mathbf{A} = \mathbf{P}^T \mathbf{L} \mathbf{U}$ .  
 (b) Si trovi una decomposizione a rango pieno per  $\mathbf{A}$ .

(a) Applicando l'algoritmo di Gauss ad  $A$  si ottiene:

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \begin{pmatrix} 3 & 9 & -6 & 0 \\ -2 & -6 & 4 & -1 \\ 0 & 2 & -4 & 0 \\ 1 & 7 & 6 & 0 \\ 1 & -4 & 10 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{51}(-1)E_{41}(-1)E_{21}(2)E_1(\frac{1}{3})} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -4 & 0 \\ 0 & 4 & 8 & 0 \\ 0 & -7 & 12 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{23}} \\ &\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & 8 & 0 \\ 0 & -7 & 12 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{52}(7)E_{42}(-4)E_2(\frac{1}{2})} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 16 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{34}} \\ &\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 16 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{53}(2)E_3(\frac{1}{16})} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{54}(4)E_4(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Sia

$$\mathbf{P} = \mathbf{E}_{34} \mathbf{E}_{23} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Allora

$$\mathbf{P} \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 9 & -6 & 0 \\ -2 & -6 & 4 & -1 \\ 0 & 2 & -4 & 0 \\ 1 & 7 & 6 & 0 \\ 1 & -4 & 10 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 9 & -6 & 0 \\ 0 & 2 & -4 & 0 \\ 1 & 7 & 6 & 0 \\ -2 & -6 & 4 & -1 \\ 1 & -4 & 10 & -4 \end{pmatrix}.$$

Applichiamo l'algoritmo di Gauss senza scambi di righe a  $\mathbf{P} \mathbf{A}$ . Otteniamo una decomposizione  $\mathbf{L} \mathbf{U}$  per  $\mathbf{P} \mathbf{A}$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{P} \mathbf{A} &= \begin{pmatrix} \boxed{3} & 9 & -6 & 0 \\ \boxed{0} & 2 & -4 & 0 \\ \boxed{1} & 7 & 6 & 0 \\ \boxed{-2} & -6 & 4 & -1 \\ \boxed{1} & -4 & 10 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{51}(-1)E_{41}(2)E_{31}(-1)E_1(\frac{1}{3})} \begin{pmatrix} 1 & \boxed{3} & -2 & 0 \\ 0 & \boxed{2} & -4 & 0 \\ 0 & \boxed{4} & 8 & 0 \\ 0 & \boxed{0} & 0 & -1 \\ 0 & \boxed{-7} & 12 & -4 \end{pmatrix} \rightarrow \\ &\xrightarrow{E_{52}(7)E_{32}(-4)E_2(\frac{1}{2})} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{16} & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{0} & -1 \\ 0 & 0 & \boxed{-2} & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{53}(2)E_3(\frac{1}{16})} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{-1} \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{-4} \end{pmatrix} \rightarrow \end{aligned}$$

$$\xrightarrow{E_{54}(4)E_4(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{U},$$

ed

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} \boxed{3} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \boxed{0} & \boxed{2} & 0 & 0 & 0 \\ \boxed{1} & \boxed{4} & \boxed{16} & 0 & 0 \\ \boxed{-2} & \boxed{0} & \boxed{0} & \boxed{-1} & 0 \\ \boxed{1} & \boxed{-7} & \boxed{-2} & \boxed{-4} & 1 \end{pmatrix}.$$

Dunque  $\mathbf{A} = \mathbf{P}^T \mathbf{L} \mathbf{U}$  dove

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{L} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 16 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & -7 & -2 & -4 & 1 \end{pmatrix} \text{ e } \mathbf{U} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

**SI NOTI:**

$\boxed{1}$

$$\mathbf{H} = \mathbf{E}_{23} \mathbf{E}_{34} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \neq \mathbf{P}$$

e che facendo un'eliminazione di Gauss su  $\mathbf{H}\mathbf{A}$  si ottiene:

$$\mathbf{H}\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 9 & -6 & 0 \\ -2 & -6 & 4 & -1 \\ 0 & 2 & -4 & 0 \\ 1 & 7 & 6 & 0 \\ 1 & -4 & 10 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 9 & -6 & 0 \\ 1 & 7 & 6 & 0 \\ -2 & -6 & 4 & -1 \\ 0 & 2 & -4 & 0 \\ 1 & -4 & 10 & -4 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\xrightarrow{E_{51}(-1)E_{31}(2)E_{21}(-1)E_1(\frac{1}{3})} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 4 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -4 & 0 \\ 0 & -7 & 12 & -4 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\xrightarrow{E_{52}(7)E_{42}(-2)E_2(\frac{1}{4})} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & 26 & -4 \end{pmatrix}.$$

Dunque  $\mathbf{HA}$  non ha una decomposizione  $\mathbf{LU}$ .

Quindi è fondamentale, per costruire  $\mathbf{P}$ , l'ordine in cui si moltiplicano le matrici corrispondenti agli scambi di righe effettuati (si parte dall'ultimo procedendo a ritroso).

[2] Dall'eliminazione di Gauss fatta su  $\mathbf{A}$  si ottiene che

$$\mathbf{E}_{54}(4)\mathbf{E}_4(-1)\mathbf{E}_{53}(2)\mathbf{E}_3\left(\frac{1}{16}\right)\mathbf{E}_{34}\mathbf{E}_{52}(7)\mathbf{E}_{42}(-4)\mathbf{E}_2\left(\frac{1}{2}\right)\mathbf{E}_{23}\mathbf{E}_{51}(-1)\mathbf{E}_{41}(-1)\mathbf{E}_{21}(2)\mathbf{E}_1\left(\frac{1}{3}\right)\mathbf{A} = \mathbf{U}.$$

Quindi la tentazione di intuire  $\mathbf{L}$  direttamente da questa eliminazione di Gauss è fuorviante: posto

$$\mathbf{B} = \mathbf{E}_{54}(4)\mathbf{E}_4(-1)\mathbf{E}_{53}(2)\mathbf{E}_3\left(\frac{1}{16}\right)\mathbf{E}_{52}(7)\mathbf{E}_{42}(-4)\mathbf{E}_2\left(\frac{1}{2}\right)\mathbf{E}_{51}(-1)\mathbf{E}_{41}(-1)\mathbf{E}_{21}(2)\mathbf{E}_1\left(\frac{1}{3}\right)$$

il prodotto delle matrici elementari diverse da quelle corrispondenti agli scambi di righe, si ha che  $\mathbf{BPA} \neq \mathbf{U}$ , e quindi  $\mathbf{PA} \neq \mathbf{B}^{-1}\mathbf{U}$ , ossia  $\mathbf{B}^{-1}$  non è un buon candidato per  $\mathbf{L}$ .

[3] Mostriamo che esistono una forma ridotta di Gauss  $\mathbf{U}^*$  per  $\mathbf{A}$ , una matrice di permutazione  $\mathbf{P}^*$  ed una matrice triangolare inferiore non singolare  $\mathbf{L}^*$  tali che

$$\mathbf{U}^* \neq \mathbf{U}, \quad \mathbf{P}^* \neq \mathbf{P}, \quad \mathbf{L}^* \neq \mathbf{L}, \quad \text{ma } \mathbf{A} = (\mathbf{P}^*)^T \mathbf{L}^* \mathbf{U}^* = \mathbf{P}^T \mathbf{L} \mathbf{U},$$

ossia la decomposizione  $\mathbf{A} = \mathbf{P}^T \mathbf{L} \mathbf{U}$  non è unica.

Facciamo una eliminazione di Gauss su  $\mathbf{A}$  scegliendo degli scambi di riga diversi da quelli scelti nell'eliminazione che abbiamo fatto precedentemente.

$$\begin{aligned} \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 9 & -6 & 0 \\ -2 & -6 & 4 & -1 \\ 0 & 2 & -4 & 0 \\ 1 & 7 & 6 & 0 \\ 1 & -4 & 10 & -4 \end{pmatrix} &\xrightarrow{E_{51}(-1)E_{41}(-1)E_{21}(2)E_1\left(\frac{1}{3}\right)} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -4 & 0 \\ 0 & 4 & 8 & 0 \\ 0 & -7 & 12 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{24}} \\ &\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 4 & 8 & 0 \\ 0 & 2 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -7 & 12 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{52}(7)E_{32}(-2)E_2\left(\frac{1}{4}\right)} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 26 & -4 \end{pmatrix} \rightarrow \\ &\xrightarrow{E_{53}(-26)E_3\left(\frac{1}{8}\right)} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{54}(4)E_4(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Sia  $\mathbf{P}^* = \mathbf{E}_{24} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ . Allora

$$\mathbf{P}^* \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 9 & -6 & 0 \\ -2 & -6 & 4 & -1 \\ 0 & 2 & -4 & 0 \\ 1 & 7 & 6 & 0 \\ 1 & -4 & 10 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{3} & 9 & -6 & 0 \\ \boxed{1} & 7 & 6 & 0 \\ \boxed{0} & 2 & -4 & 0 \\ \boxed{-2} & -6 & 4 & -1 \\ \boxed{1} & -4 & 10 & -4 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\xrightarrow{E_{51}(-1)E_{41}(2)E_{21}(-1)E_1(\frac{1}{3})} \begin{pmatrix} 1 & \boxed{3} & -2 & 0 \\ 0 & \boxed{4} & 8 & 0 \\ 0 & \boxed{2} & -4 & 0 \\ 0 & \boxed{0} & 0 & -1 \\ 0 & \boxed{-7} & 12 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{52}(7)E_{32}(-2)E_2(\frac{1}{4})} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{-8} & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{0} & -1 \\ 0 & 0 & \boxed{26} & -4 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\xrightarrow{E_{53}(-26)E_3(\frac{1}{8})} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{-1} \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{-4} \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{54}(4)E_4(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Quindi  $\mathbf{A} = (\mathbf{P}^*)^T \mathbf{L}^* \mathbf{U}^*$  con

$$\mathbf{P}^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \neq \mathbf{P}, \quad \mathbf{U}^* = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \neq \mathbf{U},$$

$$\mathbf{L}^* = \begin{pmatrix} \boxed{3} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \boxed{1} & \boxed{4} & 0 & 0 & 0 \\ \boxed{0} & \boxed{2} & \boxed{-8} & 0 & 0 \\ \boxed{-2} & \boxed{0} & \boxed{0} & \boxed{-1} & 0 \\ \boxed{1} & \boxed{-7} & \boxed{26} & \boxed{-4} & 1 \end{pmatrix} \neq \mathbf{L}.$$

(b) Per trovare una decomposizione a rango pieno per  $\mathbf{A}$ , partiamo, ad esempio, dalla decomposizione  $\mathbf{A} = \mathbf{P}^T \mathbf{L} \mathbf{U}$  dove

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{L} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 16 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & -7 & -2 & -4 & 1 \end{pmatrix} \text{ e } \mathbf{U} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Calcoliamo  $\mathbf{P}^T \mathbf{L}$ :

$$\mathbf{P}^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{P}^T \mathbf{L} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 16 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & -7 & -2 & -4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 16 & 0 & 0 \\ 1 & -7 & -2 & -4 & 1 \end{pmatrix} =: \mathbf{B}$$

Allora  $\mathbf{A} = \mathbf{B}\mathbf{U}$  e si ottiene una decomposizione a rango pieno  $\mathbf{A} = \mathbf{B}_0 \mathbf{U}_0$  prendendo

$$\mathbf{U}_0 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ e } \mathbf{B}_0 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 16 & 0 \\ 1 & -7 & -2 & -4 \end{pmatrix}$$

ossia prendendo come  $\mathbf{U}_0$  la matrice che si ottiene da  $\mathbf{U}$  togliendo le ultime  $m - k$  righe, dove  $m = 4 =$  numero delle righe di  $\mathbf{U}$  e  $k = 3 =$  rango di  $\mathbf{U}$  (e quindi anche  $k =$  rango di  $\mathbf{A}$ ), e prendendo come  $\mathbf{B}_0$  la matrice che si ottiene da  $\mathbf{B}$  togliendo le ultime  $m - k$  colonne (ossia le colonne in posizioni corrispondenti alle ultime righe nulle tolte da  $\mathbf{U}$ ).

**Svolgimento degli Esercizi per casa 5**

**1** Sia  $W = \{\mathbf{A} \in M_n(\mathbb{C}) \mid \mathbf{A} = \mathbf{A}^T\}$  l'insieme delle matrici simmetriche (complesse) di ordine  $n$ . Si provi che  $W$  è un sottospazio dello spazio vettoriale delle matrici quadrate (complesse) di ordine  $n$ .

(i)  $\mathbf{O}_{n \times n} \in W: \mathbf{O}^T = \mathbf{O}$

(ii)  $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in W \xrightarrow{?} \mathbf{A} + \mathbf{B} \in W$

$$\left. \begin{array}{l} \mathbf{A} \in W \implies \mathbf{A} \in M_n(\mathbb{C}) \\ \mathbf{B} \in W \implies \mathbf{B} \in M_n(\mathbb{C}) \end{array} \right\} \implies \mathbf{A} + \mathbf{B} \in M_n(\mathbb{C}) \left. \vphantom{\begin{array}{l} \mathbf{A} \in W \\ \mathbf{B} \in W \end{array}} \right\} \implies \mathbf{A} + \mathbf{B} \in W$$

$$\left. \begin{array}{l} \mathbf{A} \in W \implies \mathbf{A} = \mathbf{A}^T \\ \mathbf{B} \in W \implies \mathbf{B} = \mathbf{B}^T \end{array} \right\} \implies (\mathbf{A} + \mathbf{B})^T = \mathbf{A}^T + \mathbf{B}^T = \mathbf{A} + \mathbf{B}$$

(iii)  $\alpha \in \mathbb{C}, \mathbf{A} \in W \xrightarrow{?} \alpha \mathbf{A} \in W$

$$\left. \begin{array}{l} \mathbf{A} \in W \implies \mathbf{A} \in M_n(\mathbb{C}) \implies \alpha \mathbf{A} \in M_n(\mathbb{C}) \\ \mathbf{A} \in W \implies \mathbf{A} = \mathbf{A}^T \implies (\alpha \mathbf{A})^T = \alpha \mathbf{A}^T = \alpha \mathbf{A} \end{array} \right\} \implies \alpha \mathbf{A} \in W$$

**2** Sia  $W = \{\mathbf{A} \in M_n(\mathbb{C}) \mid \mathbf{A}^H = -\mathbf{A}\}$  l'insieme delle matrici anti-hermitiane (complesse) di ordine  $n$ . Si provi che  $W$  non è un sottospazio dello spazio vettoriale delle matrici quadrate (complesse) di ordine  $n$ .

(i)  $\mathbf{O}_{n \times n} \in W: \mathbf{O}^H = \mathbf{O} = -\mathbf{O}$

(ii)  $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in W \xrightarrow{?} \mathbf{A} + \mathbf{B} \in W$

$$\left. \begin{array}{l} \mathbf{A} \in W \implies \mathbf{A} \in M_n(\mathbb{C}) \\ \mathbf{B} \in W \implies \mathbf{B} \in M_n(\mathbb{C}) \end{array} \right\} \implies \mathbf{A} + \mathbf{B} \in M_n(\mathbb{C}) \left. \vphantom{\begin{array}{l} \mathbf{A} \in W \\ \mathbf{B} \in W \end{array}} \right\} \implies \mathbf{A} + \mathbf{B} \in W$$

$$\left. \begin{array}{l} \mathbf{A} \in W \implies \mathbf{A}^H = -\mathbf{A} \\ \mathbf{B} \in W \implies \mathbf{B}^H = -\mathbf{B} \end{array} \right\} \implies (\mathbf{A} + \mathbf{B})^H = \mathbf{A}^H + \mathbf{B}^H = -\mathbf{A} + (-\mathbf{B}) = -(\mathbf{A} + \mathbf{B})$$

(iii)  $\alpha \in \mathbb{C}, \mathbf{A} \in W \xrightarrow{?} \alpha \mathbf{A} \in W$

$$\mathbf{A} \in W \implies \mathbf{A} \in M_n(\mathbb{C}) \implies \alpha \mathbf{A} \in M_n(\mathbb{C})$$

$$\mathbf{A} \in W \implies \mathbf{A}^H = -\mathbf{A} \implies (\alpha \mathbf{A})^H = \bar{\alpha} \mathbf{A}^H = \bar{\alpha}(-\mathbf{A}) = -\bar{\alpha} \mathbf{A}$$

Non è vero che  $\alpha \mathbf{A} \in W$  per ogni scalare  $\alpha$  ed ogni  $\mathbf{A} \in W$ :

prendendo  $\mathbf{A} \neq \mathbf{O}$  si ottiene che

$$\bar{\alpha} \mathbf{A} = \alpha \mathbf{A} \quad \begin{array}{c} \Longleftrightarrow \\ \uparrow \end{array} \quad \bar{\alpha} = \alpha \iff \alpha \in \mathbb{R}$$

poichè  $\mathbf{A} \neq \mathbf{O}$

Quindi se  $\mathbf{O} \neq \mathbf{A} \in W$  e  $\alpha \notin \mathbb{R}$  (ad esempio se  $\mathbf{A}$  è la matrice  $n \times n$  con 1 al posto  $(1, n)$ ,  $-1$  al posto  $(n, 1)$  e 0 altrove, ed  $\alpha = i$ ) allora  $\alpha \mathbf{A} \notin W$ .

Dunque  $W$  non è un sottospazio dello spazio vettoriale  $M_n(\mathbb{C})$ .

**[3]** Sia  $\mathbf{A} \in M_n(\mathbb{C})$ . Si provi che i due seguenti sottoinsiemi di  $M_n(\mathbb{C})$  sono sottospazi vettoriali di  $M_n(\mathbb{C})$ :

- (a)  $W_1 = \{\mathbf{B} \in M_n(\mathbb{C}) \mid \mathbf{AB} = \mathbf{BA}\}$ ,
- (b)  $W_2 = \{\mathbf{B} \in M_n(\mathbb{C}) \mid \mathbf{AB} \text{ è una matrice scalare}\}$ .

