G. Parmeggiani, 12/12/2019 **Algebra Lineare, a.a. 2019/2020,**

Scuola di Scienze - Corsi di laurea: **Statistica per l'economia e l'impresa**
Statistica per le tecnologie e le scienze

Studenti: **numero di MATRICOLA PARI**

Svolgimento degli Esercizi per casa 10

$\boxed{1}$ Si trovi una base ortonormale del sottospazio

$$V = \left\langle \begin{pmatrix} i \\ -1 \\ i \\ -1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} -1 \\ -i \\ -1 \\ -i \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2i \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

di $\mathbb{C}^4$.

$\boxed{I}$ Costruiamo dapprima **una base di V**: poniamo

$$\mathbf{w_1} = \begin{pmatrix} i \\ -1 \\ i \\ -1 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{w_2} = \begin{pmatrix} -1 \\ -i \\ -1 \\ -i \end{pmatrix}; \quad \mathbf{w_3} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{w_4} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2i \\ 0 \end{pmatrix}$$

e calcoliamo una base di $C(\mathbf{A})$ dove $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{w_1} & \mathbf{w_2} & \mathbf{w_3} & \mathbf{w_4} \end{pmatrix}$.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{w_1} & \mathbf{w_2} & \mathbf{w_3} & \mathbf{w_4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i & -1 & 1 & 0 \\ -1 & -i & 0 & 0 \\ i & -1 & 1 & 2i \\ -1 & -i & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{41}(1)E_{31}(-i)E_{21}(1)E_1(-i)}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & i & -i & 0 \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2i \\ 0 & 0 & -i & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_3(-\frac{1}{2}i)E_{42}(i)E_2(i)} \begin{pmatrix} 1 & i & -i & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{U}$$

Poichè $\mathbf{U}$ ha come colonne dominanti la 1^a, la 3^a e la 4^a, allora una base di $C(\mathbf{A}) = V$ è $\{\mathbf{w_1}; \mathbf{w_3}; \mathbf{w_4}\}$.

$\boxed{II}$ Troviamo **una base ortogonale di V** applicando l'algoritmo di Gram-Schmidt a

$$\left\{ \mathbf{v_1} = \mathbf{w_1} = \begin{pmatrix} i \\ -1 \\ i \\ -1 \end{pmatrix}; \mathbf{v_2} = \mathbf{w_3} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \mathbf{v_3} = \mathbf{w_4} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2i \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

$$\mathbf{u_1} = \mathbf{v_1} = \begin{pmatrix} i \\ -1 \\ i \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{u_2} = \mathbf{v_2} - \alpha_{12}\mathbf{u_1}, \qquad \mathbf{u_1} \neq \mathbf{0} \quad \Longrightarrow \quad \alpha_{12} = \frac{(\mathbf{u_1}|\mathbf{v_2})}{(\mathbf{u_1}|\mathbf{u_1})}$$

$$(\mathbf{u_1}|\mathbf{v_2}) = \mathbf{u_1}^H\mathbf{v_2} = \begin{pmatrix} -i & -1 & -i & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = -2i$$

$$(\mathbf{u_1}|\mathbf{u_1}) = \mathbf{u_1}^H\mathbf{u_1} = \begin{pmatrix} -i & -1 & -i & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i \\ -1 \\ i \\ -1 \end{pmatrix} = 4$$

$$\Longrightarrow \quad \alpha_{12} = -\frac{2i}{4} = -\frac{1}{2}i$$

$$\mathbf{u_2} = \mathbf{v_2} - \alpha_{12}\mathbf{u_1} = \\ = \mathbf{v_2} + \tfrac{1}{2}i\mathbf{u_1} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \tfrac{1}{2}i \begin{pmatrix} i \\ -1 \\ i \\ -1 \end{pmatrix} = \tfrac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ 1 \\ -i \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{u_3} = \mathbf{v_3} - \alpha_{13}\mathbf{u_1} - \alpha_{23}\mathbf{u_2}, \qquad \mathbf{u_1} \neq \mathbf{0} \quad \Longrightarrow \quad \alpha_{13} = \frac{(\mathbf{u_1}|\mathbf{v_3})}{(\mathbf{u_1}|\mathbf{u_1})}$$

$$(\mathbf{u_1}|\mathbf{v_3}) = \mathbf{u_1}^H\mathbf{v_3} = \begin{pmatrix} -i & -1 & -i & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2i \\ 0 \end{pmatrix} = 2$$

$$(\mathbf{u_1}|\mathbf{u_1}) = \mathbf{u_1}^H\mathbf{u_1} = 4$$

$$\Longrightarrow \quad \alpha_{13} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$\mathbf{u_2} \neq \mathbf{0} \quad \Longrightarrow \quad \alpha_{23} = \frac{(\mathbf{u_2}|\mathbf{v_3})}{(\mathbf{u_2}|\mathbf{u_2})}$$

$$(\mathbf{u_2}|\mathbf{v_3}) = \mathbf{u_2}^H\mathbf{v_3} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & i & 1 & i\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\\2i\\0\end{pmatrix} = i$$

$$(\mathbf{u_2}|\mathbf{u_2}) = \mathbf{u_2}^H\mathbf{u_2} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & i & 1 & i\end{pmatrix}\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\-i\\1\\-i\end{pmatrix} = 1$$

$$\Longrightarrow \quad \alpha_{23} = i$$

$$\begin{aligned}\mathbf{u_3} &= \mathbf{v_3} - \alpha_{13}\mathbf{u_1} - \alpha_{23}\mathbf{u_2} = \\ &= \mathbf{v_3} - \tfrac{1}{2}\mathbf{u_1} - \tfrac{1}{2}i\mathbf{u_2} =\end{aligned}$$

$$= \begin{pmatrix}0\\0\\2i\\0\end{pmatrix} - \tfrac{1}{2}\begin{pmatrix}i\\-1\\i\\-1\end{pmatrix} - \tfrac{1}{2}i\begin{pmatrix}1\\-i\\1\\-i\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-i\\0\\i\\0\end{pmatrix}$$

Dunque

$$\left\{\mathbf{u_1} = \begin{pmatrix}i\\-1\\i\\-1\end{pmatrix}; \mathbf{u_2} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\-i\\1\\-i\end{pmatrix}; \mathbf{u_3} = \begin{pmatrix}-i\\0\\i\\0\end{pmatrix}\right\}$$

è una base ortogonale di V.

