G. Parmeggiani, 17/12/2019 **Algebra Lineare, a.a. 2019/2020,**

Scuola di Scienze - Corsi di laurea: **Statistica per l'economia e l'impresa**
Statistica per le tecnologie e le scienze

Studenti: **numero di MATRICOLA PARI**

Svolgimento degli Esercizi per casa 11 (prima parte)

$\boxed{1}$ Si calcoli il determinante delle seguenti matrici:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2-i & 1 & 0 \\ 2 & 1+i & 3 \\ i & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} i & 1 & 1+i \\ -1 & 1 & 2 \\ i & i & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1+i \end{pmatrix}.$$

Conviene sviluppare $\mathrm{Det}(\mathbf{A})$ rispetto alla riga o alla colonna che contengono piú zeri. In questo caso conviene svilupparlo ripetto alla 1^a riga oppure alla 3^a colonna. Facciamolo in entrambi i modi, per esercizio.

Rispetto alla 1^a riga:

$$\begin{aligned} \mathrm{Det}(\mathbf{A}) &= (2-i)(-1)^{1+1}\mathrm{Det}\begin{pmatrix} 1+i & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + (-1)^{1+2}\mathrm{Det}\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ i & 1 \end{pmatrix} = \\ &= (2-i)(1+i-3) - (2-3i) = (2-i)(-2+i) - 2 + 3i = \\ &= -4 + 2i + 2i - i^2 - 2 + 3i = -5 + 7i \end{aligned}$$

Rispetto alla 3^a colonna:

$$\begin{aligned} \mathrm{Det}(\mathbf{A}) &= 3(-1)^{2+3}\mathrm{Det}\begin{pmatrix} 2-i & 1 \\ i & 1 \end{pmatrix} + (-1)^{3+3}\mathrm{Det}\begin{pmatrix} 2-i & 1 \\ 2 & 1+i \end{pmatrix} = \\ &= -3(2-i-i) + [(2-i)(1+i) - 2] = \\ &= -3(2-2i) + 2 - i + 2i - i^2 - 2 = \\ &= -6 + 6i + 2 - i + 2i + 1 - 2 = -5 + 7i \end{aligned}$$

Sviluppiamo $\mathrm{Det}(\mathbf{B})$, ad esempio rispetto alla 1^a colonna:

$$\mathrm{Det}\begin{pmatrix} i & 1 & 1+i \\ -1 & 1 & 2 \\ i & i & 1 \end{pmatrix} = i(-1)^{1+1}\mathrm{Det}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ i & 1 \end{pmatrix} +$$

$$+(-1)(-1)^{2+1}\mathrm{Det}\begin{pmatrix} 1 & 1+i \\ i & 1 \end{pmatrix} + i(-1)^{3+1}\mathrm{Det}\begin{pmatrix} 1 & 1+i \\ 1 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$= i(1-2i) + [1 - i(1+i)] + i[2-(1+i)] =$$

$$= i - 2i^2 + 1 - i - i^2 + 2i - i - i^2 =$$

$$= i + 2 + 1 - i + 1 + 2i - i + 1 =$$

$$= 5 + i$$

Infine sviluppiamo $\mathrm{Det}(\mathbf{C})$ ad esempio rispetto alla 3^a riga:

$$\mathrm{Det}\mathbf{C} = \mathrm{Det}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1+i \end{pmatrix} = (-1)^{3+1}\mathrm{Det}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1+i \end{pmatrix} +$$

$$+(-1)^{3+2}\mathrm{Det}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1+i \end{pmatrix} + (-1)^{3+3}\mathrm{Det}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+i \end{pmatrix}$$

Sviluppiamo il primo addendo rispetto alla 2^a colonna, mentre il secondo ed il terzo addendo rispetto alla 1^a riga.

$$\mathrm{Det}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1+i \end{pmatrix} = (-1)^{1+2}\mathrm{Det}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1+i \end{pmatrix} + 2(-1)^{2+2}\mathrm{Det}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1+i \end{pmatrix} =$$

$$= -(1+i-1) + 2(1+i-1) = -i + 2i = i$$

$$\mathrm{Det}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1+i \end{pmatrix} = (-1)^{1+2}\mathrm{Det}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1+i \end{pmatrix} + (-1)^{1+3}\mathrm{Det}\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= -[2(1+i)-1] + (0-2) = -(2+2i-1) - 2 = -1 - 2i - 2 = -3 - 2i$$

$$\mathrm{Det}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+i \end{pmatrix} = (-1)^{1+2}\mathrm{Det}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1+i \end{pmatrix} + (-1)^{1+3}\mathrm{Det}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= -[2(1+i)-1] + 2 - 1 = -(2+2i-1) + 1 = -1 - 2i + 1 = -2i$$

