G. Parmeggiani, 7/1/2020 **Algebra Lineare, a.a. 2019/2020**,

Scuola di Scienze - Corsi di laurea: **Statistica per l'economia e l'impresa**
Statistica per le tecnologie e le scienze

Studenti: **numero di MATRICOLA PARI**

Svolgimento degli Esercizi per casa 11 (seconda parte)

$\boxed{\mathbf{6}}$ Sia $\quad \mathbf{A}(\alpha) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 1 & \alpha & -1 \\ 7 & 0 & -5 \end{pmatrix}, \quad$ dove $\alpha \in \mathbb{C}$.

(a) Per ogni $\alpha \in \mathbb{C}$ si calcolino gli autovalori di $\mathbf{A}(\alpha)$ e le loro molteplicità algebriche e geometriche.

(b) Siano $\mathbf{A} = \mathbf{A}(2)$ e $\mathbf{B} = \mathbf{A}(-8)$ le matrici che si ottengono ponendo $\alpha = 2$ ed $\alpha = -8$ rispettivamente. Si trovino basi degli autospazi di $\mathbf{A}$ e di $\mathbf{B}$.

(a) Gli autovalori di $\mathbf{A}(\alpha)$ sono gli zeri del suo polinomio caratteristico. Il polinomio caratteristico di $\mathbf{A}(\alpha)$ è:

$$\begin{aligned}
p_{\mathbf{A}(\alpha)}(x) &= \mathrm{Det}(\mathbf{A}(\alpha) - x\mathbf{I}_3) = \\
&= \mathrm{Det}\begin{pmatrix} -1-x & 0 & 3 \\ 1 & \alpha - x & -1 \\ 7 & 0 & -5-x \end{pmatrix} = \\
&= (-1)^{2+2}(\alpha - x)\mathrm{Det}\begin{pmatrix} -1-x & 3 \\ 7 & -5-x \end{pmatrix} = \\
&= (\alpha - x)[(-1-x)(-5-x) - 21] = \\
&= (\alpha - x)(5 + 5x + x + x^2 - 21) = \\
&= (\alpha - x)(x^2 + 6x - 16).
\end{aligned}$$

L'equazione $\alpha - x = 0$ ha un'unica souzione: α.

L'equazione $x^2 + 6x - 16 = 0$ ha due soluzioni distinte: -8 e 2.

Quindi otteniamo:

matrice	**autovalori**	**molteplicità algebriche**	**molteplicità geometriche**
$\mathbf{A}(\alpha)$ $\alpha \notin \{-8, 2\}$	$\lambda_1 = -8$ $\lambda_2 = 2$ $\lambda_3 = \alpha$	$m_1 = 1$ $m_2 = 1$ $m_3 = 1$	$d_1 = 1$ $d_2 = 1$ $d_3 = 1$
$\mathbf{A} = \mathbf{A}(2)$	$\lambda_1 = -8$ $\lambda_2 = 2$	$m_1 = 1$ $m_2 = 2$	$d_1 = 1$ $1 \leq d_2 \leq 2$
$\mathbf{B} = \mathbf{A}(-8)$	$\lambda_1 = -8$ $\lambda_2 = 2$	$m_1 = 2$ $m_2 = 1$	$1 \leq d_1 \leq 2$ $d_2 = 1$

Per finire di rispondere alla domanda (a) resta da calcolare:

$$d_2 = \dim(E_{\mathbf{A}(2)}(\lambda_2)) = \dim(E_{\mathbf{A}}(2)) \quad \text{e}$$

$$d_1 = \dim(E_{\mathbf{A}(-8)}(\lambda_1)) = \dim(E_{\mathbf{B}}(-8)).$$

dove

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}(2) \quad \text{e} \quad \mathbf{B} = \mathbf{A}(-8).$$

$$E_{\mathbf{A}}(2) = N(\mathbf{A} - 2\mathbf{I}_3) = N\Big(\begin{pmatrix} -3 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 7 & 0 & -7 \end{pmatrix} \Big)$$

Da una E.G. su $\mathbf{A} - 2\mathbf{I}_3$:

$$\begin{pmatrix} -3 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 7 & 0 & -7 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{31}(-7)E_{21}(-1)E_1(-\frac{1}{3})} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

segue che

$$\begin{aligned} d_2 &= \dim(E_{\mathbf{A}}(2)) = \dim(N(\mathbf{A} - 2\mathbf{I}_3) = \\ &= [(\text{numero di colonne di } \mathbf{A} - 2\mathbf{I}_3) - \text{rk}(\mathbf{A} - 2\mathbf{I}_3)] = 3 - 1 = 2. \end{aligned}$$

$$E_{\mathbf{B}}(-8)=N(\mathbf{B}+8\mathbf{I}_3)=N\Big(\begin{pmatrix}7&0&3\\1&0&-1\\7&0&3\end{pmatrix}\Big)$$