$W_1$  è un sottospazio di  $M_n(\mathbb{C})$ :

- (i)  $\mathbf{O}_{n \times n} \in W_1$ :  $\mathbf{O}_{n \times n} \in M_n(\mathbb{C})$  e  $\mathbf{AO} = \mathbf{O} = \mathbf{OA}$ .
- (ii)  $\mathbf{B}, \mathbf{C} \in W_1 \xrightarrow{?} \mathbf{B} + \mathbf{C} \in W_1$

$$\left. \begin{array}{l} \mathbf{B} \in W_1 \implies \mathbf{B} \in M_n(\mathbb{C}) \\ \mathbf{C} \in W_1 \implies \mathbf{C} \in M_n(\mathbb{C}) \end{array} \right\} \implies \mathbf{B} + \mathbf{C} \in M_n(\mathbb{C})$$

$$\left. \begin{array}{l} \mathbf{B} \in W_1 \implies \mathbf{AB} = \mathbf{BA} \\ \mathbf{C} \in W_1 \implies \mathbf{AC} = \mathbf{CA} \end{array} \right\} \implies \mathbf{A}(\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{AB} + \mathbf{AC} = \mathbf{BA} + \mathbf{CA} = (\mathbf{B} + \mathbf{C})\mathbf{A}$$

$$\left. \begin{array}{l} \mathbf{B} + \mathbf{C} \in M_n(\mathbb{C}) \\ \mathbf{A}(\mathbf{B} + \mathbf{C}) = (\mathbf{B} + \mathbf{C})\mathbf{A} \end{array} \right\} \implies \mathbf{B} + \mathbf{C} \in W_1$$

- (iii)  $\alpha \in \mathbb{C}, \mathbf{B} \in W_1 \xrightarrow{?} \alpha \mathbf{B} \in W_1$

$$\left. \begin{array}{l} \mathbf{B} \in W_1 \implies \mathbf{B} \in M_n(\mathbb{C}) \implies \alpha \mathbf{B} \in M_n(\mathbb{C}) \\ \mathbf{B} \in W_1 \implies \mathbf{AB} = \mathbf{BA} \implies \mathbf{A}(\alpha \mathbf{B}) = \alpha(\mathbf{AB}) = \alpha(\mathbf{BA}) = (\alpha \mathbf{B})\mathbf{A} \end{array} \right\} \implies \alpha \mathbf{B} \in W_1$$

$W_2$  è un sottospazio di  $M_n(\mathbb{C})$ : poichè

$$\mathbf{B} \in W_2 \iff \mathbf{B} \in M_n(\mathbb{C}) \text{ ed } \exists \delta_{\mathbf{B}} \in \mathbb{C} \mid \mathbf{AB} = \delta_{\mathbf{B}} \mathbf{I}_n,$$

e poichè  $M_n(\mathbb{C})$  è uno spazio vettoriale (per cui la somma di due matrici di ordine  $n$  ed il prodotto di una matrice di ordine  $n$  per uno scalare sono matrici di ordine  $n$ ) è sufficiente verificare che

- (i)  $\mathbf{AO}_{n \times n} = \mathbf{O} = \mathbf{O} \mathbf{I}_n$  per cui esiste  $\delta_{\mathbf{O}} \in \mathbb{C}$  tale che  $\mathbf{AO} = \delta_{\mathbf{O}} \mathbf{I}_n$  (si prenda  $\delta_{\mathbf{O}} = 0$ ).

(ii) Se  $\mathbf{B}$  e  $\mathbf{C}$  sono matrici di ordine  $n$  tali che esistano  $\delta_{\mathbf{B}}, \delta_{\mathbf{C}} \in \mathbb{C}$  per cui  $\mathbf{AB} = \delta_{\mathbf{B}}\mathbf{I}_n$  e  $\mathbf{AC} = \delta_{\mathbf{C}}\mathbf{I}_n$ , allora

$$\mathbf{A}(\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{AB} + \mathbf{AC} = \delta_{\mathbf{B}}\mathbf{I}_n + \delta_{\mathbf{C}}\mathbf{I}_n = (\delta_{\mathbf{B}} + \delta_{\mathbf{C}})\mathbf{I}_n.$$

Quindi esiste  $\delta_{\mathbf{B}+\mathbf{C}} \in \mathbb{C}$  tale che  $\mathbf{A}(\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \delta_{\mathbf{B}+\mathbf{C}}\mathbf{I}_n$ : si prenda  $\delta_{\mathbf{B}+\mathbf{C}} = \delta_{\mathbf{B}} + \delta_{\mathbf{C}}$ .

(iii) Se  $\alpha \in \mathbb{C}$  e  $\mathbf{B}$  è una matrice di ordine  $n$  per cui esista  $\delta_{\mathbf{B}} \in \mathbb{C}$  tale che  $\mathbf{AB} = \delta_{\mathbf{B}}\mathbf{I}_n$ , allora

$$\mathbf{A}(\alpha\mathbf{B}) = \alpha(\mathbf{AB}) = \alpha(\delta_{\mathbf{B}}\mathbf{I}_n) = (\alpha\delta_{\mathbf{B}})\mathbf{I}_n.$$

Quindi esiste  $\delta_{\alpha\mathbf{B}} \in \mathbb{C}$  tale che  $\mathbf{A}(\alpha\mathbf{B}) = \delta_{\alpha\mathbf{B}}\mathbf{I}_n$ : si prenda  $\delta_{\alpha\mathbf{B}} = \alpha\delta_{\mathbf{B}}$ .

**4** Sia  $V = \mathbb{R}^2$  (spazio vettoriale reale). Si dica quale dei seguenti sottoinsiemi di  $V$  è un sottospazio vettoriale di  $V$ :

$$S_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}; S_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}; S_3 = \left\{ \begin{pmatrix} a-2 \\ b \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}; S_4 = \left\{ \begin{pmatrix} a-2 \\ a+1 \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R} \right\}.$$

•  $S_1$  è un sottospazio vettoriale di  $V$ : l'unico elemento di  $S_1$  è il vettore  $\mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ , e  $\mathbf{0} + \mathbf{0} = \mathbf{0} \in S_1$  e  $\alpha\mathbf{0} = \mathbf{0} \in S_1$  per ogni scalare  $\alpha$  ( $S_1$  è il sottospazio nullo di  $\mathbb{R}^2$ ).

•  $S_2$  non è un sottospazio di  $V$ : contiene  $\mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  ma non contiene  $\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_2 = 2\mathbf{e}_2$  (d'altra parte nessun sottoinsieme **finito** di uno spazio vettoriale  $W$  che contenga un elemento non nullo  $\mathbf{w} \neq \mathbf{0}$  può essere un sottospazio di  $W$ : se  $U$  è un sottospazio di  $W$  che contiene  $\mathbf{w} \neq \mathbf{0}$ , allora  $U$  deve contenere l'insieme **infinito** di vettori  $\{\alpha\mathbf{w} \mid \alpha \text{ scalare}\}$ , per cui  $U$  stesso deve essere infinito).

• Per vedere se  $S_3$  è o non è un sottospazio di  $V$  occorre stabilire se le seguenti condizioni sono soddisfatte:

(i)  $\mathbf{0} \in S_3$

(ii)  $\mathbf{u} + \mathbf{v} \in S_3$  per ogni  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in S_3$ ,

(iii)  $\alpha\mathbf{u} \in S_3$  per ogni  $\mathbf{u} \in S_3$  ed ogni scalare  $\alpha$ .

(i) esistono  $a, b \in \mathbb{R}$  tali che  $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-2 \\ b \end{pmatrix}$ : si prenda  $a = 2$  e  $b = 0$ , quindi  $\mathbf{0} \in S_3$

(ii) Se  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in S_3$  esistono  $a_1, b_1, a_2, b_2 \in \mathbb{R}$  tali che

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} a_1 - 2 \\ b_1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} a_2 - 2 \\ b_2 \end{pmatrix},$$

inoltre

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} \in S_3 \iff \exists a_3, b_3 \in \mathbb{R} \mid \mathbf{u} + \mathbf{v} = \begin{pmatrix} a_3 - 2 \\ b_3 \end{pmatrix}.$$

Poichè  $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \begin{pmatrix} a_1 - 2 \\ b_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2 - 2 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + a_2 - 4 \\ b_1 + b_2 \end{pmatrix}$ , basta prendere  $a_3 = a_1 + a_2 - 2$  e  $b_3 = b_1 + b_2$ .

(iii) Se  $\mathbf{u} \in S_3$  esistono  $a, b \in \mathbb{R}$  tali che  $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} a - 2 \\ b \end{pmatrix}$ , inoltre per ogni scalare  $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\alpha\mathbf{u} \in S_4 \iff \exists c, d \in \mathbb{R} \mid \alpha\mathbf{u} = \begin{pmatrix} c - 2 \\ d \end{pmatrix}.$$

Poichè  $\alpha \mathbf{u} = \alpha \begin{pmatrix} a-2 \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha a - 2\alpha \\ \alpha b \end{pmatrix}$ , basta prendere  $c = \alpha a - 2\alpha + 2$  e  $d = \alpha b$ .

Dunque  $S_3$  è un sottospazio di  $V$ .

• Per vedere se  $S_4$  è o non è un sottospazio di  $V$  occorre stabilire se le seguenti condizioni sono soddisfatte:

- (i)  $\mathbf{0} \in S_4$
- (ii)  $\mathbf{u} + \mathbf{v} \in S_4$  per ogni  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in S_4$ ,
- (iii)  $\alpha \mathbf{u} \in S_4$  per ogni  $\mathbf{u} \in S_4$  ed ogni scalare  $\alpha$ .

(i) Perchè  $\mathbf{0}$  appartenga a  $S_4$  occorre che esista  $a \in \mathbb{R}$  tale che  $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-2 \\ a+1 \end{pmatrix}$ . Poichè il sistema

$$\begin{cases} a-2=0 \\ a+1=0 \end{cases}$$

nell'incognita  $a$  non ha soluzioni, allora  $S_4$  non è un sottospazio di  $V$ .

**5** Sia  $W = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R} \right\}$  l'insieme delle matrici reali anti-simmetriche di ordine 2.

1. Si provi che  $W$  è un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale reale  $M_2(\mathbb{R})$ .
2. Si dica quali dei seguenti sottoinsiemi di  $M_2(\mathbb{R})$  è un insieme di generatori per  $W$ :

(a)  $\left\{ \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \right\}$  (b)  $\left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$  (c)  $\left\{ \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} \right\}$

1. **1<sup>o</sup> MODO** (i)  $\mathbf{O}_{2 \times 2} \in W$ :  $\mathbf{O}_{2 \times 2} \in M_2(\mathbb{R})$  e  $\mathbf{O}_{2 \times 2}^T = \mathbf{O}_{2 \times 2} = -\mathbf{O}_{2 \times 2}$

(ii)

$$\left. \begin{array}{l} \mathbf{A} \in W \implies \mathbf{A} \in M_2(\mathbb{R}) \\ \mathbf{B} \in W \implies \mathbf{B} \in M_2(\mathbb{R}) \end{array} \right\} \implies \mathbf{A} + \mathbf{B} \in M_2(\mathbb{R})$$

$$\left. \begin{array}{l} \mathbf{A} \in W \implies \mathbf{A} = -\mathbf{A}^T \\ \mathbf{B} \in W \implies \mathbf{B} = -\mathbf{B}^T \end{array} \right\} \implies (\mathbf{A} + \mathbf{B})^T = \mathbf{A}^T + \mathbf{B}^T = -\mathbf{A} - \mathbf{B} = -(\mathbf{A} + \mathbf{B})$$

$$\left. \begin{array}{l} \mathbf{A} + \mathbf{B} \in M_2(\mathbb{R}) \\ (\mathbf{A} + \mathbf{B})^T = -(\mathbf{A} + \mathbf{B}) \end{array} \right\} \implies \mathbf{A} + \mathbf{B} \in W$$

(iii)  $\alpha \in \mathbb{C}, \mathbf{A} \in W \xrightarrow{?} \alpha \mathbf{A} \in W$

$$\left. \begin{array}{l} \mathbf{A} \in W \implies \mathbf{A} \in M_2(\mathbb{R}) \implies \alpha \mathbf{A} \in M_2(\mathbb{R}) \\ \mathbf{A} \in W \implies \mathbf{A} = -\mathbf{A}^T \implies (\alpha \mathbf{A})^T = \alpha \mathbf{A}^T = \alpha(-\mathbf{A}) = -\alpha \mathbf{A} \end{array} \right\} \implies \alpha \mathbf{A} \in W$$

**2<sup>o</sup> MODO**

(i) esiste  $a \in \mathbb{R}$  tale che  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix}$ : si prenda  $a = 0$ .

(ii) Se  $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in W$  esistono  $a, b \in \mathbb{R}$  tali che

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix},$$

inoltre

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} \in W \quad \Longleftrightarrow \quad \exists c \in \mathbb{R} \mid \mathbf{A} + \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & c \\ -c & 0 \end{pmatrix}.$$

Poichè  $\mathbf{A} + \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & a+b \\ -(a+b) & 0 \end{pmatrix}$ , basta prendere  $c = a + b$ .

(iii) Se  $\mathbf{A} \in W$  esiste  $a \in \mathbb{R}$  tale che  $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix}$ , inoltre per ogni scalare  $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\alpha \mathbf{A} \in W \quad \Longleftrightarrow \quad \exists b \in \mathbb{R}^3 \mid \alpha \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix}.$$

Poichè  $\alpha \mathbf{A} = \alpha \begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \alpha a \\ -\alpha a & 0 \end{pmatrix}$ , basta prendere  $b = \alpha a$ .

Dunque  $W$  è un sottospazio di  $M_2(\mathbb{R})$ .

**2. (a)** Dal momento che ogni elemento di  $\left\{ \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \right\}$  è un elemento di  $W$ , per stabilire se  $\left\{ \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \right\}$  è o non è un insieme di generatori di  $W$ , spazio vettoriale **reale**, occorre stabilire se **per ogni**  $\mathbf{A} \in W$  **esistono**  $\alpha_1$  ed  $\alpha_2$  numeri **reali** tali che

$$\mathbf{A} = \alpha_1 \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha_1 + 2\alpha_2 \\ \alpha_1 - 2\alpha_2 & 0 \end{pmatrix}$$

Poichè per ogni  $A \in W$  esiste  $a \in \mathbb{R}$  tale che  $A = \begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix}$ , il problema diventa stabilire se per ogni  $a \in \mathbb{R}$  il sistema

$$(*) \quad \begin{cases} -\alpha_1 + 2\alpha_2 = a \\ \alpha_1 - 2\alpha_2 = -a \end{cases}$$

nelle incognite **reali**  $\alpha_1, \alpha_2$  ha soluzione. (\*) è equivalente all'unica equazione

$$\alpha_1 - 2\alpha_2 = -a$$

che ha soluzioni per ogni  $a \in \mathbb{R}$  (si prendano ad esempio  $\alpha_2 = 0$  ed  $\alpha_1 = -a$ ), allora l'insieme di vettori  $\left\{ \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \right\}$  è un insieme di generatori per  $W$  come spazio vettoriale reale.

**(b)** Poichè  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \notin W$ , allora  $\left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$  non è un insieme di generatori per  $W$ .

**(c)** Dal momento che  $\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} \in W$ , per stabilire se  $\left\{ \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} \right\}$  è o non è un insieme di generatori per  $W$  come spazio vettoriale **reale** occorre stabilire se **per ogni**  $\mathbf{A} \in W$  **esiste**  $\alpha \in \mathbb{R}$  tale che

$$\mathbf{A} = \alpha \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3\alpha \\ -3\alpha & 0 \end{pmatrix}$$

Poichè per ogni  $A \in W$  esiste  $a \in \mathbb{R}$  tale che  $A = \begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix}$ , il problema diventa stabilire se per ogni  $a \in \mathbb{R}$  il sistema

$$(**) \quad \begin{cases} 3\alpha = a \\ -3\alpha = -a \end{cases}$$

nell' incognita **reale**  $\alpha$  ha soluzione. Poichè  $(**)$  ha soluzione per ogni  $a \in \mathbb{R}$  ( $\alpha = a/3$ ), allora  $\left\{ \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} \right\}$  è un insieme di generatori per  $W$  come spazio vettoriale reale.

[6] Si dica se  $\mathcal{S} = \left\{ \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}; \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 8 \end{pmatrix}; \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} \right\}$  è un insieme di generatori di  $\mathbb{R}^3$ .

Per stabilire se  $\mathcal{S}$  è o non è un insieme di generatori di  $\mathbb{R}^3$  occorre stabilire se per ogni  $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$  esistono  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$  tali che

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \alpha_1 \mathbf{v}_1 + \alpha_2 \mathbf{v}_2 + \alpha_3 \mathbf{v}_3 = \alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 8 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 + 3\alpha_2 + \alpha_3 \\ -\alpha_1 - 4\alpha_2 + 2\alpha_3 \\ 2\alpha_1 + 8\alpha_2 - 4\alpha_3 \end{pmatrix}$$

ossia che il sistema lineare

$$(*) \quad \begin{cases} \alpha_1 + 3\alpha_2 + \alpha_3 = a \\ -\alpha_1 - 4\alpha_2 + 2\alpha_3 = b \\ 2\alpha_1 + 8\alpha_2 - 4\alpha_3 = c \end{cases}$$

nelle incognite  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  ha soluzione **qualunque** siano  $a, b, c \in \mathbb{R}$ .

Facendo una eliminazione di Gauss sulla matrice aumentata del sistema si ottiene

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & | & a \\ -1 & -4 & 2 & | & b \\ 2 & 8 & -4 & | & c \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{31}(-2)E_{21}(1)} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & | & a \\ 0 & -1 & 3 & | & a+b \\ 0 & 2 & -6 & | & c-2a \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{32}(-2)E_2(-1)} \\ \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & | & a \\ 0 & 1 & -3 & | & -a-b \\ 0 & 0 & 0 & | & 2b+c \end{pmatrix}.$$

Poichè esistono  $a, b, c \in \mathbb{R}$  tali che  $2b + c \neq 0$  (si prendano ad esempio  $a = b = 0$  e  $c = 1$ ), allora  $(*)$  non ha soluzione qualunque siano  $a, b, c \in \mathbb{R}$ , per cui  $\mathcal{S}$  non è un insieme di generatori di  $\mathbb{R}^3$ .

[7] Si dica quale dei seguenti sottoinsiemi di  $\mathbb{R}^3$  è linearmente indipendente:

$$\left\{ \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}; \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}; \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, \quad \left\{ \mathbf{w}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}; \mathbf{w}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}; \mathbf{w}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

(1) Il problema è stabilire se gli unici numeri reali  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  per cui  $\alpha_1 \mathbf{v}_1 + \alpha_2 \mathbf{v}_2 + \alpha_3 \mathbf{v}_3 = \mathbf{0}$  siano  $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$ , oppure no. Poichè, dati  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ , si ha

$$\alpha_1 \mathbf{v}_1 + \alpha_2 \mathbf{v}_2 + \alpha_3 \mathbf{v}_3 = \alpha_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4\alpha_2 + 2\alpha_3 \\ 4\alpha_1 + 6\alpha_2 - \alpha_3 \\ 2\alpha_2 + \alpha_3 \end{pmatrix},$$

allora  $\alpha_1 \mathbf{v}_1 + \alpha_2 \mathbf{v}_2 + \alpha_3 \mathbf{v}_3 = \mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  se e solo se

$$(*) \quad \begin{cases} 4\alpha_2 + 2\alpha_3 = 0 \\ 4\alpha_1 + 6\alpha_2 - \alpha_3 = 0 \\ 2\alpha_2 + \alpha_3 = 0 \end{cases}$$

Il problema diventa quindi stabilire se il sistema (\*) (nelle incognite  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ ) abbia un'unica soluzione (e quindi la soluzione nulla  $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ), oppure no. La matrice aumentata di (\*) è:  $\left( \begin{array}{ccc|c} 0 & 4 & 2 & 0 \\ 4 & 6 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{array} \right)$ .

