

G. Parmeggiani, 17/12/2019

Algebra Lineare, a.a. 2019/2020,

Scuola di Scienze - Corsi di laurea:

Statistica per l'economia e l'impresa  
Statistica per le tecnologie e le scienze

Studenti:

numero di MATRICOLA PARI

### ESERCIZIO TIPO 18

$$\text{Siano } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -3i \\ 0 & 3 & 0 \\ 3i & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ e } \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -3i \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Si trovino:

- i loro autovalori,
- le loro molteplicità algebriche,
- le loro molteplicità geometriche,
- basi dei loro autospazi.

Il polinomio caratteristico di  $\mathbf{A}$  è:

$$\begin{aligned} p_{\mathbf{A}}(x) &= \text{Det}(\mathbf{A} - x\mathbf{I}_3) = \text{Det} \begin{pmatrix} -x & 0 & -3i \\ 0 & 3-x & 0 \\ 3i & 0 & -x \end{pmatrix} = \\ &= (-1)^{2+2}(3-x)\text{Det} \begin{pmatrix} -x & -3i \\ 3i & -x \end{pmatrix} = \\ &= (3-x)[(-x)^2 - (-3i) \cdot 3i] = (3-x)(x^2 + 9i^2) = (3-x)(x^2 - 9) = \\ &= (3-x)(x-3)(x+3) = -(x-3)^2(x+3). \end{aligned}$$

Gli autovalori di  $\mathbf{A}$  sono gli zeri del polinomio caratteristico  $p_{\mathbf{A}}(x)$  di  $\mathbf{A}$ , ossia le soluzioni dell'equazione  $p_{\mathbf{A}}(x) = 0$ . Dal momento che le soluzioni dell'equazione

$$-(x+3)(x-3)^2 = 0$$

sono  $-3$  e  $3$ , gli autovalori di  $\mathbf{A}$  sono:

$$\lambda_1 = -3 \quad \text{e} \quad \lambda_2 = 3.$$

Siano  $m_1$  ed  $m_2$  le molteplicità algebriche e  $d_1$  e  $d_2$  le molteplicità geometriche di  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  rispettivamente. Da

$$p_{\mathbf{A}}(x) = -(x+3)(x-3)^2 = -(x-\lambda_1)^{m_1}(x-\lambda_2)^{m_2}$$

otteniamo:

$$m_1 = 1 \quad \text{e} \quad m_2 = 2.$$

Infine, da  $1 \leq d_i \leq m_i = 1$  per  $i = 1, 2$ , otteniamo:

$$d_1 = 1 \quad \text{e} \quad 1 \leq d_2 \leq 2.$$

$$E_{\mathbf{A}}(\lambda_1) = E_{\mathbf{A}}(-3) = N(\mathbf{A} - (-3)\mathbf{I}_3) = N(\mathbf{A} + 3\mathbf{I}_3) = N\left(\begin{pmatrix} 3 & 0 & -3i \\ 0 & 6 & 0 \\ 3i & 0 & 3 \end{pmatrix}\right)$$

Da una E.G. su  $\mathbf{A} + 3\mathbf{I}_3$  :

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & -3i \\ 0 & 6 & 0 \\ 3i & 0 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{31}(-3i)E_1(\frac{1}{3})} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -i \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_2(\frac{1}{6})} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -i \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

segue che

$$E_{\mathbf{A}}(-3) = N\left(\begin{pmatrix} 3 & 0 & -3i \\ 0 & 6 & 0 \\ 3i & 0 & 3 \end{pmatrix}\right) = N\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & -i \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = \left\{ \begin{pmatrix} ih \\ 0 \\ h \end{pmatrix} \mid h \in \mathbb{C} \right\},$$

e quindi  $\left\{ \begin{pmatrix} i \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$  è una base di  $E_{\mathbf{A}}(\lambda_1) = E_{\mathbf{A}}(-3)$ .

$$E_{\mathbf{A}}(\lambda_2) = E_{\mathbf{A}}(3) = N(\mathbf{A} - 3\mathbf{I}_3) = N\left(\begin{pmatrix} -3 & 0 & -3i \\ 0 & 0 & 0 \\ 3i & 0 & -3 \end{pmatrix}\right)$$

