

G. Parmeggiani, 7/1/2020

Algebra Lineare, a.a. 2019/2020,

Scuola di Scienze - Corsi di laurea:

Statistica per l'economia e l'impresa  
Statistica per le tecnologie e le scienze

Studenti:

numero di MATRICOLA PARI

### ESERCIZIO TIPO 19

Sia

$$\mathbf{A}(\alpha) = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \alpha - 1 & 0 \\ \alpha & \alpha + 1 & \alpha - 1 \end{pmatrix}, \text{ dove } \alpha \in \mathbb{R},$$

- (a) Si dica per quale/quali  $\alpha \in \mathbb{R}$ , la matrice  $\mathbf{A}(\alpha)$  è diagonalizzabile.
- (b) Per quel/quegli  $\alpha \in \mathbb{R}$  per cui la matrice  $\mathbf{A}(\alpha)$  è diagonalizzabile, si trovi una diagonalizzazione di  $\mathbf{A}(\alpha)$ .
- (c) Per quel/quegli  $\alpha \in \mathbb{R}$  per cui la matrice  $\mathbf{A}(\alpha)$  è diagonalizzabile, si calcoli  $\mathbf{A}(\alpha)^{123}$ .
- (a) Per ogni  $\alpha \in \mathbb{R}$ , la matrice  $\mathbf{A}(\alpha)$  è una triangolare, per cui i suoi autovalori sono i suoi elementi diagonali

$$\lambda_1 = \alpha \quad \text{e} \quad \lambda_2 = \alpha - 1$$

con molteplicità algebriche

$$m_1 = 1 \quad \text{e} \quad m_2 = 2.$$

(Infatti, il polinomio caratteristico di  $\mathbf{A}(\alpha)$  è:  $p_{\mathbf{A}(\alpha)}(x) = (\alpha - x)(\alpha - 1 - x)^2$ .)

Siano  $d_1$  e  $d_2$  le molteplicità geometriche di  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$ . Da  $1 \leq d_i \leq m_i = 1$  per  $i = 1, 2$ , otteniamo:

$$d_1 = 1 \quad \text{e} \quad d_2 \leq 2.$$

$$E_{\mathbf{A}(\alpha)}(\lambda_2) = E_{\mathbf{A}(\alpha)}(\alpha - 1) = N(\mathbf{A}(\alpha) - (\alpha - 1)\mathbf{I}_3) = N\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \alpha & \alpha + 1 & 0 \end{pmatrix}\right)$$

Da una E.G. su  $\mathbf{A}(\alpha) - (\alpha - 1)\mathbf{I}_3$  :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \alpha & \alpha + 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{21} E_{31}(-\alpha)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha + 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\boxed{\text{caso } \alpha = -1 :} \quad E_{\mathbf{A}(\alpha)}(\lambda_2) = N\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right) \quad \text{e} \quad d_2 = 2$$

$$\boxed{\text{caso } \alpha \neq -1 :} \quad E_{\mathbf{A}(\alpha)}(\lambda_2) = N\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right) \quad \text{e} \quad d_2 = 1.$$

Riassumendo:

matrice	autovalori	molteplicità algebriche	molteplicità geometriche
$\mathbf{A}(\alpha)$ $\alpha \neq -1$	$\lambda_1 = \alpha$ $\lambda_2 = \alpha - 1$	$m_1 = 1$ $m_2 = 2$	$d_1 = 1$ $d_2 = 1$
$\mathbf{A}(-1)$	$\lambda_1 = \alpha = -1$ $\lambda_2 = \alpha - 1 = -2$	$m_1 = 1$ $m_2 = 2$	$d_1 = 1$ $d_2 = 2$

Dal momento che una matrice è diagonalizzabile se e solo se ciascun suo autovalore ha le due molteplicità, algebrica e geometrica, uguali tra loro, e

$$d_1 = 1 = m_1 \quad \forall \quad \alpha \in \mathbb{R},$$

$$m_2 = 2 \quad \forall \quad \alpha \in \mathbb{R},$$

allora:

$$\mathbf{A}(\alpha) \quad \text{è diagonalizzabile} \quad \iff \quad d_2 = \dim(E_{\mathbf{A}(\alpha)}(\lambda_2)) = 2$$

$$\iff \quad \alpha = -1.$$

(b) Posto  $\mathbf{A} = \mathbf{A}(-1)$ ,

$$\begin{aligned}
E_{\mathbf{A}}(\lambda_1) &= E_{\mathbf{A}}(-1) = N(\mathbf{A} - (-\mathbf{I}_3)) = N(\mathbf{A} + \mathbf{I}_3) = \\
&= N\left(\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = N\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}\right)
\end{aligned}$$

Da una E.G. su  $\mathbf{A} + \mathbf{I}_3$  :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_2(-1)E_1(-1)E_{13}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

per cui

$$E_{\mathbf{A}}(\lambda_1) = N\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = \left\{ \begin{pmatrix} -h \\ 0 \\ h \end{pmatrix} \mid h \in \mathbb{R} \right\} \text{ e}$$

$$\left\{ \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \text{ è una sua base.}$$

$$\begin{aligned}
E_{\mathbf{A}}(\lambda_2) &= E_{\mathbf{A}}(-2) = N(\mathbf{A} - (-2\mathbf{I}_3)) = N(\mathbf{A} + 2\mathbf{I}_3) = \\
&= N\left(\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\right) = N\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right)
\end{aligned}$$

Da una E.G. su  $\mathbf{A} + 2\mathbf{I}_3$  :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{31}(1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

per cui

$$E_{\mathbf{A}}(\lambda_2) = N\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ h \\ k \end{pmatrix} \mid h, k \in \mathbb{R} \right\} \text{ e}$$

$$\left\{ \mathbf{w}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{w}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \text{ è una sua base.}$$

Dunque una diagonalizzazione di  $\mathbf{A} = \mathbf{A}(-1)$  è:

$$\mathbf{A} = \mathbf{S}\mathbf{D}\mathbf{S}^{-1} \quad \text{con}$$

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{ed}$$

$$\mathbf{S} = (\mathbf{v}_1 \quad \mathbf{w}_1 \quad \mathbf{w}_2) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(c) Posto  $\mathbf{A} = \mathbf{A}(-1)$ , da (b) otteniamo che

$$\mathbf{A}^{123} = (\mathbf{S}\mathbf{D}\mathbf{S}^{-1})^{123} = \mathbf{S}\mathbf{D}^{123}\mathbf{S}^{-1} \quad \text{con}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{D}^{123} &= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}^{123} = \begin{pmatrix} (-1)^{123} & 0 & 0 \\ 0 & (-2)^{123} & 0 \\ 0 & 0 & (-2)^{123} \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2^{123} & 0 \\ 0 & 0 & -2^{123} \end{pmatrix} \quad \text{ed} \end{aligned}$$

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Calcoliamo l'inversa di  $\mathbf{S}$ :

$$\begin{aligned} (\mathbf{S} \mid \mathbf{I}_3) &= \left( \begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{E_{31}(-1)E_1(-1)} \\ &\rightarrow \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right) = (\mathbf{I}_3 \mid \mathbf{S}^{-1}) \end{aligned}$$

Dunque

$$\mathbf{S}^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{N.B.: } \mathbf{S}^{-1} = \mathbf{S}).$$

Concludendo:

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}^{123} &= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2^{123} & 0 \\ 0 & 0 & -2^{123} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2^{123} & 0 \\ -1 & 0 & -2^{123} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2^{123} & 0 \\ 1 - 2^{123} & 0 & -2^{123} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$