Facendo un'eliminazione di Gauss si ottiene:

$$\begin{aligned} & \left( \begin{array}{ccc|c} 0 & 4 & 2 & 0 \\ 4 & 6 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{E_1(\frac{1}{4})E_{12}} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 3/2 & -1/4 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \\ & \xrightarrow{E_{32}(-2)E_2(\frac{1}{4})} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 3/2 & -1/4 & 0 \\ 0 & 1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) = (\mathbf{U} \mid \mathbf{0}). \end{aligned}$$

Poichè **non tutte** le colonne di  $\mathbf{U}$  sono **dominanti**, allora (\*) ha  $\infty$  soluzioni. In particolare (\*) ha una soluzione non nulla, e quindi  $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$  è **linearmente dipendente** (ad esempio, poichè (\*) è equivalente a

$$\begin{cases} \alpha_1 + \frac{3}{2}\alpha_2 - \frac{1}{4}\alpha_3 = 0 \\ \alpha_2 + \frac{1}{2}\alpha_3 = 0 \end{cases}$$

prendendo  $\alpha_3 = 1$  con la sostituzione all'indietro si ottiene  $\alpha_2 = -\frac{1}{2}$  ed  $\alpha_1 = -\frac{3}{2}\alpha_2 - \frac{1}{4}\alpha_3 = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} = 1$ , ossia  $\begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$  è una soluzione non nulla di (\*) e  $\mathbf{v}_1 - \frac{1}{2}\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3 = \mathbf{0}$  è una combinazione lineare nulla di  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$  con coefficienti non tutti nulli).

$$\begin{aligned} (2) \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} &= \alpha_1 \mathbf{w}_1 + \alpha_2 \mathbf{w}_2 + \alpha_3 \mathbf{w}_3 = \alpha_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_2 + \alpha_3 \\ 4\alpha_1 - \alpha_3 \\ 2\alpha_2 + \alpha_3 \end{pmatrix} \\ &\iff (*) \quad \begin{cases} \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \\ 4\alpha_1 - \alpha_3 = 0 \\ 2\alpha_2 + \alpha_3 = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Facendo un'eliminazione di Gauss sulla matrice aumentata di (\*) si ottiene:

$$\begin{aligned} & \left( \begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{E_1(\frac{1}{4})E_{12}} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1/4 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \\ & \xrightarrow{E_{32}(-2)} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1/4 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{E_3(-1)} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1/4 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right) = (\mathbf{U} \mid \mathbf{0}). \end{aligned}$$

Poichè **tutte** le colonne di  $\mathbf{U}$  sono **dominanti**, allora (\*) ha come unica soluzione la soluzione nulla  $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,

ossia

$$\alpha_1 \mathbf{w}_1 + \alpha_2 \mathbf{w}_2 + \alpha_3 \mathbf{w}_3 = \mathbf{0} \implies \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0.$$

Quindi  $\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3\}$  è **linearmente indipendente**.

[8] Siano  $V$  uno spazio vettoriale ed  $\mathcal{S} = \{\mathbf{v}_1; \mathbf{v}_2; \mathbf{v}_3\}$  un insieme linearmente indipendente di vettori di  $V$ .

Si dica quale dei seguenti insiemi di vettori di  $V$  è linearmente indipendente:

- (1)  $\mathcal{S}_1 = \{\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3; \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_3; \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3\}$ ,
- (2)  $\mathcal{S}_2 = \{\mathbf{v}_1 - 2\mathbf{v}_3; \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2; \mathbf{v}_2 + 2\mathbf{v}_3\}$ .

(1)

$$\underline{0} = \alpha(\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3) + \beta(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_3) + \delta(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3) = (\beta + \delta)\mathbf{v}_1 + (\alpha + \delta)\mathbf{v}_2 + (\alpha + \beta + \delta)\mathbf{v}_3$$

$$\begin{array}{c} \iff \\ \uparrow \\ \boxed{\text{poichè } \mathcal{S} \text{ è L.I.}} \end{array} \quad (*) \quad \begin{cases} \beta + \delta = 0 \\ \alpha + \delta = 0 \\ \alpha + \beta + \delta = 0 \end{cases}$$

Facendo un'eliminazione di Gauss sulla matrice aumentata di (\*) si ottiene:

$$\begin{array}{c} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & | & 0 \\ 1 & 0 & 1 & | & 0 \\ 1 & 1 & 1 & | & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{12}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & | & 0 \\ 0 & 1 & 1 & | & 0 \\ 1 & 1 & 1 & | & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{31}(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & | & 0 \\ 0 & 1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \\ \xrightarrow{E_{32}(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & | & 0 \\ 0 & 1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & -1 & | & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_3(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & | & 0 \\ 0 & 1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 \end{pmatrix} = (\mathbf{U} \quad | \quad \mathbf{0}). \end{array}$$

Poichè **tutte** le colonne di  $\mathbf{U}$  sono **dominanti**, l'unica soluzione di (\*) è  $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ , quindi  $\mathcal{S}_1$  è **linearmente indipendente**.

$$(2) \quad \underline{0} = \alpha(\mathbf{v}_1 - 2\mathbf{v}_3) + \beta(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) + \delta(\mathbf{v}_2 + 2\mathbf{v}_3) = (\alpha + \beta)\mathbf{v}_1 + (\beta + \delta)\mathbf{v}_2 + (-2\alpha + 2\delta)\mathbf{v}_3$$

$$\begin{array}{c} \iff \\ \uparrow \\ \boxed{\text{poichè } \mathcal{S} \text{ è L.I.}} \end{array} \quad (*) \quad \begin{cases} \alpha + \beta = 0 \\ \beta + \delta = 0 \\ -2\alpha + 2\delta = 0 \end{cases}$$

Facendo un'eliminazione di Gauss sulla matrice aumentata di (\*) si ottiene:

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 2 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{E_{31}(2)} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{E_{32}(-2)} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) = (\mathbf{U} \mid \mathbf{0}).$$

Poichè  $\mathbf{U}$  ha una colonna non dominante, (\*) ha  $\infty$  soluzioni, in particolare (\*) ha una soluzione non nulla, quindi  $\mathcal{S}_2$  è **linearmente dipendente**.

## Svolgimento degli Esercizi per casa 6

1 Si provi che

$$\mathcal{B} = \left\{ \mathbf{B}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}; \mathbf{B}_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}; \mathbf{B}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

è una base dello spazio vettoriale  $V$  delle matrici complesse triangolari inferiori  $2 \times 2$ .

Per provare che  $\mathcal{B}$  è una base di  $V$  occorre provare che  $\mathcal{B}$  è un insieme di generatori di  $V$  e che  $\mathcal{B}$  è linearmente indipendente (L.I.).

Per provare che  $\mathcal{B} \subseteq V$  è un insieme di generatori di  $V$  occorre provare che per ogni  $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix} \in V$  esistono scalari  $\alpha, \beta, \delta \in \mathbb{C}$  tali che

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix} = \alpha \mathbf{B}_1 + \beta \mathbf{B}_2 + \delta \mathbf{B}_3 = \alpha \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \delta \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha + 2\beta & 0 \\ \alpha + \beta + \delta & \alpha + \beta \end{pmatrix},$$

ossia che il sistema lineare

$$(*) \quad \begin{cases} \alpha + 2\beta = a \\ \alpha + \beta + \delta = b \\ \alpha + \beta = c \end{cases}$$

nelle incognite reali  $\alpha, \beta$  e  $\delta$  ha soluzione **qualunque** siano  $a, b, c \in \mathbb{C}$ . Facendo una eliminazione di Gauss sulla matrice aumentata del sistema si ottiene

$$\begin{aligned} & \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & a \\ 1 & 1 & 1 & b \\ 1 & 1 & 0 & c \end{array} \right) \xrightarrow{E_{31}(-1)E_{21}(-1)} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & a \\ 0 & -1 & 1 & b-a \\ 0 & -1 & 0 & c-a \end{array} \right) \xrightarrow{E_{32}(1)E_2(-1)} \\ & \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & a \\ 0 & 1 & -1 & a-b \\ 0 & 0 & -1 & c-b \end{array} \right) \xrightarrow{E_3(-1)} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & a \\ 0 & 1 & -1 & a-b \\ 0 & 0 & 1 & b-c \end{array} \right) = (\mathbf{U} \mid \mathbf{d}). \end{aligned}$$

Poichè  $\mathbf{d}$  è libera qualunque siano  $a, b, c \in \mathbb{C}$ , allora (\*) ha soluzione per ogni  $a, b, c \in \mathbb{C}$ , e quindi  $\mathcal{B}$  è un insieme di generatori di  $V$ .

Per provare che  $\mathcal{B}$  è L.I. occorre provare che l'unica combinazione lineare nulla di suoi elementi ha tutti i coefficienti nulli, ossia che

$$\alpha \mathbf{B}_1 + \beta \mathbf{B}_2 + \delta \mathbf{B}_3 = \mathbf{O} \implies \alpha = \beta = \delta = 0.$$

Da

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \alpha \mathbf{B}_1 + \beta \mathbf{B}_2 + \delta \mathbf{B}_3 = \alpha \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \delta \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha + 2\beta & 0 \\ \alpha + \beta + \delta & \alpha + \beta \end{pmatrix},$$

si ottiene il sistema lineare nelle incognite  $\alpha, \beta$  e  $\delta$

$$(**) \quad \begin{cases} \alpha + 2\beta = 0 \\ \alpha + \beta + \delta = 0 \\ \alpha + \beta = 0 \end{cases}$$

Dal momento che (\*\*) si ottiene da (\*) ponendo  $a = b = c = 0$ , una forma ridotta di Gauss della matrice aumentata di (\*\*) si ottiene da quella trovata per (\*) ponendo  $a = b = c = 0$ :

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & a \\ 0 & 1 & -1 & a-b \\ 0 & 0 & 1 & b-c \end{array} \right) \xrightarrow[\boxed{\text{ponendo } a=b=c=0}]{} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right) = (\mathbf{U} \mid \mathbf{0}).$$

Poichè l'ultima colonna di  $(\mathbf{U} \mid \mathbf{0})$  è libera, (\*\*) ha soluzioni, e poichè l'ultima colonna di  $(\mathbf{U} \mid \mathbf{0})$  è nulla, tra le soluzioni di (\*\*) c'è quella nulla (ossia  $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ). Inoltre, dal momento che tutte le colonne di  $\mathbf{U}$  sono dominanti, (\*\*) ha un'unica soluzione.

Dunque l'unica soluzione di (\*\*) è quella nulla, per cui  $\mathcal{B}$  è L.I.

**2** Sia  $W$  l'insieme delle matrici  $2 \times 2$  reali simmetriche. L'insieme

$$\mathcal{S} = \left\{ \mathbf{C}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}; \mathbf{C}_2 = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}; \mathbf{C}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \mathbf{C}_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \mathbf{C}_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \mathbf{C}_6 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

è un insieme di generatori di  $W$ . Si trovi una base di  $W$  contenuta in  $\mathcal{S}$ .

“Restringiamo” un insieme di generatori di  $W$ .

**1<sup>o</sup> passaggio.** Esistono in  $\mathcal{S}$  vettori che siano combinazioni lineari degli altri vettori di  $\mathcal{S}$ ?

$\mathbf{C}_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  è senz'altro combinazione degli altri:

$$\mathbf{C}_5 = \mathbf{0} = 0\mathbf{C}_1 + 0\mathbf{C}_2 + 0\mathbf{C}_3 + 0\mathbf{C}_4 + 0\mathbf{C}_6,$$

per cui togliamo subito  $\mathbf{C}_5$  (**togliamo** comunque subito **tutti gli eventuali vettori di  $\mathcal{S}$  che siano nulli**), e poniamo

$$\mathcal{S}_1 = \left\{ \mathbf{C}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}; \mathbf{C}_2 = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}; \mathbf{C}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \mathbf{C}_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \mathbf{C}_6 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

**2<sup>o</sup> passaggio.**  $\mathcal{S}_1$  è ancora un insieme di generatori di  $W$ . Esistono in  $\mathcal{S}_1$  vettori che siano combinazioni lineari degli altri vettori di  $\mathcal{S}_1$ ? Poichè

$$\mathbf{C}_1 = 2\mathbf{C}_6 = 0\mathbf{C}_2 + 0\mathbf{C}_3 + 0\mathbf{C}_4 + 2\mathbf{C}_6$$

ma anche

$$\mathbf{C}_6 = \frac{1}{2}\mathbf{C}_1 = \frac{1}{2}\mathbf{C}_1 + 0\mathbf{C}_2 + 0\mathbf{C}_3 + 0\mathbf{C}_4$$

possiamo togliere da  $\mathcal{S}_1$  il vettore  $\mathbf{C}_1$ , oppure possiamo togliere da  $\mathcal{S}_1$  il vettore  $\mathbf{C}_6$ , ottenendo ancora un insieme di generatori di  $W$ . Dunque, **guardiamo se tra i vettori di  $\mathcal{S}_1$  ci siano coppie di vettori di**

cui l'uno è multiplo dell'altro, e per ciascuna di queste eventuali coppie togliamo uno dei due vettori. In questo caso abbiamo individuato la coppia  $\mathbf{C}_1, \mathbf{C}_6$  e scegliamo di togliere  $\mathbf{C}_1$ .

Poniamo

$$\mathcal{S}_2 = \left\{ \mathbf{C}_2 = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}; \mathbf{C}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \mathbf{C}_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \mathbf{C}_6 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

3° passaggio.  $\mathcal{S}_2$  è ancora un insieme di generatori di  $W$ . Esistono in  $\mathcal{S}_2$  vettori che siano combinazioni lineari degli altri vettori di  $\mathcal{S}_2$  ?

Sia  $\alpha_1 \mathbf{C}_2 + \alpha_2 \mathbf{C}_3 + \alpha_3 \mathbf{C}_4 + \alpha_4 \mathbf{C}_6 = \mathbf{O}$  una combinazione lineare nulla dei vettori di  $\mathcal{S}_2$ . Allora da

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \alpha_1 \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \alpha_4 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 & 3\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_4 \\ 3\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_4 & \alpha_3 + \alpha_4 \end{pmatrix}$$

si ottiene il sistema lineare, nelle incognite  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$

$$\begin{cases} 2\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \\ 3\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_4 = 0 \\ \alpha_3 + \alpha_4 = 0 \end{cases}$$

Facendo una E.G. sulla sua matrice aumentata si ha:

$$\left( \begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{E_{21}(-3)E_1(\frac{1}{2})} \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{E_2(-2)} \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right),$$

per cui il sistema è equivalente al sistema

$$(*) \quad \begin{cases} \alpha_1 + \frac{1}{2}\alpha_2 + \frac{1}{2}\alpha_3 = 0 \\ \alpha_2 + 3\alpha_3 - 2\alpha_4 = 0 \\ \alpha_3 + \alpha_4 = 0 \end{cases}$$

il cui insieme delle soluzioni è

$$\left\{ \begin{pmatrix} -2h \\ 5h \\ -h \\ h \end{pmatrix} \mid h \in \mathbb{R} \right\}$$

Prendendo una sua soluzione non nulla, ad esempio  $\begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$  (si ponga  $h = 1$ ), si ottiene

$$-2\mathbf{C}_2 + 5\mathbf{C}_3 - \mathbf{C}_4 + \mathbf{C}_6 = \mathbf{O},$$

per cui  $\mathbf{C}_2, \mathbf{C}_3, \mathbf{C}_4$  e  $\mathbf{C}_6$  sono combinazioni lineari degli altri elementi di  $\mathcal{S}_2$  e ciascuno di loro può essere scelto come elemento da eliminare da  $\mathcal{S}_2$ .

Scegliamo di togliere da  $\mathcal{S}_2$  la matrice  $\mathbf{C}_2$  (combinazione lineare degli altri elementi di  $\mathcal{S}_2$ ) e poniamo

$$\mathcal{S}_3 = \left\{ \mathbf{C}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \mathbf{C}_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \mathbf{C}_6 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

4<sup>o</sup> **passaggio.**  $\mathcal{S}_3$  è ancora un insieme di generatori di  $W$ . Esistono in  $\mathcal{S}_3$  vettori che siano combinazioni lineari degli altri vettori di  $\mathcal{S}_3$  ?

Sia  $\alpha_1 \mathbf{C}_3 + \alpha_2 \mathbf{C}_4 + \alpha_3 \mathbf{C}_6 = \mathbf{O}$  una combinazione lineare nulla dei vettori di  $\mathcal{S}_3$ . Allora da

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \alpha_1 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 + \alpha_2 & \alpha_1 + \alpha_3 \\ \alpha_1 + \alpha_3 & \alpha_2 + \alpha_3 \end{pmatrix}$$

si ottiene il sistema lineare, nelle incognite  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 = 0 \\ \alpha_1 + \alpha_3 = 0 \\ \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \end{cases}$$

Facendo una E.G. sulla sua matrice aumentata si ottiene:

$$\begin{array}{ccc} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right) & \xrightarrow{E_{21}(-1)} & \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right) & \xrightarrow{E_{32}(-1)E_2(-1)} \\ \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{array} \right) & \xrightarrow{E_3(\frac{1}{2})} & \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right) \end{array}$$

L'unica soluzione del sistema è quella nulla, per cui  $\mathcal{S}_3$  è linearmente indipendente, ed è una base di  $W$  contenuta in  $\mathcal{S}$ .

**3** Qual è la dimensione dello spazio vettoriale delle matrici  $2 \times 2$  reali simmetriche ?

Poichè dall'esercizio precedente sappiamo che

$$\mathcal{S}_3 = \left\{ \mathbf{C}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \mathbf{C}_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \mathbf{C}_6 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\},$$

è una base dello spazio vettoriale delle matrici  $2 \times 2$  reali simmetriche, allora la dimensione dello spazio vettoriale delle matrici  $2 \times 2$  reali simmetriche è 3 (ossia il numero di elementi di una sua qualsiasi base).

**4** Si dica quale delle seguenti posizioni, al variare di  $\mathbf{A} \in M_n(\mathbb{C})$ , definisce un'applicazione lineare da  $M_n(\mathbb{C})$  in  $M_n(\mathbb{C})$ :  $f_1(\mathbf{A}) = \overline{\mathbf{A}}$ ,  $f_2(\mathbf{A}) = \mathbf{A}^T$ ,  $f_3(\mathbf{A}) = \mathbf{A}^2$ .

Fissato  $i \in \{1, 2, 3\}$ , per vedere che  $f_i : M_n(\mathbb{C}) \rightarrow M_n(\mathbb{C})$  è un'applicazione lineare occorre verificare che siano soddisfatte le seguenti condizioni:

(1)  $f_i(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = f_i(\mathbf{A}) + f_i(\mathbf{B})$  per ogni  $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in M_n(\mathbb{C})$ ;

(2)  $f_i(\alpha \mathbf{A}) = \alpha f_i(\mathbf{A})$  per ogni  $\mathbf{A} \in M_n(\mathbb{C})$  ed ogni  $\alpha \in \mathbb{C}$ .

