ANALISI MATEMATICA E CALCOLO DELLE PROBABILITÀ

CORSO DI LAUREA SIA

A.A. 2013/14

GEMMA PARMEGGIANI

Università degli Studi di Padova
Dipartimento di Matematica
via Trieste, 63
35131 Padova

- Programma del corso

- Esercizi Tipo

- Testi degli esercizi per casa

Typeset by $\mathcal{AMS}$-TEX

PROGRAMMA DEL CORSO

10/10/13 - 4 ore Presentazione del corso. Insiemi numerici: $\mathbb{N}$ (i numeri naturali), $\mathbb{Z}$ (i numeri interi), $\mathbb{Q}$ (i numeri razionali), $\mathbb{R}$ (i numeri reali). Sistema di coordinate ascisse su di una retta. Il valore assoluto di un numero reale e le sue proprietà. Sistema di riferimento ortogonale monometrico nel piano. Funzioni. Esempi. Campo di esistenza di una funzione. Grafico di una funzione. Le funzioni costanti, identica, opposto, valore assoluto ed i loro grafici. L'equazione delle rette non parallele all'asse y.

17/10/13 - 4 ore Esercizio Tipo 1. Equazioni e disequazioni di 1^0 grado. Metodo grafico. Parabole con asse parallelo all'asse y. Equazioni e disequazioni di 2^0 grado. Metodo grafico. Potenze con esponente un numero intero. Funzioni potenza con esponente un numero intero (positivo o negativo, pari o dispari) e loro grafici. Funzioni pari e funzioni dispari.

24/10/13 - 4 ore Funzioni biiettive. Composizione di funzioni. L'inversa di una funzione biiettiva. Le funzioni radicali ed i loro grafici. Definizione di potenze ad esponente razionale. Proprietà delle potenze. Funzioni monotone (strettamente) crescenti e (strettamente) decrescenti. Funzioni esponenziali. Cenni di calcolo combinatorio.

31/10/13 - 4 ore Spazio campionario ed eventi. Unione ed intersezione di eventi. Evento complementare. Il concetto di probabilitá. Proprietá della probabilitá. Probabilitá condizionata ed indipendenza. Variabili aleatorie. Densitá discreta e funzione di distribuzione di una variabile aleatoria discreta; loro rappresentazioni grafiche. Esempi ed esercizi.

7/11/13 - 4 ore Caratterizzazione delle densitá discrete. Il valore atteso, la varianza e la deviazione standard di una variabile aleatoria, e le loro proprietá. Variabile aleatoria standardizzata Z associata ad una variabile aleatoria. Variabili aleatorie di Bernoulli e binomiali. Esempi ed esercizi.

14/11/13 - 4 ore Variabili aleatorie di Poisson. Variabili aleatorie continue. Il concetto di integrale. Valore atteso e varianza di una variabile aleatoria continua. La variabile aleatoria uniforme. Variabili aleatorie normali. Esempi ed esercizi.

21/11/13 - 4 ore Il teorema del limite centrale. Variabili aleatorie di tipo Gamma. Il teorema di Bayes. Esercizio Tipo 2. Disequazioni esponenziali. Esercizio Tipo 3. Funzioni logaritmiche ed i loro grafici.

28/11/13 - 4 ore Proprietá dei logaritmi. Disequazioni logaritmiche. Esercizio Tipo 4. Angoli, loro misura in gradi ed in radianti. Definizione di seno, coseno e tangente. Valori particolari di seno, coseno e tangente. Proprietá fondamentali. Grafico delle funzioni seno, coseno, tangente. Significato geometrico della tangente di un angolo. Applicazione ai triangoli rettangoli.

5/12/13 - 4 ore Il concetto di limite. Limiti di funzioni elementari. Calcolo di limiti: il limite della reciproca di una funzione, i limiti di somme, prodotti, quozienti, composte di funzioni. Soluzioni di alcune forme indeterminate. Derivate e loro significato geometrico. Derivate delle funzioni elementari. Regole di derivazione: derivate di somme e di prodotti di funzioni.

12/12/13 - 4 ore Regole di derivazione: derivate di quozienti e di composte di funzioni. Criterio per stabilire in quali intervalli una funzione derivabile é crescente o decrescente. Equazione della retta tangente al grafico di una funzione in un punto. Esercizio Tipo 5.

ESERCIZI TIPO

ESERCIZIO TIPO 1

$\boxed{I}$ Si scriva l'equazione della retta r passante per i punti $P(4,1)$ e $Q(-1,6)$.

$\boxed{II}$ Siano r la retta di equazione $y=-x+5$ ed s la retta di equazione $y=7x-3$. Si calcolino le coordinate del punto di intersezione di r ed s.

$\boxed{III}$ Sia r la retta di equazione $y=-x+5$, e siano R il punto di intersezione di r con l'asse delle ascisse ed S il punto di intersezione di r con l'asse delle ordinate. Si trovino le coordinate dei punti R ed S.

$\boxed{IV}$ Sia r la retta di equazione $y=-x+5$. Si scriva l'equazione della retta t passante per il punto $T(7,3)$ e parallela ad r.

$\boxed{I}$ Poichè $x_P=4\neq -1=x_Q$, l'equazione di r è del tipo $y=mx+q$ per opportuni $m,q\in\mathbb{R}$.

