

G. Parmeggiani, 4/11/2019

Algebra Lineare, a.a. 2019/2020,

Scuola di Scienze - Corsi di laurea:

Statistica per l'economia e l'impresa  
Statistica per le tecnologie e le scienze

Studenti:

numero di MATRICOLA PARI

### ESERCIZIO TIPO 5

$$\text{Sia } \mathbf{A}(\alpha) = \begin{pmatrix} \alpha - 1 & 3\alpha - 3 & 2\alpha - 2 \\ 0 & \alpha^2 + 4 & 0 \\ 2 & 6 & 2\alpha - 6 \\ \alpha & 3\alpha + 2 & \alpha + 5 \end{pmatrix}, \text{ dove } \alpha \in \mathbb{C}.$$

Per ogni  $\alpha \notin \{1, 2i, -2i\}$  si trovi una decomposizione  $\mathbf{A}(\alpha) = \mathbf{L}(\alpha)\mathbf{U}(\alpha)$ , scrivendo anche  $\mathbf{L}(\alpha)$  come prodotto di matrici elementari.

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(\alpha) &= \begin{pmatrix} \boxed{\alpha - 1} & 3\alpha - 3 & 2\alpha - 2 \\ \boxed{0} & \alpha^2 + 4 & 0 \\ \boxed{2} & 6 & 2\alpha - 6 \\ \boxed{\alpha} & 3\alpha + 2 & \alpha + 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{41}(-\alpha)E_{31}(-2)E_1(\frac{1}{\alpha-1}) \quad \boxed{\alpha \neq 1}} \\ &\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & \boxed{\alpha^2 + 4} & 0 \\ 0 & \boxed{0} & 2\alpha - 10 \\ 0 & \boxed{2} & 5 - \alpha \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{42}(-2)E_2(\frac{1}{\alpha^2+4}) \quad \boxed{\alpha \notin \{2i, -2i\}}} \\ &\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2\alpha - 10 \\ 0 & 0 & 5 - \alpha \end{pmatrix} = \mathbf{B}(\alpha) \end{aligned}$$

$\boxed{1^{\circ}\text{CASO}} \quad \alpha \neq 5 \text{ (nonch\`e } \alpha \neq 1, 2i, -2i)$

$$\mathbf{B}(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{2\alpha - 10} \\ 0 & 0 & \boxed{5 - \alpha} \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{43}(-5+\alpha)E_3(\frac{1}{2\alpha-10})} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{U}(\alpha)$$

$$\mathbf{L}(\alpha) = \begin{pmatrix} \boxed{\alpha - 1} & 0 & 0 & 0 \\ \boxed{0} & \boxed{\alpha^2 + 4} & 0 & 0 \\ \boxed{2} & \boxed{0} & \boxed{2\alpha - 10} & 0 \\ \boxed{\alpha} & \boxed{2} & \boxed{5 - \alpha} & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \mathbf{E}_1(\alpha - 1)\mathbf{E}_{31}(2)\mathbf{E}_{41}(\alpha)\mathbf{E}_2(\alpha^2 + 4)\mathbf{E}_{42}(2)\mathbf{E}_3(2\alpha - 10)\mathbf{E}_{43}(5 - \alpha)$$

$$\boxed{2^\circ \text{CASO}} \quad \alpha = 5$$

$$\mathbf{B}(5) = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{U}(5)$$

$$\mathbf{L}(5) = \begin{pmatrix} \boxed{4} & 0 & 0 & 0 \\ \boxed{0} & \boxed{29} & 0 & 0 \\ \boxed{2} & \boxed{0} & 1 & 0 \\ \boxed{5} & \boxed{2} & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{E}_1(4)\mathbf{E}_{31}(2)\mathbf{E}_{41}(5)\mathbf{E}_2(29)\mathbf{E}_{42}(2)$$

$\boxed{N.B.}$  Se  $\alpha \in \{1, 2i, -2i\}$  non è possibile trovare una forma ridotta di Gauss di  $\mathbf{A}(\alpha)$  senza fare scambi di righe, quindi  $\mathbf{A}(\alpha)$  **NON** ha una decomposizione  $\mathbf{L}(\alpha)\mathbf{U}(\alpha)$ .