ANALISI MATEMATICA E CALCOLO DELLE PROBABILITA'
SIA (VICENZA) A.A. 2014/2015, GEMMA PARMEGGIANI

Università degli Studi di Padova
Dipartimento di Matematica
via Trieste, 63
35131 Padova

- Programma del corso.

- Esercizi Tipo.

- Testi degli esercizi per casa.

Typeset by $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$-TEX

PROGRAMMA SVOLTO

Programma svolto nella prima settimana:

Presentazione del corso.

Insiemi numerici: $\mathbb{N}$ (i numeri naturali), $\mathbb{Z}$ (i numeri interi), $\mathbb{Q}$ (i numeri razionali), $\mathbb{R}$ (i numeri reali). Sistema di coordinate ascisse su di una retta. Il valore assoluto di un numero reale e le sue proprietà. Sistema di riferimento ortogonale monometrico nel piano. Funzioni. Esempi. Grafico di una funzione. Le funzioni costanti ed identica.

Esercizi per casa: Tutti gli "Esercizi per casa 1".

Programma svolto nella seconda settimana:

Le funzioni opposto e valore assoluto ed i loro grafici. L'equazione delle rette non parallele all'asse y. Esercizio Tipo 1. Equazioni e disequazioni di 1^0 grado. Metodo grafico. Parabole con asse parallelo all'asse y. Equazioni e disequazioni di 2^0 grado. Metodo grafico. Potenze con esponente un numero intero.

Esercizi per casa: Tutti gli "Esercizi per casa 2".

Programma svolto nella terza settimana:

L'equazione della retta di regressione. Esercizio Tipo 2. Funzioni potenza con esponente un numero intero (positivo o negativo, pari o dispari) e loro grafici. Funzioni pari e funzioni dispari. Funzioni biiettive. Composizione di funzioni.

Esercizi per casa: Tutti gli "Esercizi per casa 3".

Programma svolto nella quarta settimana:

L'inversa di una funzione biiettiva. Le funzioni radicali ed i loro grafici. Definizione di potenze ad esponente razionale. Proprietà delle potenze. Funzioni monotone (strettamente) crescenti e (strettamente) decrescenti. Funzioni esponenziali. Cenni di calcolo combinatorio. Spazio campionario.

Esercizi per casa: Tutti gli "Esercizi per casa 4".

Programma svolto nella quinta settimana:

Eventi. Unione ed intersezione di eventi. Evento complementare. Il concetto di probabilitá. Proprietá della probabilitá. Probabilitá condizionata ed indipendenza. Variabili aleatorie. Densitá discreta e funzione di distribuzione di una variabile aleatoria discreta; loro rappresentazioni grafiche. Esempi ed esercizi.

Esercizi per casa: Tutti gli “Esercizi per casa 5”.

Programma svolto nella sesta settimana:

Il valore atteso, la varianza e la deviazione standard di una variabile aleatoria, e le loro proprietá. Variabili aleatorie di Bernoulli e binomiali. Esempi. Esercizio Tipo 3.

Esercizi per casa: Tutti gli “Esercizi per casa 6”.

Programma svolto nella settima settimana:

Variabili aleatorie di Poisson. Esercizio Tipo 4. Variabili aleatorie normali. Il teorema del limite centrale. Disequazioni esponenziali. Esercizio Tipo 5. Funzioni logaritmiche ed i loro grafici. Proprietá dei logaritmi. Disequazioni logaritmiche. Esercizio Tipo 6.

Esercizi per casa: Tutti gli “Esercizi per casa 7”.

Programma svolto nell'ottava settimana:

Angoli, loro misura in gradi ed in radianti. Definizione di seno, coseno e tangente. Valori particolari di seno, coseno e tangente. Proprietá fondamentali. Grafico delle funzioni seno, coseno, tangente. Significato geometrico della tangente di un angolo. Applicazione ai triangoli rettangoli. Il concetto di limite.

Esercizi per casa: Tutti gli “Esercizi per casa 8”.

Programma svolto nella nona settimana:

Limiti di funzioni elementari. Calcolo di limiti: il limite della reciproca di una funzione, i limiti di somme, di prodotti, di quozienti e di composte di funzioni. Soluzioni di alcune forme indeterminate. Derivate e loro significato geometrico. Derivate delle funzioni elementari. Regole di derivazione: derivate di somme, di prodotti, di quozienti e di composte di funzioni.

Esercizi per casa: Tutti gli “Esercizi per casa 9”.

Programma svolto nella decima settimana:

Criterio per stabilire in quali intervalli una funzione derivabile é crescente o decrescente. Esercizio Tipo 7. Equazione della retta tangente al grafico di una funzione in un punto. Esercizio Tipo 8. Il teorema di Bayes.

Esercizi per casa: Tutti gli “Esercizi per casa 10”.

ESERCIZI TIPO

ESERCIZIO TIPO 1

$\boxed{I}$ Si scriva l'equazione della retta r passante per i punti $P(4,1)$ e $Q(-1,6)$.

$\boxed{II}$ Siano r la retta di equazione $y = -x + 5$ ed s la retta di equazione $y = 7x - 3$. Si calcolino le coordinate del punto di intersezione di r ed s.

$\boxed{III}$ Sia r la retta di equazione $y = -x + 5$, e siano R il punto di intersezione di r con l'asse delle ascisse ed S il punto di intersezione di r con l'asse delle ordinate. Si trovino le coordinate dei punti R ed S.

$\boxed{IV}$ Sia r la retta di equazione $y = -x + 5$. Si scriva l'equazione della retta t passante per il punto $T(7,3)$ e parallela ad r.

$\boxed{I}$ Poichè $x_P = 4 \neq -1 = x_Q$, l'equazione di r è del tipo $y = mx + q$ per opportuni $m, q \in \mathbb{R}$.

Dal momento che

$$\begin{aligned} P \in r &\iff y_P = mx_P + q \iff 1 = 4m + q \\ Q \in r &\iff y_Q = mx_Q + q \iff 6 = -m + q \end{aligned}$$

per trovare m e q occorre risolvere il sistema

$$\begin{cases} 1 &= 4m + q \\ 6 &= -m + q \end{cases}$$

Dalla 1^a equazione si ottiene $q = 1 - 4m$, che sostituito nella 2^a equazione dà $6 = -m + 1 - 4m$ da cui $6 - 1 = -5m$, ossia $5 = -5m$ e quindi

$$m = -1.$$

Sostituendo $m = -1$ nella 1^a equazione si ottiene

$$q = 1 - 4m = 1 - 4 \cdot (-1) = 1 + 4 = 5.$$

Quindi l'equazione di r è

$$y = -x + 5.$$

$\boxed{II}$ Le coordinate del punto di intersezione di r ed s si trovano risolvendo il sistema

$$\begin{cases} \text{equazione di } r \\ \text{equazione di } s \end{cases}$$

ossia

$$\begin{cases} y &= -x + 5 \\ y &= 7x - 3 \end{cases}$$

Dunque poichè

$$\begin{cases} y &= -x + 5 \\ y &= 7x - 3 \end{cases} \implies \begin{cases} 7x - 3 &= -x + 5 \\ y &= 7x - 3 \end{cases} \implies \begin{cases} 8x &= 8 \\ y &= 7x - 3 \end{cases} \implies \begin{cases} x &= 1 \\ y &= 7 \cdot 1 - 3 = 4 \end{cases}$$

le coordinate del punto di intersezione di r ed s sono $(1,4)$.