Dal momento che
$$P\in r \iff y_P=mx_P+q \iff 1=4m+q$$
$$Q\in r \iff y_Q=mx_Q+q \iff 6=-m+q$$
per trovare m e q occorre risolvere il sistema
$$\begin{cases} 1 &= 4m+q \\ 6 &= -m+q \end{cases}$$
Dalla 1^a equazione si ottiene $q=1-4m$, che sostituito nella 2^a equazione dà $6=-m+1-4m$ da cui $6-1=-5m$, ossia $5=-5m$ e quindi
$$m=-1.$$
Sostituendo $m=-1$ nella 1^a equazione si ottiene
$$q=1-4m=1-4\cdot(-1)=1+4=5.$$
Quindi l'equazione di r è
$$y=-x+5.$$

$\boxed{II}$ Le coordinate del punto di intersezione di r ed s si trovano risolvendo il sistema
$$\begin{cases} \text{equazione di } r \\ \text{equazione di } s \end{cases}$$
ossia
$$\begin{cases} y &= -x+5 \\ y &= 7x-3 \end{cases}$$

Dunque poichè
$$\begin{cases} y &= -x+5 \\ y &= 7x-3 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 7x-3 &= -x+5 \\ y &= 7x-3 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 8x &= 8 \\ y &= 7x-3 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x &= 1 \\ y &= 7\cdot 1-3=4 \end{cases}$$

le coordinate del punto di intersezione di r ed s sono $(1,4)$.

$\boxed{III}$ Le coordinate di R si ottengono risolvendo il sistema

$$\begin{cases} \text{equazione di } r \\ \text{equazione dell'asse } x \end{cases}$$

ossia

$$\begin{cases} y = -x+5 \\ y = 0 \end{cases}$$

Dunque poichè

$$\begin{cases} y = -x+5 \\ y = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 0 = -x+5 \\ y = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ y = 0 \end{cases}$$

le coordinate di R sono $(5,0)$.

Le coordinate di S si ottengono risolvendo il sistema

$$\begin{cases} \text{equazione di } r \\ \text{equazione dell'asse } y \end{cases}$$

ossia

$$\begin{cases} y = -x+5 \\ x = 0 \end{cases}$$

Dunque poichè

$$\begin{cases} y = -x+5 \\ x = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} y = 5 \\ x = 0 \end{cases}$$

le coordinate di S sono $(0,5)$.

$\boxed{IV}$ Poichè t è parallela ad r, ed r non è parallela all'asse y (non essendo la sua equazione del tipo $x = c$), allora t non è parallela all'asse y. La sua equazione è quindi del tipo $y = mx + q$ (per opportuni $m, q \in \mathbb{R}$). Essendo r e t parallele, allora

$$m = \text{coefficiente angolare di } t = \text{coefficiente angolare di } r = -1$$

Dunque l'equazione di t è del tipo $y = -x + q$.

Per trovare q imponiamo il passaggio di t per il punto $T(7,3)$:

$$T \in t \iff y_T = -x_T + q \iff 3 = -7 + q \iff q = 3 + 7 = 10.$$

Dunque l'equazione di t è

$$y = -x + 10.$$

ESERCIZIO TIPO 2

Risolvere i seguenti problemi di calcolo delle probabilità:

(a) Il 4% di una popolazione ha contratto la malattia X. I test diagnostici danno una diagnosi corretta nell'85% dei sani e nel 95% dei malati. Qual è la probabilità, scegliendo a caso un individuo tra quelli diagnosticati malati dal test, che esso sia in realtà sano ? (Sugg.: si usi il teorema di Bayes)

(b) Con la terminologia usata nell'Esercizio 1 degli "Esercizi per casa 6", qual è la probabilità che esattamente 5 degli 8 figli di una coppia di genitori ibridi siano puramente recessivi ?

(c) Se la probabilità che una persona sia allergica ad un farmaco è $0,002$, determinare la probabilità che su 3000 persone esattamente 2 siano allergiche. (Sugg.: si approssimi la distribuzione binomiale della variabile aleatoria "il numero delle persone allergiche al farmaco" con quella di Poisson, prendendo $\lambda = n \cdot p$ dove $n = ...$ e $p = ...$)

(d) L'istante di arrivo del treno regionale per Padova è uniformemente distribuito tra le 19.05 e le 19.30. Arrivando sul binario alle 19.05

1) qual è la probabilità di aspettare più di 10 minuti ?

2) se il treno non è ancora arrivato alle 19.15, qual è la probabilità di dover aspettare altri 10 minuti ?

(a) Usiamo il teorema di Bayes con:

$$\begin{aligned} S &= \text{ insieme degli individui sottosposti al test,} \\ E &= \text{ la diagnosi "l'individuo è malato",} \\ H_1 &= \text{ l'individuo è sano,} \\ H_2 &= \text{ l'individuo è malato.} \end{aligned}$$

Allora $P(H_1|E)$, ossia la probabilità di ottenere un individuo sano tra quelli diagnosticati malati, si ottiene con:

$$P(H_1|E) = \frac{P(H_1) \cdot P(E|H_1)}{P(H_1) \cdot P(E|H_1) + P(H_2) \cdot P(E|H_2)},$$

dove

$$\begin{aligned} P(H_2) &= \text{ probabilità che un individuo sia malato } = 4\% = \frac{4}{100} = 0,04, \\ P(H_1) &= \text{ probabilità che un individuo sia sano } = 1 - P(H_1) = 1 - \frac{4}{100} = \frac{96}{100} = 0,96, \\ P(E|H_2) &= \text{ probabilità che l' individuo sia diagnosticato malato tra quelli che sono malati } = 95\% = \frac{95}{100} = 0,95, \\ P(E|H_1) &= \text{ probabilità che l' individuo sia diagnosticato malato tra quelli che sono sani } = \\ &= 1 - \text{ (probabilità che l' individuo sia diagnosticato sano tra quelli che sono sani) } = 1 - 0,85 = 0,15. \end{aligned}$$

Sostiuendo si ottiene:

$$P(H_1|E) = \frac{0,96 \cdot 0,15}{0,96 \cdot 0,15 + 0,04 \cdot 0,95} = \frac{0,144}{0,144 + 0,038} = \frac{0,144}{0,182} = \frac{144}{182} \cong 0,79.$$

(b) Indichiamo il gene dominante con d ed il gene recessivo con r, e, per fissare le notazioni, stabiliamo che la coppia di geni di ciascun individuo sia ordinata: scegliamo, ad esempio, di prendere come prima lettera quella corrispondente al gene ereditato dal padre, e come seconda quella corrispondente al gene ereditato dalla madre. Con queste notazioni, la coppia di geni di un individuo ibrido è (r, d) se l'individuo eredita il gene recessivo dal padre ed il gene dominante dalla madre, oppure (d, r) se l'individuo eredita il gene dominante dal padre ed il gene recessivo dalla madre.

