**G. Parmeggiani, 4/11/2019** **Algebra Lineare, a.a. 2019/2020**,

**Scuola di Scienze - Corsi di laurea:** **Statistica per l'economia e l'impresa**
**Statistica per le tecnologie e le scienze**

**Studenti:** **numero di MATRICOLA PARI**

**ESERCIZIO TIPO 6**

Sia $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -4 \\ -2 & -6 & -10 \\ 1 & 3 & 6 \\ 1 & -4 & 10 \end{pmatrix}$.
Si trovi una decomposizione $\mathbf{A} = \mathbf{P}^T\mathbf{L}\mathbf{U}$ per $\mathbf{A}$.

Applicando l'algoritmo di Gauss ad $A$ si ottiene:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -4 \\ -2 & -6 & -10 \\ 1 & 3 & 6 \\ 1 & -4 & 10 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{13}} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 \\ -2 & -6 & -10 \\ 0 & 2 & -4 \\ 1 & -4 & 10 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{41}(1)E_{21}(2)} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & -7 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\xrightarrow{E_{23}} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & -7 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{42}(7)E_{2}(\frac{1}{2})} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -10 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{43}(10)E_{3}(\frac{1}{2})} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Sia

$$\mathbf{P} = \mathbf{E}_{23}\mathbf{E}_{13} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Allora

$$\mathbf{PA} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 & -4 \\ -2 & -6 & -10 \\ 1 & 3 & 6 \\ 1 & -4 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 0 & 2 & -4 \\ -2 & -6 & -10 \\ 1 & -4 & 10 \end{pmatrix}.$$

Applicando l'algoritmo di Gauss senza scambi di righe a $\mathbf{PA}$ otteniamo una decomposizione $\mathbf{LU}$ per $\mathbf{PA}$:

$$\mathbf{PA} = \begin{pmatrix} \boxed{1} & 3 & 6 \\ \boxed{0} & 2 & -4 \\ \boxed{-2} & -6 & -10 \\ \boxed{1} & -4 & 10 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{41}(-1)E_{31}(2)} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 0 & \boxed{2} & -4 \\ 0 & \boxed{0} & 2 \\ 0 & \boxed{-7} & 4 \end{pmatrix} \longrightarrow$$

$$\xrightarrow{E_{42}(7)E_2(\frac{1}{2})} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & \boxed{2} \\ 0 & 0 & \boxed{-10} \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{43}(-10)E_3(\frac{1}{2})} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{U},$$

$$\text{ed } \mathbf{L} = \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 & 0 \\ \boxed{0} & \boxed{2} & 0 & 0 \\ \boxed{-2} & \boxed{0} & \boxed{2} & 0 \\ \boxed{1} & \boxed{-7} & \boxed{-10} & 1 \end{pmatrix}.$$

Dunque $\mathbf{A} = \mathbf{P}^T\mathbf{L}\mathbf{U}$ dove

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{L} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & -7 & -10 & 1 \end{pmatrix} \text{ ed } \mathbf{U} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

**SI NOTI:**

$\boxed{1}$ **P** ha

la $3^a$ riga di $\mathbf{I_4}$ in $1^a$ posizione (procedendo dall'alto verso il basso)
la $1^a$ riga di $\mathbf{I_4}$ in $2^a$ posizione
la $2^a$ riga di $\mathbf{I_4}$ in $3^a$ posizione
la $4^a$ riga di $\mathbf{I_4}$ in $4^a$ posizione.

Invertendo le righe con le posizioni, la matrice che ha

la $1^a$ riga di $\mathbf{I_4}$ in $3^a$ posizione
la $2^a$ riga di $\mathbf{I_4}$ in $1^a$ posizione
la $3^a$ riga di $\mathbf{I_4}$ in $2^a$ posizione
la $4^a$ riga di $\mathbf{I_4}$ in $4^a$ posizione

è quindi

$$\mathbf{P}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (= \mathbf{P}^T).$$

(d'altronde da $\mathbf{P} = \mathbf{E}_{23}\mathbf{E}_{13}$ segue

$$\mathbf{P}^{-1} = (\mathbf{E}_{23}\mathbf{E}_{13})^{-1} = \mathbf{E}_{13}^{-1}\mathbf{E}_{23}^{-1} = \mathbf{E}_{13}\mathbf{E}_{23} = \mathbf{E}_{13}^{T}\mathbf{E}_{23}^{T} = (\mathbf{E}_{23}\mathbf{E}_{13})^{T} = \mathbf{P}^{T}.)$$

$\boxed{2}$

$$\mathbf{H} = \mathbf{E}_{13}\mathbf{E}_{23} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \neq \mathbf{P}$$

e facendo un'eliminazione di Gauss su $\mathbf{HA}$ si ottiene:

$$\mathbf{HA} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 & -4 \\ -2 & -6 & -10 \\ 1 & 3 & 6 \\ 1 & -4 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -6 & -10 \\ 1 & 3 & 6 \\ 0 & 2 & -4 \\ 1 & -4 & 10 \end{pmatrix} \to$$

$$\xrightarrow{E_{41}(-1)E_{21}(-1)E_{1}(-\frac{1}{2})} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & -7 & 5 \end{pmatrix}.$$

Dunque $\mathbf{HA}$ non ha una decomposizione $\mathbf{LU}$.