$\boxed{III}$ Le coordinate di R si ottengono risolvendo il sistema

$$\begin{cases} \text{equazione di } r \\ \text{equazione dell'asse } x \end{cases}$$

ossia

$$\begin{cases} y = -x+5 \\ y = 0 \end{cases}$$

Dunque poichè

$$\begin{cases} y = -x+5 \\ y = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 0 = -x+5 \\ y = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ y = 0 \end{cases}$$

le coordinate di R sono $(5,0)$.

Le coordinate di S si ottengono risolvendo il sistema

$$\begin{cases} \text{equazione di } r \\ \text{equazione dell'asse } y \end{cases}$$

ossia

$$\begin{cases} y = -x+5 \\ x = 0 \end{cases}$$

Dunque poichè

$$\begin{cases} y = -x+5 \\ x = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} y = 5 \\ x = 0 \end{cases}$$

le coordinate di S sono $(0,5)$.

$\boxed{IV}$ Poichè t è parallela ad r, ed r non è parallela all'asse y (non essendo la sua equazione del tipo $x = c$), allora t non è parallela all'asse y. La sua equazione è quindi del tipo $y = mx + q$ (per opportuni $m, q \in \mathbb{R}$). Essendo r e t parallele, allora

$$m = \text{coefficiente angolare di } t = \text{coefficiente angolare di } r = -1$$

Dunque l'equazione di t è del tipo $y = -x + q$.

Per trovare q imponiamo il passaggio di t per il punto $T(7,3)$:

$$T \in t \iff y_T = -x_T + q \iff 3 = -7 + q \iff q = 3 + 7 = 10.$$

Dunque l'equazione di t è

$$y = -x + 10.$$

ESERCIZIO TIPO 2: si veda il file O2b

ESERCIZIO TIPO 3

Con la terminologia usata nell'Esercizio 5 degli "Esercizi per casa 6", qual è la probabilità che esattamente 5 degli 8 figli di una coppia di genitori ibridi siano puramente recessivi ?

Indichiamo il gene dominante con d ed il gene recessivo con r, e, per fissare le notazioni, stabiliamo che la coppia di geni di ciascun individuo sia ordinata: scegliamo, ad esempio, di prendere come prima lettera quella corrispondente al gene ereditato dal padre, e come seconda quella corrispondente al gene ereditato dalla madre. Con queste notazioni, la coppia di geni di un individuo ibrido è (r, d) se l'individuo eredita il gene recessivo dal padre ed il gene dominante dalla madre, oppure (d, r) se l'individuo eredita il gene dominante dal padre ed il gene recessivo dalla madre.

Quindi per la coppia di geni di ciascuno dei figli di due genitori ibridi ci sono esattamente le seguenti 4 possibilità:

$$(r, d), \qquad (d, r), \qquad (d, d), \qquad (r, r).$$

Le prime due determinano un figlio ibrido, la terza determina un figlio puraramente dominante e la quarta determina un figlio puramente recessivo.

Dunque la probabilità p che un figlio di una coppia di genitori ibridi sia puramente recessivo è

$$p = \frac{\text{numero delle coppie } (r, r) \text{ che si presentano tra i casi possibili}}{\text{numero dei casi possibili}} = \frac{1}{4}.$$

Usando la densità discreta della variabile aleatoria binomiale

$$p(i) = \binom{n}{i} \cdot p^i \cdot (1-p)^{n-i},$$

con $n = 8$, $i = 5$ e $p = \frac{1}{4}$ otteniamo che la probabilità che esattamente 5 degli 8 figli di una coppia di genitori ibridi siano puramente recessivi è:

$$p(5) = \binom{8}{5} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^5 \cdot \left(1 - \frac{1}{4}\right)^{8-5} = \frac{8!}{5! \cdot (8-5)!} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^5 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^3 = \frac{8!}{5! \cdot 3!} \cdot \frac{1}{4^5} \cdot \frac{3^3}{4^3} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3!} \cdot \frac{3^3}{4^8} = 14 \cdot \frac{3^3}{4^7}$$

(che è circa $0,02$).

ESERCIZIO TIPO 4

Se la probabilità che una persona sia allergica ad un farmaco è $0,002$, determinare la probabilità che su 3000 persone esattamente 2 siano allergiche. (Sugg.: si approssimi la distribuzione binomiale della variabile aleatoria "il numero delle persone allergiche al farmaco" con quella di Poisson, prendendo $\lambda = n \cdot p$ dove $n = ...$ e $p = ...$)

Sia X la variabile aleatoria "numero di persone allergiche al farmaco". Ricordiamo che la distribuzione di Poisson di parametro λ ha densità discreta

$$p(x) = \frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^x}{x!}, \quad x = 0, 1, 2, ...$$

e, seguendo il suggerimento, approssimiamo la distribuzione binomiale della variabile aleatoria X con la distribuzione di Poisson di parametro $\lambda = n \cdot p$ dove $n = 3000$ e $p = 0,002$. Dunque

$$\lambda = 3000 \cdot 0,002 = 3000 \cdot \frac{2}{1000} = 3 \cdot 2 = 6$$

e la probabilità che esattamente 2 persone siano allergiche è:

$$P(X = 2) = \frac{e^{-6} \cdot 6^2}{2!} = \frac{e^{-6} \cdot 36}{2} = 18 \cdot e^{-6}.$$

ESERCIZIO TIPO 5

Risolvere le seguenti disequazioni esponenziali:

(a) $\quad 100^x < \frac{1}{1000}$.

(b) $\quad \left(\frac{1}{100}\right)^x < 0,0001$.

(a) Scrivendo 100 e 1000 come potenze di 10 si ottiene

$$\left(10^2\right)^x < \frac{1}{10^3},$$

ossia

$$10^{2x} < 10^{-3}.$$

Posto $z = 2x$, risolviamo

$$10^z < 10^{-3}.$$

Poichè $f(z) = 10^z$ è **strettamente crescente** (essendo $10 > 1$), passando ad una disequazione sugli esponenti **si conserva il verso della disequazione**: le soluzioni sono

$$z < -3.$$

Ricordando che $z = 2x$ si ottiene $2x < -3$ le cui soluzioni sono

$$x < -\frac{3}{2}.$$

(b) Scrivendo $0,0001 = 10^{-4}$ e $\frac{1}{100}$ come potenze di $\frac{1}{10}$ si ottiene

$$\left(\left(\frac{1}{10}\right)^2\right)^x < \left(\frac{1}{10}\right)^4$$

ossia

$$\left(\frac{1}{10}\right)^{2x} < \left(\frac{1}{10}\right)^4.$$

Posto $z = 2x$, risolviamo

$$\left(\frac{1}{10}\right)^z < \left(\frac{1}{10}\right)^4.$$

Poichè $f(z) = \left(\frac{1}{10}\right)^z$ è **strettamente decrescente** (essendo $\frac{1}{10} < 1$), passando ad una disequazione sugli esponenti **si cambia il verso della disequazione**: le soluzioni sono

$$z > 4.$$

Ricordando che $z = 2x$ si ottiene $2x > 4$ le cui soluzioni sono

$$x > 2.$$

ESERCIZIO TIPO 6

Risolvere le seguenti disequazioni logaritmiche:

(a) $\log_4(x) > \frac{1}{2}$.

