G. Parmeggiani, 25/11/2019 **Algebra Lineare, a.a. 2019/2020,**

Scuola di Scienze - Corsi di laurea: **Statistica per l'economia e l'impresa**
Statistica per le tecnologie e le scienze

Studenti: **numero di MATRICOLA PARI**

Esercizi per casa 8

$\boxed{\mathbf{1}}$ Siano

$$\mathbf{v_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{v_2} = \begin{pmatrix} i \\ -1 \\ 2i \\ 0 \\ i \end{pmatrix}, \mathbf{v_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{v_4} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2i \\ 2 \\ -i \\ 1 \end{pmatrix}$$

ed

$$\boldsymbol{\mathcal{S}} = \{\mathbf{v_1}; \mathbf{v_2}; \mathbf{v_3}; \mathbf{v_4}\}.$$

Sia W il sottospazio di $\mathbb{C}^5$ generato da $\boldsymbol{\mathcal{S}}$. Si trovi una base $\boldsymbol{\mathcal{B}}$ di W contenuta in $\boldsymbol{\mathcal{S}}$ (si usi la Nota 2).

$\boxed{\mathbf{2}}$ Si dica per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ l'insieme $\boldsymbol{\mathcal{B}}_\alpha = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \\ 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha+1 \\ \alpha+1 \end{pmatrix} \right\}$ è una base di $\mathbb{R}^3$ (si usi la Nota 2).

$\boxed{\mathbf{3}}$ Si dica quale delle due seguenti posizioni definisce un'applicazione lineare:

(a) $f_1 : M_n(\mathbb{C}) \to M_n(\mathbb{C})$ definita da $f_1(\mathbf{A}) = \mathbf{A}^T$ per ogni $\mathbf{A} \in M_n(\mathbb{C})$;

(b) $f_2 : M_n(\mathbb{C}) \to M_n(\mathbb{C})$ definita da $f_2(\mathbf{A}) = \mathbf{A}^2$ per ogni $\mathbf{A} \in M_n(\mathbb{C})$.

$\boxed{\mathbf{4}}$ Sia $g : M_2(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}^2$ definita da $g(\mathbf{A}) = \mathbf{A}\mathbf{e_1}$ per ogni $\mathbf{A} \in M_2(\mathbb{C})$.

(a) Si provi che g è un'applicazione lineare.

(b) Si trovino lo spazio nullo $N(g)$ e lo spazio immagine $Im(g)$ di g.

$\boxed{\mathbf{5}}$ Sia $f : \mathbb{R}^2 \to M_2(\mathbb{R})$ definita da:

$$f\left(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} a & a+b \\ a-b & b \end{pmatrix} \quad \forall \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

(a) Si provi che f è un'applicazione lineare.
(b) Si determini la matrice $\mathbf{A}$ associata ad f rispetto alle basi ordinate

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\} \quad \text{e} \quad \mathcal{D} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

su dominio e codominio rispettivamente.

$\boxed{\mathbf{6}}$ Siano

$$\mathcal{B} = \left\{ \mathbf{v_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} ; \mathbf{v_2} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} ; \mathbf{v_3} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \quad \text{e}$$

$$\mathcal{B}' = \left\{ \mathbf{v_1}' = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} ; \mathbf{v_2}' = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} ; \mathbf{v_3}' = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Dopo aver provato che $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$ sono due basi ordinate di $\mathbb{R}^3$, si calcolino le matrici di passaggio

$$\mathbf{M}_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{B}'} \text{ (da } \mathcal{B}' \text{ a } \mathcal{B} \text{) e } \mathbf{M}_{\mathcal{B}' \leftarrow \mathcal{B}} \text{ (da } \mathcal{B} \text{ a } \mathcal{B}'\text{)}.$$