Quindi è fondamentale, per costruire $\mathbf{P}$, l'ordine in cui si moltiplicano le matrici corrispondenti agli scambi di righe effettuati (si parte dall'ultimo procedendo a ritroso).

$\boxed{3}$ Dall'eliminazione di Gauss fatta su $\mathbf{A}$ si ottiene che

$$\mathbf{E}_{43}(10) \cdot \mathbf{E}_{3}(\frac{1}{2}) \cdot \mathbf{E}_{42}(7) \cdot \mathbf{E}_{2}(\frac{1}{2}) \cdot \mathbf{E}_{23} \cdot \mathbf{E}_{41}(1) \cdot \mathbf{E}_{21}(2) \cdot \mathbf{E}_{13} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{U}.$$

Quindi la tentazione di intuire $\mathbf{L}$ direttamente da questa eliminazione di Gauss è fuorviante: posto

$$\mathbf{B} = \mathbf{E}_{43}(10) \cdot \mathbf{E}_{3}(\frac{1}{2}) \cdot \mathbf{E}_{42}(7) \cdot \mathbf{E}_{2}(\frac{1}{2}) \cdot \mathbf{E}_{41}(1) \cdot \mathbf{E}_{21}(2)$$

il prodotto delle matrici elementari diverse da quelle corrispondenti agli scambi di righe, si ha che $\mathbf{BPA} \neq \mathbf{U}$, e quindi $\mathbf{PA} \neq \mathbf{B}^{-1}\mathbf{U}$, ossia $\mathbf{B}^{-1}$ non è un buon candidato per $\mathbf{L}$.

$\boxed{4}$ Mostriamo che esistono una forma ridotta di Gauss $\mathbf{U}^*$ per $\mathbf{A}$, una matrice di permutazione $\mathbf{P}^*$ ed una matrice triangolare inferiore non singolare $\mathbf{L}^*$ tali che

$$\mathbf{U}^* \neq \mathbf{U}, \qquad \mathbf{P}^* \neq \mathbf{P}, \qquad \mathbf{L}^* \neq \mathbf{L}, \qquad \text{ma } \mathbf{A} = (\mathbf{P}^*)^T\mathbf{L}^*\mathbf{U}^* = \mathbf{P}^T\mathbf{L}\mathbf{U},$$

ossia la decomposizione $\mathbf{A} = \mathbf{P}^T\mathbf{L}\mathbf{U}$ non è unica.
Facciamo una eliminazione di Gauss su $\mathbf{A}$ scegliendo degli scambi di riga diverse da quelli scelti nell'eliminazione che abbiamo fatto precedentemente.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -4 \\ -2 & -6 & -10 \\ 1 & 3 & 6 \\ 1 & -4 & 10 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{14}} \begin{pmatrix} 1 & -4 & 10 \\ -2 & -6 & -10 \\ 1 & 3 & 6 \\ 0 & 2 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{31}(-1)E_{21}(2)}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & -4 & 10 \\ 0 & -14 & 10 \\ 0 & 7 & -4 \\ 0 & 2 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{32}(-7)E_2(-\frac{1}{14})} \begin{pmatrix} 1 & -4 & 10 \\ 0 & 1 & -\frac{5}{7} \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{42}(-2)}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & -4 & 10 \\ 0 & 1 & -\frac{5}{7} \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{18}{7} \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{43}(\frac{18}{7})} \begin{pmatrix} 1 & -4 & 10 \\ 0 & 1 & -\frac{5}{7} \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Sia $\mathbf{P}^* = \mathbf{E}_{14} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Allora

$$\mathbf{P}^*\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 & -4 \\ -2 & -6 & -10 \\ 1 & 3 & 6 \\ 1 & -4 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{1} & -4 & 10 \\ \boxed{-2} & -6 & -10 \\ \boxed{1} & 3 & 6 \\ \boxed{0} & 2 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{31}(-1)E_{21}(2)}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & -4 & 10 \\ 0 & \boxed{-14} & 10 \\ 0 & \boxed{7} & -4 \\ 0 & \boxed{2} & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{42}(-2)E_{32}(-7)E_2(-\frac{1}{14})} \begin{pmatrix} 1 & -4 & 10 \\ 0 & 1 & -\frac{5}{7} \\ 0 & 0 & \boxed{1} \\ 0 & 0 & \boxed{-\dfrac{18}{7}} \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{43}(\frac{18}{7})}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & -4 & 10 \\ 0 & 1 & -\frac{5}{7} \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{U}^*.$$

Quindi $\mathbf{A} = (\mathbf{P}^*)^T \mathbf{L}^* \mathbf{U}^*$ con

$$\mathbf{P}^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \neq \mathbf{P},$$

$$\mathbf{U}^* = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 10 \\ 0 & 1 & -\frac{5}{7} \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \neq \mathbf{U},$$

$$\mathbf{L}^* = \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 & 0 \\ \boxed{-2} & \boxed{-14} & 0 & 0 \\ \boxed{1} & \boxed{7} & \boxed{1} & 0 \\ \boxed{0} & \boxed{2} & \boxed{-\dfrac{18}{7}} & 1 \end{pmatrix} \neq \mathbf{L}.$$