G. Parmeggiani, 10/12/2019 **Algebra Lineare, a.a. 2019/2020,**

Scuola di Scienze - Corsi di laurea: **Statistica per l'economia e l'impresa**
Statistica per le tecnologie e le scienze

Studenti: **numero di MATRICOLA PARI**

ESERCIZIO TIPO 15

Sia V il sottospazio di $\mathbb{C}^4$ considerato nell'ESERCIZIO TIPO 14:

$$V = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ i \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 2i \\ 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} -6 \\ 6i \\ 0 \\ -6i \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Si calcoli la proiezione ortogonale $P_V(\mathbf{v})$ del vettore $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ su V.

Nell'ESERCIZIO TIPO 14 abbiamo trovato una base **ortonormale** di V:

$$\boldsymbol{\mathcal{B}} = \left\{ \mathbf{u_1}^* = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ i \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{u_2}^* = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} i \\ 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{u_3}^* = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} i \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

La proiezione ortogonale $P_V(\mathbf{v})$ di $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ su V è

$$P_V(\mathbf{v}) = (\mathbf{u_1}^*|\mathbf{v})\mathbf{u_1}^* + (\mathbf{u_2}^*|\mathbf{v})\mathbf{u_2}^* + (\mathbf{u_3}^*|\mathbf{v})\mathbf{u_3}^*.$$

Essendo

$$(\mathbf{u_1}^*|\mathbf{v}) = (\mathbf{u_1}^*)^H\mathbf{v} = \tfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & 0 & -i & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\5\\2\\1\end{pmatrix} = \tfrac{1}{\sqrt{2}}\cdot(-2i),$$

$$(\mathbf{u_2}^*|\mathbf{v}) = (\mathbf{u_2}^*)^H\mathbf{v} = \tfrac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix}-i & 2 & 1 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\5\\2\\1\end{pmatrix} = \tfrac{1}{\sqrt{10}}\cdot(10+2-2) = \tfrac{1}{\sqrt{10}}\cdot 10,$$

$$(\mathbf{u_3}^*|\mathbf{v}) = (\mathbf{u_3}^*)^H\mathbf{v} = \tfrac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}-i & 0 & 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\5\\2\\1\end{pmatrix} = \tfrac{1}{\sqrt{3}}\cdot(2+1) = \tfrac{1}{\sqrt{3}}\cdot 3,$$

si ha:

$$\begin{aligned} P_V(\mathbf{v}) \quad &= -\tfrac{1}{\sqrt{2}}\cdot\tfrac{2i}{\sqrt{2}}\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\i\\0\end{pmatrix} + \tfrac{1}{\sqrt{10}}\cdot\tfrac{10}{\sqrt{10}}\cdot\begin{pmatrix}i\\2\\1\\-2\end{pmatrix} + \tfrac{1}{\sqrt{3}}\cdot\tfrac{3}{\sqrt{3}}\cdot\begin{pmatrix}i\\0\\1\\1\end{pmatrix} = \\ &= -i\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\i\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}i\\2\\1\\-2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}i\\0\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}i\\2\\3\\-1\end{pmatrix}. \end{aligned}$$