Quindi

$$\operatorname{Det}(\mathbf{C}) = i - (-3-2i) - 2i = i + 3 + 2i - 2i = 3 + i.$$

$\boxed{\mathbf{2}}$ Sia $\quad \mathbf{A}(\alpha) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \alpha & 0 & 1 \\ 4 & \alpha-1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 3\alpha-1 & 1 \end{pmatrix}, \quad$ dove $\alpha \in \mathbb{R}$.

Si dica per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ si ha che $\mathbf{A}(\alpha)$ è non singolare (sugg.: si calcoli il determinante $\operatorname{Det}(\mathbf{A}(\alpha))$ di $\mathbf{A}(\alpha)$).

$$
\begin{aligned}
(1) \qquad \operatorname{Det}(\mathbf{A}(\alpha)) &= \operatorname{Det}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \alpha & 0 & 1 \\ 4 & \alpha-1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 3\alpha-1 & 1 \end{pmatrix} = \\
&= (-1)^{3+4}(3\alpha-1)\operatorname{Det}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & \alpha & 1 \\ 4 & \alpha-1 & 1 \end{pmatrix} = \\
&= -(3\alpha-1)\Big[(-1)^{1+1}2\operatorname{Det}\begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ \alpha-1 & 1 \end{pmatrix} + (-1)^{1+3}\operatorname{Det}\begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ 4 & \alpha-1 \end{pmatrix}\Big] = \\
&= -(3\alpha-1)\Big[2(\alpha-\alpha+1) - 4\alpha\Big] = -2(3\alpha-1)(1-2\alpha)
\end{aligned}
$$

Poichè $\mathbf{A}(\alpha)$ è non singolare se e solo se $\operatorname{Det}(\mathbf{A}(\alpha)) \neq 0$, dal punto (1) otteniamo che

$$\mathbf{A}(\alpha) \text{ è non singolare} \quad \Longleftrightarrow \quad -2(3\alpha-1)(1-2\alpha) \neq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \alpha \neq \frac{1}{3}, \frac{1}{2}.$$

$\boxed{\mathbf{3}}$ Sia $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & -2i \\ 2i & 0 \end{pmatrix}$.

Si calcolino: gli autovalori di $\mathbf{A}$, le loro molteplicità algebriche e le loro molteplicità geometriche.

Il polinomio caratteristico di $\mathbf{A}$ è:

$$
\begin{aligned}
p_{\mathbf{A}}(x) &= \operatorname{Det}(\mathbf{A} - x\mathbf{I}_2) = \operatorname{Det}\begin{pmatrix} -x & -2i \\ 2i & -x \end{pmatrix} = (-x)^2 - (-2i)\cdot 2i = x^2 + 4i^2 = \\
&= x^2 - 4.
\end{aligned}
$$

Gli autovalori di $\mathbf{A}$ sono gli zeri del polinomio carattaristico $p_{\mathbf{A}}(x)$ di $\mathbf{A}$, ossia le soluzioni dell'equazione $p_{\mathbf{A}}(x) = 0$. Dal momento che le soluzioni dell'equazione

$$x^2 - 4 = 0$$

sono -2 e 2, gli autovalori di $\mathbf{A}$ sono:

$$\lambda_1 = -2 \quad \text{e} \quad \lambda_2 = 2.$$

Siano m_1 ed m_2 le molteplicità algebriche e d_1 e d_2 le molteplicità geometriche di λ_1 e λ_2 rispettivamente. Da

$$p_{\mathbf{A}}(x) = x^2 - 4 = (x+2)(x-2) = (x-\lambda_1)^{m_1}(x-\lambda_2)^{m_2}$$

otteniamo:

$$m_1 = 1 \quad \text{e} \quad m_2 = 1.$$

Infine, da $1 \leq d_i \leq m_i = 1$ per $i = 1, 2$, otteniamo:

$$d_1 = 1 \quad \text{e} \quad d_2 = 1.$$

$\boxed{\mathbf{4}}$ Sia $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2i \\ 0 & -8 & 0 \\ 2i & 0 & -6 \end{pmatrix}$.

Si calcolino: gli autovalori di $\mathbf{A}$, le loro molteplicità algebriche e le loro molteplicità geometriche.

