G. Parmeggiani, 12/12/2019 **Algebra Lineare, a.a. 2019/2020,**

Scuola di Scienze - Corsi di laurea: **Statistica per l'economia e l'impresa**
Statistica per le tecnologie e le scienze

Studenti: **numero di MATRICOLA PARI**

ESERCIZIO TIPO 16

Sia $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -5 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 5 & -1 & -2 \end{pmatrix}$.

(a) Si trovi una decomposizione $\mathbf{Q_0R_0}$-non-normalizzata per $\mathbf{A}$.
(b) Si trovi una decomposizione $\mathbf{QR}$-normalizzata per $\mathbf{A}$.

(a) $\boxed{I}$ Poniamo

$$\mathbf{v_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v_2} = \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v_3} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v_4} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

e applichiamo l'algoritmo di Gram-Schimdt a $\{\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \mathbf{v_3}, \mathbf{v_4}\}$.

Otterremo 4 vettori, $\mathbf{u_1}, \mathbf{u_2}, \mathbf{u_3}, \mathbf{u_4}$. Per sapere se alcuni degli $\mathbf{u_i}$ saranno nulli, e in tal caso quali, troviamo innanzitutto una forma ridotta di Gauss $\mathbf{U}$ di $\mathbf{A}$: le eventuali colonne libere di $\mathbf{U}$ corrisponderanno agli $\mathbf{u_i}$ nulli.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -5 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 5 & -1 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{31}(1)} \begin{pmatrix} 1 & -5 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{32}(-2)}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & -5 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{U}$$

Poichè $\mathbf{U}$ ha come colonne libere la 2^a e la 4^a, applicando l'algoritmo di Gram-Schimdt a $\{\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \mathbf{v_3}, \mathbf{v_4}\}$ otterremo $\mathbf{u_2} = \mathbf{0} = \mathbf{u_4}$.

$$\boxed{\mathbf{u_1} = \mathbf{v_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}}$$

$$\mathbf{u_2} = \mathbf{v_2} - \alpha_{12}\mathbf{u_1},$$

$$\mathbf{u_1} \neq \mathbf{0} \quad \Longrightarrow \quad \alpha_{12} = \frac{(\mathbf{u_1}|\mathbf{v_2})}{(\mathbf{u_1}|\mathbf{u_1})}$$

$$(\mathbf{u_1}|\mathbf{v_2}) = \mathbf{u_1}^H\mathbf{v_2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} = -10$$

$$(\mathbf{u_1}|\mathbf{u_1}) = \mathbf{u_1}^H\mathbf{u_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = 2$$

$$\Longrightarrow \quad \boxed{\alpha_{12} = -10/2 = -5}$$

$$\mathbf{u_2} = \mathbf{v_2} - \alpha_{12}\mathbf{u_1} =$$
$$= \mathbf{v_2} + 5\mathbf{u_1} =$$

$$= \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} + 5 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \boxed{\mathbf{0} = \mathbf{u_2}}$$

$$\mathbf{u_3} = \mathbf{v_3} - \alpha_{13}\mathbf{u_1} - \alpha_{23}\mathbf{u_2},$$

$$\mathbf{u_1} \neq \mathbf{0} \quad \Longrightarrow \quad \alpha_{13} = \frac{(\mathbf{u_1}|\mathbf{v_3})}{(\mathbf{u_1}|\mathbf{u_1})}$$

$$(\mathbf{u_1}|\mathbf{v_3}) = \mathbf{u_1}^H\mathbf{v_3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 4$$

$$\Longrightarrow \quad \boxed{\alpha_{13} = 4/2 = 2}$$

$$\mathbf{u_2} = \mathbf{0} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{\alpha_{23} = 0}$$

$$\mathbf{u_3} = \mathbf{v_3} - \alpha_{13}\mathbf{u_1} - \alpha_{23}\mathbf{u_2} =$$
$$= \mathbf{v_3} - 2\mathbf{u_1} =$$

$$= \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \mathbf{u_3}}$$

$$\mathbf{u_4} = \mathbf{v_4} - \alpha_{14}\mathbf{u_1} - \alpha_{24}\mathbf{u_2} - \alpha_{34}\mathbf{u_3},$$

$$\mathbf{u_1} \neq \mathbf{0} \quad \Longrightarrow \quad \alpha_{14} = \frac{(\mathbf{u_1}|\mathbf{v_4})}{(\mathbf{u_1}|\mathbf{u_1})}$$