$\boxed{III}$ Costruiamo **base ortonormale di V** normalizzando la base ortogonale trovata al punto $\boxed{II}$, ossia dividendo ciascun elemento della base ortogonale trovata in $\boxed{II}$ per la propria norma euclidea.

Cominciamo con il calcolare la norma euclidea di $\mathbf{u_1}$, $\mathbf{u_2}$ ed $\mathbf{u_3}$:

$$\|\mathbf{u_1}\|_2 = \sqrt{(\mathbf{u_1}|\mathbf{u_1})} = \sqrt{4} = 2$$

$$\|\mathbf{u_2}\|_2 = \sqrt{(\mathbf{u_2}|\mathbf{u_2})} = \sqrt{1} = 1$$

$$\|\mathbf{u_3}\|_2 = \sqrt{(\mathbf{u_3}|\mathbf{u_3})} = \sqrt{\begin{pmatrix}i & 0 & -i & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-i\\0\\i\\0\end{pmatrix}} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

Allora

$$\mathcal{B} = \left\{\frac{\mathbf{u_1}}{\|\mathbf{u_1}\|_2}; \frac{\mathbf{u_2}}{\|\mathbf{u_2}\|_2}; \frac{\mathbf{u_3}}{\|\mathbf{u_3}\|_2}\right\} = \left\{ \frac{1}{2}\begin{pmatrix} i \\ -1 \\ i \\ -1 \end{pmatrix}; \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ 1 \\ -i \end{pmatrix}; \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -i \\ 0 \\ i \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

è una base ortonormale di V.

$\boxed{\mathbf{2}}$ Si consideri il sottospazio

$$W = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 2i \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1+2i \end{pmatrix} \right\rangle$$

di $M_2(\mathbb{C})$. Si trovi una base ortonormale di W rispetto al prodotto interno $(\cdot|\cdot) : M_2(\mathbb{C}) \times M_2(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ definito nell'esercizio 3 degli "Esercizi 8".

Il prodotto interno su $M_2(\mathbb{C})$ definito nell'esercizio $\boxed{3}$ è: $(\cdot|\cdot) : M_2(\mathbb{C}) \times M_2(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ con

$$\left(\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} \Big| \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{pmatrix}\right) = \sum_{i=1}^{4} \overline{a_i} b_i$$

e la norma da esso indotta è: $\|\cdot\| : M_2(\mathbb{C}) \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ con

$$\begin{aligned} \left\| \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} \right\| &= \sqrt{\left(\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} \Big| \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix}\right)} = \\ &= \sqrt{\textstyle\sum_{i=1}^{4} \overline{a}_i \cdot a_i} = \\ &= \sqrt{\textstyle\sum_{i=1}^{4} |a_i|^2} \qquad \forall \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{C}). \end{aligned}$$

Siano $\mathbf{v_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v_2} = \begin{pmatrix} 1 & 2i \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ e $\mathbf{v_3} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1+2i \end{pmatrix}$.
Poichè $\mathcal{S} = \{\mathbf{v_1}; \mathbf{v_2}; \mathbf{v_3}\}$ è un insieme di generatori di W,

$\boxed{I}$ troviamo **una base** $\mathcal{B}$ **di W** contenuta in $\mathcal{S}$.

Esistono elementi di $\mathcal{S}$ che siano combinazioni lineare dei rimanenti ?

Sia $\alpha_1\mathbf{v_1} + \alpha_2\mathbf{v_2} + \alpha_3\mathbf{v_3} = \mathbf{0}$ una combinazione lineare nulla dei vettori di $\mathcal{S}$. Allora da

$$\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}=\alpha_1\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}+\alpha_2\begin{pmatrix}1&2i\\0&0\end{pmatrix}+\alpha_3\begin{pmatrix}0&1\\0&1+2i\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha_1+\alpha_2&2i\alpha_2+\alpha_3\\0&(1+2i)\alpha_3\end{pmatrix}$$

si ottiene il sistema lineare, nelle incognite $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$,

$$\begin{cases}\alpha_1+\alpha_2=0\\2i\alpha_2+\alpha_3=0\\(1+2i)\alpha_3=0\end{cases}$$

che ha come unica soluzione quella nulla (ossia $\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=0$).

Dunque $\boldsymbol{\mathcal{S}}$ è L.I., per cui $\boldsymbol{\mathcal{B}}=\boldsymbol{\mathcal{S}}$ è una base di W.

$\boxed{II}$ troviamo **una base ortogonale di W** applicando a $\boldsymbol{\mathcal{B}}=\{\mathbf{v_1};\mathbf{v_2};\mathbf{v_3}\}$ l'algoritmo di Gram-Schmidt (dove il prodotto interno

$$(\cdot|\cdot): M_2(\mathbb{C})\times M_2(\mathbb{C})\to\mathbb{C}$$

è definito sopra).

$$\boxed{\mathbf{u_1}=\mathbf{v_1}=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}}$$

$\mathbf{u_2}=\mathbf{v_2}-\alpha_{12}\mathbf{u_1}$

$\mathbf{u_1}\neq\mathbf{0}\quad\Longrightarrow\quad\alpha_{12}=\frac{(\mathbf{u_1}|\mathbf{v_2})}{(\mathbf{u_1}|\mathbf{u_1})}$

$(\mathbf{u_1}|\mathbf{v_2})=(\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}|\begin{pmatrix}1&2i\\0&0\end{pmatrix})=\overline{1}\cdot1+\overline{0}\cdot2i+\overline{0}\cdot0+\overline{0}\cdot0=1\cdot1+0\cdot2i+0+0=1$