Quindi per la coppia di geni di ciascuno dei figli di due genitori ibridi ci sono esattamente le seguenti 4 possibilità:

$$(r, d), \qquad (d, r), \qquad (d, d), \qquad (r, r).$$

Le prime due determinano un figlio ibrido, la terza determina un figlio puraramente dominante e la quarta determina un figlio puramente recessivo.

Dunque la probabilità p che un figlio di una coppia di genitori ibridi sia puramente recessivo è

$$p = \frac{\text{numero delle coppie } (r,r) \text{ che si presentano tra i casi possibili}}{\text{numero dei casi possibili}} = \frac{1}{4}.$$

Usando la densità discreta della variabile aleatoria binomiale

$$p(i) = \binom{n}{i} \cdot p^i \cdot (1-p)^{n-i},$$

con $n = 8$, $i = 5$ e $p = \frac{1}{4}$ otteniamo che la probabilità che esattamente 5 degli 8 figli di una coppia di genitori ibridi siano puramente recessivi è:

$$p(5) = \binom{8}{5} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^5 \cdot \left(1 - \frac{1}{4}\right)^{8-5} = \frac{8!}{5! \cdot (8-5)!} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^5 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^3 = \frac{8!}{5! \cdot 3!} \cdot \frac{1}{4^5} \cdot \frac{3^3}{4^3} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3!} \cdot \frac{3^3}{4^8} = 14 \cdot \frac{3^3}{4^7}$$

(che è circa $0,02$).

(c) Sia X la variabile aleatoria "numero di persone allergiche al farmaco". Ricordiamo che la distribuzione di Poisson di parametro λ ha densità discreta

$$p(x) = \frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^x}{x!}, \quad x = 0, 1, 2, ...$$

e, seguendo il suggerimento, approssimiamo la distribuzione binomiale della variabile aleatoria X con la distribuzione di Poisson di parametro $\lambda = n \cdot p$ dove $n = 3000$ e $p = 0,002$. Dunque

$$\lambda = 3000 \cdot 0,002 = 3000 \cdot \frac{2}{1000} = 3 \cdot 2 = 6$$

e la probabilità che esattamente 2 persone siano allergiche è:

$$P(X = 2) = \frac{e^{-6} \cdot 6^2}{2!} = \frac{e^{-6} \cdot 36}{2} = 18 \cdot e^{-6}.$$

(d) La densità della variabile aleatoria uniforme nell'intervallo $(0, 25)$ (con x = tempo misurato in minuti a partire dalle 19.05, e 25 = tempo misurato in minuti dalle 19.05 alle 19.30) è

$$p_1(x) = \begin{cases} \frac{1}{25} & \text{per} \quad 0 \le x \le 25 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Dunque la probablilità, arrivando alle 19.05, di aspettare **al più (cioè un tempo minore od uguale a)** 10 minuti è

$$p_1(10) = \frac{10}{25} = \frac{2}{5},$$

da cui la probablilità, arrivando alle 19.05, di aspettare **più (cioè un tempo maggiore di)** 10 minuti è

$$1 - p_1(10) = 1 - \frac{2}{5} = \frac{3}{5}.$$

La densità della variabile aleatoria uniforme nell'intervallo $(0, 15)$ (con x = tempo misurato in minuti a partire dalle 19.15, e 15 = tempo misurato in minuti dalle 19.15 alle 19.30) è

$$p_2(x) = \begin{cases} \frac{1}{15} & \text{per} \quad 0 \leq x \leq 15 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Dunque la probablilità, arrivando alle 19.15, di aspettare **al più (cioè un tempo minore od uguale ad)** altri 10 minuti è

$$p_2(10) = \frac{10}{15} = \frac{2}{3},$$

da cui la probablilità, arrivando alle 19.15, di aspettare **più (cioè un tempo maggiore di)** altri 10 minuti è

$$1 - p_2(10) = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}.$$

ESERCIZIO TIPO 3

Risolvere le seguenti disequazioni esponenziali:

(a) $100^x < \frac{1}{1000}$.

(b) $\left(\frac{1}{100}\right)^x < 0,0001$.

(a) Scrivendo 100 e 1000 come potenze di 10 si ottiene

$$\left(10^2\right)^x < \frac{1}{10^3},$$

ossia

$$10^{2x} < 10^{-3}.$$

Posto $z = 2x$, risolviamo

$$10^z < 10^{-3}.$$

Poichè $f(z) = 10^z$ è **strettamente crescente** (essendo $10 > 1$), passando ad una disequazione sugli esponenti **si conserva il verso della disequazione**: le soluzioni sono

$$z < -3.$$

Ricordando che $z = 2x$ si ottiene $2x < -3$ le cui soluzioni sono

$$x < -\frac{3}{2}.$$

(b) Scrivendo $0,0001 = 10^{-4}$ e $\frac{1}{100}$ come potenze di $\frac{1}{10}$ si ottiene

$$\left(\left(\frac{1}{10}\right)^2\right)^x < \left(\frac{1}{10}\right)^4$$

ossia

$$\left(\frac{1}{10}\right)^{2x} < \left(\frac{1}{10}\right)^4.$$

Posto $z = 2x$, risolviamo

$$\left(\frac{1}{10}\right)^z < \left(\frac{1}{10}\right)^4.$$

Poichè $f(z) = \left(\frac{1}{10}\right)^z$ è **strettamente decrescente** (essendo $\frac{1}{10} < 1$), passando ad una disequazione sugli esponenti **si cambia il verso della disequazione**: le soluzioni sono

$$z > 4.$$

Ricordando che $z = 2x$ si ottiene $2x > 4$ le cui soluzioni sono

$$x > 2.$$

ESERCIZIO TIPO 4

Risolvere le seguenti disequazioni logaritmiche:

(a) $\log_4(x) > \frac{1}{2}$.