$$(\mathbf{u_1}|\mathbf{v_4}) = \mathbf{u_1}^H\mathbf{v_4} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = 6$$

$$\Longrightarrow \quad \boxed{\alpha_{14} = 6/2 = 3}$$

$$\mathbf{u_2} = \mathbf{0} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{\alpha_{24} = 0}$$

$$\mathbf{u_3} \neq \mathbf{0} \quad \Longrightarrow \quad \alpha_{34} = \frac{(\mathbf{u_3}|\mathbf{v_4})}{(\mathbf{u_3}|\mathbf{u_3})}$$

$$(\mathbf{u_3}|\mathbf{v_4}) = \mathbf{u_3}^H \mathbf{v_4} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = 3$$

$$(\mathbf{u_3}|\mathbf{u_3}) = \mathbf{u_3}^H \mathbf{u_3} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 3$$

$$\Longrightarrow \quad \boxed{\alpha_{34} = 3/3 = 1}$$

$$\mathbf{u_4} = \mathbf{v_4} - \alpha_{14}\mathbf{u_1} - \alpha_{24}\mathbf{u_2} - \alpha_{34}\mathbf{u_3} = \\ = \mathbf{v_4} - 3\mathbf{u_1} - \mathbf{u_3} =$$

$$= \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \boxed{\mathbf{0} = \mathbf{u_4}}$$

$\boxed{II}$ Poniamo

$$\mathbf{Q_0} = \begin{pmatrix} \mathbf{u_1} & \mathbf{u_2} & \mathbf{u_3} & \mathbf{u_4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{R_0} = \begin{pmatrix} 1 & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \alpha_{14} \\ 0 & 1 & \alpha_{23} & \alpha_{24} \\ 0 & 0 & 1 & \alpha_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -5 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$\mathbf{A} = \mathbf{Q_0}\mathbf{R_0}$ è una decomposizione $\mathbf{Q_0}\mathbf{R_0}$-non-normalizzata per $\mathbf{A}$.

(b) $\boxed{III}$ Sia $\mathbf{Q_1}$ la matrice che si ottiene dalla matrice $\mathbf{Q_0}$, ottenuta al punto $\boxed{II}$, togliendo tutte le (eventuali) colonne nulle di $\mathbf{Q_0}$. In questo caso $\mathbf{Q_0}$ ha due colonne nulle, la 2^a e la 4^a, quindi

$$\mathbf{Q_1} = \begin{pmatrix} \mathbf{u_1} & \mathbf{u_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Sia $\mathbf{R_1}$ la matrice che si ottiene dalla matrice $\mathbf{R_0}$, ottenuta al punto $\boxed{II}$, togliendo le righe di $\mathbf{R_0}$ che corrispondono alle colonne che sono state tolte da $\mathbf{Q_0}$ per ottenere $\mathbf{Q_1}$. In questo caso, poichè per ottenere $\mathbf{Q_1}$ sono state tolte da $\mathbf{Q_0}$ la 2^a e la 4^a colonna, allora per ottenere $\mathbf{R_1}$ si toglie da $\mathbf{R_0}$ la 2^a riga e la 4^a riga. Dunque

$$\mathbf{R_1} = \begin{pmatrix} 1 & -5 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$\boxed{IV}$ Costruiamo la matrice diagonale $\mathbf{D}$ che ha sulla diagonale la norma euclidea delle colonne di $\mathbf{Q_1}$ (ossia delle colonne non nulle di $\mathbf{Q_0}$), e calcoliamo $\mathbf{D}^{-1}$.

Poichè

$$||\mathbf{u_1}||_2 = \sqrt{(\mathbf{u_1}|\mathbf{u_1})} = \sqrt{2} \quad \text{e} \quad ||\mathbf{u_3}||_2 = \sqrt{(\mathbf{u_3}|\mathbf{u_3})} = \sqrt{3},$$

allora

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} ||\mathbf{u_1}||_2 & 0 \\ 0 & ||\mathbf{u_3}||_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & \sqrt{3} \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{D}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}.$$

$\boxed{V}$ Poniamo

$$\mathbf{Q} = \mathbf{Q_1}\mathbf{D}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{R} = \mathbf{D}\mathbf{R_1} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & \sqrt{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -5 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & -5\sqrt{2} & 2\sqrt{2} & 3\sqrt{2} \\ 0 & 0 & \sqrt{3} & \sqrt{3} \end{pmatrix}.$$

Allora $\mathbf{A} = \mathbf{QR}$ è una decomposizione $\mathbf{QR}$-normalizzata di $\mathbf{A}$.