$(\mathbf{u_1}|\mathbf{u_1})=(\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}|\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix})=\overline{1}\cdot1+\overline{0}\cdot0+\overline{0}\cdot0+\overline{0}\cdot0=1\cdot1+0+0+0=1$

$\alpha_{12}=\frac{1}{1}=1$

$\mathbf{u_2}=\mathbf{v_2}-\alpha_{12}\mathbf{u_1}=\mathbf{v_2}-\mathbf{u_1}=\begin{pmatrix}1&2i\\0&0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&2i\\0&0\end{pmatrix}$

$$\boxed{\mathbf{u_2}=\begin{pmatrix}0&2i\\0&0\end{pmatrix}}$$

$\mathbf{u_3}=\mathbf{v_3}-\alpha_{13}\mathbf{u_1}-\alpha_{23}\mathbf{u_2}$

$\mathbf{u_1}\neq\mathbf{0}\quad\Longrightarrow\quad\alpha_{13}=\frac{(\mathbf{u_1}|\mathbf{v_3})}{(\mathbf{u_1}|\mathbf{u_1})}$

$(\mathbf{u_1}|\mathbf{v_3}) = (\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix}0 & 1\\0 & 1+2i\end{pmatrix}) = \overline{1}\cdot 0 + \overline{0}\cdot 1 + \overline{0}\cdot 0 + \overline{0}\cdot(1+2i) = 1\cdot 0 + 0\cdot 1 + 0 + 0\cdot(1+2i) = 0$

$\alpha_{13} = \frac{0}{(\mathbf{u_1}|\mathbf{u_1})} = 0$

$\mathbf{u_2} \neq \mathbf{0} \quad \Longrightarrow \quad \alpha_{23} = \frac{(\mathbf{u_2}|\mathbf{v_3})}{(\mathbf{u_2}|\mathbf{u_2})}$

$(\mathbf{u_2}|\mathbf{v_3}) = (\begin{pmatrix}0 & 2i\\0 & 0\end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix}0 & 1\\0 & 1+2i\end{pmatrix}) = \overline{0}\cdot 0 + \overline{2i}\cdot 1 + \overline{0}\cdot 0 + \overline{0}\cdot(1+2i) = 0 - 2i\cdot 1 + 0 + 0\cdot(1+2i) = -2i$

$(\mathbf{u_2}|\mathbf{u_2}) = (\begin{pmatrix}0 & 2i\\0 & 0\end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix}0 & 2i\\0 & 0\end{pmatrix}) = \overline{0}\cdot 0 + \overline{2i}\cdot 2i + \overline{0}\cdot 0 + \overline{0}\cdot 0 = 0 - 4i^2 + 0 + 0 = -4i^2 = -4(-1) = 4$

$\alpha_{23} = \frac{-2i}{4} = -\frac{i}{2}$

$\mathbf{u_3} = \mathbf{v_3} - \alpha_{13}\mathbf{u_1} - \alpha_{23}\mathbf{u_2} = \mathbf{v_3} + i\mathbf{u_2} = \begin{pmatrix}0 & 1\\0 & 1+2i\end{pmatrix} + \frac{i}{2}\begin{pmatrix}0 & 2i\\0 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 1+2i\end{pmatrix}$

$$\boxed{\mathbf{u_3} = \begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 1+2i\end{pmatrix}}$$

Dunque

$$\boldsymbol{\mathcal{B}}_1 \left\{\mathbf{u_1} = \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}; \mathbf{u_2} = \begin{pmatrix}0 & i\\0 & 0\end{pmatrix}; \mathbf{u_3} = \begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 1+2i\end{pmatrix}\right\}$$

è una base ortogonale di W.

$\boxed{III}$ Costruiamo **base ortonormale di W** normalizzando la base ortogonale $\boldsymbol{\mathcal{B}}_1$ trovata al punto $\boxed{II}$, ossia dividendo ciascun elemento di $\boldsymbol{\mathcal{B}}_1$ per la propria norma (dove la norma è quella indotta dal prodotto interno).

Cominciamo con il calcolare la norma di $\mathbf{u_1}$, $\mathbf{u_2}$ ed $\mathbf{u_3}$:

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{u_1}\| &= \sqrt{(\mathbf{u_1}|\mathbf{u_1})} = \sqrt{1} = 1\\
\|\mathbf{u_2}\| &= \sqrt{(\mathbf{u_2}|\mathbf{u_2})} = \sqrt{4} = 2\\
\|\mathbf{u_3}\| &= \sqrt{(\mathbf{u_3}|\mathbf{u_3})} = \sqrt{(\begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 1+2i\end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 1+2i\end{pmatrix})} =\\
&= \sqrt{\overline{0}\cdot 0 + \overline{0}\cdot 0 + \overline{0}\cdot 0 + \overline{(1+2i)}\cdot(1+2i)} =\\
&= \sqrt{0 + 0 + 0 + (1-2i)(1+2i)} = \sqrt{1-(2i)^2} = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}
\end{aligned}$$

Allora

$$\mathcal{B}^* = \{\mathbf{u_1}^* = \frac{\mathbf{u_1}}{\|\mathbf{u_1}\|}; \mathbf{u_2}^* = \frac{\mathbf{u_2}}{\|\mathbf{u_2}\|}; \mathbf{u_3}^* = \frac{\mathbf{u_3}}{\|\mathbf{u_3}\|}\} =$$

$$= \left\{\mathbf{u_1}^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \mathbf{u_2}^* = \begin{pmatrix} 0 & i \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \mathbf{u_3}^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{1+2i}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}\right\}$$

è una base ortonormale di W.

$\boxed{\mathbf{3}}$ Siano

$$V_1 = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ i \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle \quad \text{e} \quad V_2 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 1 \\ i \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} i \\ -1 \\ i \\ -1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Si trovino basi di $V_1^\perp$ e $V_2^\perp$.