(b) $\log_{\frac{1}{27}}(x) \geq \frac{2}{3}$.

(a) Scrivendo

$$\frac{1}{2} = \log_4\left(4^{\frac{1}{2}}\right)$$

si ottiene

$$\log_4(x) > \log_4\left(4^{\frac{1}{2}}\right).$$

Essendo $4 > 1$, la funzione $f(x) = \log_4(x)$ è **strettamente crescente**, per cui passando ad una disequazione sugli argomenti del logaritmo **si conserva il verso della disequazione**: le soluzioni sono

$$x > 4^{\frac{1}{2}} = \sqrt{4} = 2.$$

N:B.: Occorre anche imporre che $\log_4(x)$ esista, ossia che $x > 0$, per cui le soluzioni della disequazione logaritmica sono le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} x > 2 \\ x > 0 \end{cases}$$

ossia

$$x > 2$$

(b) Scrivendo

$$\frac{2}{3} = \log_{\frac{1}{27}} \left(\frac{1}{27}\right)^{\frac{2}{3}}$$

si ottiene

$$\log_{\frac{1}{27}}(x) \geq \log_{\frac{1}{27}} \left(\frac{1}{27}\right)^{\frac{2}{3}}.$$

Essendo $\frac{1}{27} < 1$, la funzione $f(x) = \log_{\frac{1}{27}}(x)$ è **strettamente decrescente**, per cui passando ad una disequazione sugli argomenti del logaritmo **si cambia il verso della disequazione**: le soluzioni sono

$$x \leq \left(\frac{1}{27}\right)^{\frac{2}{3}} = \left(\frac{1}{3^3}\right)^{\frac{2}{3}} = \left(\left(\frac{1}{3}\right)^3\right)^{\frac{2}{3}} = \left(\frac{1}{3}\right)^{3\cdot\frac{2}{3}} = \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}.$$

N:B.: Occorre anche imporre che $\log_{\frac{1}{27}}(x)$ esista, ossia che $x > 0$, per cui le soluzioni della disequazione logaritmica sono le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} x \leq \frac{1}{9} \\ x > 0 \end{cases}$$

ossia

$$0 < x \leq \frac{1}{9}$$

ESERCIZIO TIPO 5 Sia

$$f(x) = \frac{2 + x - x^2}{(x-1)^2}.$$

(a) Si trovi il dominio di $f(x)$.

(b) Si dica in quali intervalli di $\mathbb{R}$ $f(x)$ è crescente ed in quali intervalli di $\mathbb{R}$ $f(x)$ è decrescente.

(c) Si trovino gli eventuali punti di massimo e di minimo di $f(x)$.

(d) Si scriva l'equazione della retta tangente al grafico di $f(x)$ nel punto di ascissa $x_0 = 2$.

(a) dom(f): $x \neq 1$.

(b) Dal momento che

$$f(x) \text{ è strettamente crescente } \iff f'(x) > 0 \text{ ed}$$
$$f(x) \text{ è strettamente decrescente } \iff f'(x) < 0,$$

per trovare in quali intervalli $f(x)$ è strettamente crescente ed in quali è strettamente decrescente, studiamo il segno della derivata di $f'(x)$ di $f(x)$.

$$f'(x) = \frac{d}{dx}f(x) = \frac{d}{dx}\Big(\frac{2+x-x^2}{(x-1)^2}\Big) =$$

$$= \frac{\Big(\frac{d}{dx}(2+x-x^2)\Big)\cdot(x-1)^2 - (2+x-x^2)\Big(\frac{d}{dx}((x-1)^2)\Big)}{(x-1)^2} =$$

$$= \frac{(1-2x)(x-1)^2 - (2+x-x^2)\Big(\frac{d}{dx}(x^2-2x+1)\Big)}{(x-1)^2} = \frac{(1-2x)(x-1)^2-(2+x-x^2)(2x-2)}{(x-1)^2} =$$

$$= \frac{(x-1)\Big[(1-2x)(x-1)-(2+x-x^2)\cdot 2\Big]}{(x-1)^4} = \frac{(x-1)(x-2x^2-1+2x-4-2x+2x^2)}{(x-1)^4} =$$

$$= \frac{(x-1)(x-5)}{(x-1)^4}$$

Essendo il denominatore di $f'(x)$ positivo per ogni $x \neq 1$ (ossia in tutto il dominio di $f(x)$), allora

$$f'(x) > 0 \iff (x-1)(x-5) > 0 \iff \Big[x < 1 \text{ o } x > 5\Big]$$

Dunque

$$f(x) \text{ è strettamente crescente per } \Big[x<1 \text{ o } x>5\Big] \text{ ed}$$
$$f(x) \text{ è strettamente decrescente per } \Big[1<x<5\Big].$$

(c) **Per quanto la funzione sia strettamente crescente per $x < 1$ e strettamente decrescente per $x > 1$, non c'è un punto di massimo con ascissa $x = 1$: in $x = 1$ la funzione non è definita.**

Il punto P di ascissa $x_P = 5$ è un punto di minimo (dal momento che per $x < 5$ la funzione è decrescente e per $x > 5$ la funzione è crescente). Per trovare l'ordinata y_P di P imponiamo che P appartenga al grafico di $f(x)$:

$$y_P = f(x_P) = f(5) = \frac{2+5-5^2}{(5-1)^2} = \frac{2+5-25}{4^2} = -\frac{18}{16} = -\frac{9}{8}.$$

Dunque la funzione non ha punti di massimo ed ha un punto di minimo P di coordinate $(5, -\frac{9}{8})$.

