G. Parmeggiani, 28/10/2019 **Algebra Lineare, a.a. 2019/2020,**

Scuola di Scienze - Corsi di laurea: **Statistica per l'economia e l'impresa**
Statistica per le tecnologie e le scienze

Studenti: **numero di MATRICOLA PARI**

ESERCIZIO TIPO 3

Si trovino tutte le inverse destre della matrice $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Un'inversa destra di $\mathbf{A}$ è una matrice 3×2 $\mathbf{R}$ tale che se $\mathbf{R} = \begin{pmatrix} \mathbf{c}_1 & | & \mathbf{c}_2 \end{pmatrix}$, allora

$\mathbf{c}_1$ è soluzione di (1) $\mathbf{Ax} = \mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e

$\mathbf{c}_2$ è soluzione di (2) $\mathbf{Ax} = \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Cerchiamo tutte le soluzioni di (1) e (2).

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A} & | & \mathbf{I}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & | & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & | & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{21}(-2)}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & | & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & | & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{U} & | & \mathbf{b}_1 & \mathbf{b}_2 \end{pmatrix}.$$

(1) è equivalente a (1′) $\mathbf{Ux} = \mathbf{b}_1$ che è una forma compatta per

$$\begin{cases} x_1 - x_3 = 1 \\ x_2 + x_3 = -2 \end{cases}$$

Scegliamo come parametro la variabile corrispondente all'unica colonna libera di U (la 3^a) e con la sostituzione all'indietro otteniamo

$$\begin{cases} x_3 = h \\ x_2 = -2 - h \\ x_1 = 1 + h \end{cases}$$

L'insieme delle soluzioni di (1) è

$$\left\{ \begin{pmatrix} h+1 \\ -h-2 \\ h \end{pmatrix} |h \in \mathbb{C} \right\}.$$

(2) è equivalente a (2′) $\mathbf{U}\mathbf{x} = \mathbf{b}_2$ che è una forma compatta per

$$\begin{cases} x_1 - x_3 = 0 \\ x_2 + x_3 = 1 \end{cases}$$

Scegliamo come parametro la variabile corrispondente all'unica colonna libera di U (la 3^a) e con la sostituzione all'indietro otteniamo

$$\begin{cases} x_3 = k \\ x_2 = 1 - k \\ x_1 = k \end{cases}$$

L'insieme delle soluzioni di (2) è

$$\left\{ \begin{pmatrix} k \\ -k+1 \\ k \end{pmatrix} | k \in \mathbb{C} \right\}.$$

Le inverse destre di $\mathbf{A}$ sono esattamente tutte le matrici del tipo

$$\mathbf{R}(h,k) = \begin{pmatrix} h+1 & k \\ -h-2 & -k+1 \\ h & k \end{pmatrix}, \quad \text{al variare di} \quad h, k \in \mathbb{C}.$$

ESERCIZIO TIPO 3 bis

Si trovino tutte le inverse sinistre della matrice $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$.

1. Poniamo $\mathbf{B} = \mathbf{A}^T$.

2. Cerchiamo tutte le inverse destre di $\mathbf{B}$. Dall'ESERCIZIO TIPO 3 sappiamo che sono tutte e sole le matrici del tipo $\begin{pmatrix} h+1 & k \\ -h-2 & -k+1 \\ h & k \end{pmatrix}$ con $h, k \in \mathbb{C}$.

3. Una matrice è inversa sinistra di $\mathbf{A}$ se e solo se è la trasposta di una inversa destra di $\mathbf{B}$.

Quindi le inverse sinistre di $\mathbf{A}$ sono esattamente tutte le matrici del tipo

$$\begin{pmatrix} h+1 & -h-2 & h \\ k & -k+1 & k \end{pmatrix} \quad \text{al variare di} \quad h, k \in \mathbb{C}.$$