(a) Se $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 \\ i \\ 2 \end{pmatrix}$ allora $C(\mathbf{A}) = V_1$ e $V_1^\perp = C(\mathbf{A})^\perp = N(\mathbf{A}^H)$.

Facendo un'eliminazione di Gauss su $\mathbf{A}^H$ otteniamo:

$$\mathbf{A}^H = \begin{pmatrix} 0 & -i & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_1(i)} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2i \end{pmatrix} = \mathbf{U}$$

Poichè $N(\mathbf{A}^H) = N(\mathbf{U})$ e

$$\dim(N(\mathbf{U})) = \text{numero delle colonne di}\mathbf{U} - \text{rango di } \mathbf{U} = 3 - 1 = 2,$$

una base di $V_1^\perp$ ha 2 elementi (d'altra parte $\dim V_1$=1 e $\dim\mathbb{C}^3$=3, per cui a priori potevamo dedurre che $\dim V_1^\perp = \dim\mathbb{C}^3 - \dim V_1 = 3 - 1 = 2$).

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in N(\mathbf{A}^H) = N(\mathbf{U}) \quad \Longleftrightarrow \quad x_2 + 2ix_3 = 0$$

quindi

$$N(\mathbf{U}) = \left\{ \begin{pmatrix} h \\ -2ik \\ k \end{pmatrix} | h, k \in \mathbb{C} \right\}.$$

Una base di $V_1^\perp$ è

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ -2i \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

(b) Se $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & i & 1 & 0 \\ i & -1 & 0 & 1 \\ 1 & i & 1 & 0 \\ i & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, allora $C(\mathbf{A}) = V_2$ e $V_2^{\perp} = C(\mathbf{A})^{\perp} = N(\mathbf{A}^H)$.

Facendo un'eliminazione di Gauss su $\mathbf{A}^H$ otteniamo:

$$\mathbf{A}^H = \begin{pmatrix} 1 & -i & 1 & -i \\ -i & -1 & -i & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{31}(-1)E_{21}(i)} \begin{pmatrix} 1 & -i & 1 & -i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & i \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{23}}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -i & 1 & -i \\ 0 & i & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{42}(-1)E_2(-i)} \begin{pmatrix} 1 & -i & 1 & -i \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{U}$$

Poichè $N(\mathbf{A}^H) = N(\mathbf{U})$ e

$$\dim(N(\mathbf{A})) = \text{numero delle colonne di } \mathbf{U} - \text{rango di } \mathbf{U} = 4 - 2 = 2,$$

una base di $V_2^{\perp}$ ha 2 elementi.

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in N(\mathbf{A}^H) = N(\mathbf{U}) \iff \begin{cases} x_1 - ix_2 + x_3 - ix_4 = 0 \\ x_2 + x_4 = 0 \end{cases}$$

Quindi

$$V_2^{\perp} = N(\mathbf{A}^H) = \left\{ \begin{pmatrix} -h \\ -k \\ h \\ k \end{pmatrix} | h, k \in \mathbb{C} \right\}$$

ed una sua base è

$$\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

$\boxed{\mathbf{4}}$ Siano W e $(\cdot|\cdot) : M_2(\mathbb{C}) \times M_2(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ come nell'esercizio 2. Si trovi il complemento ortogonale $W^{\perp}$ di W in $M_2(\mathbb{C})$ rispetto al prodotto interno $(\cdot|\cdot)$.

Il complemento ortogonale di W in $M_2(\mathbb{C})$ è

$$W^{\perp} = \{\mathbf{v} \in M_2(\mathbb{C}) | (\mathbf{a}|\mathbf{v}) = 0 \quad \forall \mathbf{w} \in W\}.$$

Dal momento che

$$\left\{ \mathbf{v_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \mathbf{v_2} = \begin{pmatrix} 1 & 2i \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \mathbf{v_3} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1+2i \end{pmatrix} \right\}$$

è un insieme di generatori di W, allora

$$W^{\perp} = \{\mathbf{v} \in M_2(\mathbb{C}) | (\mathbf{v_i}|\mathbf{v}) = 0 \quad \text{ per } i = 1,2,3\}.$$

Se $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{C})$,

$$\begin{aligned}
(\mathbf{v_1}|\mathbf{v}) &= (\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} | \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix}) = \overline{1} \cdot a_1 + \overline{0} \cdot a_2 + \overline{0} \cdot a_3 + \overline{0} \cdot a_4 = \\
&= 1 \cdot a_1 + 0 \cdot a_2 + 0 \cdot a_3 + 0 \cdot a_4 = \\
&= a_1 \\
(\mathbf{v_2}|\mathbf{v}) &= (\begin{pmatrix} 1 & 2i \\ 0 & 0 \end{pmatrix} | \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix}) = \overline{1} \cdot a_1 + \overline{2i} \cdot a_2 + \overline{0} \cdot a_3 + \overline{0} \cdot a_4 = \\
&= 1 \cdot a_1 - 2i \cdot a_2 + 0 \cdot a_3 + 0 \cdot a_4 = \\
&= a_1 - 2ia_2 \\
(\mathbf{v_3}|\mathbf{v}) &= (\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1+2i \end{pmatrix} | \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix}) = \overline{0} \cdot a_1 + \overline{1} \cdot a_2 + \overline{0} \cdot a_3 + \overline{1+2i} \cdot a_4 = \\
&= 0 \cdot a_1 + 1 \cdot a_2 + 0 \cdot a_3 + (1-2i) \cdot a_4 = \\
&= a_2 + (1-2i)a_4
\end{aligned}$$

Dunque

$$\begin{aligned}
W^{\perp} &= \left\{ \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{C}) \middle| a_1 = a_1 - 2ia_2 = a_2 + (1-2i)a_4 = 0 \right\} = \\
&= \left\{ \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{C}) \middle| a_1 = a_2 = a_4 = 0 \right\} = \\
&= \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a & 0 \end{pmatrix} \middle| a \in \mathbb{C} \right\}.
\end{aligned}$$

$\boxed{\mathbf{5}}$ Si calcoli la proiezione ortogonale di $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 2i \\ -6 \\ 8i \\ 10 \end{pmatrix}$ sul sottospazio

$$U = \left\langle \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 8i \\ 0 \\ -i \\ 1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 7i \\ -1 \\ -i \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

di $\mathbb{C}^3$.