(d) Sia R il punto sul grafico di $f(x)$ di ascissa $x_R = x_0 = 2$. La retta tangente al grafico di $f(x)$ in R ha equazione del tipo

$$y = mx + q,$$

dove

$$m = f'(x_R).$$

Abbiamo calcolato $f'(x)$ nella domanda (b):

$$f'(x) = \frac{(x-1)(x-5)}{(x-1)^4} = \frac{x-5}{(x-1)^3}.$$

Dunque

$$m = f'(x_R) = f'(2) = \frac{2-5}{(2-1)^2} = \frac{-3}{1^2} = -3.$$

La retta ha quindi equazione del tipo

$$y = -3x + q.$$

Per trovare q imponiamo il passaggio della retta per il punto R. Dal momento che R appartiene al grafico di $f(x)$, allora

$$y_R = f(x_R) = f(2) = \frac{2+2-2^2}{(2-1)^2} = 0,$$

per cui R ha coordinate $(2, 0)$. Dal momento che la retta passa per R, abbiamo

$$y_R = -3x_R + q$$

ossia

$$0 = (-3) \cdot 2 + q = -6 + q.$$

Dunque $q = 6$ e l'equazione della retta tangente in R al grafico di $f(x)$ è

$$y = -3x + 6.$$

TESTI DEGLI ESERCIZI PER CASA

ESERCIZI PER CASA 1

$\boxed{1}$ Si calcoli:

$$||2| + |-3|| = \dots \qquad |-7 - |-4|| = \dots \qquad \left|\frac{-2}{-7 + |-3|}\right| = \dots$$

$\boxed{2}$ Per ogni $a, b \in \mathbb{R}$ si calcoli:

$$\Big(|a| + |b|\Big) \cdot \Big(|a| - |b|\Big) = \dots \qquad \Big(|a| + |b|\Big) \cdot \Big(|a| - |-b|\Big) = \dots$$

$\boxed{3}$ Per quale $n \in \mathbb{N}$ si ha $|-2| - |-3| = -|-n|$?

$\boxed{4}$ Si dica quali delle seguenti uguaglianze sono vere per ogni $x \in \mathbb{R}$:

(a) $(|-x| - x)^2 + 2x|x| = 2x^2$

(b) $x^5 = x^2|x|^3$

(c) $x^2|x|^3 = (|x|^2)^3$

(d) $(|x| + x)^2 - 2x| - x| = |x|^2$

(e) $x^5 = |x|^2x^3$

$\boxed{5}$ Si dica quali delle seguenti posizioni definiscono delle funzioni e quali no:

(a) $f_1 : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ definita da $f_1(n) = (a, b)$, dove $a, b \in \mathbb{N}$ sono tali che $n = ab$.

(b) $f_2 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definita da $f_2(n) = n/2$.

(c) $f_3 : P \to \mathbb{N}$ definita da $f_3(n) = n/2$, dove P è l'insieme dei numeri naturali pari.

$\boxed{6}$ Sia $f(x) = \frac{x^2}{x-3}$. Si calcolino $f(-2)$, $f(-1)$, $f(0)$, $f(1)$, $f(2)$.

$\boxed{7}$ Sia $f(x) = x - |x|$. Quali dei seguenti punti appartengono al grafico di f ?

$$(0, 0), \qquad (1, 1), \qquad (1, 0), \qquad (-1, 0), \qquad (-1, -1), \qquad (-1, 1).$$

ESERCIZI PER CASA 2

$\boxed{1}$ Si scriva l'equazione della retta passante per i punti $P(1,3)$ e $Q(2,7)$.

$\boxed{2}$ Sia r la retta di equazione $y = 4x - 1$. r passa per il punto $A(7,27)$? r passa per il punto $B(3,20)$?

$\boxed{3}$ Siano r la retta di equazione $y = 4x - 1$ ed s la retta di equazione $y = 5x + 3$. Si calcolino le coordinate del punto di intersezione di r ed s.

$\boxed{4}$ Sia r la retta di equazione $y = 4x - 1$. Si calcolino le coordinate del punto P in cui r interseca l'asse delle ascisse e del punto Q in cui r interseca l'asse delle ordinate.

$\boxed{5}$ Sia r la retta di equazione $y = 4x - 1$. Si scriva l'equazione della retta t parallela ad r e passante per il punto $A(4,8)$.

$\boxed{6}$ Si risolvano le seguenti equazioni e disequazioni di 1^0 e 2^0 grado:

(a): $\frac{7}{10}x + \frac{2}{3} = 0$
(b): $\frac{4}{3}x - \frac{2}{9} > 0$
(c): $-2x + 14 \geq 0$
(d): $-6x - 3 < 0$
(e): $7x + 14 \leq 0$
(f): $x^2 - x - 12 = 0$
(g): $3x^2 + 6x - 9 \geq 0$
(h): $-2x^2 - 8x + 42 \geq 0$
(i): $x^2 \leq 0$
(l): $3x^2 + 6x - 9 < 0$
(m): $x^2 - 2x + 1 \leq 0$
(n): $x^2 - 2x + 2 \leq 0$
(o): $x^2 + x + 1 > 0$
(p): $x^2 > 0$
(q): $-x^2 + \frac{5}{2}x - 1 < 0$
(r): $-x^2 - x - 1 \leq 0$

ESERCIZI PER CASA 3

$\boxed{1}$ Si dica quali delle seguenti funzioni sono biiettive:

(a) $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $f_1(x) = x^2$.