Da una E.G. su  $\mathbf{A} - 3\mathbf{I}_3$  :

$$\begin{pmatrix} -3 & 0 & -3i \\ 0 & 0 & 0 \\ 3i & 0 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{31}(-3i)E_1(-\frac{1}{3})} \begin{pmatrix} 1 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

segue che

$$E_{\mathbf{A}}(3) = N\left(\begin{pmatrix} -3 & 0 & -3i \\ 0 & 0 & 0 \\ 3i & 0 & -3 \end{pmatrix}\right) = N\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = \left\{ \begin{pmatrix} -ih \\ k \\ h \end{pmatrix} \mid h, k \in \mathbb{C} \right\},$$

e quindi

$$d_2 = \dim(E_{\mathbf{A}}(3)) = [\text{numero di colonne di } (\mathbf{A} - 3\mathbf{I}_3)] - \text{rk}(\mathbf{A} - 3\mathbf{I}_3) = 3 - 1 = 2$$

e  $\left\{ \begin{pmatrix} -i \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$  è una base di  $E_{\mathbf{A}}(\lambda_2) = E_{\mathbf{A}}(3)$ .

$\mathbf{B}$  è una matrice triangolare, per cui i suoi autovalori sono i suoi elementi diagonali:

$$\lambda_1 = 0 \text{ e } \lambda_2 = 3.$$

(Infatti, il polinomio caratteristico di  $\mathbf{B}$  è:

$$\begin{aligned} p_{\mathbf{B}}(x) &= \text{Det}(\mathbf{B} - x\mathbf{I}_3) = \text{Det} \begin{pmatrix} -x & 0 & -3i \\ 0 & 3-x & 0 \\ 0 & 0 & -x \end{pmatrix} = \\ &= (-1)^{3+3}(-x)\text{Det} \begin{pmatrix} -x & 0 \\ 0 & 3-x \end{pmatrix} = \\ &= (-x)(-x)(3-x) = -x^2(x-3), \end{aligned}$$

e gli autovalori di  $\mathbf{B}$  sono gli zeri del polinomio caratteristico  $p_{\mathbf{B}}(x)$  di  $\mathbf{B}$ , ossia le soluzioni dell'equazione  $-x^2(x-3) = 0$ .)

Siano  $m_1$  ed  $m_2$  le molteplicità algebriche e  $d_1$  e  $d_2$  le molteplicità geometriche di  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  rispettivamente. Da

$$p_{\mathbf{B}}(x) = -x^2(x-3) = -(x-\lambda_1)^{m_1}(x-\lambda_2)^{m_2}$$

otteniamo:

$$m_1 = 2 \quad \text{e} \quad m_2 = 1.$$

Infine, da  $1 \leq d_i \leq m_i = 1$  per  $i = 1, 2$ , otteniamo:

$$1 \leq d_1 \leq 2 \quad \text{e} \quad d_2 = 1.$$

$$E_{\mathbf{B}}(\lambda_1) = E_{\mathbf{B}}(0) = N(\mathbf{B} - 0\mathbf{I}_3) = N(\mathbf{B})$$

Da una E.G. su  $\mathbf{B}$  :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -3i \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_2(\frac{1}{3}i)E_1(\frac{1}{3})E_{12}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

segue che

$$E_{\mathbf{B}}(\lambda_1) = E_{\mathbf{B}}(0) = N(\mathbf{B}) = N\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = \left\{ \begin{pmatrix} h \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \mid h \in \mathbb{C} \right\},$$

e quindi

$$d_1 = \dim(E_{\mathbf{B}}(\lambda_1)) = (\text{numero di colonne di } \mathbf{B}) - \text{rk}(\mathbf{B}) = 3 - 2 = 1$$

e  $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$  è una base di  $E_{\mathbf{B}}(\lambda_1) = E_{\mathbf{B}}(0)$ .

$$E_{\mathbf{B}}(\lambda_2) = E_{\mathbf{B}}(3) = N(\mathbf{B} - 3\mathbf{I}_3) = N\left(\begin{pmatrix} -3 & 0 & -3i \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}\right)$$

Da una E.G. su  $\mathbf{B} - 3\mathbf{I}_3$  :

$$\begin{pmatrix} -3 & 0 & -3i \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_3(-\frac{1}{3})E_{23}E_1(-\frac{1}{3})} \begin{pmatrix} 1 & 0 & i \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

segue che

$$E_{\mathbf{B}}(3) = N\left(\begin{pmatrix} -3 & 0 & -3i \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}\right) = N\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & i \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ h \\ 0 \end{pmatrix} \mid h \in \mathbb{C} \right\},$$

e quindi  $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$  è una base di  $E_{\mathbf{B}}(\lambda_2) = E_{\mathbf{B}}(3)$ .