$\boxed{I}$ Troviamo una base ortonormale di U.

Poniamo

$$\mathbf{w_1} = \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{w_2} = \begin{pmatrix} 8i \\ 0 \\ -i \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{w_3} = \begin{pmatrix} 7i \\ -1 \\ -i \\ 1 \end{pmatrix}$$

e calcoliamo una base di $C(\mathbf{A})$ dove $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{w_1} & \mathbf{w_2} & \mathbf{w_3} \end{pmatrix}$.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{w_1} & \mathbf{w_2} & \mathbf{w_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i & 8i & 7i \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -i & -i \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{21}(-1)E_1(-i)}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 8 & 7 \\ 0 & -8 & -8 \\ 0 & -i & -i \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{42}(-1)E_{32}(i)E_2(-\frac{1}{8})} \begin{pmatrix} 1 & 8 & 7 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{U}$$

Poichè $\mathbf{U}$ ha come colonne dominanti la 1^a e la 2^a, allora una base di $C(\mathbf{A}) = U$ è $\{\mathbf{w_1}; \mathbf{w_2}\}$.

Applichiamo ora l'algoritmo di Gram-Schmidt a

$$\left\{ \mathbf{v_1} = \mathbf{w_1} = \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} ; \mathbf{v_2} = \mathbf{w_2} = \begin{pmatrix} 8i \\ 0 \\ -i \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

per trovare una base ortogonale di U.

$$\mathbf{u_1} = \mathbf{v_1} = \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{u_2} = \mathbf{v_2} - \alpha_{12}\mathbf{u_1}, \qquad \mathbf{u_1} \neq \mathbf{0} \quad \Longrightarrow \quad \alpha_{12} = \frac{(\mathbf{u_1}|\mathbf{v_2})}{(\mathbf{u_1}|\mathbf{u_1})}$$

$$(\mathbf{u_1}|\mathbf{v_2}) = \mathbf{u_1}^H \mathbf{v_2} = \begin{pmatrix} -i & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8i \\ 0 \\ -i \\ 1 \end{pmatrix} = (-i)8i = 8$$

$$(\mathbf{u_1}|\mathbf{u_1}) = \mathbf{u_1}^H \mathbf{u_1} = \begin{pmatrix} -i & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = (-i)i + 1 = 2$$

$$\Longrightarrow \quad \alpha_{12} = \frac{8}{2} = 4$$

$$\mathbf{u_2} = \mathbf{v_2} - \alpha_{12}\mathbf{u_1} =$$

$$= \mathbf{v_2} - 4\mathbf{u_1} =$$

$$= \begin{pmatrix} 8i \\ 0 \\ -i \\ 1 \end{pmatrix} - 4 \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4i \\ -4 \\ -i \\ 1 \end{pmatrix}$$

Dunque $\left\{ \mathbf{u_1} = \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} ; \mathbf{u_2} = \begin{pmatrix} 4i \\ -4 \\ -i \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ è una base ortogonale di U.

Costruiamo base ortonormale di U normalizzando la base ortogonale $\{\mathbf{u_1}; \mathbf{u_2}\}$, ossia dividendo ciascun suo elemento per la sua norma euclidea.
Cominciamo con il calcolare la norma euclidea di $\mathbf{u_1}$ ed $\mathbf{u_2}$:

$$\|\mathbf{u_1}\|_2 = \sqrt{(\mathbf{u_1}|\mathbf{u_1})} = \sqrt{2}$$

$$\|\mathbf{u_2}\|_2 = \sqrt{(\mathbf{u_2}|\mathbf{u_2})} = \sqrt{\begin{pmatrix} -4i & -4 & i & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4i \\ -4 \\ -i \\ 1 \end{pmatrix}} = \sqrt{16 + 16 + 1 + 1} = \sqrt{34}$$

Allora

$$\mathcal{B} = \{\mathbf{u_1}^* = \frac{\mathbf{u_1}}{\|\mathbf{u_1}\|_2}; \mathbf{u_2}^* = \frac{\mathbf{u_2}}{\|\mathbf{u_2}\|_2}\} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \frac{1}{\sqrt{34}} \begin{pmatrix} 4i \\ -4 \\ -i \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

è una base ortonormale di U.

La proiezione ortogonale di $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 2i \\ -6 \\ 8i \\ 10 \end{pmatrix}$ su U è

$$P_U(\mathbf{v}) = (\mathbf{u_1}^*|\mathbf{v})\mathbf{u_1}^* + (\mathbf{u_2}^*|\mathbf{v})\mathbf{u_2}^*$$

dove

$$\begin{aligned} (\mathbf{u_1}^*|\mathbf{v}) &= (\mathbf{u_1}^*)^H \mathbf{v} = \tfrac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -i & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2i \\ -6 \\ 8i \\ 10 \end{pmatrix} = \\ &= \tfrac{1}{\sqrt{2}}((-i)2i - 6) = -\tfrac{4}{\sqrt{2}} \\ (\mathbf{u_2}^*|\mathbf{v}) &= (\mathbf{u_2}^*)^H \mathbf{v} = \tfrac{1}{\sqrt{34}} \begin{pmatrix} -4i & -4 & i & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2i \\ -6 \\ 8i \\ 10 \end{pmatrix} = \\ &= \tfrac{1}{\sqrt{34}}(-4i2i - 4(-6) + i8i + 10) = \sqrt{34} \end{aligned}$$