(b) $\log_{\frac{1}{27}}(x) \geq \frac{2}{3}$.

(a) Scrivendo

$$\frac{1}{2} = \log_4\left(4^{\frac{1}{2}}\right)$$

si ottiene

$$\log_4(x) > \log_4\left(4^{\frac{1}{2}}\right).$$

Essendo $4 > 1$, la funzione $f(x) = \log_4(x)$ è **strettamente crescente**, per cui passando ad una disequazione sugli argomenti del logaritmo **si conserva il verso della disequazione**: le soluzioni sono

$$x > 4^{\frac{1}{2}} = \sqrt{4} = 2.$$

N:B.: Occorre anche imporre che $\log_4(x)$ esista, ossia che $x > 0$, per cui le soluzioni della disequazione logaritmica sono le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} x > 2 \\ x > 0 \end{cases}$$

ossia

$$x > 2$$

(b) Scrivendo

$$\frac{2}{3} = \log_{\frac{1}{27}}\left(\frac{1}{27}\right)^{\frac{2}{3}}$$

si ottiene

$$\log_{\frac{1}{27}}(x) \geq \log_{\frac{1}{27}}\left(\frac{1}{27}\right)^{\frac{2}{3}}.$$

Essendo $\frac{1}{27} < 1$, la funzione $f(x) = \log_{\frac{1}{27}}(x)$ è **strettamente decrescente**, per cui passando ad una disequazione sugli argomenti del logaritmo **si cambia il verso della disequazione**: le soluzioni sono

$$x \leq \left(\frac{1}{27}\right)^{\frac{2}{3}} = \left(\frac{1}{3^3}\right)^{\frac{2}{3}} = \left(\left(\frac{1}{3}\right)^3\right)^{\frac{2}{3}} = \left(\frac{1}{3}\right)^{3\cdot\frac{2}{3}} = \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}.$$

N:B.: Occorre anche imporre che $\log_{\frac{1}{27}}(x)$ esista, ossia che $x > 0$, per cui le soluzioni della disequazione logaritmica sono le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} x \leq \frac{1}{9} \\ x > 0 \end{cases}$$

ossia

$$0 < x \leq \frac{1}{9}$$

ESERCIZIO TIPO 7 - A Sia

$$f(x) = \frac{2+x-x^2}{(x-1)^2}.$$

(a) Si trovi il dominio di $f(x)$.

(b) Si dica in quali intervalli di $\mathbb{R}$ $f(x)$ è crescente ed in quali intervalli di $\mathbb{R}$ $f(x)$ è decrescente.

(c) Si trovino gli eventuali punti di massimo e di minimo di $f(x)$.

(a) dom(f): $x \neq 1$.

(b) Dal momento che

$$f(x) \text{ è strettamente crescente } \iff f'(x) > 0 \text{ ed}$$
$$f(x) \text{ è strettamente decrescente } \iff f'(x) < 0,$$

per trovare in quali intervalli $f(x)$ è strettamente crescente ed in quali è strettamente decrescente, studiamo il segno della derivata di $f'(x)$ di $f(x)$.

$$f'(x) = \frac{d}{dx}f(x) = \frac{d}{dx}\Big(\frac{2+x-x^2}{(x-1)^2}\Big) =$$

$$= \frac{\Big(\frac{d}{dx}(2+x-x^2)\Big)\cdot(x-1)^2 - (2+x-x^2)\Big(\frac{d}{dx}((x-1)^2)\Big)}{(x-1)^2} =$$

$$= \frac{(1-2x)(x-1)^2 - (2+x-x^2)\Big(\frac{d}{dx}(x^2-2x+1)\Big)}{(x-1)^2} = \frac{(1-2x)(x-1)^2-(2+x-x^2)(2x-2)}{(x-1)^2} =$$

$$= \frac{(x-1)\Big[(1-2x)(x-1)-(2+x-x^2)\cdot 2\Big]}{(x-1)^4} = \frac{(x-1)(x-2x^2-1+2x-4-2x+2x^2)}{(x-1)^4} =$$

$$= \frac{(x-1)(x-5)}{(x-1)^4}$$

Essendo il denominatore di $f'(x)$ positivo per ogni $x \neq 1$ (ossia in tutto il dominio di $f(x)$), allora

$$f'(x) > 0 \iff (x-1)(x-5) > 0 \iff \Big[x < 1 \text{ o } x > 5\Big]$$

Dunque

$$f(x) \text{ è strettamente crescente per } \Big[x < 1 \text{ o } x > 5\Big] \text{ ed}$$
$$f(x) \text{ è strettamente decrescente per } \Big[1 < x < 5\Big].$$

(c) **Per quanto la funzione sia strettamente crescente per $x < 1$ e strettamente decrescente per $x > 1$, non c'è un punto di massimo con ascissa $x = 1$: in $x = 1$ la funzione non è definita.**

Il punto P di ascissa $x_P = 5$ è un punto di minimo (dal momento che per $x < 5$ la funzione è decrescente e per $x > 5$ la funzione è crescente). Per trovare l'ordinata y_P di P imponiamo che P appartenga al grafico di $f(x)$:

$$y_P = f(x_P) = f(5) = \frac{2+5-5^2}{(5-1)^2} = \frac{2+5-25}{4^2} = -\frac{18}{16} = -\frac{9}{8}.$$

Dunque la funzione non ha punti di massimo ed ha un punto di minimo P di coordinate $(5, -\frac{9}{8})$.

ESERCIZIO TIPO 7 - B Sia

$$f(x) = \frac{\ln(x)+1}{\ln(x)}.$$

(a) Si trovi il dominio di $f(x)$.

(b) Si dica in quali intervalli di $\mathbb{R}$ $f(x)$ è crescente ed in quali intervalli di $\mathbb{R}$ $f(x)$ è decrescente.

(c) Si trovino gli eventuali punti di massimo e di minimo di $f(x)$.

