G. Parmeggiani, 2/12/2019 **Algebra Lineare, a.a. 2019/2020,**

Scuola di Scienze - Corsi di laurea: **Statistica per l'economia e l'impresa**
Statistica per le tecnologie e le scienze

Studenti: **numero di MATRICOLA PARI**

ESERCIZIO TIPO 12

Sia V lo spazio vettoriale delle matrici complesse 2×2 diagonali. Si consideri l'applicazione lineare $f : V \to \mathbb{C}^2$ definita da

$$f(\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} a-b \\ 2b \end{pmatrix}.$$

Si determini la matrice $\mathbf{A}$ associata ad f rispetto alle basi ordinate

$$\boldsymbol{\mathcal{B}} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \right\} \quad \text{e} \quad \boldsymbol{\mathcal{D}} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

su dominio e codominio rispettivamente.

La matrice che cerchiamo è $\mathbf{A} = \left(C_{\boldsymbol{\mathcal{D}}}(f(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix})) \quad C_{\boldsymbol{\mathcal{D}}}(f(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix})) \right)$.

Poichè $f(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \end{pmatrix}$ e $f(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}$, allora

$$\mathbf{A} = \left(C_{\boldsymbol{\mathcal{D}}}(\begin{pmatrix} -2 \\ 6 \end{pmatrix}) \qquad C_{\boldsymbol{\mathcal{D}}}(\begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}) \right).$$

Piuttosto che calcolare separatamente $C_{\boldsymbol{\mathcal{D}}}(\begin{pmatrix} -2 \\ 6 \end{pmatrix})$ e $C_{\boldsymbol{\mathcal{D}}}(\begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix})$, calcoliamo $C_{\boldsymbol{\mathcal{D}}}(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix})$ per un generico vettore $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2$, e specializziamo la formula ottenuta ai due diversi vettori $\begin{pmatrix} -2 \\ 6 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}$. Poichè

$$C_{\boldsymbol{\mathcal{D}}}(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \Big| \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha+\beta \\ \alpha-\beta \end{pmatrix}$$

allora

$$\begin{cases} \alpha+\beta = a \\ \alpha-\beta = b \end{cases} \implies \begin{cases} \alpha = (a+b)/2 \\ \beta = (a-b)/2 \end{cases} \implies C_{\boldsymbol{\mathcal{D}}}(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} (a+b)/2 \\ (a-b)/2 \end{pmatrix}.$$

Ponendo $a = -2$ e $b = 6$ otteniamo $C_{\boldsymbol{\mathcal{D}}}\left(\begin{pmatrix} -2 \\ 6 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}$; ponendo $a = -6$ e $b = 0$ otteniamo $C_{\boldsymbol{\mathcal{D}}}\left(\begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$. Quindi

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -4 & -3 \end{pmatrix}.$$