Quindi

$$\begin{aligned} P_U(\mathbf{v}) &= -\tfrac{4}{\sqrt{2}}\mathbf{u_1}^* + \sqrt{34}\mathbf{u_2}^* = -\tfrac{4}{\sqrt{2}}\tfrac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \sqrt{34}\tfrac{1}{\sqrt{34}} \begin{pmatrix} 4i \\ -4 \\ -i \\ 1 \end{pmatrix} = \\ &= -2 \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4i \\ -4 \\ -i \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2i \\ -6 \\ -i \\ 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

$\boxed{\mathbf{6}}$ Siano W e $(\cdot|\cdot) : M_2(\mathbb{C}) \times M_2(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ come nell'esercizio 2. Si calcoli la proiezione ortogonale $P_W(\mathbf{v})$ di

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 & i \\ 2i & 3\sqrt{5} \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{C})$$

su W rispetto al prodotto interno $(\cdot|\cdot)$.

Nell'esercizio 2 abbiamo trovato che

$$\left\{ \mathbf{u_1}^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \mathbf{u_2}^* = \begin{pmatrix} 0 & i \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \mathbf{u_3}^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{1+2i}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \right\}$$

è una base ortonormale di W (rispetto al prodotto interno $(\cdot|\cdot)$ ed alla norma da esso indotta su $M_2(\mathbb{C})$).

La proiezione ortogonale di $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 & i \\ 2i & 3\sqrt{5} \end{pmatrix}$ su W è

$$P_W(\mathbf{v}) = (\mathbf{u_1}^*|\mathbf{v})\mathbf{u_1}^* + (\mathbf{u_2}^*|\mathbf{v})\mathbf{u_2}^* + (\mathbf{u_3}^*|\mathbf{v})\mathbf{u_3}^*$$

dove

$$\begin{aligned}
(\mathbf{u_1}^*|\mathbf{v}) &= (\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} | \begin{pmatrix} 1 & i \\ 2i & 3\sqrt{5} \end{pmatrix}) = \\
&= \overline{1} \cdot 1 + \overline{0} \cdot i + \overline{0} \cdot 2i + \overline{0} \cdot 3\sqrt{5} = \\
&= 1 \cdot 1 + 0 \cdot i + 0 \cdot 2i + 0 \cdot 3\sqrt{5} = 1 \\
(\mathbf{u_2}^*|\mathbf{v}) &= (\begin{pmatrix} 0 & i \\ 0 & 0 \end{pmatrix} | \begin{pmatrix} 1 & i \\ 2i & 3\sqrt{5} \end{pmatrix}) = \\
&= \overline{0} \cdot 1 + \overline{i} \cdot i + \overline{0} \cdot 2i + \overline{0} \cdot 3\sqrt{5} = \\
&= 0 \cdot 1 - i \cdot i + 0 \cdot 2i + 0 \cdot 3\sqrt{5} = -i^2 = 1 \\
(\mathbf{u_3}^*|\mathbf{v}) &= (\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{1+2i}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} | \begin{pmatrix} 1 & i \\ 2i & 3\sqrt{5} \end{pmatrix}) = \\
&= \overline{0} \cdot 1 + \overline{0} \cdot i + \overline{0} \cdot 2i + \overline{\tfrac{1+2i}{\sqrt{5}}} \cdot 3\sqrt{5} = \\
&= 0 \cdot 1 + 0 \cdot i + 0 \cdot 2i + \tfrac{1-2i}{\sqrt{5}} \cdot 3\sqrt{5} == 3(1-2i)
\end{aligned}$$

Quindi

$$\begin{aligned}
P_W(\mathbf{v}) &= \mathbf{u_1}^* + \mathbf{u_2}^* + 3(1-2i)\mathbf{u_3}^* = \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & i \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 3(1-2i) \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{1+2i}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} 1 & i \\ 0 & \frac{3(1-2i)(1+2i)}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & i \\ 0 & \frac{3 \cdot 5}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & i \\ 0 & 3\sqrt{5} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$\boxed{7}$ Sia $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & i & -2 & 9i \\ i & -1 & -2i & 0 \\ -1 & -i & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

Si trovino una decomposizione $\mathbf{Q_0R_0}$-non-normalizzata ed una decomposizione $\mathbf{QR}$-normalizzata per $\mathbf{A}$.

$\boxed{I}$ Poniamo

$$\mathbf{v_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v_2} = \begin{pmatrix} i \\ -1 \\ -i \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v_3} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2i \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v_4} = \begin{pmatrix} 9i \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

e applichiamo l'algoritmo di Gram-Schimdt a $\{\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \mathbf{v_3}, \mathbf{v_4}\}$.

Otterremo 4 vettori, $\mathbf{u_1}, \mathbf{u_2}, \mathbf{u_3}, \mathbf{u_4}$. Per sapere se alcuni degli $\mathbf{u_i}$ saranno nulli, e in tal caso quali, troviamo innanzitutto una forma ridotta di Gauss $\mathbf{U}$ di $\mathbf{A}$: le eventuali colonne libere di $\mathbf{U}$ corrisponderanno agli $\mathbf{u_i}$ nulli.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & i & -2 & 9i \\ i & -1 & -2i & 0 \\ -1 & -i & 2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{31}(1)E_{21}(-i)} \begin{pmatrix} 1 & i & -2 & 9i \\ 0 & 0 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 9i \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\xrightarrow{E_{32}(-9i)E_2(1/9)} \begin{pmatrix} 1 & i & -2 & 9i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{U}$$

Poichè $\mathbf{U}$ ha come colonne libere la 2^a e la 3^a, applicando l'algoritmo di Gram-Schimdt a $\{\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \mathbf{v_3}, \mathbf{v_4}\}$ otterremo $\mathbf{u_2} = \mathbf{0} = \mathbf{u_3}$.