(a) dom(f): $\begin{cases} x > 0 \\ \ln(x) \neq 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x > 0 \\ x \neq 1 \end{cases}$

(b) Dal momento che

$$f(x) \text{ è strettamente crescente } \iff f'(x) > 0 \text{ ed}$$
$$f(x) \text{ è strettamente decrescente } \iff f'(x) < 0,$$

per trovare in quali intervalli $f(x)$ è strettamente crescente ed in quali è strettamente decrescente, studiamo il segno della derivata di $f'(x)$ di $f(x)$.

$$f'(x) = \frac{d}{dx}f(x) = \frac{d}{dx}\Big(\frac{\ln(x)+1}{\ln(x)}\Big) =$$

$$= \frac{\Big(\frac{d}{dx}(\ln(x)+1)\Big)\cdot\ln(x) - (\ln(x)+1)\Big(\frac{d}{dx}(\ln(x))\Big)}{(\ln(x))^2} =$$

$$= \frac{\frac{1}{x}\cdot\ln(x) - (\ln(x)+1)\cdot\frac{1}{x}}{(\ln(x))^2} = \frac{\frac{1}{x}\cdot\ln(x) - \ln(x)\cdot\frac{1}{x} - \frac{1}{x}}{(\ln(x))^2} = \frac{-\frac{1}{x}}{(\ln(x))^2}$$

Nel dominio di $f(x)$, si ha che $x > 0$, per cui $-\frac{1}{x} < 0$ e quindi $f'(x) < 0$. Dunque

$$f(x) \text{ è sempre strettamente decrescente dove è definita, ossia per } 0 < x < 1 \text{ e per } x > 1$$

(c) Non ci sono nè punti di massimo, nè punti di minimo.

ESERCIZIO TIPO 7 - C Sia

$$f(x) = \frac{e^x}{1+x^2}.$$

(a) Si trovi il dominio di $f(x)$.

(b) Si dica in quali intervalli di $\mathbb{R}$ $f(x)$ è crescente ed in quali intervalli di $\mathbb{R}$ $f(x)$ è decrescente.

(c) Si trovino gli eventuali punti di massimo e di minimo di $f(x)$.

(a) dom(f): $x \in \mathbb{R}$.

(b) Dal momento che

$$f(x) \text{ è strettamente crescente } \iff f'(x) > 0 \text{ ed}$$
$$f(x) \text{ è strettamente decrescente } \iff f'(x) < 0,$$

per trovare in quali intervalli $f(x)$ è strettamente crescente ed in quali è strettamente decrescente, studiamo il segno della derivata di $f'(x)$ di $f(x)$.

$$f'(x) = \frac{d}{dx} f(x) = \frac{d}{dx}\Big(\frac{e^x}{1+x^2}\Big) =$$

$$= \frac{\Big(\frac{d}{dx}(e^x)\Big)\cdot(1+x^2) - e^x \cdot \Big(\frac{d}{dx}(1+x^2)\Big)}{(1+x^2)^2} =$$

$$= \frac{e^x(1+x^2) - e^x \cdot 2x}{(1+x^2)^2} = \frac{e^x}{(1+x^2)^2}\cdot(1+x^2-2x) = \frac{e^x}{(1+x^2)^2}\cdot(1-x)^2$$

Essendo

$$\begin{cases} e^x > 0 & \forall x \\ (1+x^2)^2 > 0 & \forall x \\ (1-x)^2 \geq 0 & \forall x \end{cases}$$

si ha che $f'(x) \geq 0$ per ogni x, e quindi $f(x)$ è sempre crescente (in tutto $\mathbb{R}$).

(c) Non ci sono nè punti di massimo, nè punti di minimo.

ESERCIZIO TIPO 7 - D Sia

$$f(x) = \frac{x^2}{x^4-1}.$$

(a) Si trovi il dominio di $f(x)$.

(b) Si dica in quali intervalli di $\mathbb{R}$ $f(x)$ è crescente ed in quali intervalli di $\mathbb{R}$ $f(x)$ è decrescente.

(c) Si trovino gli eventuali punti di massimo e di minimo di $f(x)$.

(a) dom(f): Dobbiamo trovare quegli x per cui $x^4 - 1 \neq 0$.

Essendo $x^4 - 1 = (x^2)^2 - 1 = (x^2-1)(x^2+1)$, ed essendo inoltre $x^2 + 1 \neq 0$ per ogni x, allora

$$x^4 - 1 \neq 0 \iff (x^2-1)(x^2+1) \neq 0 \iff x^2 - 1 \neq 0 \iff \Big[x \neq -1 \text{ e } x \neq 1\Big].$$

Dunque il dominio di $f(x)$ è $x \notin \{-1, 1\}$.

(b) Dal momento che

$$f(x) \text{ è strettamente crescente } \iff f'(x) > 0 \text{ ed}$$
$$f(x) \text{ è strettamente decrescente } \iff f'(x) < 0,$$

per trovare in quali intervalli $f(x)$ è strettamente crescente ed in quali è strettamente decrescente, studiamo il segno della derivata di $f'(x)$ di $f(x)$.

$$f'(x) = \frac{d}{dx}f(x) = \frac{d}{dx}\Big(\frac{x^2}{x^4-1}\Big) =$$

$$= \frac{\Big(\frac{d}{dx}(x^2)\Big) \cdot (x^4-1) - x^2 \cdot \Big(\frac{d}{dx}(x^4-1)\Big)}{(x^4-1)^2} =$$

$$= \frac{2x(x^4-1) - x^2 \cdot 4x^3}{(x^4-1)^2} = \frac{2x^5 - 2x - 4x^5}{(x^4-1)^2} =$$

$$= \frac{-2x^5 - 2x}{(x^4-1)^2} = \frac{-2x(x^4+1)}{(x^4-1)^2}$$

Essendo il denominatore di $f'(x)$ positivo in tutto il dominio di $f(x)$, allora

$$f'(x) \geq 0 \iff -2x(x^4+1) \geq 0 \iff -2x \geq 0 \iff \Big[x \leq 0, \text{ con } x \neq -1\Big]$$

Dunque

$$f(x) \text{ è crescente per } \Big[x < -1 \text{ o } -1 < x \leq 0\Big] \text{ ed}$$
$$f(x) \text{ è decrescente per } \Big[0 \leq x < 1 \text{ o } x > 1\Big].$$

(c) Il punto P di ascissa $x_P = 0$ è un punto di massimo (dal momento che per $x < 0$ la funzione è crescente e per $x > 0$ la funzione è decrescente). Per trovare l'ordinata y_P di P imponiamo che P appartenga al grafico di $f(x)$:

$$y_P = f(x_P) = f(0) = \frac{0^2}{0^4-1} = \frac{0}{-1} = 0.$$

Dunque la funzione non ha punti di minimo ed ha un punto di massimo P di coordinate $(0, 0)$.

ESERCIZIO TIPO 8 - A Siano

$$f_1(x) = \frac{2+x-x^2}{(x-1)^2}, \qquad f_2(x) = \frac{\ln(x)+1}{\ln(x)}, \qquad f_3(x) = \frac{e^x}{1+x^2} \quad \text{ed} \quad f_4(x) = \frac{x^2}{x^4-1}$$

le funzioni considerate nell'ESERCIZIO TIPO 7. Si trovino:

(a) l'equazione della retta tangente al grafico di $f_1(x)$ nel punto A di ascissa $x_A = 2$;

(b) l'equazione della retta tangente al grafico di $f_2(x)$ nel punto B di ascissa $x_B = e$;

(c) l'equazione della retta tangente al grafico di $f_3(x)$ nel punto C di ascissa $x_C = 2$;

(d) l'equazione della retta tangente al grafico di $f_4(x)$ nel punto D di ascissa $x_D = 0$.