•  $f_1$  verifica la condizione (1) ? Poichè la coniugata della somma di matrici è la somma delle coniugate, si ha:

$$f_1(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \overline{\mathbf{A} + \mathbf{B}} = \overline{\mathbf{A}} + \overline{\mathbf{B}} = f_1(\mathbf{A}) + f_1(\mathbf{B}) \quad \forall \mathbf{A}, \mathbf{B} \in M_n(\mathbb{C}).$$

Dunque  $f_1$  verifica la condizione (1).

$f_1$  verifica la condizione (2) ? Poichè la coniugata del prodotto di una matrice per uno scalare è il prodotto della coniugata della matrice per il coniugato dello scalare, si ha:

$$f_1(\alpha \mathbf{A}) = \overline{\alpha \mathbf{A}} = \bar{\alpha} \bar{\mathbf{A}} \quad \forall \mathbf{A} \in M_n(\mathbb{C}), \forall \alpha \in \mathbb{C}.$$

Invece,

$$\alpha f_1(\mathbf{A}) = \alpha \bar{\mathbf{A}} \quad \forall \mathbf{A} \in M_n(\mathbb{C}), \forall \alpha \in \mathbb{C}.$$

Prendendo, ad esempio,  $\mathbf{A} = \mathbf{I}_n$  ed  $\alpha = i$ , dal momento che  $\overline{\mathbf{I}_n} = \mathbf{I}_n$  ed  $\bar{i} = -i$ , si ha:

$$f_1(i\mathbf{I}_n) = -i\mathbf{I}_n \neq i\mathbf{I}_n = if_1(\mathbf{I}_n).$$

Dunque  $f_1$  non verifica la condizione (2), e quindi non è un'applicazione lineare.

•  $f_2$  verifica la condizione (1) ? Poichè la trasposta della somma di matrici è la somma delle trasposte, si ha:

$$f_2(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = (\mathbf{A} + \mathbf{B})^T = \mathbf{A}^T + \mathbf{B}^T = f_2(\mathbf{A}) + f_2(\mathbf{B}) \quad \forall \mathbf{A}, \mathbf{B} \in M_n(\mathbb{C}).$$

Dunque  $f_2$  verifica la condizione (1).

$f_2$  verifica la condizione (2) ? Poichè la trasposta del prodotto di una matrice per uno scalare è il prodotto della trasposta della matrice per lo scalare, si ha:

$$f_2(\alpha \mathbf{A}) = (\alpha \mathbf{A})^T = \alpha \mathbf{A}^T = \alpha f_2(\mathbf{A}) \quad \forall \mathbf{A} \in M_n(\mathbb{C}), \forall \alpha \in \mathbb{C}.$$

Dunque  $f_2$  verifica la condizione (2). Verificando entrambe le condizioni (1) e (2),  $f_2$  è un'applicazione lineare.

•  $f_3$  verifica la condizione (1) ? Essendo

$$f_3(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = (\mathbf{A} + \mathbf{B})^2 = (\mathbf{A} + \mathbf{B})(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \mathbf{A}^2 + \mathbf{BA} + \mathbf{AB} + \mathbf{B}^2,$$

$f_3(\mathbf{A}) = \mathbf{A}^2$  e  $f_3(\mathbf{B}) = \mathbf{B}^2$ , se fosse  $f_3(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = f_3(\mathbf{A}) + f_3(\mathbf{B})$  per ogni  $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in M_n(\mathbb{C})$ , sarebbe

$$(*) \quad \mathbf{BA} + \mathbf{AB} = \mathbf{O} \quad \forall \mathbf{A}, \mathbf{B} \in M_n(\mathbb{C})$$

Ma (\*) è falsa: si prenda, ad esempio,  $\mathbf{A} = \mathbf{B} = \mathbf{I}_n$ . Dunque  $f_3$  non verifica la condizione (1) e quindi non è un'applicazione lineare.

**5** Sia  $g : M_2(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C}^2$  definita da  $g(\mathbf{A}) = \mathbf{Ae}_1$ .

(a) Si provi che  $g$  è un'applicazione lineare.

(b) Si trovino lo spazio nullo  $N(g)$  e lo spazio immagine  $Im(g)$  di  $g$ .

(a) Verificare che  $g$  è un'applicazione lineare significa verificare che sono soddisfatte le seguenti condizioni:

(1)  $g(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = g(\mathbf{A}) + g(\mathbf{B})$  per ogni  $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in M_2(\mathbb{C})$ ;

(2)  $g(\alpha \mathbf{A}) = \alpha g(\mathbf{A})$  per ogni  $\mathbf{A} \in M_2(\mathbb{C})$  ed ogni  $\alpha \in \mathbb{C}$ .

(1):  $g(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = (\mathbf{A} + \mathbf{B})\mathbf{e}_1 = \mathbf{Ae}_1 + \mathbf{Be}_1 = g(\mathbf{A}) + g(\mathbf{B}) \quad \forall \mathbf{A}, \mathbf{B} \in M_2(\mathbb{C})$ ;

(2):  $g(\alpha \mathbf{A}) = (\alpha \mathbf{A})\mathbf{e}_1 = \alpha(\mathbf{Ae}_1) = \alpha g(\mathbf{A}) \quad \forall \mathbf{A} \in M_2(\mathbb{C}), \quad \forall \alpha \in \mathbb{C}.$

(b) Poichè  $g(\mathbf{A}) = \mathbf{A}\mathbf{e}_1$  è la 1<sup>a</sup> colonna di  $\mathbf{A}$ , allora

•  $N(g) = \{\mathbf{A} \in M_2(\mathbb{C}) | g(\mathbf{A}) = \mathbf{0}\}$  è l'insieme delle matrici complesse  $2 \times 2$  con la prima colonna nulla, ossia

$$N(g) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & b \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{C} \right\},$$

•  $Im(g) = \{g(\mathbf{A}) | \mathbf{A} \in M_2(\mathbb{C})\}$  è l'insieme dei vettori di  $\mathbb{C}^2$  che siano prime colonne di matrici complesse  $2 \times 2$ . Poichè per ogni  $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2$  esiste  $\mathbf{A} \in M_2(\mathbb{C})$  tale che  $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$  sia la prima colonna di  $\mathbf{A}$  (si prenda, ad esempio  $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix}$ ), allora  $Im(g) = \mathbb{C}^2$ .

[6] Sia  $\mathbf{A}$  una matrice complessa  $n \times n$ . Si provi che  $\mathbf{A}^2 = \mathbf{A}$  se e solo se  $C(\mathbf{A} - \mathbf{I}_2) \subseteq N(\mathbf{A})$ .

Ricordando che per ogni  $i = 1, \dots, n$

$\mathbf{A}\mathbf{e}_i = i$ -esima colonna di  $\mathbf{A}$ ,

$\mathbf{A}^2\mathbf{e}_i = i$ -esima colonna di  $\mathbf{A}^2$  e

$(\mathbf{A} - \mathbf{I}_n)\mathbf{e}_i = i$ -esima colonna di  $\mathbf{A} - \mathbf{I}_n$ , si ha:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^2 = \mathbf{A} &\iff \mathbf{A}^2\mathbf{e}_i = \mathbf{A}\mathbf{e}_i \quad \forall i = 1, \dots, n \iff \mathbf{A}^2\mathbf{e}_i - \mathbf{A}\mathbf{e}_i = \mathbf{0} \quad \forall i = 1, \dots, n \iff \\ &\iff \mathbf{A}(\mathbf{A}\mathbf{e}_i - \mathbf{e}_i) = \mathbf{0} \quad \forall i = 1, \dots, n \iff (\mathbf{A} - \mathbf{I}_n)\mathbf{e}_i = \mathbf{A}\mathbf{e}_i - \mathbf{e}_i \in N(\mathbf{A}) \quad \forall i = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

Dunque

$$(*) \quad \mathbf{A}^2 = \mathbf{A} \iff (\mathbf{A} - \mathbf{I}_n)\mathbf{e}_i \in N(\mathbf{A}) \quad \forall i = 1, \dots, n.$$

Lo spazio delle colonne di  $\mathbf{A} - \mathbf{I}_n$  è lo spazio (sottospazio di  $\mathbb{C}^n$ ) generato dalle colonne di  $\mathbf{A} - \mathbf{I}_n$ , ossia l'insieme delle combinazioni lineari a coefficienti complessi delle colonne di  $\mathbf{A} - \mathbf{I}_n$ :

$$C(\mathbf{A} - \mathbf{I}_n) = \langle (\mathbf{A} - \mathbf{I}_n)\mathbf{e}_i \mid i = 1, \dots, n \rangle = \left\{ \sum_{i=1}^n \alpha_i (\mathbf{A} - \mathbf{I}_n)\mathbf{e}_i \mid \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{C} \right\}.$$

In particolare, ogni colonna di  $\mathbf{A} - \mathbf{I}_n$  appartiene a  $C(\mathbf{A} - \mathbf{I}_2)$ , per cui se  $C(\mathbf{A} - \mathbf{I}_2) \subseteq N(\mathbf{A})$ , ogni colonna di  $\mathbf{A} - \mathbf{I}_n$  appartiene a  $N(\mathbf{A})$ , e quindi, per (\*),  $\mathbf{A}^2 = \mathbf{A}$ .

Viceversa, se  $\mathbf{A}^2 = \mathbf{A}$ , da (\*) si ottiene che ogni colonna di  $\mathbf{A} - \mathbf{I}_n$  appartiene a  $N(\mathbf{A})$ . Essendo  $N(\mathbf{A})$  uno spazio vettoriale, ogni combinazione lineare a coefficienti complessi di colonne di  $\mathbf{A} - \mathbf{I}_n$ , in quanto combinazione lineare a coefficienti complessi di vettori di  $N(\mathbf{A})$ , appartiene a  $N(\mathbf{A})$ . Ossia  $C(\mathbf{A} - \mathbf{I}_2) \subseteq N(\mathbf{A})$ .

[7] Siano  $\mathbf{A}$  una matrice complessa  $m \times n$  ed  $f_{\mathbf{A}} : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^m$  l'applicazione lineare indotta da  $\mathbf{A}$ . Si provi che  $f_{\mathbf{A}}$  è iniettiva se e solo se  $\mathbf{A}$  ha un'inversa sinistra.

$$f_{\mathbf{A}} \text{ è iniettiva} \iff N(f_{\mathbf{A}}) = \{\mathbf{0}\} \iff N(\mathbf{A}) = \{\mathbf{0}\} \iff \dim(N(\mathbf{A})) = 0$$

$f_{\mathbf{A}}$  appl. lin.

$N(f_{\mathbf{A}}) = N(\mathbf{A})$

Poichè per il teorema “nullità + rango” si ha

$$\dim N(\mathbf{A}) = (\text{numero delle colonne di } \mathbf{A}) - \text{rk}(\mathbf{A}),$$

allora

$$\dim (N(\mathbf{A})) = 0 \iff \text{numero delle colonne di } \mathbf{A} = \text{rk}(\mathbf{A}).$$

Dunque

$$f_{\mathbf{A}} \text{ è iniettiva } \iff \text{numero delle colonne di } \mathbf{A} = \text{rk}(\mathbf{A}) \iff \mathbf{A} \text{ ha un'inversa sinistra.}$$

[8] Sia  $\mathbf{A}_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 1 & \alpha + 2 & \alpha & \alpha + 2 \\ 2 & 4 & 0 & \alpha + 6 \end{pmatrix}$ . Per ogni  $\alpha \in \mathbb{C}$  si trovi una base dello spazio nullo  $N(\mathbf{A}_\alpha)$  di  $\mathbf{A}_\alpha$ .

Poichè  $N(\mathbf{A}_\alpha) = N(\mathbf{U}_\alpha)$  per ogni forma ridotta di Gauss  $\mathbf{U}_\alpha$  di  $\mathbf{A}_\alpha$ , troviamo una base dello spazio nullo di una forma ridotta di Gauss per  $\mathbf{A}_\alpha$ .

$$\mathbf{A}_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 1 & \alpha + 2 & \alpha & \alpha + 2 \\ 2 & 4 & 0 & \alpha + 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{31}(-2)E_{21}(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & \alpha & \alpha & \alpha - 1 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix} = \mathbf{B}_\alpha$$

1° CASO  $\alpha = 0$

$$\mathbf{B}_0 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_2(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{U}_0$$

Per il Teorema nullità+rango,

$$\dim N(\mathbf{U}_0) = (\text{numero delle colonne di } \mathbf{U}_0) - \text{rk}(\mathbf{U}_0) = 4 - 2 = 2.$$

Da

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in N(\mathbf{U}_0) \iff \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_4 = 0 \\ x_4 = 0 \end{cases}$$

prendendo come parametri le variabili corrispondenti alle colonne libere di  $\mathbf{U}_0$ , ossia la 2<sup>a</sup> e la 3<sup>a</sup>, con la sostituzione all'indietro si ottiene

$$\begin{cases} x_2 = h \\ x_3 = k \\ x_4 = 0 \\ x_1 = -2x_2 - 3x_4 = -2h \end{cases}$$

Quindi  $N(\mathbf{A}_0) = N(\mathbf{U}_0) = \left\{ \begin{pmatrix} -2h \\ h \\ k \\ 0 \end{pmatrix} \mid h, k \in \mathbb{C} \right\}$ . Ponendo:

$$\mathbf{v}_1 \stackrel{=}{\uparrow} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{v}_2 \stackrel{=}{\uparrow} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$h = 1$   
 $k = 0$

$h = 0$   
 $k = 1$

si ottiene che una base di  $N(\mathbf{A}_0)$  è

$$\left\{ \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

2° CASO  $\alpha \neq 0$

$$\mathbf{B}_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & \alpha & \alpha & \alpha - 1 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix} \xrightarrow{E_3(\frac{1}{\alpha})E_2(\frac{1}{\alpha})} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & \frac{\alpha-1}{\alpha} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{U}_\alpha$$

Per il Teorema nullità+rango,

$$\dim N(\mathbf{U}_\alpha) = (\text{numero delle colonne di } \mathbf{U}_\alpha) - \text{rk}(\mathbf{U}_\alpha) = 4 - 3 = 1.$$

Da

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in N(\mathbf{U}_\alpha) \iff \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_4 = 0 \\ x_2 + x_3 + \frac{\alpha-1}{\alpha}x_4 = 0 \\ x_4 = 0 \end{cases}$$

prendendo come parametro la variabile corrispondente all'unica colonna libera di  $\mathbf{U}_\alpha$ , ossia la 3<sup>a</sup>, con la sostituzione all'indietro si ottiene

$$\begin{cases} x_3 = h \\ x_4 = 0 \\ x_2 = -x_3 - \frac{\alpha-1}{\alpha}x_4 = -h \\ x_1 = -2x_2 - 3x_4 = 2h \end{cases}$$

Quindi  $N(\mathbf{A}_\alpha) = N(\mathbf{U}_\alpha) = \left\{ \begin{pmatrix} 2h \\ -h \\ h \\ 0 \end{pmatrix} \mid h \in \mathbb{C} \right\}$ . Ponendo:  $\mathbf{v}_1 \stackrel{=}{\underset{\boxed{h=1}}{\uparrow}} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ , si ottiene che una base di

$N(\mathbf{A}_\alpha)$  è

$$\left\{ \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

**Svolgimento degli Esercizi per casa 7**

1] Sia  $\mathbf{A}_\alpha = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 2i \\ 0 & \alpha & 0 & 2i \\ 4 & \alpha - 1 & 0 & 4i \\ 0 & 2 & 4\alpha - 6 & 0 \end{pmatrix}$ , dove  $\alpha \in \mathbb{C}$ .

Per ogni  $\alpha \in \mathbb{C}$  si dica qual è  $rk(\mathbf{A}_\alpha)$  e si trovino una base  $\mathcal{B}_\alpha$  di  $C(\mathbf{A}_\alpha)$  ed una base  $\mathcal{D}_\alpha$  di  $R(\mathbf{A}_\alpha)$ .

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_\alpha &= \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 2i \\ 0 & \alpha & 0 & 2i \\ 4 & \alpha - 1 & 0 & 4i \\ 0 & 2 & 4\alpha - 6 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{31}(-4)E_1(\frac{1}{2})} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & i \\ 0 & \alpha & 0 & 2i \\ 0 & \alpha - 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4\alpha - 6 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{24}} \\ &\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & i \\ 0 & 2 & 4\alpha - 6 & 0 \\ 0 & \alpha - 1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 & 2i \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{42}(-\alpha)E_{32}(-\alpha+1)E_2(\frac{1}{2})} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & i \\ 0 & 1 & 2\alpha - 3 & 0 \\ 0 & 0 & -(2\alpha - 3)(\alpha - 1) & 0 \\ 0 & 0 & -(2\alpha - 3)\alpha & 2i \end{pmatrix} = \mathbf{B}_\alpha \end{aligned}$$

1<sup>o</sup> CASO  $\alpha = 1$

$$\mathbf{B}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & i \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2i \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{34}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & i \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{U}_1$$

$rk(\mathbf{A}_1) = 3$

Una base  $\mathcal{B}_1$  di  $C(\mathbf{A}_1)$  è  $\mathcal{B}_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}$ .

Una base  $\mathcal{D}_1$  di  $R(\mathbf{A}_1)$  è  $\mathcal{D}_\alpha = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -i \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -2i \end{pmatrix} \right\}$ .

2<sup>o</sup> CASO  $\alpha = \frac{3}{2}$

$$\mathbf{B}_{\frac{3}{2}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & i \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2i \end{pmatrix} \xrightarrow{E_3(\frac{1}{2i})E_{34}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & i \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{U}_{\frac{3}{2}}$$

$rk(\mathbf{A}_{\frac{3}{2}}) = 3$

Una base  $\mathcal{B}_{\frac{3}{2}}$  di  $C(\mathbf{A}_{\frac{3}{2}})$  è  $\mathcal{B}_{\frac{3}{2}} = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} \\ 2 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 2i \\ 2i \\ 4i \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ .

Una base  $\mathcal{D}_{\frac{3}{2}}$  di  $R(\mathbf{A}_{\frac{3}{2}})$  è  $\mathcal{D}_{\frac{3}{2}} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -i \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ .

**3<sup>0</sup> CASO**  $\alpha \notin \{1, \frac{3}{2}\}$

$$\mathbf{B}_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & i \\ 0 & 1 & 2\alpha - 3 & 0 \\ 0 & 0 & -(2\alpha - 3)(\alpha - 1) & 0 \\ 0 & 0 & -(2\alpha - 3)\alpha & 2i \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{43}((2\alpha-3)\alpha)E_3(\frac{1}{-(2\alpha-3)(\alpha-1)})} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & i \\ 0 & 1 & 2\alpha - 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2i \end{pmatrix} \xrightarrow{E_4(\frac{1}{2i})} \\ \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & i \\ 0 & 1 & 2\alpha - 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{U}_\alpha$$

$\text{rk}(\mathbf{A}_\alpha) = 4$

Una base  $\mathcal{B}_\alpha$  di  $C(\mathbf{A}_\alpha)$  è  $\mathcal{B}_\alpha = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ \alpha - 1 \\ 2 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 4\alpha - 6 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 2i \\ 2i \\ 4i \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ .

Una base  $\mathcal{D}_\alpha$  di  $R(\mathbf{A}_\alpha)$  è  $\mathcal{D}_\alpha = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -i \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2\alpha - 3 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ .

**2** Si dica per quali  $\alpha \in \mathbb{R}$  l'insieme  $\mathcal{B}_\alpha = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \\ 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha + 1 \\ \alpha + 1 \end{pmatrix} \right\}$  è una base di  $\mathbb{R}^3$  (si usi la Nota 3).

Costruiamo una matrice le cui colonne siano gli elementi di  $\mathcal{B}_\alpha$ :  $\mathbf{A}_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ \alpha & 0 & \alpha + 1 \\ 1 & 2 & \alpha + 1 \end{pmatrix}$ . Il problema diventa stabilire per quali  $\alpha \in \mathbb{R}$  si ha che  $\text{rk}\mathbf{A}_\alpha = 3$ . Facciamo un'eliminazione di Gauss su  $\mathbf{A}_\alpha$ .

$$\mathbf{A}_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ \alpha & 0 & \alpha + 1 \\ 1 & 2 & \alpha + 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{31}(-1)E_{21}(-\alpha)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2\alpha & 1 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix} = \mathbf{B}_\alpha$$

1<sup>0</sup> CASO:  $\alpha = 0$   $\mathbf{B}_0 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{U}_0$ ,  $\text{rk}(\mathbf{A}_0) = \text{rk}(\mathbf{U}_0) = 2 \neq 3 \implies \mathcal{B}_0$  **NON È** una base di  $\mathbb{R}^3$ .

2<sup>0</sup> CASO:  $\alpha \neq 0$   $\mathbf{B}_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2\alpha & 1 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix} \xrightarrow{E_3(1/\alpha)E_2(-1/2\alpha)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1/2\alpha \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{U}_\alpha$

$$rk(\mathbf{A}_\alpha) = rk(\mathbf{U}_\alpha) = 3 \implies \mathcal{B}_\alpha \text{ e } \mathcal{E}' \text{ una base di } \mathbb{R}^3.$$

[3] Sia  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow M_2(\mathbb{R})$  definita da  $f\left(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} a & a+b \\ a-b & b \end{pmatrix}$ .

(a) Si provi che  $f$  è un'applicazione lineare.

(b) Si determini la matrice  $\mathbf{A}$  associata ad  $f$  rispetto alle basi ordinate

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\} \quad \text{e} \quad \mathcal{D} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

su dominio e codominio rispettivamente.

(a) Per provare che  $f$  è un'applicazione lineare occorre provare :

1.  $f\left(\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix}\right) \stackrel{?}{=} f\left(\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix}\right) + f\left(\begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix}\right)$   
per ogni  $a_1, b_1, a_2, b_2 \in \mathbb{R}$
2.  $f\left(\alpha \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}\right) \stackrel{?}{=} \alpha f\left(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}\right)$  per ogni  $\alpha, a, b \in \mathbb{R}$

1. 
$$\begin{aligned} f\left(\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix}\right) &\stackrel{\substack{= \\ \uparrow \\ \text{def. somma} \\ \text{vettori colonna}}}{=} f\left(\begin{pmatrix} a_1 + a_2 \\ b_1 + b_2 \end{pmatrix}\right) \stackrel{\substack{= \\ \uparrow \\ \text{def. f}}}{=} \\ &= \begin{pmatrix} a_1 + a_2 & (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2) \\ (a_1 + a_2) - (b_1 + b_2) & b_1 + b_2 \end{pmatrix} \stackrel{\substack{= \\ \uparrow \\ \text{ propr. assoc. e} \\ \text{commut. di + in } \mathbb{R}}}{=} \\ &= \begin{pmatrix} a_1 + a_2 & (a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) \\ (a_1 - b_1) + (a_2 - b_2) & b_1 + b_2 \end{pmatrix} = \\ &\stackrel{\substack{= \\ \uparrow \\ \text{def. somma matrici}}}{=} \begin{pmatrix} a_1 & a_1 + b_1 \\ a_1 - b_1 & b_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2 & a_2 + b_2 \\ a_2 - b_2 & b_2 \end{pmatrix} \stackrel{\substack{= \\ \uparrow \\ \text{def. f}}}{=} f\left(\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix}\right) + f\left(\begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix}\right) \end{aligned}$$

2. 
$$\begin{aligned} f\left(\alpha \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}\right) &\stackrel{\substack{= \\ \uparrow \\ \text{def. prod. di uno scal.} \\ \text{per un vett.}}}{=} f\left(\begin{pmatrix} \alpha a \\ \alpha b \end{pmatrix}\right) \stackrel{\substack{= \\ \uparrow \\ \text{def. f}}}{=} \begin{pmatrix} \alpha a & \alpha a + \alpha b \\ \alpha a - \alpha b & \alpha b \end{pmatrix} \stackrel{\substack{= \\ \uparrow \\ \text{ propr. distr.} \\ \text{in } \mathbb{R}}}{=} \\ &= \begin{pmatrix} \alpha a & \alpha(a+b) \\ \alpha(a-b) & \alpha b \end{pmatrix} \stackrel{\substack{= \\ \uparrow \\ \text{def. prod. di uno scal.} \\ \text{per una matrice}}}{=} \alpha \begin{pmatrix} a & a+b \\ a-b & b \end{pmatrix} \stackrel{\substack{= \\ \uparrow \\ \text{def. f}}}{=} \alpha f\left(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}\right) \end{aligned}$$

(b) La matrice  $\mathbf{A}$  associata ad  $f$  rispetto alle basi ordinate  $\mathcal{B}$  e  $\mathcal{D}$  su dominio e codominio rispettivamente è la matrice

$$\mathbf{A} = \left( C_{\mathcal{D}}\left(f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)\right) \quad C_{\mathcal{D}}\left(f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right)\right) \right).$$

Dalla definizione di  $f$  si ottiene:

$$f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix},$$

$$\text{quindi } \mathbf{A} = \left( C_{\mathcal{D}}\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) \quad C_{\mathcal{D}}\left(\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\right) \right).$$

Calcoliamo le coordinate rispetto alla base ordinata  $\mathcal{D}$  di un generico elemento  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ .

$$C_{\mathcal{D}}\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \delta \\ \gamma \end{pmatrix} \quad | \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \delta \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\gamma & \alpha + \beta \\ \beta + \delta & \beta \end{pmatrix}$$

$$\text{Risolvendo il sistema } \begin{cases} 2\gamma = a \\ \alpha + \beta = b \\ \beta + \delta = c \\ \beta = d \end{cases} \quad \text{otteniamo} \quad \begin{cases} \beta = d \\ \gamma = a/2 \\ \alpha = b - \beta = b - d \\ \delta = c - \beta = c - d \end{cases}, \quad \text{quindi}$$

$$C_{\mathcal{D}}\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} b - d \\ d \\ c - d \\ a/2 \end{pmatrix}.$$

In particolare, specializzando a  $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ , otteniamo

$$C_{\mathcal{D}}\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 1/2 \end{pmatrix}, \quad C_{\mathcal{D}}\left(\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 1/2 \end{pmatrix}.$$

La matrice  $\mathbf{A}$  associata ad  $f$  rispetto alle basi ordinate  $\mathcal{B}$  e  $\mathcal{D}$  su dominio e codominio rispettivamente è quindi la matrice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ -1 & -3 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

4 Siano

$$\mathcal{B} = \left\{ \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \quad \text{e} \quad \mathcal{B}' = \left\{ \mathbf{v}'_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \mathbf{v}'_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \mathbf{v}'_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

- (1) Si provi che  $\mathcal{B}$  e  $\mathcal{B}'$  sono due basi ordinate di  $\mathbb{R}^3$ .  
 (2) Si calcolino le matrici di passaggio  $\mathbf{M}_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{B}'}$  da  $\mathcal{B}'$  a  $\mathcal{B}$  e  $\mathbf{M}_{\mathcal{B}' \leftarrow \mathcal{B}}$  da  $\mathcal{B}$  a  $\mathcal{B}'$ .

(1) Siano  $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$  ed  $\mathbf{A}' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$  le matrici che hanno come colonne gli elementi di  $\mathcal{B}$  e di  $\mathcal{B}'$  rispettivamente.

Occorre provare che entrambe hanno rango uguale a 3.

Facendo una E.G. su  $\mathbf{A}$  si ottiene:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{21}(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{32}(-1)E_2(-1)} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{U}$$

per cui  $\text{rk}(\mathbf{A}) = \text{rk}(\mathbf{U}) = 3$ , ed, analogamente, facendo una E.G. su  $\mathbf{A}'$  si ottiene:

$$\mathbf{A}' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{31}(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{32}(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_3(-\frac{1}{2})} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{U}'$$

per cui  $\text{rk}(\mathbf{A}') = \text{rk}(\mathbf{U}') = 3$ .

- (2) La matrice di passaggio  $\mathbf{M}_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{B}'}$  da  $\mathcal{B}'$  a  $\mathcal{B}$  è

$$\mathbf{M}_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{B}'} = (C_{\mathcal{B}}(\mathbf{v}'_1) \quad C_{\mathcal{B}}(\mathbf{v}'_2) \quad C_{\mathcal{B}}(\mathbf{v}'_3)) = \left( C_{\mathcal{B}}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \quad C_{\mathcal{B}}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \quad C_{\mathcal{B}}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \right).$$

Per calcolarla, piuttosto che calcolare separatamente  $C_{\mathcal{B}}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ ,  $C_{\mathcal{B}}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$  e  $C_{\mathcal{B}}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ , calcoliamo  $C_{\mathcal{B}}\left(\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}\right)$

per un generico vettore  $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ , e specializziamo la formula ottenuta ai tre diversi vettori  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ,  $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ,

$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ . Poichè

$$C_{\mathcal{B}}\left(\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \delta \end{pmatrix} \quad | \quad \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \delta \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

allora

$$C_{\mathcal{B}}\left(\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \delta \end{pmatrix} \quad | \quad \begin{pmatrix} \alpha + 2\beta + \delta \\ \alpha + \beta + \delta \\ \beta + \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

ossia  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\delta$  sono soluzioni del sistema lineare

$$(*) \quad \begin{cases} \alpha + 2\beta + \delta = a \\ \alpha + \beta + \delta = b \\ \beta + \delta = c \end{cases}$$

Facendo una E.G. sulla matrice aumentata di (\*) otteniamo

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & a \\ 1 & 1 & 1 & b \\ 0 & 1 & 1 & c \end{array} \right) \xrightarrow{E_{21}(-1)} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & a \\ 0 & -1 & 0 & b-a \\ 0 & 1 & 1 & c \end{array} \right) \xrightarrow{E_{32}(-1)E_2(-1)} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & a \\ 0 & 1 & 0 & a-b \\ 0 & 0 & 1 & c-a+b \end{array} \right)$$

da cui, con la sostituzione all'indietro,

$$\begin{cases} \delta = c - a + b \\ \beta = a - b \\ \alpha = -2\beta - \delta + a = -2a + 2b - c + a - b + a = b - c \end{cases}$$

Dunque  $C_{\mathcal{B}}\left(\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} b-c \\ a-b \\ c-a+b \end{pmatrix}$ , per cui  $C_{\mathcal{B}}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $C_{\mathcal{B}}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ ,  $C_{\mathcal{B}}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ , e quindi

$$\mathbf{M}_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{M}_{\mathcal{B}' \leftarrow \mathcal{B}} = \left( C_{\mathcal{B}'}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) \quad C_{\mathcal{B}'}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \quad C_{\mathcal{B}'}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \right),$$

ma dal momento che  $\mathbf{M}_{\mathcal{B}' \leftarrow \mathcal{B}} = \mathbf{M}_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{B}'}^{-1}$ , calcoliamo  $\mathbf{M}_{\mathcal{B}' \leftarrow \mathcal{B}}$  usando l'algoritmo di Gauss-Jordan:

$$(\mathbf{M}_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{B}'} \mid \mathbf{I}_3) = \left( \begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{E_{21}(-1)E_1(-1)} \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \rightarrow$$

$$\xrightarrow{E_{21}(-1)E_1(-1)} \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 2 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{E_3(3/2)} \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1/2 \end{array} \right) \rightarrow$$

$$\xrightarrow{E_{23}(1)} \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1/2 \end{array} \right).$$

Dunque  $\mathbf{M}_{\mathcal{B}' \leftarrow \mathcal{B}} = \mathbf{M}_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{B}'}^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ .

5] Sia  $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 6 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$  la matrice associata ad un'applicazione lineare  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  rispetto alle basi ordinate  $\mathcal{B} = \left\{ \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$  e  $\mathcal{D} = \left\{ \mathbf{w}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \mathbf{w}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \mathbf{w}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$  su dominio e codominio rispettivamente. Si determini la matrice  $\mathbf{A}'$  associata ad  $f$  rispetto alle basi ordinate  $\mathcal{B}' = \left\{ \mathbf{v}'_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}; \mathbf{v}'_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} \right\}$  e  $\mathcal{D}' = \left\{ \mathbf{w}'_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \mathbf{w}'_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}; \mathbf{w}'_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$  su dominio e codominio rispettivamente.

La matrice  $\mathbf{A}'$  associata ad  $f$  rispetto alle basi ordinate  $\mathcal{B}'$  e  $\mathcal{D}'$  su dominio e codominio rispettivamente è la matrice

$$\mathbf{A}' = \mathbf{M}_{\mathcal{D}' \leftarrow \mathcal{D}'}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{M}_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{B}'} \quad \text{dove } \mathbf{M}_{\mathcal{D}' \leftarrow \mathcal{D}'} \quad \text{è la matrice di passaggio da } \mathcal{D}' \quad \text{a } \mathcal{D} \quad \text{e}$$

$$\mathbf{M}_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{B}'} \quad \text{è la matrice di passaggio da } \mathcal{B}' \quad \text{a } \mathcal{B}.$$

Per calcolare  $\mathbf{M}_{\mathcal{D}' \leftarrow \mathcal{D}'}^{-1} = \mathbf{M}_{\mathcal{D}' \leftarrow \mathcal{D}'} = (C_{\mathcal{D}'}(\mathbf{w}_1) \quad C_{\mathcal{D}'}(\mathbf{w}_2) \quad C_{\mathcal{D}'}(\mathbf{w}_3))$ , calcoliamo per prima cosa le coordinate rispetto a  $\mathcal{D}'$  di un generico  $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ .

$$C_{\mathcal{D}'} \left( \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \delta \end{pmatrix} \quad \text{t.c.} \quad \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \delta \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha + \beta \\ -\beta \\ \delta \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \alpha + \beta = a \\ -\beta = b \\ \delta = c \end{cases} \implies \begin{cases} \delta = c \\ \beta = -b \\ \alpha = a - \beta = a + b \end{cases}$$

Dunque  $C_{\mathcal{D}'} \left( \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} a + b \\ -b \\ c \end{pmatrix}$ .

In particolare, specializzando a  $\mathbf{w}_1$ ,  $\mathbf{w}_2$  e  $\mathbf{w}_3$  otteniamo

$$C_{\mathcal{D}'}(\mathbf{w}_1) = C_{\mathcal{D}'} \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \begin{matrix} = \\ \uparrow \\ \boxed{a = b = 1} \\ \boxed{c = 0} \end{matrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad C_{\mathcal{D}'}(\mathbf{w}_2) = C_{\mathcal{D}'} \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \begin{matrix} = \\ \uparrow \\ \boxed{a = c = 1} \\ \boxed{b = 0} \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$C_{\mathcal{D}'}(\mathbf{w}_3) = C_{\mathcal{D}'} \left( \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \begin{matrix} = \\ \uparrow \\ \boxed{a = c = 0} \\ \boxed{b = 1} \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

per cui

$$\mathbf{M}_{\mathcal{D}' \leftarrow \mathcal{D}'}^{-1} = \mathbf{M}_{\mathcal{D}' \leftarrow \mathcal{D}'} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Per calcolare  $\mathbf{M}_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{B}'} = (C_{\mathcal{B}}(\mathbf{v}'_1) \ C_{\mathcal{B}}(\mathbf{v}'_2))$ , calcoliamo per prima cosa le coordinate rispetto a  $\mathcal{B}$  di un generico  $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ .

$$C_{\mathcal{B}}\left(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \quad \text{t.c.} \quad \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha - \beta \\ \alpha + \beta \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \alpha - \beta = a \\ \alpha + \beta = b \end{cases} \implies \begin{cases} 2\alpha = a + b \\ 2\beta = b - a \end{cases} \implies \begin{cases} \alpha = (a + b)/2 \\ \beta = (b - a)/2 \end{cases}$$

Dunque  $C_{\mathcal{B}}\left(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} (a + b)/2 \\ (b - a)/2 \end{pmatrix}$ .

In particolare, specializzando a  $\mathbf{v}'_1$  e  $\mathbf{v}'_2$  otteniamo

$$C_{\mathcal{B}}(\mathbf{v}'_1) = C_{\mathcal{B}}\left(\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}\right) \stackrel{\substack{= \\ \uparrow \\ \boxed{\begin{matrix} a = 4 \\ b = 0 \end{matrix}}}}{\quad} \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad C_{\mathcal{B}}(\mathbf{v}'_2) = C_{\mathcal{B}}\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}\right) \stackrel{\substack{= \\ \uparrow \\ \boxed{\begin{matrix} a = 3 \\ b = 5 \end{matrix}}}}{\quad} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix},$$

per cui  $\mathbf{M}_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ .

La matrice  $\mathbf{A}'$  che cerchiamo è quindi

$$\begin{aligned} \mathbf{A}' &= \mathbf{M}_{\mathcal{D} \leftarrow \mathcal{D}'}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{M}_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 6 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ -1 & 1 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & 18 \\ -4 & -3 \\ -12 & 6 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

[6] Sia  $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ . Si provi che  $\|\mathbf{v}\|_{\infty} = \|\mathbf{v}\|_1$  se e solo se  $\mathbf{v}$  è un multiplo di una colonna di  $\mathbf{I}_n$ .

