G. Parmeggiani, 12/11/2019 **Algebra Lineare, a.a. 2019/2020,**

Scuola di Scienze - Corsi di laurea: **Statistica per l'economia e l'impresa**
Statistica per le tecnologie e le scienze

Studenti: **numero di MATRICOLA PARI**

ESERCIZIO TIPO 7

Si dica se $\boldsymbol{\mathcal{S}} = \left\{ \mathbf{A_1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \mathbf{A_2} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}; \mathbf{A_3} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}; \mathbf{A_4} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$
è un insieme di generatori di $M_2(\mathbb{R})$.

Per sapere se $\boldsymbol{\mathcal{S}}$ è o meno un insieme di generatori di $M_2(\mathbb{R})$ dobbiamo verificare se per ogni $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$ esistano o meno $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 \in \mathbb{R}$ tali che

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} &= \alpha_1\mathbf{A_1} + \alpha_2\mathbf{A_2} + \alpha_3\mathbf{A_3} + \alpha_4\mathbf{A_4} = \\ &= \alpha_1 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} + \alpha_4 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3 & \alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 \\ 2\alpha_2 + 2\alpha_3 & \alpha_4 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

ossia se il sistema lineare

$$(*) \qquad \begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3 = a \\ \alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 = b \\ 2\alpha_2 + 2\alpha_3 = c \\ \alpha_4 = d \end{cases}$$

nelle incognite $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ abbia o meno soluzione **per ogni** $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

Se $(*)$ avesse soluzione **per ogni** $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ allora $\boldsymbol{\mathcal{S}}$ sarebbe un insieme di generatori di $M_2(\mathbb{R})$, in caso contrario (ossia se esistono $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ per cui $(*)$ non ha soluzione), no.

Facendo una eliminazione di Gauss sulla matrice aumentata del sistema si ottiene

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 & a \\ 1 & 2 & 3 & 0 & b \\ 0 & 2 & 2 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 & 1 & d \end{array}\right) \xrightarrow{E_{21}(-1)} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 & a \\ 0 & 1 & 1 & 0 & b-a \\ 0 & 2 & 2 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 & 1 & d \end{array}\right) \rightarrow$$

$$\xrightarrow{E_{32}(-2)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 & | & a \\ 0 & 1 & 1 & 0 & | & b-a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & c-2b+2a \\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & d \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{43}}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 & | & a \\ 0 & 1 & 1 & 0 & | & b-a \\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & d \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & c-2b+2a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{U} & | & \mathbf{d} \end{pmatrix}.$$

Poichè esistono $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ per cui $\mathbf{d}$ è dominante (ad esempio si prendano $a = b = d = 0$ e $c = 1$), allora $\boldsymbol{\mathcal{S}}$ non è un insieme di generatori di $M_2(\mathbb{R})$ (in altre parole: poichè esistono delle matrici di $M_2(\mathbb{R})$ che **NON** si possono esprimere come combinazione lineare degli elementi di $\boldsymbol{\mathcal{S}}$, ad esempio la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, allora $\boldsymbol{\mathcal{S}}$ **NON** è un insieme di generatori di $M_2(\mathbb{R})$).