

G. Parmeggiani, 7/1/2020

Algebra Lineare, a.a. 2019/2020,

Scuola di Scienze - Corsi di laurea:

Statistica per l'economia e l'impresa
Statistica per le tecnologie e le scienze

Studenti:

numero di MATRICOLA PARI

Esercizi per casa 12

1 Sia $\mathbf{A}(\alpha) = \begin{pmatrix} \frac{\alpha}{2} + 1 & \frac{\alpha}{2} & 0 \\ \frac{\alpha}{2} & \frac{\alpha}{2} + 1 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}$, dove $\alpha \in \mathbb{C}$.

(a) Per quali $\alpha \in \mathbb{C}$ si ha che 3 è un autovalore di $\mathbf{A}(\alpha)$?

(b) Per quali $\alpha \in \mathbb{C}$ la matrice $\mathbf{A}(\alpha)$ ha due autovalori uguali ? In questi casi dire se $\mathbf{A}(\alpha)$ è o non è diagonalizzabile.

2 Si dica se le matrici considerate negli esercizi 3 e 4 degli "Esercizi 11" sono diagonalizzabili oppure no.

3 Sia $\mathbf{A}(\alpha)$ la matrice considerata nell'esercizio 6 degli "Esercizi 11". Per quegli $\alpha \in \mathbb{C}$ per cui $\mathbf{A}(\alpha)$ è diagonalizzabile, si trovi una diagonalizzazione di $\mathbf{A}(\alpha)$.

4 Sia $\mathbf{A}(\alpha) = \begin{pmatrix} 2 & i \\ i & \alpha \end{pmatrix}$, dove $\alpha \in \mathbb{C}$.

(a) Per quali $\alpha \in \mathbb{C}$ si ha che $\mathbf{A}(\alpha)$ è unitariamente diagonalizzabile ?

(b) Per quali $\alpha \in \mathbb{C}$ si ha che $\mathbf{A}(\alpha)$ è diagonalizzabile ?

(c) Sia $\mathbf{A} = \mathbf{A}(2)$ la matrice che si ottiene ponendo $\alpha = 2$. Si trovi una diagonalizzazione unitaria $\mathbf{A} = \mathbf{U}\mathbf{D}\mathbf{U}^H$ per \mathbf{A} .

(d) Sia $\mathbf{A} = \mathbf{A}(2)$ la matrice che si ottiene ponendo $\alpha = 2$. Si scriva \mathbf{A} nella forma $\mathbf{A} = \lambda_1\mathbf{P}_1 + \lambda_2\mathbf{P}_2$, con λ_1 e λ_2 autovalori di \mathbf{A} , e \mathbf{P}_1 e \mathbf{P}_2 matrici di proiezione su $E_{\mathbf{A}}(\lambda_1)$ ed $E_{\mathbf{A}}(\lambda_2)$ rispettivamente.

(e) Sia $\mathbf{A} = \mathbf{A}(2)$ la matrice che si ottiene ponendo $\alpha = 2$. Posto $z_1 = (2+i)^{300}$ e $z_2 = (2-i)^{300}$, si scriva \mathbf{A}^{300} in funzione di z_1 e z_2 .

5 Sia $\mathbf{A}(\alpha) = \begin{pmatrix} -2 & 2i & 0 \\ 2i & 2+\alpha & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}$, dove $\alpha \in \mathbb{R}$.

- (a) Per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ si ha che di $\mathbf{A}(\alpha)$ è unitariamente diagonalizzabile ?
- (b) Per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ si ha che di $\mathbf{A}(\alpha)$ è diagonalizzabile ?
- (c) Sia $\mathbf{A} = \mathbf{A}(-4)$ la matrice che si ottiene ponendo $\alpha = -4$. Si trovi una diagonalizzazione unitaria $\mathbf{A} = \mathbf{U}\mathbf{D}\mathbf{U}^H$ per \mathbf{A} .
- (d) Sia $\mathbf{A} = \mathbf{A}(-4)$ la matrice che si ottiene ponendo $\alpha = 2$. Si scriva \mathbf{A} nella forma $\mathbf{A} = \lambda_1\mathbf{P}_1 + \lambda_2\mathbf{P}_2 + \lambda_3\mathbf{P}_3$, con $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ autovalori di \mathbf{A} , e $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \mathbf{P}_3$ matrici di proiezione su $E_{\mathbf{A}}(\lambda_1), E_{\mathbf{A}}(\lambda_2), E_{\mathbf{A}}(\lambda_3)$ rispettivamente.

6 Sia $\mathbf{A}(\alpha) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -3i \\ 0 & -3 & 0 \\ -3i\alpha & 0 & 0 \end{pmatrix}$, dove α è un numero reale non positivo.

- (a) Per quali α numeri reali non positivi si ha che di $\mathbf{A}(\alpha)$ è unitariamente diagonalizzabile ?
- (b) Per quali α numeri reali non positivi si ha che di $\mathbf{A}(\alpha)$ è diagonalizzabile ?
- (c) Sia $\mathbf{A} = \mathbf{A}(-1)$ la matrice che si ottiene ponendo $\alpha = -1$. Si trovi una diagonalizzazione unitaria $\mathbf{A} = \mathbf{U}\mathbf{D}\mathbf{U}^H$ per \mathbf{A} .

7 Siano

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & i & -2 & 9i \\ i & -1 & -2i & 0 \\ -1 & -i & 2 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Si trovino le soluzioni ai minimi quadrati del sistema $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$.
(Si noti che \mathbf{A} è la matrice considerata nell'esercizio 7 degli "Esercizi 10".)