(a) La retta tangente al grafico di $f_1(x)$ in A ha equazione del tipo

$$y = mx + q,$$

dove

$$m = f_1'(x_A).$$

Abbiamo calcolato $f_1'(x)$ nell'ESERCIZIO TIPO 7 (A):

$$f_1'(x) = \frac{(x-1)(x-5)}{(x-1)^4} = \frac{x-5}{(x-1)^3}.$$

Dunque

$$m = f_1'(x_A) = f_1'(2) = \frac{2-5}{(2-1)^2} = \frac{-3}{1^2} = -3.$$

La retta ha quindi equazione del tipo

$$y = -3x + q.$$

Per trovare q imponiamo il passaggio della retta per il punto A. Dal momento che A appartiene al grafico di $f_1(x)$, allora

$$y_A = f_1(x_A) = f_1(2) = \frac{2+2-2^2}{(2-1)^2} = 0,$$

per cui A ha coordinate $(2, 0)$. Dal momento che la retta passa per A, abbiamo

$$y_A = -3x_A + q$$

ossia

$$0 = (-3) \cdot 2 + q = -6 + q.$$

Dunque $q = 6$ e l'equazione della retta tangente in A al grafico di $f_1(x)$ è

$$y = -3x + 6.$$

(b) La retta tangente al grafico di $f_2(x)$ in B ha equazione del tipo

$$y = mx + q,$$

dove

$$m = f_2'(x_B).$$

Abbiamo calcolato $f_2'(x)$ nell'ESERCIZIO TIPO 7 (B):

$$f_2'(x) = \frac{-\frac{1}{x}}{(\ln(x))^2} = -\frac{1}{x \cdot (\ln(x))^2}.$$

Dunque

$$m = f_2'(x_B) = f_2'(e) = -\frac{1}{e \cdot (\ln(e))^2} = -\frac{1}{e \cdot 1^2} = -\frac{1}{e}.$$

La retta ha quindi equazione del tipo

$$y = -\frac{1}{e} \cdot x + q.$$

Per trovare q imponiamo il passaggio della retta per il punto B. Dal momento che B appartiene al grafico di $f_2(x)$, allora

$$y_B = f_2(x_B) = f_2(e) = \frac{\ln(e) + 1}{\ln(e)} = \frac{1+1}{1} = 2,$$

per cui B ha coordinate $(e, 2)$. Dal momento che la retta passa per B, abbiamo

$$y_B = -\frac{1}{e} \cdot x_B + q$$

ossia

$$2 = -\frac{1}{e} \cdot e + q = -1 + q.$$

Dunque $q = 3$ e l'equazione della retta tangente in B al grafico di $f_2(x)$ è

$$y = -\frac{1}{e} \cdot x + 3.$$

(c) La retta tangente al grafico di $f_3(x)$ in C ha equazione del tipo

$$y = mx + q,$$

dove

$$m = f_3'(x_C).$$

Abbiamo calcolato $f_3'(x)$ nell'ESERCIZIO TIPO 7 (C):

$$f_3'(x) = \frac{e^x \cdot (1-x)^2}{(1+x^2)^2}.$$

Dunque

$$m = f_3'(x_C) = f_3'(2) = \frac{e^2 \cdot (1-2)^2}{(1+2^2)^2} = \frac{e^2}{25}.$$

La retta ha quindi equazione del tipo

$$y = \frac{e^2}{25} \cdot x + q.$$

Per trovare q imponiamo il passaggio della retta per il punto C. Dal momento che C appartiene al grafico di $f_3(x)$, allora

$$y_C = f_3(x_C) = f_3(2) = \frac{e^2}{1+2^2} = \frac{e^2}{5},$$

per cui C ha coordinate $(2, \frac{e^2}{5})$. Dal momento che la retta passa per C, abbiamo

$$y_C = \frac{e^2}{25} \cdot x_C + q$$

ossia

$$\frac{e^2}{5} = \frac{e^2}{25} \cdot 2 + q.$$

Dunque $q = \frac{e^2}{5} - \frac{e^2}{25} \cdot 2 = \frac{3}{25} \cdot e^2$ e l'equazione della retta tangente in C al grafico di $f_3(x)$ è

$$y = \frac{1}{25} \cdot e^2 \cdot x + \frac{3}{25} \cdot e^2.$$

(d) La retta tangente al grafico di $f_4(x)$ in D ha equazione del tipo

$$y = mx + q,$$

dove

$$m = f_4'(x_D).$$

Abbiamo calcolato $f_4'(x)$ nell'ESERCIZIO TIPO 7 (D):

$$f_4'(x) = -\frac{2x(x^4+1)}{(x^4-1)^2}.$$

Dunque

$$m = f_4'(x_D) = f_4'(0) = -\frac{2 \cdot 0 \cdot (0^4+1)}{(0^4-1)^2} = -\frac{0}{1} = 0.$$

La retta ha quindi equazione del tipo

$$y = q.$$

Per trovare q imponiamo il passaggio della retta per il punto D. Dal momento che D appartiene al grafico di $f_4(x)$, allora

$$y_D = f_4(x_D) = f_4(0) = \frac{0^2}{0^4-1} = \frac{0}{-1} = 0,$$

per cui D ha coordinate $(0,0)$. Dal momento che la retta passa per D, abbiamo

$$y_D = q$$

ossia $q = 0$ e l'equazione della retta tangente in D al grafico di $f_4(x)$ è

$$y = 0.$$

ESERCIZIO TIPO 8 - B Sia
$$f(x) = e^{\sin(x)+\frac{1}{\pi}}.$$
Si trovi l'equazione della retta tangente al grafico di $f(x)$ nel punto P di ascissa $x_P = \frac{\pi}{2}$.