$$\boxed{\mathbf{u_1} = \mathbf{v_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ -1 \end{pmatrix}}$$

$$\mathbf{u_2} = \mathbf{v_2} - \alpha_{12}\mathbf{u_1}, \qquad \mathbf{u_1} \neq \mathbf{0} \quad \Longrightarrow \quad \alpha_{12} = \frac{(\mathbf{u_1}|\mathbf{v_2})}{(\mathbf{u_1}|\mathbf{u_1})}$$

$$(\mathbf{u_1}|\mathbf{v_2}) = \mathbf{u_1}^H\mathbf{v_2} = \begin{pmatrix} 1 & -i & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i \\ -1 \\ -i \end{pmatrix} =$$

$$= i + i + i = 3i$$

$$(\mathbf{u_1}|\mathbf{u_1}) = \mathbf{u_1}^H\mathbf{u_1} = \begin{pmatrix} 1 & -i & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ -1 \end{pmatrix} =$$

$$= 1 + 1 + 1 = 3$$

$$\Longrightarrow \quad \boxed{\alpha_{12} = 3i/3 = i}$$

$$\mathbf{u_2} = \mathbf{v_2} - \alpha_{12}\mathbf{u_1} =$$

$$= \mathbf{v_2} - i\mathbf{u_1} =$$

$$= \begin{pmatrix} i \\ -1 \\ -i \end{pmatrix} - i \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ -1 \end{pmatrix} = \boxed{\mathbf{0} = \mathbf{u_2}}$$

$$\mathbf{u_3} = \mathbf{v_3} - \alpha_{13}\mathbf{u_1} - \alpha_{23}\mathbf{u_2},$$

$$\mathbf{u_1} \neq \mathbf{0} \quad \Longrightarrow \quad \alpha_{13} = \frac{(\mathbf{u_1}|\mathbf{v_3})}{(\mathbf{u_1}|\mathbf{u_1})}$$

$$(\mathbf{u_1}|\mathbf{v_3}) = \mathbf{u_1}^H\mathbf{v_3} = \begin{pmatrix} 1 & -i & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ -2i \\ 2 \end{pmatrix} =$$

$$= -2 - 2 - 2 = -6$$

$$\Longrightarrow \quad \boxed{\alpha_{13} = -6/3 = -2}$$

$$\mathbf{u_2} = \mathbf{0} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{\alpha_{23} = 0}$$

$$\mathbf{u_3} = \mathbf{v_3} - \alpha_{13}\mathbf{u_1} - \alpha_{23}\mathbf{u_2} =$$

$$= \mathbf{v_3} + 2\mathbf{u_1} =$$

$$= \begin{pmatrix} -2 \\ -2i \\ 2 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ -1 \end{pmatrix} = \boxed{\mathbf{0} = \mathbf{u_3}}$$

$$\mathbf{u_4} = \mathbf{v_4} - \alpha_{14}\mathbf{u_1} - \alpha_{24}\mathbf{u_2} - \alpha_{34}\mathbf{u_3},$$

$$\mathbf{u_1} \neq \mathbf{0} \quad \Longrightarrow \quad \alpha_{14} = \frac{(\mathbf{u_1}|\mathbf{v_4})}{(\mathbf{u_1}|\mathbf{u_1})}$$

$$(\mathbf{u_1}|\mathbf{v_4}) = \mathbf{u_1}^H\mathbf{v_4} = \begin{pmatrix} 1 & -i & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 9i \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 9i$$

$$\Longrightarrow \quad \boxed{\alpha_{14} = 9i/3 = 3i}$$

$$\mathbf{u_2} = \mathbf{0} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{\alpha_{24} = 0}$$

$$\mathbf{u_3} = \mathbf{0} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{\alpha_{34} = 0}$$

$$\mathbf{u_4} = \mathbf{v_4} - 3i\mathbf{u_1} = \begin{pmatrix} 9i \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - 3i \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ -1 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 6i \\ 3 \\ 3i \end{pmatrix} = \mathbf{u_4}}$$

$\boxed{II}$ Poniamo

$$\mathbf{Q_0} = \begin{pmatrix} \mathbf{u_1} & \mathbf{u_2} & \mathbf{u_3} & \mathbf{u_4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 6i \\ i & 0 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 0 & 3i \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{R_0} = \begin{pmatrix} 1 & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \alpha_{14} \\ 0 & 1 & \alpha_{23} & \alpha_{24} \\ 0 & 0 & 1 & \alpha_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & i & -2 & 3i \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$\mathbf{A} = \mathbf{Q_0}\mathbf{R_0}$ è una decomposizione $\mathbf{Q_0}\mathbf{R_0}$-non-normalizzata per $\mathbf{A}$.

$\boxed{III}$ Sia $\mathbf{Q_1}$ la matrice che si ottiene dalla matrice $\mathbf{Q_0}$, ottenuta al punto (II), togliendo tutte le (eventuali) colonne nulle di $\mathbf{Q_0}$. In questo caso $\mathbf{Q_0}$ ha due colonne nulle, la 2^a e la 3^a, quindi

$$\mathbf{Q_1} = \begin{pmatrix} \mathbf{u_1} & \mathbf{u_4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 6i \\ i & 3 \\ -1 & 3i \end{pmatrix}.$$

Sia $\mathbf{R_1}$ la matrice che si ottiene dalla matrice $\mathbf{R_0}$, ottenuta al punto (II), togliendo le righe di $\mathbf{R_0}$ che corrispondono alle colonne che sono state tolte da $\mathbf{Q_0}$ per ottenere $\mathbf{Q_1}$. In questo caso, poichè per ottenere $\mathbf{Q_1}$ sono state tolte da $\mathbf{Q_0}$ la 2^a e la 3^a colonna, allora per ottenere $\mathbf{R_1}$ si toglie da $\mathbf{R_0}$ la 2^a e la 3^a riga. Dunque

$$\mathbf{R_1} = \begin{pmatrix} 1 & i & -2 & 3i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$\boxed{IV}$ Costruiamo la matrice diagonale $\mathbf{D}$ che ha sulla diagonale la norma euclidea delle colonne di $\mathbf{Q_1}$ (ossia delle colonne non nulle di $\mathbf{Q_0}$), e calcoliamo $\mathbf{D}^{-1}$.