Sia  $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$ . Allora

$$\|\mathbf{v}\|_1 = |v_1| + |v_2| + \cdots + |v_n| \quad \text{e}$$

$$\|\mathbf{v}\|_{\infty} = |v_i| \quad \text{dove } i \in \{1, \dots, n\} \text{ è tale che } |v_i| \geq |v_j| \quad \forall j \neq i.$$

Si ha:

$$\|\mathbf{v}\|_{\infty} = \|\mathbf{v}\|_1 \iff |v_i| = |v_1| + |v_2| + \cdots + |v_n| \iff |v_j| = 0 \quad \forall j \neq i \iff v_j = 0 \quad \forall j \neq i \iff \mathbf{v} = v_i \mathbf{e}_i.$$

[7] Si verifichi che  $\phi: \mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$  definita da  $\phi\left(\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}\right) = |2a - b| + |a + c| + |ib|$  è una norma.

$$(1) \quad \phi(\mathbf{0}) = \phi\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = |2 \times 0 - 0| + |0 + 0| + |i0| = 0.$$

Poichè  $\phi(\mathbf{x}) \geq 0$  per ogni  $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^3$ , per provare che

$$\mathbf{x} \neq \mathbf{0} \implies \phi(\mathbf{x}) > 0$$

basta provare che

$$\mathbf{x} \neq \mathbf{0} \implies \phi(\mathbf{x}) \neq 0,$$

ossia basta provare che

$$\phi(\mathbf{x}) = 0 \implies \mathbf{x} = \mathbf{0}.$$

Dalla definizione di  $\phi$  si ottiene:

$$\left. \begin{array}{l} \phi(\mathbf{x}) = 0 \\ \mathbf{x} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \end{array} \right\} \implies \left\{ \begin{array}{l} |2a - b| = 0 \\ |a + c| = 0 \\ |ib| = 0 \end{array} \right. \implies \left\{ \begin{array}{l} a = b/2 \\ c = -a = -b/2 \\ ib = 0 \end{array} \right. \implies a = b = c = 0 \implies \mathbf{x} = \mathbf{0}.$$

$$(2) \quad \phi\left(\alpha \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}\right) = \phi\left(\begin{pmatrix} \alpha a \\ \alpha b \\ \alpha c \end{pmatrix}\right) = |2\alpha a - \alpha b| + |\alpha a + \alpha c| + |i\alpha b| =$$

$$= |\alpha||2a - b| + |\alpha||a + c| + |\alpha||ib| = |\alpha|(|2a - b| + |a + c| + |ib|) = |\alpha|\phi\left(\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}\right).$$

$$(3) \quad \phi\left(\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{pmatrix}\right) = \phi\left(\begin{pmatrix} a_1 + a_2 \\ b_1 + b_2 \\ c_1 + c_2 \end{pmatrix}\right) =$$

$$= |2(a_1 + a_2) - (b_1 + b_2)| + |(a_1 + a_2) + (c_1 + c_2)| + |i(b_1 + b_2)| =$$

$$= |(2a_1 - b_1) + (2a_2 - b_2)| + |(a_1 + c_1) + (a_2 + c_2)| + |ib_1 + ib_2| \leq$$

$$\leq |2a_1 - b_1| + |2a_2 - b_2| + |a_1 + c_1| + |a_2 + c_2| + |ib_1| + |ib_2| = \phi\left(\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix}\right) + \phi\left(\begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{pmatrix}\right).$$

[8] Siano  $V$  uno spazio vettoriale,  $\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_1; \dots; \mathbf{v}_n\}$  una sua base ordinata e  $C_{\mathcal{B}} : V \rightarrow \mathbb{C}^n$  l'applicazione delle coordinate rispetto a  $\mathcal{B}$ . Si provi che la funzione  $\|\cdot\|_{\mathcal{B}} : V \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$  definita da  $\|\mathbf{w}\|_{\mathcal{B}} = \|C_{\mathcal{B}}(\mathbf{w})\|_{\infty}$  per ogni  $\mathbf{w} \in V$  è una norma.

(i) Per ogni  $\mathbf{w} \in V$

$$\|w\|_{\mathcal{B}} \stackrel{\text{def. di } \|\cdot\|_{\mathcal{B}}}{=} \|C_{\mathcal{B}}(w)\|_{\infty} \stackrel{\|\mathbf{z}\|_{\infty} \geq 0 \quad \forall \mathbf{z} \in \mathbb{C}^n}{\geq} 0$$

$$\|w\|_{\mathcal{B}} = 0 \stackrel{\text{def. di } \|\cdot\|_{\mathcal{B}}}{\iff} \|C_{\mathcal{B}}(w)\|_{\infty} = 0 \stackrel{\|\mathbf{z}\|_{\infty} = 0 \iff \mathbf{z} = \mathbf{0}}{\iff} C_{\mathcal{B}}(w) = \mathbf{0} \stackrel{C_{\mathcal{B}} \text{ appl. lin. iniettiva}}{\iff} w = \mathbf{0}$$

(ii) Per ogni  $w \in V$  ed ogni  $\alpha \in \mathbb{C}$

$$\|\alpha w\|_{\mathcal{B}} \stackrel{\text{def. di } \|\cdot\|_{\mathcal{B}}}{=} \|C_{\mathcal{B}}(\alpha w)\|_{\infty} \stackrel{C_{\mathcal{B}} \text{ appl. lin.}}{=} \|\alpha C_{\mathcal{B}}(w)\|_{\infty} \stackrel{\|\alpha \mathbf{z}\|_{\infty} = |\alpha| \|\mathbf{z}\|_{\infty} \quad \forall \mathbf{z} \in \mathbb{C}^n, \alpha \in \mathbb{C}}{=} |\alpha| \|C_{\mathcal{B}}(w)\|_{\infty} \stackrel{\text{def. di } \|\cdot\|_{\mathcal{B}}}{=} |\alpha| \|w\|_{\mathcal{B}}$$

(iii) Per ogni  $w_1, w_2 \in V$

$$\|w_1 + w_2\|_{\mathcal{B}} \stackrel{\text{def. di } \|\cdot\|_{\mathcal{B}}}{=} \|C_{\mathcal{B}}(w_1 + w_2)\|_{\infty} \stackrel{C_{\mathcal{B}} \text{ appl. lin.}}{=} \|C_{\mathcal{B}}(w_1) + C_{\mathcal{B}}(w_2)\|_{\infty} \leq \|C_{\mathcal{B}}(w_1)\|_{\infty} + \|C_{\mathcal{B}}(w_2)\|_{\infty} \stackrel{\|\mathbf{z}_1 + \mathbf{z}_2\|_{\infty} \leq \|\mathbf{z}_1\|_{\infty} + \|\mathbf{z}_2\|_{\infty} \quad \forall \mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2 \in \mathbb{C}^n}{\leq} \|w_1\|_{\mathcal{B}} + \|w_2\|_{\mathcal{B}}$$

**Svolgimento degli Esercizi per casa 8**

**1** Si dica quali delle seguenti posizioni definisce un prodotto interno:

(a)  $(\cdot|\cdot) : V \times V \rightarrow \mathbb{C}$ , con  $V = M_2(\mathbb{C})$  e

$$\left( \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{pmatrix} \right) = \sum_{i=1}^4 \overline{a_i} b_i.$$

(b)  $(\cdot|\cdot) : V \times V \rightarrow \mathbb{C}$ , con  $V = \mathbb{C}^2$  e  $\left( \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \right) = \overline{x_1} y_1 - 3\overline{x_2} y_2$

(c)  $(\cdot|\cdot) : V \times V \rightarrow \mathbb{C}$ , con  $V = \mathbb{C}^2$  e  $\left( \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \right) = \overline{x_1} y_1 + 3\overline{x_2} y_2$

(a) Perché  $(\cdot|\cdot) : M_2(\mathbb{C}) \times M_2(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C}$  definito da

$$\left( \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{pmatrix} \right) = \sum_{i=1}^4 \overline{a_i} b_i$$

sia un prodotto interno occorre che soddisfi le tre seguenti condizioni:

(1)  $\overline{(\mathbf{v}|\mathbf{u})} = (\mathbf{u}|\mathbf{v})$  per ogni  $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix}, \mathbf{v} = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{C})$ .

(2)  $(\mathbf{u}|\alpha\mathbf{v} + \beta\mathbf{z}) = \alpha(\mathbf{u}|\mathbf{v}) + \beta(\mathbf{u}|\mathbf{z})$  per ogni  $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix}, \mathbf{v} = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{pmatrix}, \mathbf{z} = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 \\ c_3 & c_4 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{C})$ ,  
ed ogni  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$

(3)  $(\bullet) \quad (\mathbf{0}|\mathbf{0}) = 0$

$(\bullet\bullet) \quad \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} \neq \mathbf{0} \implies \left( \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} \right) \in \mathbb{R}_{>0}$

Per la verifica di (1) :

$$\overline{\left( \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} \right)} \stackrel{\substack{= \\ \text{def. di } (\cdot|\cdot)}}{\uparrow} \overline{\sum_{i=1}^4 \overline{b_i} a_i} = \sum_{i=1}^4 \overline{\overline{b_i} a_i} \stackrel{\substack{= \\ \text{def. di } (\cdot|\cdot)}}{\uparrow} \left( \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{pmatrix} \right).$$

Per la verifica di (2):

$$\begin{aligned} (\mathbf{u}|\alpha\mathbf{v} + \beta\mathbf{z}) &= \left( \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} \middle| \alpha \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} c_1 & c_2 \\ c_3 & c_4 \end{pmatrix} \right) = \left( \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} \alpha b_1 + \beta c_1 & \alpha b_2 + \beta c_2 \\ \alpha b_3 + \beta c_3 & \alpha b_4 + \beta c_4 \end{pmatrix} \right) = \\ &= \sum_{i=1}^4 \overline{a_i} (\alpha b_i + \beta c_i) = \alpha (\sum_{i=1}^4 \overline{a_i} b_i) + \beta (\sum_{i=1}^4 \overline{a_i} c_i) = \\ &= \alpha \left( \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{pmatrix} \right) + \beta \left( \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} c_1 & c_2 \\ c_3 & c_4 \end{pmatrix} \right) = \alpha(\mathbf{u}|\mathbf{v}) + \beta(\mathbf{u}|\mathbf{z}) \end{aligned}$$

Per la verifica di (3) :

$$(\bullet) \quad (\mathbf{0}|\mathbf{0}) = \left( \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right) = 4 \times \overline{0} \times 0 = 0$$

$$(\bullet\bullet) \quad \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} \neq \mathbf{0} \implies \left( \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} \right) = \sum_{i=1}^4 \overline{a_i} a_i = \sum_{i=1}^4 |a_i|^2 \in \mathbb{R}_{>0}$$

Infatti:  $|a_i|^2 \in \mathbb{R}_{\geq 0}$  per ogni  $i = 1, \dots, 4$ , per cui  $\sum_{i=1}^4 |a_i|^2 \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ , ed è  $\sum_{i=1}^4 |a_i|^2 \neq 0$  dal momento che almeno uno degli  $a_i$  è non nullo, essendo  $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} \neq \mathbf{0}$ .

Poichè che tutte e tre le condizioni sono soddisfatte,

$$\left( \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{pmatrix} \right) = \sum_{i=1}^4 \overline{a_i} b_i.$$

definisce un prodotto interno su  $M_2(\mathbb{C})$ .

(b) Perchè  $(\cdot | \cdot) : \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}$  definito da  $\left( \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \right) = \overline{x_1} y_1 - 3\overline{x_2} y_2$  sia un prodotto interno occorre che soddisfi le tre seguenti condizioni:

$$(1) \quad \overline{(\mathbf{y} | \mathbf{x})} = (\mathbf{x} | \mathbf{y}) \quad \text{per ogni } \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2.$$

$$(2) \quad (\mathbf{x} | \alpha \mathbf{y} + \beta \mathbf{w}) = \alpha (\mathbf{x} | \mathbf{y}) + \beta (\mathbf{x} | \mathbf{w}) \quad \forall \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, \mathbf{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}$$

$$(3) \quad (\bullet) \quad (\mathbf{0} | \mathbf{0}) = 0$$

$$(\bullet\bullet) \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \neq \mathbf{0} \implies (\mathbf{x} | \mathbf{x}) \in \mathbb{R}_{>0}$$

Per la verifica di (1) :

$$\overline{(\mathbf{y} | \mathbf{x})} = \overline{\overline{y_1} x_1 - 3\overline{y_2} x_2} = y_1 \overline{x_1} - 3y_2 \overline{x_2} = (\mathbf{x} | \mathbf{y}).$$

Per la verifica di (2):

$$\begin{aligned} (\mathbf{x} | \alpha \mathbf{y} + \beta \mathbf{w}) &= \overline{x_1}(\alpha y_1 + \beta w_1) - 3\overline{x_2}(\alpha y_2 + \beta w_2) = \alpha \overline{x_1} y_1 + \beta \overline{x_1} w_1 - 3\alpha \overline{x_2} y_2 - 3\beta \overline{x_2} w_2 = \\ &= \alpha(\overline{x_1} y_1 - 3\overline{x_2} y_2) + \beta(\overline{x_1} w_1 - 3\overline{x_2} w_2) = \alpha(\mathbf{x} | \mathbf{y}) + \beta(\mathbf{x} | \mathbf{w}). \end{aligned}$$

Per la verifica di (3) :

$$\bullet \quad (\mathbf{0} | \mathbf{0}) = 0 - 3 \times 0 = 0$$

$$\bullet\bullet \quad (\mathbf{x} | \mathbf{x}) = \overline{x_1} x_1 - 3\overline{x_2} x_2 = |x_1|^2 - 3|x_2|^2$$

Prendendo, ad esempio,  $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ , si ha  $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$  e  $(\mathbf{x} | \mathbf{x}) = 0^2 - 1^2 = -1 \notin \mathbb{R}_{>0}$ .

**Dunque la condizione (3) non è soddisfatta**, per cui

$$\left( \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \right) = \overline{x_1} y_1 - 3\overline{x_2} y_2$$

**NON** definisce un prodotto interno su  $\mathbb{C}^2$ .

(c) Perchè  $(\cdot|\cdot) : \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}$  definito da  $\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) = \bar{x}_1 y_1 + 3\bar{x}_2 y_2$  sia un prodotto interno occorre che soddisfi le tre seguenti condizioni:

- (1)  $\overline{(\mathbf{y}|\mathbf{x})} = (\mathbf{x}|\mathbf{y})$  per ogni  $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2$ .
- (2)  $(\mathbf{x}|\alpha\mathbf{y} + \beta\mathbf{w}) = \alpha(\mathbf{x}|\mathbf{y}) + \beta(\mathbf{x}|\mathbf{w}) \forall \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, \mathbf{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}$
- (3)  $(\bullet) \quad (\mathbf{0}|\mathbf{0}) = 0$
- ( $\bullet\bullet$ )  $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \neq \mathbf{0} \implies (\mathbf{x}|\mathbf{x}) \in \mathbb{R}_{>0}$

Per la verifica di (1) :

$$\overline{(\mathbf{y}|\mathbf{x})} = \overline{\bar{y}_1 x_1 + 3\bar{y}_2 x_2} = y_1 \bar{x}_1 + 3y_2 \bar{x}_2 = (\mathbf{x}|\mathbf{y}).$$

Per la verifica di (2):

$$\begin{aligned} (\mathbf{x}|\alpha\mathbf{y} + \beta\mathbf{w}) &= \bar{x}_1(\alpha y_1 + \beta w_1) + 3\bar{x}_2(\alpha y_2 + \beta w_2) = \alpha\bar{x}_1 y_1 + \beta\bar{x}_1 w_1 + 3\alpha\bar{x}_2 y_2 + 3\beta\bar{x}_2 w_2 = \\ &= \alpha(\bar{x}_1 y_1 + 3\bar{x}_2 y_2) + \beta(\bar{x}_1 w_1 + 3\bar{x}_2 w_2) = \alpha(\mathbf{x}|\mathbf{y}) + \beta(\mathbf{x}|\mathbf{w}). \end{aligned}$$

Per la verifica di (3) :

$$\begin{aligned} \bullet \quad (\mathbf{0}|\mathbf{0}) &= 0 + 3 \times 0 = 0 \\ \bullet\bullet \quad (\mathbf{x}|\mathbf{x}) &= \bar{x}_1 x_1 + 3\bar{x}_2 x_2 = |x_1|^2 + 3|x_2|^2 \end{aligned}$$

Essendo  $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ , si ha che  $x_1 \neq 0$  oppure  $x_2 \neq 0$ , per cui  $|x_1|^2 \in \mathbb{R}_{>0}$  oppure  $|x_2|^2 \in \mathbb{R}_{>0}$ . Quindi  $|x_1|^2 + 3|x_2|^2 \in \mathbb{R}_{>0}$ . Dal momento che tutte e tre le condizioni sono soddisfatte,

$$\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) = \bar{x}_1 y_1 + 3\bar{x}_2 y_2$$

definisce un prodotto interno su  $\mathbb{C}^2$ .

**2** Siano  $\mathbf{u} = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2$  e  $\|\cdot\| : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$  la norma indotta dal prodotto interno definito nell'Esercizio Tipo 17.

- (a) Si trovino tutti i vettori  $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$  tali che  $\|\mathbf{x}\| = \|\mathbf{x}\|_2$ .
- (b) Si calcolino  $\cos(\widehat{\mathbf{e}_1 \mathbf{u}})$  e  $\cos(\widehat{\mathbf{e}_2 \mathbf{u}})$ .
- (c) Si trovi  $\langle \mathbf{u} \rangle^\perp$ .

Poichè  $(\cdot|\cdot) : \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}$  è definito da

$$\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) = \bar{x}_1 y_1 + 2\bar{x}_2 y_2,$$

la norma  $\|\cdot\| : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$  indotta da  $(\cdot|\cdot)$  è definita da

$$\left\| \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right)} = \sqrt{\bar{x}_1 x_1 + 2\bar{x}_2 x_2} = \sqrt{|x_1|^2 + 2|x_2|^2}.$$

(a) Sia  $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ . Essendo  $\|\mathbf{x}\| = \sqrt{|x_1|^2 + 2|x_2|^2}$  e  $\|\mathbf{x}\|_2 = \sqrt{|x_1|^2 + |x_2|^2}$ , allora

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x}\| = \|\mathbf{x}\|_2 &\iff \sqrt{|x_1|^2 + 2|x_2|^2} = \sqrt{|x_1|^2 + |x_2|^2} \iff |x_1|^2 + 2|x_2|^2 = |x_1|^2 + |x_2|^2 \iff \\ &\iff |x_2|^2 = 0 \iff x_2 = 0. \end{aligned}$$

Dunque  $\{\mathbf{x} \mid \|\mathbf{x}\| = \|\mathbf{x}\|_2\} = \{\alpha \mathbf{e}_1 \mid \alpha \in \mathbb{C}\} = \langle \mathbf{e}_1 \rangle$ .