(b) $f_2 : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}$ definita da $f_2(x) = x^2$.

(c) $f_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ definita da $f_3(x) = x^2$.

(d) $f_4 : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ definita da $f_4(x) = x^2$.

$\boxed{2}$ In ciascuno dei seguenti casi si dica se esiste $f \circ g$ e se esiste $g \circ f$. Nei casi in cui esistono entrambe $f \circ g$ e $g \circ f$, si dica se sono uguali.

(a) $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = \frac{1}{x}$ e $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $g(x) = x + 1$.

(b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = x^2$ e $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $g(x) = x + 1$.

(c) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = 2x - 4$ e $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $g(x) = -x + 8$.

$\boxed{3}$ Si dica quale delle seguenti funzioni è l'inversa della funzione $f(x) = 3x + 2$:

$$g_1(x) = \frac{1}{3x+2}, \qquad g_2(x) = \frac{1}{3}x + \frac{1}{2}, \qquad g_3(x) = \frac{1}{3}x - \frac{2}{3}.$$

$\boxed{4}$ Si dica a quale/quali dei seguenti numeri è uguale il numero $\sqrt[6]{4}$:

$$\sqrt[3]{16}, \qquad \sqrt[3]{8}, \qquad \sqrt[3]{2}, \qquad \sqrt[12]{2}.$$

$\boxed{5}$ Si dica a quale/quali dei seguenti numeri è uguale il numero $\Big((3^{-1})^2\Big)^3$:

$$3^5, \qquad 3^6, \qquad 3^{-5}, \qquad 3^{-6}.$$

$\boxed{6}$ Si scrivano le seguenti espressioni come potenze in base 10:

$$\sqrt[3]{\frac{1}{100}} \cdot \sqrt[4]{10^3}, \qquad \Big((\sqrt[4]{1000})^{-3}\Big)^2, \qquad \Big(\frac{\sqrt[3]{10}}{\sqrt[5]{100}}\Big)^2.$$

$\boxed{7}$ Siano a e b numeri reali positivi. Si scriva ciascuna delle seguenti espressioni nella forma $a^r b^s$ con $r, s \in \mathbb{Q}$

$$\sqrt[5]{a^3b^2} \qquad (\sqrt[4]{a^2b^3})^5 \qquad (\sqrt[3]{ab^2})^2\sqrt[4]{b^3}$$

$\boxed{8}$ Su di una panca devono sedersi due ragazzi e due ragazze.

(a) In quanti modi si possono sedere ?

(b) In quanti modi si possono sedere se le due ragazze vogliono stare sedute vicine ?

$\boxed{9}$ In quanti modi si possono scegliere tre oggetti da un insieme che ne contiene sette ?

$\boxed{10}$ Quanti sono gli anagrammi delle seguenti parole: ALIMENTO, SICUREZZA, SANITARIA, IGIENICO.

ESERCIZI PER CASA 4

$\boxed{1}$ Supponiamo che ogni figlio di una coppia possa essere ugualmente un maschio od una femmina. Per una coppia che ha quattro figli calcolare la probabilità degli eventi:

(a) Tutti i figli siano dello stesso sesso.

(b) Vi siano due maschi e due femmine.

$\boxed{2}$ Si estraggono due palline da un'urna contenente cinque palline numerate da 1 a 5.

(a) Qual è la probabilità che il numero più basso estratto sia il 3 ?

(b) Qual è la probabilità che il numero più basso estratto non sia il 3 ?

$\boxed{3}$ Si estrae una carta da un mazzo di 52 carte.

(a) Qual è la probabilità che esca un 2 od un 3 ?

(b) Qual è la probabilità che esca un 2 od un cuori ?

$\boxed{4}$ Una moneta viene lanciata tre volte.

(a) Qual è la probabilità di ottenere tre volte "testa" ?

(b) Qual è la probabilità condizionata che venga "testa" in tutti e tre i lanci sapendo che esce "testa" in almeno un lancio ?

$\boxed{5}$ Si consideri una coppia con quattro figli. Qual è la probabilità condizionata che tutti i figli abbiano lo stesso sesso sapendo che almeno tre di loro hanno lo stesso sesso ?

$\boxed{6}$ Si considerino le seguenti variabili aleatorie:

X_1 : la variabile aleatoria "il numero di teste che si ottengono nel lancio di due monete".

X_2 : la variabile aleatoria "il numero dei figli maschi in una coppia con quattro figli".

(a) Si descrivano le densità discrete $p_1(x)$ e $p_2(x)$ delle variabili aleatorie X_1 ed X_2 e le si rappresentino graficamente con diagrammi a barre.

(b) Si descrivano le funzioni di distribuzione $F_1(x)$ ed $F_2(x)$ delle variabili aleatorie X_1 ed X_2 e se ne disegnino i grafici.

ESERCIZI PER CASA 5

$\boxed{1}$ Si dica quale delle seguenti funzioni è la densità discreta di una variabike aleatoria discreta X:

(a) $p_1(x) = \frac{x-2}{3}$ per $x = 1, 2, 3$.

(b) $p_2(x) = \frac{x}{12} + \frac{1}{6}$ per $x = 1, 2, 3$.

(b) $p_3(x) = \frac{x}{10} + \frac{1}{5}$ per $x = 1, 2, 3$.

$\boxed{2}$ Si estrae una carta da un mazzo di 52 carte. Un giocatore vince 1000 euro se esce un cuori che non sia un asso, vince 2000 euro se esce un asso, perde 4000 euro se esce il re di picche, e non perde e non vince nulla altrimenti. Sia X la variabile aleatoria "il guadagno o la perdita del giocatore". Si calcoli il valore atteso $E[X]$ di X.