La retta tangente al grafico di $f(x)$ in P ha equazione del tipo
$$y = mx + q,$$
dove
$$m = f'(x_P).$$
Calcoliamo la derivata $f'(x)$ della funzione $f(x)$. Posto $z(x) = \sin(x) + \frac{1}{\pi}$, si ha che
$$\frac{d}{dx}f(x) = \frac{d}{dz}f(z) \cdot \frac{d}{dx}z(x),$$
per cui, essendo $\frac{d}{dz}e^z = e^z$, si ottiene:
$$f'(x) = \frac{d}{dx}f(x) = \frac{d}{dx}\Big(e^{\sin(x)+\frac{1}{\pi}}\Big) = \frac{d}{dz}(e^z)\cdot\frac{d}{dx}\Big(\sin(x)+\frac{1}{\pi}\Big) = e^z\cdot\Big(\cos(x)+0\Big) = e^z\cdot\cos(x) = e^{\sin(x)+\frac{1}{\pi}}\cdot\cos(x)$$
Dunque
$$m = f'(x_P) = f'(\frac{\pi}{2}) = e^{\sin(\frac{\pi}{2})+\frac{1}{\pi}} \cdot \cos(\frac{\pi}{2}) = e^{1+\frac{1}{\pi}} \cdot 0 = 0.$$
La retta ha quindi equazione del tipo
$$y = q.$$
Per trovare q imponiamo il passaggio della retta per il punto P. Dal momento che P appartiene al grafico di $f(x)$, allora
$$y_P = f(x_P) = f(\frac{\pi}{2}) = e^{\sin(\frac{\pi}{2})+\frac{1}{\pi}} = e^{1+\frac{1}{\pi}},$$
per cui P ha coordinate $(\frac{\pi}{2}, e^{1+\frac{1}{\pi}})$. Dal momento che la retta passa per P, abbiamo
$$y_P = q$$
ossia
$$e^{1+\frac{1}{\pi}} = q.$$
Dunque l'equazione della retta tangente in P al grafico di $f(x)$ è
$$y = e^{1+\frac{1}{\pi}}.$$

TESTI DEGLI ESERCIZI PER CASA

ESERCIZI PER CASA 1

$\boxed{1}$ Si calcoli:

$$||2|+|-3||=\dots \qquad |-7-|-4||=\dots \qquad \left|\frac{-2}{-7+|-3|}\right|=\dots$$

$\boxed{2}$ Per ogni $a,b\in\mathbb{R}$ si calcoli:

$$\Big(|a|+|b|\Big)\cdot\Big(|a|-|b|\Big)=\dots \qquad \Big(|a|+|b|\Big)\cdot\Big(|a|-|-b|\Big)=\dots$$

$\boxed{3}$ Per quale $n\in\mathbb{N}$ si ha $|-2|-|-3|=-|-n|$?

$\boxed{4}$ Si dica quali delle seguenti uguaglianze sono vere per ogni $x\in\mathbb{R}$:

(a) $(|-x|-x)^2+2x|x|=2x^2$

(b) $x^5=x^2|x|^3$

(c) $x^2|x|^3=(|x|^2)^3$

(d) $(|x|+x)^2-2x|-x|=|x|^2$

(e) $x^5=|x|^2x^3$

$\boxed{5}$ Si dica quali delle seguenti posizioni definiscono delle funzioni e quali no:

(a) $f_1:\mathbb{N}\to\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ definita da $f_1(n)=(a,b)$, dove $a,b\in\mathbb{N}$ sono tali che $n=ab$.

(b) $f_2:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ definita da $f_2(n)=n/2$.

(c) $f_3:P\to\mathbb{N}$ definita da $f_3(n)=n/2$, dove P è l'insieme dei numeri naturali pari.

$\boxed{6}$ Sia $f(x)=\frac{x^2}{x-3}$. Si calcolino $f(-2)$, $f(-1)$, $f(0)$, $f(1)$, $f(2)$.

$\boxed{7}$ Sia $f(x)=x-|x|$. Quali dei seguenti punti appartengono al grafico di f ?

$$(0,0),\qquad (1,1),\qquad (1,0),\qquad (-1,0),\qquad (-1,-1),\qquad (-1,1).$$

ESERCIZI PER CASA 2

$\boxed{1}$ Si scriva l'equazione della retta passante per i punti $P(1,3)$ e $Q(2,7)$.

$\boxed{2}$ Sia r la retta di equazione $y = 4x - 1$. r passa per il punto $A(7,27)$? r passa per il punto $B(3,20)$?

$\boxed{3}$ Siano r la retta di equazione $y = 4x - 1$ ed s la retta di equazione $y = 5x + 3$. Si calcolino le coordinate del punto di intersezione di r ed s.

$\boxed{4}$ Sia r la retta di equazione $y = 4x - 1$. Si calcolino le coordinate del punto P in cui r interseca l'asse delle ascisse e del punto Q in cui r interseca l'asse delle ordinate.

$\boxed{5}$ Sia r la retta di equazione $y = 4x - 1$. Si scriva l'equazione della retta t parallela ad r e passante per il punto $A(4,8)$.

$\boxed{6}$ Si risolvano le seguenti equazioni e disequazioni di 1^0 e 2^0 grado:

(a): $\frac{7}{10}x + \frac{2}{3} = 0$
(b): $\frac{4}{3}x - \frac{2}{9} > 0$
(c): $-2x + 14 \geq 0$
(d): $-6x - 3 < 0$
(e): $7x + 14 \leq 0$
(f): $x^2 - x - 12 = 0$
(g): $3x^2 + 6x - 9 \geq 0$
(h): $-2x^2 - 8x + 42 \geq 0$
(i): $x^2 \leq 0$
(l): $3x^2 + 6x - 9 < 0$
(m): $x^2 - 2x + 1 \leq 0$
(n): $x^2 - 2x + 2 \leq 0$
(o): $x^2 + x + 1 > 0$
(p): $x^2 > 0$
(q): $-x^2 + \frac{5}{2}x - 1 < 0$
(r): $-x^2 - x - 1 \leq 0$

ESERCIZI PER CASA 3: si veda il file AP3b

ESERCIZI PER CASA 4

$\boxed{1}$ Si dica quale delle seguenti funzioni è l'inversa della funzione $f(x) = 3x + 2$:

$$g_1(x) = \frac{1}{3x+2}, \qquad g_2(x) = \frac{1}{3}x + \frac{1}{2}, \qquad g_3(x) = \frac{1}{3}x - \frac{2}{3}.$$

$\boxed{2}$ Si dica a quale/quali dei seguenti numeri è uguale il numero $\sqrt[6]{4}$:

$$\sqrt[3]{16}, \qquad \sqrt[3]{8}, \qquad \sqrt[3]{2}, \qquad \sqrt[12]{2}.$$

$\boxed{3}$ Si dica a quale/quali dei seguenti numeri è uguale il numero $\Big((3^{-1})^2\Big)^3$:

$$3^5, \qquad 3^6, \qquad 3^{-5}, \qquad 3^{-6}.$$

$\boxed{4}$ Si scrivano le seguenti espressioni come potenze in base 10:

$$\sqrt[3]{\frac{1}{100}} \cdot \sqrt[4]{10^3}, \qquad \Big((\sqrt[4]{1000}\,)^{-3}\Big)^2, \qquad \Big(\frac{\sqrt[3]{10}}{\sqrt[5]{100}}\Big)^2.$$

$\boxed{5}$ Siano a e b numeri reali positivi. Si scriva ciascuna delle seguenti espressioni nella forma $a^r b^s$ con $r, s \in \mathbb{Q}$

$$\sqrt[5]{a^3b^2} \qquad (\sqrt[4]{a^2b^3})^5 \qquad (\sqrt[3]{ab^2})^2\,\sqrt[4]{b^3}$$

$\boxed{6}$ Su di una panca devono sedersi due ragazzi e due ragazze.