Il polinomio caratteristico di $\mathbf{A}$ è:

$$\begin{aligned} p_{\mathbf{A}}(x) &= \mathrm{Det}(\mathbf{A} - x\mathbf{I}_3) = \mathrm{Det}\begin{pmatrix} -2-x & 0 & 2i \\ 0 & -8-x & 0 \\ 2i & 0 & -6-x \end{pmatrix} = \\ &= (-1)^{2+2}(-8-x)\mathrm{Det}\begin{pmatrix} -2-x & 2i \\ 2i & -6-x \end{pmatrix} = \\ &= (-8-x)[(-2-x)(-6-x) - 4i^2] = \\ &= (-8-x)(12 + 6x + 2x + x^2 + 4) = \\ &= (-8-x)(x^2 + 8x + 16) = \\ &= (-8-x)(x+4)^2. \end{aligned}$$

Gli autovalori di $\mathbf{A}$ sono gli zeri del polinomio caratteristico $p_{\mathbf{A}}(x)$ di $\mathbf{A}$, ossia le soluzioni dell'equazione $p_{\mathbf{A}}(x) = 0$. Dal momento che le soluzioni dell'equazione

$$(-8 - x)(x + 4)^2 = 0$$

sono -8 e -4, gli autovalori di $\mathbf{A}$ sono:

$$\lambda_1 = -8 \quad \text{e} \quad \lambda_2 = -4.$$

Siano m_1 ed m_2 le molteplicità algebriche e d_1 e d_2 le molteplicità geometriche di λ_1 e λ_2 rispettivamente. Da

$$p_{\mathbf{A}}(x) = (-8 - x)(-4 - x)^2 = (\lambda_1 - x)^{m_1}(\lambda_2 - x)^{m_2}$$

otteniamo:

$$m_1 = 1 \quad \text{e} \quad m_2 = 2.$$

Infine, da $1 \leq d_i \leq m_i = 1$ per $i = 1, 2$, otteniamo:

$$d_1 = 1 \quad \text{e} \quad 1 \leq d_2 \leq 2.$$

$$\begin{aligned} d_2 &= \dim(E_{\mathbf{A}}(\lambda_2)) = \dim(E_{\mathbf{A}}(-4)) = \dim(N(\mathbf{A} + 4\mathbf{I}_3)) = \\ &= [\text{numero delle colonne di } (\mathbf{A} + 4\mathbf{I}_3)] - [\text{rk}(\mathbf{A} + 4\mathbf{I}_3)] = \\ &= 3 - [\text{rk}(\mathbf{A} + 4\mathbf{I}_3)]. \end{aligned}$$

Da una E.G. su $\quad \mathbf{A} + 4\mathbf{I}_3 \quad$ otteniamo:

$$\mathbf{A} + 4\mathbf{I}_3 \quad = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2i \\ 0 & -4 & 0 \\ 2i & 0 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{31}(-2i)E_1(\frac{1}{2})} \begin{pmatrix} 1 & 0 & i \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\xrightarrow{E_2(-\frac{1}{4})} \begin{pmatrix} 1 & 0 & i \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

per cui

$$\text{rk}(\mathbf{A} + 4\mathbf{I}_3) = \text{rk}\Big(\begin{pmatrix} 1 & 0 & i \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Big) = 2$$

e quindi

$$d_2 = 3 - 2 = 1.$$

$\boxed{\mathbf{5}}$ Si trovino basi degli autospazi delle matrici considerate negli esercizi 3 e 4.

Le matrici considerate negli esercizi 3 e 4 sono:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & -2i \\ 2i & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2i \\ 0 & -8 & 0 \\ 2i & 0 & -6 \end{pmatrix},$$

ed abbiamo calcolato:

matrice	**autovalori**	**molteplicità geometriche**
$\mathbf{A}$	$\lambda_1 = -2$ e $\lambda_2 = 2$	$d_1 = d_2 = 1$
$\mathbf{B}$	$\lambda_1 = -8$ e $\lambda_2 = -4$	$d_1 = d_2 = 1$

In particolare, ciascuno degli autospazi $E_{\mathbf{A}}(\lambda_i)$ ed $E_{\mathbf{B}}(\lambda_i)$ per $i = 1, 2$ ha dimensione 1, per cui una sua base ha un unico elemento.

$$E_{\mathbf{A}}(\lambda_1) = E_{\mathbf{A}}(-2) = N(\mathbf{A} + 2\mathbf{I}_2) = N\Big(\begin{pmatrix} 2 & -2i \\ 2i & 2 \end{pmatrix}\Big)$$