(b) Essendo

$$\begin{aligned} \|\mathbf{e}_1\| &= \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{|1|^2 + 2|0|^2} = 1, \\ \|\mathbf{e}_2\| &= \left\| \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{|0|^2 + 2|1|^2} = \sqrt{2}, \\ \|\mathbf{u}\| &= \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{|1|^2 + 2|1|^2} = \sqrt{3}, \\ (\mathbf{e}_1 | \mathbf{u}) &= \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \bar{1} \cdot 1 + 2 \cdot \bar{0} \cdot 1 = 1, \\ (\mathbf{e}_2 | \mathbf{u}) &= \left( \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \bar{0} \cdot 1 + 2 \cdot \bar{1} \cdot 1 = 2, \end{aligned}$$

allora

$$\begin{aligned} \cos(\widehat{\mathbf{e}_1 \mathbf{u}}) &= \frac{(\mathbf{e}_1 | \mathbf{u})}{\|\mathbf{e}_1\| \|\mathbf{u}\|} = \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \cos(\widehat{\mathbf{e}_2 \mathbf{u}}) &= \frac{(\mathbf{e}_2 | \mathbf{u})}{\|\mathbf{e}_2\| \|\mathbf{u}\|} = \frac{2}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{3}} = \sqrt{\frac{2}{3}}. \end{aligned}$$

(c) Poichè

$$(\mathbf{u} | \mathbf{x}) = \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \right) = \bar{1} \cdot x_1 + 2 \cdot \bar{1} \cdot x_2 = x_1 + 2x_2$$

allora

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \mathbf{x} \in \langle \mathbf{u} \rangle^\perp \iff (\mathbf{u} | \mathbf{x}) = 0 \iff x_1 + 2x_2 = 0 \iff x_1 = -2x_2 \iff \mathbf{x} = \alpha \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ con } \alpha \in \mathbb{C}.$$

Dunque  $\langle \mathbf{u} \rangle^\perp = \left\langle \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$ .

**3** Si trovi una base ortonormale del sottospazio di  $\mathbb{C}^4$

$$V = \left\langle \begin{pmatrix} i \\ -1 \\ i \\ -1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} -1 \\ -i \\ -1 \\ -i \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2i \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

**I** Costruiamo dapprima **una base di V**: poniamo

$$\mathbf{w}_1 = \begin{pmatrix} i \\ -1 \\ i \\ -1 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{w}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -i \\ -1 \\ -i \end{pmatrix}; \quad \mathbf{w}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{w}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2i \\ 0 \end{pmatrix}$$

e calcoliamo una base di  $C(\mathbf{A})$  dove  $\mathbf{A} = (\mathbf{w}_1 \ \mathbf{w}_2 \ \mathbf{w}_3 \ \mathbf{w}_4)$ .

$$\begin{aligned} \mathbf{A} = (\mathbf{w}_1 \ \mathbf{w}_2 \ \mathbf{w}_3 \ \mathbf{w}_4) &= \begin{pmatrix} i & -1 & 1 & 0 \\ -1 & -i & 0 & 0 \\ i & -1 & 1 & 2i \\ -1 & -i & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{41}(1)E_{31}(-i)E_{21}(1)E_1(-i)} \\ &\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & i & -i & 0 \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2i \\ 0 & 0 & -i & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_3(-\frac{1}{2}i)E_{42}(i)E_2(i)} \begin{pmatrix} 1 & i & -i & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{U} \end{aligned}$$

Poichè  $\mathbf{U}$  ha come colonne dominanti la 1<sup>a</sup>, la 3<sup>a</sup> e la 4<sup>a</sup>, allora una base di  $C(\mathbf{A}) = V$  è  $\{\mathbf{w}_1; \mathbf{w}_3; \mathbf{w}_4\}$ .

**II** Troviamo **una base ortogonale di  $V$**  applicando l'algoritmo di Gram-Schmidt a

$$\left\{ \mathbf{v}_1 = \mathbf{w}_1 = \begin{pmatrix} i \\ -1 \\ i \\ -1 \end{pmatrix}; \mathbf{v}_2 = \mathbf{w}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \mathbf{v}_3 = \mathbf{w}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2i \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

$$\mathbf{u}_1 = \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} i \\ -1 \\ i \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{u}_2 = \mathbf{v}_2 - \alpha_{12}\mathbf{u}_1, \quad \mathbf{u}_1 \neq \mathbf{0} \implies \alpha_{12} = \frac{(\mathbf{u}_1|\mathbf{v}_2)}{(\mathbf{u}_1|\mathbf{u}_1)}$$

$$(\mathbf{u}_1|\mathbf{v}_2) = \mathbf{u}_1^H \mathbf{v}_2 = (-i \ -1 \ -i \ -1) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = -2i$$

$$(\mathbf{u}_1|\mathbf{u}_1) = \mathbf{u}_1^H \mathbf{u}_1 = (-i \ -1 \ -i \ -1) \begin{pmatrix} i \\ -1 \\ i \\ -1 \end{pmatrix} = 4$$

$$\implies \alpha_{12} = -\frac{2i}{4} = -\frac{1}{2}i$$

$$\mathbf{u}_2 = \mathbf{v}_2 - \alpha_{12}\mathbf{u}_1 = \mathbf{v}_2 + \frac{1}{2}i\mathbf{u}_1 =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}i \begin{pmatrix} i \\ -1 \\ i \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ 1 \\ -i \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{u}_3 = \mathbf{v}_3 - \alpha_{13}\mathbf{u}_1 - \alpha_{23}\mathbf{u}_2,$$

$$\mathbf{u}_1 \neq \mathbf{0} \implies \alpha_{13} = \frac{(\mathbf{u}_1|\mathbf{v}_3)}{(\mathbf{u}_1|\mathbf{u}_1)}$$

$$(\mathbf{u}_1|\mathbf{v}_3) = \mathbf{u}_1^H \mathbf{v}_3 = (-i \quad -1 \quad -i \quad -1) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2i \\ 0 \end{pmatrix} = 2$$

$$(\mathbf{u}_1|\mathbf{u}_1) = \mathbf{u}_1^H \mathbf{u}_1 = 4$$

$$\implies \alpha_{13} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$\mathbf{u}_2 \neq \mathbf{0} \implies \alpha_{23} = \frac{(\mathbf{u}_2|\mathbf{v}_3)}{(\mathbf{u}_2|\mathbf{u}_2)}$$

$$(\mathbf{u}_2|\mathbf{v}_3) = \mathbf{u}_2^H \mathbf{v}_3 = \frac{1}{2}(1 \quad i \quad 1 \quad i) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2i \\ 0 \end{pmatrix} = i$$

$$(\mathbf{u}_2|\mathbf{u}_2) = \mathbf{u}_2^H \mathbf{u}_2 = \frac{1}{2}(1 \quad i \quad 1 \quad i) \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ 1 \\ -i \end{pmatrix} = 1$$

$$\implies \alpha_{23} = i$$

$$\mathbf{u}_3 = \mathbf{v}_3 - \alpha_{13}\mathbf{u}_1 - \alpha_{23}\mathbf{u}_2 = \mathbf{v}_3 - \frac{1}{2}\mathbf{u}_1 - \frac{1}{2}i\mathbf{u}_2 =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2i \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} i \\ -1 \\ i \\ -1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2}i \begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ 1 \\ -i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -i \\ 0 \\ i \\ 0 \end{pmatrix}$$

Dunque  $\left\{ \mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} i \\ -1 \\ i \\ -1 \end{pmatrix}; \mathbf{u}_2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ 1 \\ -i \end{pmatrix}; \mathbf{u}_3 = \begin{pmatrix} -i \\ 0 \\ i \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$  è una base ortogonale di  $V$ .

**III** Costruiamo **base ortonormale di  $V$**  normalizzando la base ortogonale trovata al punto **II**, ossia dividendo ciascun elemento della base ortogonale trovata in **II** per la propria norma euclidea.

Cominciamo con il calcolare la norma euclidea di  $\mathbf{u}_1$ ,  $\mathbf{u}_2$  ed  $\mathbf{u}_3$  :

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u}_1\|_2 &= \sqrt{(\mathbf{u}_1|\mathbf{u}_1)} = \sqrt{4} = 2 \\ \|\mathbf{u}_2\|_2 &= \sqrt{(\mathbf{u}_2|\mathbf{u}_2)} = \sqrt{1} = 1 \\ \|\mathbf{u}_3\|_2 &= \sqrt{(\mathbf{u}_3|\mathbf{u}_3)} = \sqrt{(i \ 0 \ -i \ 0) \begin{pmatrix} -i \\ 0 \\ i \\ 0 \end{pmatrix}} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2} \end{aligned}$$

Allora

$$\mathcal{B} = \left\{ \frac{\mathbf{u}_1}{\|\mathbf{u}_1\|_2}; \frac{\mathbf{u}_2}{\|\mathbf{u}_2\|_2}; \frac{\mathbf{u}_3}{\|\mathbf{u}_3\|_2} \right\} = \left\{ \frac{1}{2} \begin{pmatrix} i \\ -1 \\ i \\ -1 \end{pmatrix}; \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ 1 \\ -i \end{pmatrix}; \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -i \\ 0 \\ i \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

è una base ortonormale di  $V$ .

4 Si calcoli la proiezione ortogonale di  $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 2i \\ -6 \\ 8i \\ 10 \end{pmatrix}$  sul sottospazio  $U = \langle \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 8i \\ 0 \\ -i \\ 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 7i \\ -1 \\ -i \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$  di  $\mathbb{C}^3$ .

I Troviamo una base ortonormale di  $U$ .

Poniamo  $\mathbf{w}_1 = \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $\mathbf{w}_2 = \begin{pmatrix} 8i \\ 0 \\ -i \\ 1 \end{pmatrix}$ ,  $\mathbf{w}_3 = \begin{pmatrix} 7i \\ -1 \\ -i \\ 1 \end{pmatrix}$  e calcoliamo una base di  $C(\mathbf{A})$  dove  $\mathbf{A} = (\mathbf{w}_1 \ \mathbf{w}_2 \ \mathbf{w}_3)$ .

$$\mathbf{A} = (\underline{w}_1 \ \underline{w}_2 \ \underline{w}_3) = \begin{pmatrix} 1 & 8i & 7i \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -i & -i \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{21}(-1)E_1(-i)} \begin{pmatrix} 1 & 8 & 7 \\ 0 & -8 & -8 \\ 0 & -i & -i \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{42}(-1)E_{32}(i)E_2(-\frac{1}{8})} \begin{pmatrix} 1 & 8 & 7 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{U}$$

Poichè  $\mathbf{U}$  ha come colonne dominanti la  $1^a$  e la  $2^a$ , allora una base di  $C(\mathbf{A}) = U$  è  $\{\mathbf{w}_1; \mathbf{w}_2\}$ .

Applichiamo ora l'algoritmo di Gram-Schmidt a  $\left\{ \mathbf{v}_1 = \mathbf{w}_1 = \begin{pmatrix} i \\ i \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \mathbf{v}_2 = \mathbf{w}_2 = \begin{pmatrix} 8i \\ 0 \\ -i \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$  per trovare una base ortogonale di  $U$ .

$$\mathbf{u}_1 = \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{u}_2 = \mathbf{v}_2 - \alpha_{12}\mathbf{u}_1,$$

$$\mathbf{u}_1 \neq \mathbf{0} \implies \alpha_{12} = \frac{(\mathbf{u}_1|\mathbf{v}_2)}{(\mathbf{u}_1|\mathbf{u}_1)}$$

$$(\mathbf{u}_1|\mathbf{v}_2) = \mathbf{u}_1^H \mathbf{v}_2 = (-i \ 1 \ 0 \ 0) \begin{pmatrix} 8i \\ 0 \\ -i \\ 1 \end{pmatrix} = (-i)8i = 8$$

$$(\mathbf{u}_1|\mathbf{u}_1) = \mathbf{u}_1^H \mathbf{u}_1 = (-i \ 1 \ 0 \ 0) \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = (-i)i + 1 = 2$$

$$\implies \alpha_{12} = \frac{8}{2} = 4$$

$$\mathbf{u}_2 = \mathbf{v}_2 - \alpha_{12}\mathbf{u}_1 = \mathbf{v}_2 - 4\mathbf{u}_1 =$$

$$= \begin{pmatrix} 8i \\ 0 \\ -i \\ 1 \end{pmatrix} - 4 \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4i \\ -4 \\ -i \\ 1 \end{pmatrix}$$

Dunque  $\left\{ \mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 4i \\ -4 \\ -i \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$  è una base ortogonale di  $U$ .

Costruiamo base ortonormale di  $U$  normalizzando la base ortogonale  $\{\mathbf{u}_1; \mathbf{u}_2\}$ , ossia dividendo ciascun suo elemento per la sua norma euclidea.

Cominciamo con il calcolare la norma euclidea di  $\mathbf{u}_1$  ed  $\mathbf{u}_2$  :

$$\|\mathbf{u}_1\|_2 = \sqrt{(\mathbf{u}_1|\mathbf{u}_1)} = \sqrt{2}$$

$$\|\mathbf{u}_2\|_2 = \sqrt{(\mathbf{u}_2|\mathbf{u}_2)} = \sqrt{(-4i \ -4 \ i \ 1) \begin{pmatrix} 4i \\ -4 \\ -i \\ 1 \end{pmatrix}} = \sqrt{16 + 16 + 1 + 1} = \sqrt{34}$$

Allora

$$\mathcal{B} = \left\{ \mathbf{u}_1^* = \frac{\mathbf{u}_1}{\|\mathbf{u}_1\|_2}; \mathbf{u}_2^* = \frac{\mathbf{u}_2}{\|\mathbf{u}_2\|_2} \right\} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \frac{1}{\sqrt{34}} \begin{pmatrix} 4i \\ -4 \\ -i \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

è una base ortonormale di  $U$ .

La proiezione ortogonale di  $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 2i \\ -6 \\ 8i \\ 10 \end{pmatrix}$  su  $U$  è

$$P_U(\mathbf{v}) = (\mathbf{u}_1^* | \mathbf{v}) \mathbf{u}_1^* + (\mathbf{u}_2^* | \mathbf{v}) \mathbf{u}_2^*$$

dove

$$(\mathbf{u}_1^* | \mathbf{v}) = (\mathbf{u}_1^*)^H \mathbf{v} = \frac{1}{\sqrt{2}} (-i \ 1 \ 0 \ 0) \begin{pmatrix} 2i \\ -6 \\ 8i \\ 10 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} ((-i)2i - 6) = -\frac{4}{\sqrt{2}}$$

$$(\mathbf{u}_2^* | \mathbf{v}) = (\mathbf{u}_2^*)^H \mathbf{v} = \frac{1}{\sqrt{34}} (-4i \ -4 \ i \ 1) \begin{pmatrix} 2i \\ -6 \\ 8i \\ 10 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{34}} (-4i2i - 4(-6) + i8i + 10) = \sqrt{34}$$

Quindi

$$P_U(\mathbf{v}) = -\frac{4}{\sqrt{2}} \mathbf{u}_1^* + \sqrt{34} \mathbf{u}_2^* = -\frac{4}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \sqrt{34} \frac{1}{\sqrt{34}} \begin{pmatrix} 4i \\ -4 \\ -i \\ 1 \end{pmatrix} = -2 \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4i \\ -4 \\ -i \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2i \\ -6 \\ -i \\ 1 \end{pmatrix}.$$

5 Si trovi una base di  $V^\perp$  nei seguenti casi:

$$V = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ i \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle, \quad V = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 1 \\ i \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} i \\ -1 \\ i \\ -1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

(a) Se  $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 \\ i \\ 2 \end{pmatrix}$  allora  $C(\mathbf{A}) = V$  e  $V^\perp = C(\mathbf{A})^\perp = N(\mathbf{A}^H)$ .

Facendo un'eliminazione di Gauss su  $\mathbf{A}^H$  otteniamo:

$$\mathbf{A}^H = (0 \ -i \ 2) \xrightarrow{E_1(i)} (0 \ 1 \ 2i) = \mathbf{U}$$

Poichè  $N(\mathbf{A}^H) = N(\mathbf{U})$  e

$$\dim(N(\mathbf{U})) = \text{numero delle colonne di } \mathbf{U} - \text{ranko di } \mathbf{U} = 3 - 1 = 2,$$

una base di  $V^\perp$  ha 2 elementi (d'altra parte  $\dim V = 1$  e  $\dim \mathbb{C}^3 = 3$ , per cui a priori potevamo dedurre che  $\dim V^\perp = \dim \mathbb{C}^3 - \dim V = 3 - 1 = 2$ ).

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in N(\mathbf{A}^H) = N(\mathbf{U}) \iff x_2 + 2ix_3 = 0$$

$$\text{quindi } N(\mathbf{U}) = \left\{ \begin{pmatrix} h \\ -2ik \\ k \end{pmatrix} \mid h, k \in \mathbb{C} \right\}.$$

Una base di  $V^\perp$  è

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ -2i \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$(b) \text{ Se } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & i & 1 & 0 \\ i & -1 & 0 & 1 \\ 1 & i & 1 & 0 \\ i & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ allora } C(\mathbf{A}) = V \text{ e } V^\perp = C(\mathbf{A})^\perp = N(\mathbf{A}^H).$$

Facendo un'eliminazione di Gauss su  $\mathbf{A}^H$  otteniamo:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^H &= \begin{pmatrix} 1 & -i & 1 & -i \\ -i & -1 & -i & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{31}(-1)E_{21}(i)} \begin{pmatrix} 1 & -i & 1 & -i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & i \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{23}} \\ &\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -i & 1 & -i \\ 0 & i & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{42}(-1)E_2(-i)} \begin{pmatrix} 1 & -i & 1 & -i \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{U} \end{aligned}$$

Poichè  $N(\mathbf{A}^H) = N(\mathbf{U})$  e

$$\dim(N(\mathbf{A})) = \text{numero delle colonne di } \mathbf{U} - \text{ranko di } \mathbf{U} = 4 - 2 = 2,$$

una base di  $V^\perp$  ha 2 elementi.

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in N(\mathbf{A}^H) = N(\mathbf{U}) \iff \begin{cases} x_1 - ix_2 + x_3 - ix_4 = 0 \\ x_2 + x_4 = 0 \end{cases}$$

$$\text{Quindi } V^\perp = N(\mathbf{A}^H) = \left\{ \begin{pmatrix} -h \\ -k \\ h \\ k \end{pmatrix} \mid h, k \in \mathbb{C} \right\} \text{ ed una sua base è } \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

**Svolgimento degli Esercizi per casa 9**

1] Sia  $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & i & -2 & 9i \\ i & -1 & -2i & 0 \\ -1 & -i & 2 & 0 \end{pmatrix}$ .

- (a) Si trovi una decomposizione  $\mathbf{Q}_0\mathbf{R}_0$ -non-normalizzata per  $\mathbf{A}$ .
- (b) Si trovi una decomposizione  $\mathbf{QR}$ -normalizzata per  $\mathbf{A}$ .
- (c) Si calcoli la matrice di proiezione sullo spazio delle colonne  $C(\mathbf{A})$  di  $\mathbf{A}$ .

(a) [I] Poniamo

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} i \\ -1 \\ -i \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ -2i \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_4 = \begin{pmatrix} 9i \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

e applichiamo l'algoritmo di Gram-Schmidt a  $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4\}$ .