(a) In quanti modi si possono sedere ?

(b) In quanti modi si possono sedere se le due ragazze vogliono stare sedute vicine ?

$\boxed{7}$ In quanti modi si possono scegliere tre oggetti da un insieme che ne contiene sette ?

$\boxed{8}$ Quanti sono gli anagrammi delle seguenti parole:

- ALIMENTO
- SICUREZZA
- SANITARIA
- IGIENICO

ESERCIZI PER CASA 5

$\boxed{1}$ Supponiamo che ogni figlio di una coppia possa essere ugualmente un maschio od una femmina. Per una coppia che ha quattro figli calcolare la probabilità degli eventi:

(a) Tutti i figli siano dello stesso sesso.

(b) Vi siano due maschi e due femmine.

$\boxed{2}$ Si estraggono due palline da un'urna contenente cinque palline numerate da 1 a 5.

(a) Qual è la probabilità che il numero più basso estratto sia il 3 ?

(b) Qual è la probabilità che il numero più basso estratto non sia il 3 ?

$\boxed{3}$ Si estrae una carta da un mazzo di 52 carte.

(a) Qual è la probabilità che esca un 2 od un 3 ?

(b) Qual è la probabilità che esca un 2 od un cuori ?

$\boxed{4}$ Una moneta viene lanciata tre volte.

(a) Qual è la probabilità di ottenere tre volte "testa" ?

(b) Qual è la probabilità condizionata che venga "testa" in tutti e tre i lanci sapendo che esce "testa" in almeno un lancio ?

$\boxed{5}$ Si consideri una coppia con quattro figli. Qual è la probabilità condizionata che tutti i figli abbiano lo stesso sesso sapendo che almeno tre di loro hanno lo stesso sesso ?

$\boxed{6}$ Si considerino le seguenti variabili aleatorie:

X_1 : la variabile aleatoria "il numero di teste che si ottengono nel lancio di tre monete".

X_2 : la variabile aleatoria "il numero dei figli maschi in una coppia con quattro figli".

(a) Si descrivano le densità discrete $p_1(x)$ e $p_2(x)$ delle variabili aleatorie X_1 ed X_2 e le si rappresentino graficamente con diagrammi a barre.

(b) Si descrivano le funzioni di distribuzione $F_1(x)$ ed $F_2(x)$ delle variabili aleatorie X_1 ed X_2 e se ne disegnino i grafici.

ESERCIZI PER CASA 6

$\boxed{1}$ Si estrae una carta da un mazzo di 52 carte. Un giocatore vince 1000 euro se esce un cuori che non sia un asso, vince 2000 euro se esce un asso, perde 4000 euro se esce il re di picche, e non perde e non vince nulla altrimenti. Sia X la variabile aleatoria "il guadagno o la perdita del giocatore". Si calcoli il valore atteso $E[X]$ di X.

$\boxed{2}$ Calcolare il valore atteso $E[X]$, la varianza $Var(X)$ e la deviazione standard σ_X della variabile aleatoria

$X=$ punteggio ottenuto nel lancio di tre dadi.

$\boxed{3}$ Sia $Y = 2 \cdot X - 3$ dove X è la variabile aleatoria descritta nell'esercizio 2. Si calcolino il valore atteso $E[Y]$, la varianza $Var(Y)$ e la deviazione standard σ_Y della variabile aleatoria Y.

$\boxed{4}$ Si effettuano 10 lanci di un dado. Qual è la probabilità che il numero 6 esca non più di due volte ? (Sugg.: la variabile aleatoria " numero di uscite del numero 6 nel lancio di 10 dadi" è una variabile aleatoria binomiale di parametri (n, p), con $n = ...$ e $p = ...$)

$\boxed{5}$ Relativamente ad una particolare caratteristica genetica determinata da una coppia di geni, ereditati uno dal padre ed uno dalla madre, si classifichino gli individui in:

– puramente dominanti (in cui entrambi i della coppia sono dominanti)

– puramente recessivi (in cui entrambi i geni della coppia sono recessivi)

– ibridi (in cui la coppia è costituita da un gene dominante ed un gene recessivo).

Si considerino due genitori ibridi con 7 figli, supponendo che ciascuno dei loro figli abbia uguale probabilità di ricevere uno qualsiasi dei due geni da ciascuno dei genitori, ed indipendentemente dai fratelli.

(a) Qual è la probabilità che 4 figli siano puramente dominanti ?

(b) Qual è la probabilità che 4 figli siano ibridi ?

(c) Qual è la probabilità che 4 figli presentino la caratteristica data dal gene dominante ?

(d) Qual è la probabilità che almeno 4 figli presentino la caratteristica data dal gene dominante ?

$\boxed{6}$ Si calcolino i valori attesi $E[X_1]$, $E[X_2]$ e le varianze $Var(X_1)$, $Var(X_2)$ delle variabili aleatorie X_1 ed X_2 definite nell'esercizio 6 degli "Esercizi per casa 5".

ESERCIZI PER CASA 7

$\boxed{1}$ In un negozietto vengono venduti in media $0,2$ pacchi di crocchette per gatti al giorno. Qual è la probabilità che in un dato giorno vengano venduti esattamente 3 pacchi ? (Sugg.: si usi la distribuzione di Poisson)

$\boxed{2}$ Un libro di 700 pagine contiene 35 errori di stampa. Qual è la probabilità di trovare almeno 2 errori in una pagina scelta a caso ? (Sugg.: si usi la distribuzione di Poisson)

$\boxed{3}$ Si risolvano le seguenti disequazioni esponenziali:

(a): $1000^x \geq 100$ (b): $\left(\frac{1}{8}\right)^x > \frac{1}{4}$

(c): $\left(\frac{1}{9}\right)^x < \frac{1}{27}$ (d): $\left(\frac{1}{1000}\right)^x \leq \frac{1}{10}$

$\boxed{4}$ Si dica quale delle seguenti affermazioni è vera:

(a): $e^{\ln(x+1)} = x+1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ (b): $e^{\ln(x+1)} = x+1 \quad \forall x > -1$

(c): $e^{\ln(x+1)-\ln x} = x \quad \forall x \in \mathbb{R}$ (d): $e^{\ln(x+1)-\ln x} = x \quad \forall x > 0$

(e): $e^{\ln(x+1)-\ln x} = \frac{x+1}{x} \quad \forall x \in \mathbb{R}$ (f): $e^{\ln(x+1)-\ln x} = \frac{x+1}{x} \quad \forall x > 0$

(g): $e^{\ln(x+1)-\ln x} = e^{\ln\left(\frac{x+1}{x}\right)} \quad \forall x > 0$ (h): $\ln(e^x \cdot e^{x+1}) = 2x+1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

(i): $\ln(e^x \cdot e^{x+1}) = x(x+1) \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$\boxed{5}$ Si indichi con Log il logaritmo in base 10. Si dica quale delle seguenti affermazioni è vera:

(a): $\mathrm{Log}(10^{x^2}) = 2{\cdot}\mathrm{Log}(10^x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$ (b): $\mathrm{Log}(10^{x^2}) = x{\cdot}\mathrm{Log}(10^x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$

(c): $\mathrm{Log}(10^{x^2}) = x^2 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ (d): $\mathrm{Log}\left(\frac{10^x}{10^{x-1}}\right) = \frac{x}{x-1} \quad \forall x \neq 1$

(e): $\mathrm{Log}\left(\frac{10^x}{10^{x-1}}\right) = 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$\boxed{6}$ Si calcoli:

(a): $\log_2(16)$ (b): $\log_{\frac{1}{8}}(2)$

(c): $\log_{\frac{1}{2}}(\sqrt[12]{4})$ (d): $\log_{\frac{1}{3}}\left(\sqrt[5]{\frac{1}{9}}\right)$

$\boxed{7}$ Si calcoli:

$$\mathrm{Log}(\sqrt[5]{100} \cdot \sqrt{10}), \qquad \mathrm{Log}\left(\frac{\sqrt[3]{10}}{\sqrt[4]{1000}}\right), \qquad \mathrm{Log}\left(\frac{\sqrt[7]{100} \cdot \sqrt[3]{10}}{\sqrt[21]{10^7 \cdot 10^3}}\right), \qquad \frac{\mathrm{Log}(\sqrt[7]{100} \cdot \sqrt[3]{10})}{\mathrm{Log}(\sqrt[21]{10^7 \cdot 10^3})}.$$

$\boxed{8}$ Si risolvano le seguenti disequazioni logaritmiche:

(a): $\log_8(x) \geq \frac{1}{4}$ (b): $\log_8(x) < \frac{1}{4}$

(c): $\log_{\frac{1}{9}}(x) > 2$ (d): $\log_{\frac{1}{9}}(x) \leq 2$

ESERCIZI PER CASA 8

$\boxed{1}$ Si determini la misura in radianti degli angoli che, espressi in gradi, valgono 18^0 e 99^0 rispettivamente.

$\boxed{2}$ Si determini la misura in gradi degli angoli che, espressi in radianti, valgono $\frac{5}{6}\pi$ ed $\frac{11}{12}\pi$ rispettivamente.

$\boxed{3}$ Si calcolino:

$$\sin\left(\frac{5}{3}\pi\right), \qquad \cos\left(\frac{5}{3}\pi\right), \qquad \tan\left(\frac{5}{3}\pi\right), \qquad \sin\left(\frac{7}{6}\pi\right), \qquad \cos\left(\frac{7}{6}\pi\right), \qquad \tan\left(\frac{7}{6}\pi\right).$$

$\boxed{4}$ Si consideri il triangolo rettangolo ABC in cui l'ipotenusa AC ha lunghezza uguale a 6 cm e l'angolo $C\widehat{A}B$ è uguale a $\frac{1}{6}\pi$. Si calcolino le lunghezze dei cateti AB e CB.

$\boxed{5}$ Si trovi il dominio delle seguenti funzioni:

$$f_1(x) = \frac{\sqrt{x^2-9}}{\ln(x-2)}$$

$$f_2(x) = \frac{\ln\left(x^2\right)}{x-1}$$

$$f_3(x) = \frac{\sqrt{\pi x - 2x^2}}{\sin x}$$

$$f_4(x) = \frac{\sin x}{e^x - 1}$$

ESERCIZI PER CASA 9

$\boxed{1}$ Si calcolino i seguenti limiti:

(a) $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{\log_{\frac{1}{10}}(x)}\right)$

(b) $\lim_{x\to0^+}\left(\frac{1}{\log_{\frac{1}{10}}(x)}\right)$

(c) $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{\ln(x)}\right)$

(d) $\lim_{x\to0^+}\left(\frac{1}{\ln(x)}\right)$

(e) $\lim_{x\to-\infty} e^{-x+1}$

(f) $\lim_{x\to+\infty} e^{-x+1}$

(g) $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{e^{-x+1}}\right)$

(h) $\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{e^{-x+1}}\right)$

(i) $\lim_{x\to-1} e^{x^2-1}$

(l) $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x-2x^2}{3x^2-2x}\right)$

(m) $\lim_{x\to0}\left(\frac{x-2x^2}{3x^2-2x}\right)$

(n) $\lim_{x\to-\infty} \left(\frac{2x-3x^2}{x^3+x^2} \right)$

(o) $\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{2x^5-x}{3x^3-x^4} \right)$

(p) $\lim_{x\to 0} \left(\frac{2x^5-x}{3x^3-x^4} \right)$

$\boxed{2}$ Si calcolino le derivate delle seguenti funzioni:

(a) $f_1(x) = 7x^5 - 3x^2 + 2$

(b) $f_2(x) = e^x + \ln x + 7x^2 + \sin x$

(c) $f_3(x) = 7x^2 e^x$

(d) $f_4(x) = (\sin x)(7x^2 + e^x)$

(e) $f_5(x) = \frac{3x^2-5}{2x^3+3x}$

(f) $f_6(x) = \frac{\sin x}{3x^2}$

(g) $f_7(x) = 10^x$

(h) $f_8(x) = 2^x \cos x$

(i) $f_9(x) = e^{-\frac{2}{x}}$

ESERCIZI PER CASA 10

$\boxed{1}$ Si considerino le seguenti funzioni:

$$f_1(x) = \frac{x^2 - 4x + 3}{x}, \qquad f_2(x) = \frac{x^2 + x - 11}{x^2 - 16}, \qquad f_3(x) = x \cdot \ln(x).$$

Per ciascuna di esse

(a) si dica qual è il dominio;

(b) si dica in quali intervalli di $\mathbb{R}$ è crescente ed in quali intervalli di $\mathbb{R}$ è decrescente.

(c) si trovino gli eventuali punti di massimo e di minimo.

$\boxed{2}$ Siano

$$f_1(x) = \frac{x^2 - 4x + 3}{x}, \qquad f_2(x) = \frac{x^2 + x - 11}{x^2 - 16}, \qquad f_3(x) = x \cdot \ln(x).$$

le funzioni considerate nell'esercizio 1. Si trovino:

(a) l'equazione della retta tangente al grafico di $f_1(x)$ nel punto A di ascissa $x_A = 3$;

(b) l'equazione della retta tangente al grafico di $f_2(x)$ nel punto B di ascissa $x_B = 0$;

(c) l'equazione della retta tangente al grafico di $f_3(x)$ nel punto C di ascissa $x_C = e$;

$\boxed{3}$ Sia $f(x) = e^x(\sin x + 3)$.

Si scriva l'equazione della retta tangente al grafico di $f(x)$ nel punto di ascissa $x_0 = 0$.

$\boxed{4}$ Supponiamo che la probabilità che due gemelli siano omozigoti sia $0,35$ (per cui supponiamo anche che la probabilità che due gemelli siano eterozigoti sia $0,65$). Qual è la probabilità che dati due gemelli dello stesso sesso essi siano eterozigoti (sugg.: si usi il teorema di Bayes).