$\boxed{3}$ Calcolare il valore atteso $E[X]$, la varianza $Var(X)$ e la deviazione standard σ_X della variabile aleatoria

X= valore assoluto della differenza del punteggio ottenuto nel lancio di due dadi.

$\boxed{4}$ Calcolare il valore atteso $E[X]$, la varianza $Var(X)$ e la deviazione standard σ_X della variabile aleatoria con densità discreta

$p(x) = \frac{x}{12} + \frac{1}{6}$ per $x = 1, 2, 3$.

$\boxed{5}$ Sia $Y = 2 \cdot X - 3$ dove X è la variabile aleatoria descritta nell'esercizio 3. Si calcolino il valore atteso $E[Y]$, la varianza $Var(Y)$ e la deviazione standard σ_Y della variabile aleatoria Y.

$\boxed{6}$ Si effettuano 10 lanci di un dado. Qual è la probabilità che il numero 6 esca non più di due volte ? (Sugg.: la variabile aleatoria " numero di uscite del numero 6 nel lancio di 10 dadi" è una variabile aleatoria binomiale di parametri (n, p), con $n = ...$ e $p = ...$)

ESERCIZI PER CASA 6

$\boxed{1}$ Relativamente ad una particolare caratteristica genetica determinata da una coppia di geni, ereditati uno dal padre ed uno dalla madre, si classifichino gli individui in:

– puramente dominanti (in cui entrambi i della coppia sono dominanti)

– puramente recessivi (in cui entrambi i geni della coppia sono recessivi)

– ibridi (in cui la coppia è costituita da un gene dominante ed un gene recessivo).

Si considerino due genitori ibridi con 7 figli, supponendo che ciascuno dei loro figli abbia uguale probabilità di ricevere uno qualsiasi dei due geni da ciascuno dei genitori, ed indipendentemente dai fratelli.

(a) Qual è la probabilità che 4 figli siano puramente dominanti ?

(b) Qual è la probabilità che 4 figli siano ibridi ?

(c) Qual è la probabilità che 4 figli presentino la caratteristica data dal gene dominante ?

(d) Qual è la probabilità che almeno 4 figli presentino la caratteristica data dal gene dominante ?

$\boxed{2}$ Si calcolino i valori attesi $E[X_1]$, $E[X_2]$ e le varianze $Var(X_1)$, $Var(X_2)$ delle variabili aleatorie X_1 ed X_2 definite nell'esercizio 6 degli "Esercizi per casa 4".

$\boxed{3}$ In un negozietto vengono venduti in media $0,2$ pacchi di crocchette per gatti al giorno. Qual è la probabilità che in un dato giorno vengano venduti esattamente 3 pacchi ? (Sugg.: si usi la distribuzione di Poisson)

$\boxed{4}$ Un libro di 700 pagine contiene 35 errori di stampa. Qual è la probabilità di trovare almeno 2 errori in una pagina scelta a caso ? (Sugg.: si usi la distribuzione di Poisson)

$\boxed{5}$ Si calcoli il valore atteso $E[X]$ della variabile aleatoria continua X di densità

$$p(x) = \begin{cases} \frac{1}{8} & \text{per} \quad 2 \le x \le 10 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

ESERCIZI PER CASA 7

$\boxed{1}$ Sia Z la variabile aleatoria normale standardizzata. Sapendo che $P(z < 0.44) = 0.67$ (e che $P(z < 0) = 0.5$) si calcolino $P(z > 0.44)$ e $P(0 < z < 0.44)$.

$\boxed{2}$ Sia X una variabile aleatoria normale con valor medio $\mu = 12$ e varianza $\sigma^2 = 36$. Sapendo che per la variabile aleatoria normale standardizzata Z si ha $P(z < 0.44) = 0.67$, si trovino

(a) il valore x_α per cui $P(X < x_\alpha)$ sia uguale al 67%;

(b) il valore x_α per cui $P(X > x_\alpha)$ sia uguale al 50%.

$\boxed{3}$ Il 2% di una popolazione ha contratto la malattia X. I test diagnostici danno una diagnosi corretta nell'85% dei sani e nel 95% dei malati. Qual è la probabilità, scegliendo a caso un individuo tra quelli diagnosticati malati dal test, che esso sia in realtà sano ?

$\boxed{4}$ Il 20% di una popolazione ha contratto la malattia X. I test diagnostici danno una diagnosi corretta nell'85% dei sani e nel 95% dei malati. Qual è la probabilità, scegliendo a caso un individuo tra quelli diagnosticati malati dal test, che esso sia in realtà sano ?

$\boxed{5}$ Si risolvano le seguenti disequazioni esponenziali:

$(a): \quad 1000^x \geq 100$

$(b): \quad \left(\frac{1}{8}\right)^x > \frac{1}{4}$

$(c): \quad \left(\frac{1}{9}\right)^x < \frac{1}{27}$

$(d): \quad \left(\frac{1}{1000}\right)^x \leq \frac{1}{10}$

ESERCIZI PER CASA 8

$\boxed{1}$ Si dica quale delle seguenti affermazioni è vera:

(a): $e^{\ln(x+1)} = x+1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

(b): $e^{\ln(x+1)} = x+1 \quad \forall x > -1$

(c): $e^{\ln(x+1)-\ln x} = x \quad \forall x \in \mathbb{R}$

(d): $e^{\ln(x+1)-\ln x} = x \quad \forall x > 0$

(e): $e^{\ln(x+1)-\ln x} = \frac{x+1}{x} \quad \forall x \in \mathbb{R}$

(f): $e^{\ln(x+1)-\ln x} = \frac{x+1}{x} \quad \forall x > 0$

(g): $e^{\ln(x+1)-\ln x} = e^{\ln(\frac{x+1}{x})} \quad \forall x > 0$

(h): $\ln(e^x \cdot e^{x+1}) = 2x+1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