Da una E.G. su $\quad \mathbf{A} + 2\mathbf{I}_2 \quad : \begin{pmatrix} 2 & -2i \\ 2i & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{21}(-2i)E_1(\frac{1}{2})} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, segue

$$E_{\mathbf{A}}(-2) = N\Big(\begin{pmatrix} 2 & -2i \\ 2i & 2 \end{pmatrix}\Big) = N\Big(\begin{pmatrix} 1 & -i \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\Big) = \Big\{\begin{pmatrix} ih \\ h \end{pmatrix} \Big| h \in \mathbb{C}\Big\},$$

e quindi $\Big\{\begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}\Big\}$ è una base di $E_{\mathbf{A}}(\lambda_1) = E_{\mathbf{A}}(-2)$.

$$E_{\mathbf{A}}(\lambda_2) = E_{\mathbf{A}}(2) = N(\mathbf{A} - 2\mathbf{I}_2) = N\Big(\begin{pmatrix} -2 & -2i \\ 2i & -2 \end{pmatrix}\Big)$$

Da una E.G. su $\quad \mathbf{A} - 2\mathbf{I}_2 \quad : \begin{pmatrix} -2 & -2i \\ 2i & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{21}(-2i)E_1(-\frac{1}{2})} \begin{pmatrix} 1 & i \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, segue

$$E_{\mathbf{A}}(2) = N\Big(\begin{pmatrix} -2 & -2i \\ 2i & -2 \end{pmatrix} \Big) = N\Big(\begin{pmatrix} 1 & i \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Big) = \Big\{ \begin{pmatrix} -ih \\ h \end{pmatrix} \Big| h \in \mathbb{C} \Big\},$$

e quindi $\Big\{ \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix} \Big\}$ è una base di $E_{\mathbf{A}}(\lambda_2) = E_{\mathbf{A}}(2)$.

$$E_{\mathbf{B}}(\lambda_1) = E_{\mathbf{B}}(-8) = N(\mathbf{B} + 8\mathbf{I}_3) = N\Big(\begin{pmatrix} 6 & 0 & 2i \\ 0 & 0 & 0 \\ 2i & 0 & 2 \end{pmatrix} \Big)$$

Da una E.G. su $\quad \mathbf{B} + 8\mathbf{I}_3 \quad$:

$$\begin{pmatrix} 6 & 0 & 2i \\ 0 & 0 & 0 \\ 2i & 0 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{31}(-2i)E_1(\frac{1}{6})} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{3}i \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{8}{3} \end{pmatrix} \xrightarrow{E_2(\frac{3}{8})E_{23}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{3}i \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

segue che

$$E_{\mathbf{B}}(-8) = N\Big(\begin{pmatrix} 6 & 0 & 2i \\ 0 & 0 & 0 \\ 2i & 0 & 2 \end{pmatrix} \Big) = N\Big(\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{3}i \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Big) = \Big\{ \begin{pmatrix} 0 \\ h \\ 0 \end{pmatrix} \Big| h \in \mathbb{C} \Big\},$$

e quindi $\Big\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Big\}$ è una base di $E_{\mathbf{B}}(\lambda_1) = E_{\mathbf{B}}(-8)$.

$$E_{\mathbf{B}}(\lambda_2) = E_{\mathbf{B}}(-4) = N(\mathbf{B} + 4\mathbf{I}_3) = N\Big(\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2i \\ 0 & -4 & 0 \\ 2i & 0 & -2 \end{pmatrix} \Big)$$

Da una E.G. su $\quad \mathbf{B} + 4\mathbf{I}_3 \quad$:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2i \\ 0 & -4 & 0 \\ 2i & 0 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{31}(-2i)E_1(\frac{1}{2})} \begin{pmatrix} 1 & 0 & i \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_2(-\frac{1}{4})} \begin{pmatrix} 1 & 0 & i \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

segue che

$$E_{\mathbf{B}}(-4) = N\Big(\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2i \\ 0 & -4 & 0 \\ 2i & 0 & -2 \end{pmatrix} \Big) = N\Big(\begin{pmatrix} 1 & 0 & i \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Big) = \Big\{ \begin{pmatrix} -ih \\ 0 \\ h \end{pmatrix} \Big| h \in \mathbb{C} \Big\},$$

e quindi $\Big\{ \begin{pmatrix} -i \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Big\}$ è una base di $E_{\mathbf{B}}(\lambda_2) = E_{\mathbf{B}}(-4)$.