

**ESERCIZIO TIPO 2**

Si risolva il sistema lineare  $\mathbf{A}(\alpha)\mathbf{x} = \mathbf{b}(\alpha)$  dipendente dal parametro complesso  $\alpha$  dove

$$\mathbf{A}(\alpha) = \begin{pmatrix} 3 & 3\alpha & 3 \\ 1 & \alpha + 1 & \alpha + 1 \\ 1 & \alpha & \alpha + 1 - i \\ 0 & 2 & 2\alpha \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{b}(\alpha) = \begin{pmatrix} 3\alpha \\ \alpha + 1 \\ \alpha \\ \alpha^2 + 3 \end{pmatrix}.$$

Troviamo una forma ridotta di Gauss della matrice aumentata del sistema.

$$\begin{aligned} (\mathbf{A}(\alpha) \mid \mathbf{b}(\alpha)) &= \left( \begin{array}{ccc|c} 3 & 3\alpha & 3 & 3\alpha \\ 1 & \alpha + 1 & \alpha + 1 & \alpha + 1 \\ 1 & \alpha & \alpha + 1 - i & \alpha \\ 0 & 2 & 2\alpha & \alpha^2 + 3 \end{array} \right) \xrightarrow{E_{31}(-1)E_{21}(-1)E_1(\frac{1}{3})} \\ &\rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & \alpha & 1 & \alpha \\ 0 & 1 & \alpha & 1 \\ 0 & 0 & \alpha - i & 0 \\ 0 & 2 & 2\alpha & \alpha^2 + 3 \end{array} \right) \xrightarrow{E_{42}(-2)} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & \alpha & 1 & \alpha \\ 0 & 1 & \alpha & 1 \\ 0 & 0 & \alpha - i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha^2 + 1 \end{array} \right) = \\ &= (\mathbf{B}(\alpha) \mid \mathbf{c}(\alpha)). \end{aligned}$$

$$\boxed{1^0 \text{ CASO}} \quad \alpha = i \quad (\mathbf{B}(i) \mid \mathbf{c}(i)) = \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & i & 1 & i \\ 0 & 1 & i & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \text{ è una forma}$$

ridotta di Gauss per  $(\mathbf{A}(i) \mid \mathbf{b}(i))$ , quindi  $\mathbf{A}(i)\mathbf{x} = \mathbf{b}(i)$  è equivalente a  $\mathbf{B}(i)\mathbf{x} = \mathbf{c}(i)$  che è una forma compatta per

$$(*) \quad \begin{cases} x_1 + ix_2 + x_3 & = i \\ x_2 + ix_3 & = 1 \end{cases}$$

Poichè  $\mathbf{c}(i)$  è libera,  $\mathbf{B}(i)\mathbf{x} = \mathbf{c}(i)$  ammette soluzioni.

Poichè  $\mathbf{B}(i)$  ha esattamente una colonna libera,  $\mathbf{B}(i)\mathbf{x} = \mathbf{c}(i)$  ha  $\infty^1$  soluzioni.

Scegliamo come parametro la variabile corrispondente alla colonna libera di  $\mathbf{B}(i)$  (la 3<sup>a</sup>) e con la sostituzione all'indietro da (\*) otteniamo

$$\begin{cases} x_3 = h \\ x_2 = -ix_3 + 1 = -ih + 1 \\ x_1 = -ix_2 - x_3 + i = -i(-ih + 1) - h + i = -h - i - h + i = -2h \end{cases}$$

L'insieme delle soluzioni del sistema  $\mathbf{B}(i)\mathbf{x} = \mathbf{c}(i)$  ( quindi di quelle del sistema  $\mathbf{A}(i)\mathbf{x} = \mathbf{b}(i)$  ) è

$$\left\{ \begin{pmatrix} -2h \\ -ih + 1 \\ h \end{pmatrix} \mid h \in \mathbb{C} \right\}.$$

2<sup>0</sup> CASO       $\alpha \neq i$

$$\begin{aligned} (\mathbf{B}(\alpha) \mid \mathbf{c}(\alpha)) &= \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & \alpha & 1 & \alpha \\ 0 & 1 & \alpha & 1 \\ 0 & 0 & \alpha - i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha^2 + 1 \end{array} \right) \xrightarrow{E_3(\frac{1}{\alpha-i})} \\ \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & \alpha & 1 & \alpha \\ 0 & 1 & \alpha & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha^2 + 1 \end{array} \right) &\xrightarrow{E_4(\frac{1}{\alpha-i})} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & \alpha & 1 & \alpha \\ 0 & 1 & \alpha & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha + i \end{array} \right) = (\mathbf{C}(\alpha) \mid \mathbf{d}(\alpha)). \end{aligned}$$

1<sup>0</sup> Sottocaso       $\alpha = -i$        $(\mathbf{C}(-i) \mid \mathbf{d}(-i)) = \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -i & 1 & -i \\ 0 & 1 & -i & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$  è

una forma ridotta di Gauss per  $(\mathbf{A}(-i) \mid \mathbf{b}(-i))$ , quindi  $\mathbf{A}(-i)\mathbf{x} = \mathbf{b}(-i)$  è equivalente a  $\mathbf{C}(-i)\mathbf{x} = \mathbf{d}(-i)$  che è una forma compatta per

$$(*) \quad \begin{cases} x_1 - ix_2 + x_3 = -i \\ x_2 - ix_3 = 1 \\ x_3 = 0 \end{cases}$$

Poichè  $\mathbf{d}(-i)$  è libera,  $\mathbf{C}(-i)\mathbf{x} = \mathbf{d}(-i)$  ammette soluzioni.

Poichè tutte le colonne di  $\mathbf{C}(-i)$  sono dominanti,  $\mathbf{C}(-i)\mathbf{x} = \mathbf{d}(-i)$  ammette un'unica soluzione. Con la sostituzione all'indietro da (\*) otteniamo

$$\begin{cases} x_3 = 0 \\ x_2 = ix_3 + 1 = 1 \\ x_1 = ix_2 - x_3 - i = i - i = 0 \end{cases}$$

L'unica soluzione di  $\mathbf{C}(-i)\mathbf{x} = \mathbf{d}(-i)$  ( e quindi di  $\mathbf{A}(-i)\mathbf{x} = \mathbf{b}(-i)$  ) è

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

2<sup>0</sup> Sottocaso       $\alpha \notin \{i, -i\}$

$$(\mathbf{C}(\alpha)|\mathbf{d}(\alpha)) = \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & \alpha & 1 & \alpha \\ 0 & 1 & \alpha & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha + i \end{array} \right) \xrightarrow{E_4(\frac{1}{\alpha+i})} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & \alpha & 1 & \alpha \\ 0 & 1 & \alpha & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) = (\mathbf{D}(\alpha)|\mathbf{e}(\alpha))$$

è una forma ridotta di Gauss per  $(\mathbf{A}(\alpha) \mid \mathbf{b}(\alpha))$ . Poichè  $\mathbf{e}(\alpha)$  è dominante,  $\mathbf{D}(\alpha)\mathbf{x} = \mathbf{e}(\alpha)$  ( e quindi di  $\mathbf{A}(\alpha)\mathbf{x} = \mathbf{b}(\alpha)$  ) non ammette soluzioni.