(i): $\ln(e^x \cdot e^{x+1}) = x(x+1) \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$\boxed{2}$ Si indichi con Log il logaritmo in base 10. Si dica quale delle seguenti affermazioni è vera:

(a): $\mathrm{Log}(10^{x^2}) = 2{\cdot}\mathrm{Log}(10^x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$

(b): $\mathrm{Log}(10^{x^2}) = x{\cdot}\mathrm{Log}(10^x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$

(c): $\mathrm{Log}(10^{x^2}) = x^2 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

(d): $\mathrm{Log}\left(\frac{10^x}{10^{x-1}}\right) = \frac{x}{x-1} \quad \forall x \neq 1$

(e): $\mathrm{Log}\left(\frac{10^x}{10^{x-1}}\right) = 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$\boxed{3}$ Si calcoli:

(a): $\log_2(16)$

(b): $\log_{\frac{1}{8}}(2)$

(c): $\log_{\frac{1}{2}}(\sqrt[12]{4})$

(d): $\log_{\frac{1}{3}}(\sqrt[5]{\frac{1}{9}})$

$\boxed{4}$ Si calcoli:

$$\mathrm{Log}(\sqrt[5]{100}\cdot\sqrt{10}), \qquad \mathrm{Log}\Big(\frac{\sqrt[3]{10}}{\sqrt[4]{1000}}\Big), \qquad \mathrm{Log}\Big(\frac{\sqrt[7]{100}\cdot\sqrt[3]{10}}{\sqrt[21]{10^7\cdot 10^3}}\Big), \qquad \frac{\mathrm{Log}(\sqrt[7]{100}\cdot\sqrt[3]{10})}{\mathrm{Log}(\sqrt[21]{10^7\cdot 10^3})}.$$

$\boxed{5}$ Si risolvano le seguenti disequazioni logaritmiche:

(a): $\log_8(x) \geq \frac{1}{4}$

(b): $\log_8(x) < \frac{1}{4}$

(c): $\log_{\frac{1}{9}}(x) > 2$

(d): $\log_{\frac{1}{9}}(x) \leq 2$

$\boxed{6}$ Si determini la misura in radianti degli angoli che, espressi in gradi, valgono 18^0 e 99^0 rispettivamente.

$\boxed{7}$ Si determini la misura in gradi degli angoli che, espressi in radianti, valgono $\frac{5}{6}\pi$ ed $\frac{11}{12}\pi$ rispettivamente.

$\boxed{8}$ Si calcolino:

$$\sin\Big(\frac{5}{3}\pi\Big), \qquad \cos\Big(\frac{5}{3}\pi\Big), \qquad \tan\Big(\frac{5}{3}\pi\Big), \qquad \sin\Big(\frac{7}{6}\pi\Big), \qquad \cos\Big(\frac{7}{6}\pi\Big), \qquad \tan\Big(\frac{7}{6}\pi\Big).$$

$\boxed{9}$ Si consideri il triangolo rettangolo ABC in cui l'ipotenusa AC ha lunghezza uguale a 6 cm e l'angolo $C\widehat{A}B$ è uguale a $\frac{1}{6}\pi$. Si calcolino le lunghezze dei cateti AB e CB.

ESERCIZI PER CASA 9

$\boxed{1}$ Si calcolino i seguenti limiti:

(a) $\lim_{x\to-\infty} e^{-x+1}$

(b) $\lim_{x\to+\infty} e^{-x+1}$

(c) $\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{e^{-x+1}}\right)$

(d) $\lim_{x\to-1} e^{x^2-1}$

(e) $\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x-2x^2}{3x^2-2x}\right)$

(f) $\lim_{x\to0} \left(\frac{x-2x^2}{3x^2-2x}\right)$

(g) $\lim_{x\to-\infty} \left(\frac{2x-3x^2}{x^3+x^2}\right)$

(h) $\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{2x^5-x}{3x^3-x^4}\right)$

(i) $\lim_{x\to0} \left(\frac{2x^5-x}{3x^3-x^4}\right)$

$\boxed{2}$ Si calcolino le derivate delle seguenti funzioni:

(a) $f_1(x) = 7x^5 - 3x^2 + 2$

(b) $f_2(x) = e^x + \ln x + 7x^2 + \sin x$

(c) $f_3(x) = 7x^2e^x$

(d) $f_4(x) = (\sin x)(7x^2 + e^x)$

ESERCIZI PER CASA 10

$\boxed{1}$ Si calcolino le derivate delle seguenti funzioni

(a) $f_1(x) = \frac{3x^2-5}{2x^3+3x}$

(b) $f_2(x) = \frac{\sin x}{3x^2}$

(c) $f_3(x) = 10^x$

(d) $f_4(x) = 2^x \cos x$

(e) $f_5(x) = e^{-\frac{2}{x}}$

$\boxed{2}$ Sia $f(x) = \frac{x^2-4x+3}{x}$.

(a) Si trovi il dominio di $f(x)$.

(b) Si dica in quali intervalli di $\mathbb{R}$ $f(x)$ è crescente ed in quali intervalli di $\mathbb{R}$ $f(x)$ è decrescente.

(c) Si trovino gli eventuali punti di massimo e di minimo di $f(x)$.

(d) Si scriva l'equazione della retta tangente al grafico di $f(x)$ nel punto di ascissa $x_0 = 3$.

$\boxed{3}$ Sia $f(x) = e^x(\sin x + 3)$.

Si scriva l'equazione della retta tangente al grafico di $f(x)$ nel punto di ascissa $x_0 = 0$.