Poichè

$$\begin{aligned} ||\mathbf{u_1}||_2 &= \sqrt{(\mathbf{u_1}|\mathbf{u_1})} = \sqrt{3}, \\ ||\mathbf{u_4}||_2 &= \sqrt{(\mathbf{u_4}|\mathbf{u_4})} = \sqrt{\mathbf{u_4}^H\mathbf{u_4}} = \sqrt{\begin{pmatrix} -6i & 3 & -3i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6i \\ 3 \\ 3i \end{pmatrix}} = \\ &= \sqrt{36+9+9} = \sqrt{54}, \end{aligned}$$

allora

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} ||\mathbf{u_1}||_2 & 0 \\ 0 & ||\mathbf{u_4}||_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 0 \\ 0 & \sqrt{54} \end{pmatrix}.$$

Quindi

$$\mathbf{D}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{54}} \end{pmatrix}.$$

$\boxed{V}$ Poniamo

$$\mathbf{Q} = \mathbf{Q_1}\mathbf{D}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 6i \\ i & 3 \\ -1 & 3i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{54}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{6}{\sqrt{54}}\,i \\ \frac{1}{\sqrt{3}}\,i & \frac{3}{\sqrt{54}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{3}{\sqrt{54}}\,i \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{R} = \mathbf{D}\mathbf{R_1} = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 0 \\ 0 & \sqrt{54} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & i & -2 & 3i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & \sqrt{3}\,i & -2\sqrt{3} & 3\sqrt{3}\,i \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{54} \end{pmatrix}.$$

Allora **A**=**QR** è una decomposizione **QR**-normalizzata di **A**.

$\boxed{\mathbf{8}}$ Siano $\mathbf{0} \neq \mathbf{v} \in \mathbb{R}^m$, $\alpha \in \mathbb{R}$ ed $\mathbf{A}(\alpha) = \begin{pmatrix} \mathbf{v} & \alpha\mathbf{v} \end{pmatrix}$. Si trovino:

(a) una decomposizione $\mathbf{Q_0}\mathbf{R_0}$-non-normalizzata per $\mathbf{A}(\alpha)$;

(b) una decomposizione **QR**-normalizzata per $\mathbf{A}(\alpha)$.

(a) $\boxed{I}$ Poniamo $\mathbf{v_1} = \mathbf{v}$ e $\mathbf{v_2} = \alpha\mathbf{v}$ e applichiamo l'algoritmo di Gram-Schimdt a $\{\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}\}$.

$$\mathbf{u_1} = \mathbf{v_1} = \mathbf{v}$$

$$\mathbf{u_2} = \mathbf{v_2} - \alpha_{12}\mathbf{u_1},$$

$$\mathbf{u_1} \neq \mathbf{0} \implies \alpha_{12} = \frac{(\mathbf{u_1}|\mathbf{v_2})}{(\mathbf{u_1}|\mathbf{u_1})} = \frac{(\mathbf{v}|\alpha\mathbf{v})}{(\mathbf{v}|\mathbf{v})} = \alpha\frac{(\mathbf{v}|\mathbf{v})}{(\mathbf{v}|\mathbf{v})} = \alpha$$

$$\mathbf{u_2} = \mathbf{v_2} - \alpha_{12}\mathbf{u_1} = \alpha\mathbf{v} - \alpha\mathbf{v} = \mathbf{0}$$

$\boxed{II}$ Poniamo $\mathbf{Q_0} = \begin{pmatrix} \mathbf{u_1} & \mathbf{u_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{v} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$ ed $\mathbf{R_0} = \begin{pmatrix} 1 & \alpha_{12} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

$\mathbf{A} = \mathbf{Q_0}\mathbf{R_0} = \begin{pmatrix} \mathbf{v} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ è una decomposizione $\mathbf{Q_0}\mathbf{R_0}$-non-normalizzata per **A**.

(b) $\boxed{III}$ Sia $\mathbf{Q_1}$ la matrice che si ottiene dalla matrice $\mathbf{Q_0}$, ottenuta al punto (II), togliendo tutte le (eventuali) colonne nulle di $\mathbf{Q_0}$. In questo caso $\mathbf{Q_0}$

ha un'unica colonna nulla, la 2^a, quindi $\mathbf{Q_1} = \mathbf{v}$. Sia $\mathbf{R_1}$ la matrice che si ottiene dalla matrice $\mathbf{R_0}$, ottenuta al punto (II), togliendo le righe di $\mathbf{R_0}$ che corrispondono alle colonne che sono state tolte da $\mathbf{Q_0}$ per ottenere $\mathbf{Q_1}$. In questo caso, poichè per ottenere $\mathbf{Q_1}$ è stata tolta da $\mathbf{Q_0}$ la 2^a colonna, allora per ottenere $\mathbf{R_1}$ si toglie da $\mathbf{R_0}$ la 2^a riga. Dunque $\mathbf{R_1} = \begin{pmatrix} 1 & \alpha \end{pmatrix}$. $\mathbf{Q}$ si ottiene da $\mathbf{Q_1}$ normalizzando $\mathbf{v}$, per cui $\mathbf{Q} = \frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|_2}$ ed $\mathbf{R} = \|\mathbf{v}\|_2 \mathbf{R_1} = \begin{pmatrix} \|\mathbf{v}\|_2 & \alpha\|\mathbf{v}\|_2 \end{pmatrix}$.

$\mathbf{A} = \mathbf{QR} = \frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|_2} \cdot \begin{pmatrix} \|\mathbf{v}\|_2 & \alpha\|\mathbf{v}\|_2 \end{pmatrix}$ è una decomposizione $\mathbf{QR}$-normalizzata per $\mathbf{A}$.