G. Parmeggiani, 3/12/2019 **Algebra Lineare, a.a. 2019/2020,**

Scuola di Scienze - Corsi di laurea: **Statistica per l'economia e l'impresa**
Statistica per le tecnologie e le scienze

Studenti: **numero di MATRICOLA PARI**

Esercizi per casa 9

$\boxed{\mathbf{1}}$ Sia $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$. Si provi che $\|\mathbf{v}\|_\infty = \|\mathbf{v}\|_1$ se e solo se $\mathbf{v}$ è un multiplo di una colonna di $\mathbf{I_n}$.

$\boxed{\mathbf{2}}$ Sia $\mathbf{A} = (a_{ij})$ una matrice complessa quadrata di ordine n tale che $\mathbf{A} = \mathbf{A}^H = \mathbf{A}^2$ e siano $\mathbf{b_1}, \mathbf{b_2}, \dots \dots, \mathbf{b_n} \in \mathbb{C}^n$ le colonne di $\mathbf{A}$. Si provi che $\|\mathbf{b_i}\|_2^2 = a_{ii}$ per ogni $i = 1, \dots, n$.

$\boxed{\mathbf{3}}$ Sapendo che la posizione $(\cdot|\cdot) : M_2(\mathbb{C}) \times M_2(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$

$$\left(\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{pmatrix}\right) = \sum_{i=1}^{4} \overline{a_i} b_i.$$

definisce un prodotto interno, si consideri la norma $\|\cdot\| : M_2(\mathbb{C}) \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ da esso indotta. Si trovino tutte le matrici complesse scalari $\mathbf{A}$ di ordine 2 tali che $\|\mathbf{A}\| = 2\sqrt{2}$.

$\boxed{\mathbf{4}}$ Sapendo che la posizione $(\cdot|\cdot) : \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$ definita da

$$\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \Big| \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) = \overline{x}_1 y_1 + 2\overline{x}_2 y_2$$

definisce un prodotto interno, siano $\|\cdot\| : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ la norma da esso indotta ed $\mathbf{u} = \mathbf{e_1} + \mathbf{e_2}$.

(a) Si trovino tutti i vettori $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ tali che $\|\mathbf{x}\| = \|\mathbf{x}\|_2$.

(b) Si calcolino $\cos(\widehat{\mathbf{e_1 u}})$ e $\cos(\widehat{\mathbf{e_2 u}})$.