Otterremo 4 vettori  $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4$ . Per sapere se alcuni degli  $\mathbf{u}_i$  saranno nulli, e in tal caso quali, troviamo innanzitutto una forma ridotta di Gauss  $\mathbf{U}$  di  $\mathbf{A}$ : le eventuali colonne libere di  $\mathbf{U}$  corrisponderanno agli  $\mathbf{u}_i$  nulli.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & i & -2 & 9i \\ i & -1 & -2i & 0 \\ -1 & -i & 2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{31}(1)E_{21}(-i)} \begin{pmatrix} 1 & i & -2 & 9i \\ 0 & 0 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 9i \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{32}(-9i)E_2(1/9)} \begin{pmatrix} 1 & i & -2 & 9i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{U}$$

Poichè  $\mathbf{U}$  ha come colonne libere la 2<sup>a</sup> e la 3<sup>a</sup>, allora applicando l'algoritmo di Gram-Schmidt a  $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4\}$  otterremo  $\mathbf{u}_2 = \mathbf{0} = \mathbf{u}_3$ .

$$\mathbf{u}_1 = \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{u}_2 = \mathbf{v}_2 - \alpha_{12}\mathbf{u}_1, \quad \mathbf{u}_1 \neq \mathbf{0} \implies \alpha_{12} = \frac{(\mathbf{u}_1|\mathbf{v}_2)}{(\mathbf{u}_1|\mathbf{u}_1)}$$

$$(\mathbf{u}_1|\mathbf{v}_2) = \mathbf{u}_1^H \mathbf{v}_2 = (1 \quad -i \quad -1) \begin{pmatrix} i \\ -1 \\ -i \end{pmatrix} = i + i + i = 3i$$

$$(\mathbf{u}_1|\mathbf{u}_1) = \mathbf{u}_1^H \mathbf{u}_1 = (1 \quad -i \quad -1) \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ -1 \end{pmatrix} = 1 + 1 + 1 = 3$$

$$\implies \alpha_{12} = 3i/3 = i$$

$$\begin{aligned}\mathbf{u}_2 &= \mathbf{v}_2 - \alpha_{12}\mathbf{u}_1 = \\ &= \mathbf{v}_2 - i\mathbf{u}_1 = \\ &= \begin{pmatrix} i \\ -1 \\ -i \end{pmatrix} - i \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ -1 \end{pmatrix} = \boxed{\mathbf{0} = \mathbf{u}_2}\end{aligned}$$

$$\mathbf{u}_3 = \mathbf{v}_3 - \alpha_{13}\mathbf{u}_1 - \alpha_{23}\mathbf{u}_2,$$

$$\mathbf{u}_1 \neq \mathbf{0} \implies \alpha_{13} = \frac{(\mathbf{u}_1|\mathbf{v}_3)}{(\mathbf{u}_1|\mathbf{u}_1)}$$

$$(\mathbf{u}_1|\mathbf{v}_3) = \mathbf{u}_1^H \mathbf{v}_3 = (1 \quad -i \quad -1) \begin{pmatrix} -2 \\ -2i \\ 2 \end{pmatrix} = -2 - 2 - 2 = -6$$

$$\implies \boxed{\alpha_{13} = -6/3 = -2}$$

$$\mathbf{u}_2 = \mathbf{0} \implies \boxed{\alpha_{23} = 0}$$

$$\mathbf{u}_3 = \mathbf{v}_3 - \alpha_{13}\mathbf{u}_1 - \alpha_{23}\mathbf{u}_2 =$$

$$= \mathbf{v}_3 + 2\mathbf{u}_1 =$$

$$= \begin{pmatrix} -2 \\ -2i \\ 2 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ -1 \end{pmatrix} = \boxed{\mathbf{0} = \mathbf{u}_3}$$

$$\mathbf{u}_4 = \mathbf{v}_4 - \alpha_{14}\mathbf{u}_1 - \alpha_{24}\mathbf{u}_2 - \alpha_{34}\mathbf{u}_3,$$

$$\mathbf{u}_1 \neq \mathbf{0} \implies \alpha_{14} = \frac{(\mathbf{u}_1|\mathbf{v}_4)}{(\mathbf{u}_1|\mathbf{u}_1)}$$

$$(\mathbf{u}_1|\mathbf{v}_4) = \mathbf{u}_1^H \mathbf{v}_4 = (1 \quad -i \quad -1) \begin{pmatrix} 9i \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 9i$$

$$\implies \boxed{\alpha_{14} = 9i/3 = 3i}$$

$$\mathbf{u}_2 = \mathbf{0} \implies \boxed{\alpha_{24} = 0}$$

$$\mathbf{u}_3 = \mathbf{0} \implies \boxed{\alpha_{34} = 0}$$

$$\mathbf{u}_4 = \mathbf{v}_4 - 3i\mathbf{u}_1 =$$

$$= \begin{pmatrix} 9i \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - 3i \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ -1 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 6i \\ 3 \\ 3i \end{pmatrix} = \mathbf{u}_4}$$

$\boxed{II}$  Poniamo

$$\mathbf{Q}_0 = (\mathbf{u}_1 \quad \mathbf{u}_2 \quad \mathbf{u}_3 \quad \mathbf{u}_4) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 6i \\ i & 0 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 0 & 3i \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{R}_0 = \begin{pmatrix} 1 & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \alpha_{14} \\ 0 & 1 & \alpha_{23} & \alpha_{24} \\ 0 & 0 & 1 & \alpha_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & i & -2 & 3i \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$\mathbf{A} = \mathbf{Q}_0 \mathbf{R}_0$  è una decomposizione  $\mathbf{Q}_0 \mathbf{R}_0$ -non-normalizzata per  $\mathbf{A}$ .

(b) III Sia  $\mathbf{Q}_1$  la matrice che si ottiene dalla matrice  $\mathbf{Q}_0$ , ottenuta al punto (2), togliendo tutte le (eventuali) colonne nulle di  $\mathbf{Q}_0$ . In questo caso  $\mathbf{Q}_0$  ha due colonne nulle, la 2<sup>a</sup> e la 3<sup>a</sup>, quindi

$$\mathbf{Q}_1 = (\mathbf{u}_1 \quad \mathbf{u}_4) = \begin{pmatrix} 1 & 6i \\ i & 3 \\ -1 & 3i \end{pmatrix}.$$

Sia  $\mathbf{R}_1$  la matrice che si ottiene dalla matrice  $\mathbf{R}_0$ , ottenuta al punto (2), togliendo le righe di  $\mathbf{R}_0$  che corrispondono alle colonne che sono state tolte da  $\mathbf{Q}_0$  per ottenere  $\mathbf{Q}_1$ . In questo caso, poichè per ottenere  $\mathbf{Q}_1$  sono state tolte da  $\mathbf{Q}_0$  la 2<sup>a</sup> e la 3<sup>a</sup> colonna, allora per ottenere  $\mathbf{R}_1$  si toglie da  $\mathbf{R}_0$  la 2<sup>a</sup> e la 3<sup>a</sup> riga. Dunque

$$\mathbf{R}_1 = \begin{pmatrix} 1 & i & -2 & 3i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

IV Costruiamo la matrice diagonale  $\mathbf{D}$  che ha sulla diagonale la norma euclidea delle colonne di  $\mathbf{Q}_1$  (ossia delle colonne non nulle di  $\mathbf{Q}_0$ ), e calcoliamo  $\mathbf{D}^{-1}$ .

Poichè

$$\|\mathbf{u}_1\|_2 = \sqrt{(\mathbf{u}_1 | \mathbf{u}_1)} = \sqrt{3},$$

$$\|\mathbf{u}_4\|_2 = \sqrt{(\mathbf{u}_4 | \mathbf{u}_4)} = \sqrt{\mathbf{u}_4^H \mathbf{u}_4} = \sqrt{\begin{pmatrix} -6i & 3 & -3i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6i \\ 3 \\ 3i \end{pmatrix}} = \sqrt{36 + 9 + 9} = \sqrt{54},$$

allora

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} \|\mathbf{u}_1\|_2 & 0 \\ 0 & \|\mathbf{u}_4\|_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 0 \\ 0 & \sqrt{54} \end{pmatrix}.$$

Quindi

$$\mathbf{D}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{54}} \end{pmatrix}.$$

V Poniamo

$$\begin{aligned} \mathbf{Q} &= \mathbf{Q}_1 \mathbf{D}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 6i \\ i & 3 \\ -1 & 3i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{54}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{6}{\sqrt{54}} i \\ \frac{1}{\sqrt{3}} i & \frac{3}{\sqrt{54}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{3}{\sqrt{54}} i \end{pmatrix} \\ \mathbf{R} &= \mathbf{D} \mathbf{R}_1 = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 0 \\ 0 & \sqrt{54} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & i & -2 & 3i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & \sqrt{3} i & -2\sqrt{3} & 3\sqrt{3} i \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{54} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Allora  $\mathbf{A} = \mathbf{QR}$  è una decomposizione  $\mathbf{QR}$ -normalizzata di  $\mathbf{A}$ .

(c) La matrice di proiezione sullo spazio delle colonne  $C(\mathbf{A})$  di  $\mathbf{A}$  è  $\mathbf{P} = \mathbf{Q}\mathbf{Q}^H$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{P} = \mathbf{Q}\mathbf{Q}^H &= \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{6}{\sqrt{54}}i \\ \frac{1}{\sqrt{3}}i & \frac{3}{\sqrt{54}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{3}{\sqrt{54}}i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}}i & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{6}{\sqrt{54}}i & \frac{3}{\sqrt{54}} & -\frac{3}{\sqrt{54}}i \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{3} + \frac{36}{54} & -\frac{1}{3}i + \frac{18}{54}i & -\frac{1}{3} + \frac{18}{54} \\ \frac{1}{3}i - \frac{18}{54}i & \frac{1}{3} + \frac{9}{54} & -\frac{1}{3}i - \frac{9}{54}i \\ -\frac{1}{3} + \frac{18}{54} & \frac{1}{3}i + \frac{9}{54}i & \frac{1}{3} + \frac{9}{54} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -i \\ 0 & i & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

[2] Siano  $\mathbf{0} \neq \mathbf{v} \in \mathbb{R}^m$  ed  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Si trovino una decomposizione  $\mathbf{Q}_0\mathbf{R}_0$ -non-normalizzata ed una decomposizione  $\mathbf{QR}$ -normalizzata della matrice  $\mathbf{A}(\alpha) = (\mathbf{v} \quad \alpha\mathbf{v})$ .

[I] Poniamo  $\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}$  e  $\mathbf{v}_2 = \alpha\mathbf{v}$  e applichiamo l'algoritmo di Gram-Schmidt a  $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ .

$$\mathbf{u}_1 = \mathbf{v}_1 = \mathbf{v}$$

$$\mathbf{u}_2 = \mathbf{v}_2 - \alpha_{12}\mathbf{u}_1,$$

$$\mathbf{u}_1 \neq \mathbf{0} \implies \alpha_{12} = \frac{(\mathbf{u}_1|\mathbf{v}_2)}{(\mathbf{u}_1|\mathbf{u}_1)} = \frac{(\mathbf{v}|\alpha\mathbf{v})}{(\mathbf{v}|\mathbf{v})} = \alpha \frac{(\mathbf{v}|\mathbf{v})}{(\mathbf{v}|\mathbf{v})} = \alpha$$

$$\mathbf{u}_2 = \mathbf{v}_2 - \alpha_{12}\mathbf{u}_1 = \alpha\mathbf{v} - \alpha\mathbf{v} = \mathbf{0}$$

[II] Poniamo  $\mathbf{Q}_0 = (\mathbf{u}_1 \quad \mathbf{u}_2) = (\mathbf{v} \quad \mathbf{0})$  ed  $\mathbf{R}_0 = \begin{pmatrix} 1 & \alpha_{12} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ .  $\mathbf{A} = \mathbf{Q}_0\mathbf{R}_0$  è una decomposizione  $\mathbf{Q}_0\mathbf{R}_0$ -non-normalizzata per  $\mathbf{A}$ .

[III] Sia  $\mathbf{Q}_1$  la matrice che si ottiene dalla matrice  $\mathbf{Q}_0$ , ottenuta al punto (2), togliendo tutte le (eventuali) colonne nulle di  $\mathbf{Q}_0$ . In questo caso  $\mathbf{Q}_0$  ha un'unica colonna nulla, la 2<sup>a</sup>, quindi  $\mathbf{Q}_1 = \mathbf{v}$ . Sia  $\mathbf{R}_1$  la matrice che si ottiene dalla matrice  $\mathbf{R}_0$ , ottenuta al punto (2), togliendo le righe di  $\mathbf{R}_0$  che corrispondono alle colonne che sono state tolte da  $\mathbf{Q}_0$  per ottenere  $\mathbf{Q}_1$ . In questo caso, poichè per ottenere  $\mathbf{Q}_1$  è stata tolta da  $\mathbf{Q}_0$  la 2<sup>a</sup> colonna, allora per ottenere  $\mathbf{R}_1$  si toglie da  $\mathbf{R}_0$  la 2<sup>a</sup> riga. Dunque  $\mathbf{R}_1 = (1 \quad \alpha)$ .  $\mathbf{Q}$  si ottiene da  $\mathbf{Q}_1$  normalizzando  $\mathbf{v}$ , per cui  $\mathbf{Q} = \frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|_2}$  ed  $\mathbf{R} = \|\mathbf{v}\|_2\mathbf{R}_1 = (\|\mathbf{v}\|_2 \quad \alpha\|\mathbf{v}\|_2)$ .

[3] Si calcoli il determinante delle seguenti matrici:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2-i & 1 & 0 \\ 2 & 1+i & 3 \\ i & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} i & 1 & 1+i \\ -1 & 1 & 2 \\ i & i & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1+i \end{pmatrix}.$$

Conviene sviluppare  $\text{Det}(\mathbf{A})$  rispetto alla riga o alla colonna che contengono piú zeri. In questo caso conviene svilupparlo rispetto alla 1<sup>a</sup> riga oppure alla 3<sup>a</sup> colonna. Facciamolo in entrambi i modi, per esercizio.

Rispetto alla 1<sup>a</sup> riga:

$$\begin{aligned}\text{Det}\mathbf{A} &= (1-i)(-1)^{1+1}\text{Det}\begin{pmatrix} 1+i & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + (-1)^{1+2}\text{Det}\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ i & 1 \end{pmatrix} = \\ &= (1-i)(1+i-3) - (2-3i) = (1-i)(-2+i) - 2+3i = \\ &= -2+2i+i-i^2-2+3i = -3+6i\end{aligned}$$

Rispetto alla 3<sup>a</sup> colonna:

$$\begin{aligned}\text{Det}\mathbf{A} &= 3(-1)^{2+3}\text{Det}\begin{pmatrix} 1-i & 1 \\ i & 1 \end{pmatrix} + (-1)^{3+3}\text{Det}\begin{pmatrix} 1-i & 1 \\ 2 & 1+i \end{pmatrix} = \\ &= -3(1-i-i) + ((1-i)(1+i)-2) = \\ &= -3(1-2i) + 1^2-i^2-2 = -3+6i\end{aligned}$$

Sviluppiamo  $\text{Det}(\mathbf{B})$ , ad esempio rispetto alla 1<sup>a</sup> colonna:

$$\begin{aligned}\text{Det}\begin{pmatrix} 1 & 1+i & 1 \\ i & 2 & 1 \\ 1 & 1 & i \end{pmatrix} &= (-1)^{1+1}\text{Det}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & i \end{pmatrix} + i(-1)^{2+1}\text{Det}\begin{pmatrix} 1+i & 1 \\ 1 & i \end{pmatrix} + (-1)^{3+1}\text{Det}\begin{pmatrix} 1+i & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \\ &= 2i-1-i((1+i)i-1) + 1+i-2 = 2i-1-i(i-2) + i-1 = -1+5i\end{aligned}$$

Infine sviluppiamo  $\text{Det}(\mathbf{C})$  ad esempio rispetto alla 3<sup>a</sup> riga:

$$\begin{aligned}\text{Det}\mathbf{C} &= \text{Det}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1+i \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \\ &= (-1)^{3+1}\text{Det}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1+i \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} + (-1)^{3+2}\text{Det}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1+i \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} + (-1)^{3+3}\text{Det}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+i \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Sviluppiamo il primo addendo rispetto alla 2<sup>a</sup> colonna, mentre il secondo ed il terzo addendo rispetto alla 1<sup>a</sup> riga.

$$\begin{aligned}
\text{Det} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1+i \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} &= (-1)^{1+2} \text{Det} \begin{pmatrix} 1 & 1+i \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + 2(-1)^{3+2} \text{Det} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1+i \end{pmatrix} = \\
&= -(1-1-i) - 2(1+i-1) = -i \\
\text{Det} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1+i \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} &= (-1)^{1+2} \text{Det} \begin{pmatrix} 1 & 1+i \\ 2 & 1 \end{pmatrix} + (-1)^{1+3} \text{Det} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \\
&= -(1-2(1+i)) + 2 = -(1-2-2i) + 2 = 1+2i+2 = 3+2i \\
\text{Det} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+i \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} &= (-1)^{1+2} \text{Det} \begin{pmatrix} 1 & 1+i \\ 2 & 1 \end{pmatrix} + (-1)^{1+3} \text{Det} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \\
&= -(1-2(1+i)) + (1-2) = -(1-2-2i) - 1 = 2i
\end{aligned}$$

Quindi

$$\text{Det}(\mathbf{C}) = -i - (3+2i) + 2i = -i - 3 - 2i + 2i = -3 - i.$$

[4] Sia  $\mathbf{A}(\alpha) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \alpha & 0 & 1 \\ 4 & \alpha-1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 3\alpha-1 & 1 \end{pmatrix}$ , dove  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Si dica per quali  $\alpha \in \mathbb{R}$  si ha che  $\mathbf{A}(\alpha)$  è non singolare (sugg.: si calcoli il determinante  $\text{Det}(\mathbf{A}(\alpha))$  di  $\mathbf{A}(\alpha)$ ).

$$\begin{aligned}
(1) \quad \text{Det}(\mathbf{A}(\alpha)) &= \text{Det} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \alpha & 0 & 1 \\ 4 & \alpha-1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 3\alpha-1 & 1 \end{pmatrix} = \\
&= (-1)^{3+4}(3\alpha-1) \text{Det} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & \alpha & 1 \\ 4 & \alpha-1 & 1 \end{pmatrix} = \\
&= -(3\alpha-1) \left[ (-1)^{1+1} 2 \text{Det} \begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ \alpha-1 & 1 \end{pmatrix} + (-1)^{1+3} \text{Det} \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ 4 & \alpha-1 \end{pmatrix} \right] = \\
&= -(3\alpha-1) \left[ 2(\alpha-\alpha+1) - 4\alpha \right] = -2(3\alpha-1)(1-2\alpha)
\end{aligned}$$

Poichè  $\mathbf{A}(\alpha)$  è non singolare se e solo se  $\text{Det}(\mathbf{A}(\alpha)) \neq 0$ , dal punto (1) otteniamo che

$$\mathbf{A}(\alpha) \text{ è non singolare} \iff -2(3\alpha-1)(1-2\alpha) \neq 0 \iff \alpha \neq \frac{1}{3}, \frac{1}{2}.$$