Da una E.G. su $\quad \mathbf{B}+8\mathbf{I}_3 \quad$:

$$\begin{pmatrix}7&0&3\\1&0&-1\\7&0&3\end{pmatrix}\xrightarrow{E_{31}(-7)E_{21}(-7)E_{12}}\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&0&10\\0&0&10\end{pmatrix}\xrightarrow{E_{32}(-10)E_2(\frac{1}{10})}\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix},$$

segue che

$$\begin{aligned}d_1 &= \dim(E_{\mathbf{B}}(-8))=\dim(N(\mathbf{B}+8\mathbf{I}_3)=\\ &=[(\text{numero di colonne di }\mathbf{B}+8\mathbf{I}_3)-\text{rk}(\mathbf{B}+8\mathbf{I}_3)]=3-2=1.\end{aligned}$$

(b) Al Punto (a) abbiamo visto che la matrice $\mathbf{A}=\mathbf{A}(2)$ ha autovalori $\lambda_1=-8$ e $\lambda_2=2$ con molteplicità geometriche $d_1=1$ e $d_2=2$.

$$E_{\mathbf{A}}(-8)=N(\mathbf{A}+8\mathbf{I}_3)=N\Big(\begin{pmatrix}7&0&3\\1&10&-1\\7&0&3\end{pmatrix}\Big)$$

Da una E.G. su $\quad \mathbf{A}+8\mathbf{I}_3 \quad$:

$$\begin{pmatrix}7&0&3\\1&10&-1\\7&0&3\end{pmatrix}\xrightarrow{E_{31}(-7)E_{21}(-1)E_1(\frac{1}{7})}\begin{pmatrix}1&0&\frac{3}{7}\\0&10&-\frac{10}{7}\\0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow{E_2(\frac{1}{10})}\begin{pmatrix}1&0&\frac{3}{7}\\0&1&-\frac{1}{7}\\0&0&0\end{pmatrix},$$

segue che

$$E_{\mathbf{A}}(-8)=N\Big(\begin{pmatrix}7&0&3\\1&10&-1\\7&0&3\end{pmatrix}\Big)=N\Big(\begin{pmatrix}1&0&\frac{3}{7}\\0&1&-\frac{1}{7}\\0&0&0\end{pmatrix}\Big)=\Big\{\begin{pmatrix}-\frac{3}{7}h\\\frac{1}{7}h\\h\end{pmatrix}\Big|h\in\mathbb{C}\Big\},$$

e $\Big\{\begin{pmatrix}-\frac{3}{7}\\\frac{1}{7}\\1\end{pmatrix}\Big\}$ è una base di $E_{\mathbf{A}}(-8)$.

Al punto (a) abbiamo visto che

$$E_{\mathbf{A}}(2) = N\Big(\begin{pmatrix} -3 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 7 & 0 & -7 \end{pmatrix} \Big) = N\Big(\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Big),$$

per cui

$$E_{\mathbf{A}}(2) = \Big\{ \begin{pmatrix} k \\ h \\ k \end{pmatrix} \Big| h, k \in \mathbb{C} \Big\} \quad \text{e} \quad \Big\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Big\} \quad \text{è una base di } E_{\mathbf{A}}(2).$$

Al punto (a) abbiamo anche visto che la matrice $\mathbf{B} = \mathbf{A}(-8)$ ha autovalori $\lambda_1 = -8$ e $\lambda_2 = 2$ con molteplicità geometriche $d_1 = 1$ e $d_2 = 1$.

$$E_{\mathbf{B}}(2) = N(\mathbf{B} - 2\mathbf{I}_3) = N\Big(\begin{pmatrix} -3 & 0 & 3 \\ 1 & -10 & -1 \\ 7 & 0 & -7 \end{pmatrix} \Big)$$

Da una E.G. su $\quad \mathbf{B} - 2\mathbf{I}_3 \quad$:

$$\begin{pmatrix} -3 & 0 & 3 \\ 1 & -10 & -1 \\ 7 & 0 & -7 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{31}(-7)E_{21}(-1)E_1(-\frac{1}{3})} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_2(-\frac{1}{10})} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

segue che

$$E_{\mathbf{B}}(2) = N\Big(\begin{pmatrix} -3 & 0 & 3 \\ 1 & -10 & -1 \\ 7 & 0 & -7 \end{pmatrix} \Big) = N\Big(\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Big) = \Big\{ \begin{pmatrix} h \\ 0 \\ h \end{pmatrix} \Big| h \in \mathbb{C} \Big\},$$

e $\Big\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Big\}$ è una base di $E_{\mathbf{B}}(2)$.

Al punto (a) abbiamo visto che

$$E_{\mathbf{B}}(-8) = N\Big(\begin{pmatrix} 7 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 7 & 0 & 3 \end{pmatrix} \Big) = N\Big(\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Big),$$

per cui

$$E_{\mathbf{B}}(-8) = \Big\{ \begin{pmatrix} 0 \\ h \\ 0 \end{pmatrix} \Big| h \in \mathbb{C} \Big\} \quad \text{e} \quad \Big\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Big\} \quad \text{è una base di } E_{\mathbf{B}}(-8).$$