G. Parmeggiani, 7/1/2020 | **Algebra Lineare, a.a. 2019/2020**,

Scuola di Scienze - Corsi di laurea: | **Statistica per l'economia e l'impresa**
Statistica per le tecnologie e le scienze

Studenti: | **numero di MATRICOLA PARI**

Svolgimento degli Esercizi per casa 12 (prima parte)

$\boxed{\mathbf{1}}$ Sia $\quad \mathbf{A}(\alpha) = \begin{pmatrix} \frac{\alpha}{2}+1 & \frac{\alpha}{2} & 0 \\ \frac{\alpha}{2} & \frac{\alpha}{2}+1 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}, \quad$ dove $\alpha \in \mathbb{C}$.

(a) Per quali $\alpha \in \mathbb{C}$ si ha che 3 è un autovalore di $\mathbf{A}(\alpha)$?

(b) Per quali $\alpha \in \mathbb{C}$ la matrice $\mathbf{A}(\alpha)$ ha due autovaori uguali ? In questi casi dire se $\mathbf{A}(\alpha)$ è o non è diagonalizzabile.

(a) Il polinomio caratteristico di $\mathbf{A}(\alpha)$ è:

$$\begin{aligned} p_{\mathbf{A}(\alpha)}(x) &= \mathrm{Det}(\mathbf{A}(\alpha) - x\mathbf{I}_3) = \\ &= \mathrm{Det}\begin{pmatrix} \frac{\alpha}{2}+1-x & \frac{\alpha}{2} & 0 \\ \frac{\alpha}{2} & \frac{\alpha}{2}+1-x & 0 \\ 0 & 0 & \alpha - x \end{pmatrix} = \\ &= (-1)^{3+3}(\alpha - x)\mathrm{Det}\begin{pmatrix} \frac{\alpha}{2}+1-x & \frac{\alpha}{2} \\ \frac{\alpha}{2} & \frac{\alpha}{2}+1-x \end{pmatrix} = \\ &= (\alpha - x)\Big[\Big(\frac{\alpha}{2}+1-x\Big)^2 - \Big(\frac{\alpha}{2}\Big)^2\Big] = \\ &= (\alpha - x)\Big(\frac{\alpha}{2}+1-x-\frac{\alpha}{2}\Big)\Big(\frac{\alpha}{2}+1-x+\frac{\alpha}{2}\Big) = \\ &= (\alpha - x)(1-x)(\alpha+1-x). \end{aligned}$$

Gi autovalori di $\mathbf{A}(\alpha)$ sono gli zeri del polinomio caratteristico $p_{\mathbf{A}(\alpha)}(x)$, ossia le soluzioni dell'equazione:

$$(\alpha - x)(1-x)(\alpha+1-x) = 0,$$

cioè 1, α ed $\alpha + 1$.

Dunque

$$\begin{aligned}
3 \text{ è autovalore di } \mathbf{A}(\alpha) \quad &\Longleftrightarrow \quad \alpha = 3 \quad \text{oppure} \quad \alpha + 1 = 3 \\
&\Longleftrightarrow \quad \alpha = 3 \quad \text{oppure} \quad \alpha = 2.
\end{aligned}$$

(b) Dai conti svolti in (a), otteniamo che

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}(\alpha) \quad \text{ha due autovalori uguali} \quad &\Longleftrightarrow \quad \alpha = 1 \quad \text{oppure} \quad \alpha + 1 = 1 \\
&\Longleftrightarrow \quad \alpha = 1 \quad \text{oppure} \quad \alpha = 0.
\end{aligned}$$

Studiamo i casi $\alpha = 1$ ed $\alpha = 0$. Abbiamo:

matrice	**autovalori**	**molteplicità algebriche**	**molteplicità geometriche**
$\mathbf{A}(1)$	$\lambda_1 = 1$ $\lambda_2 = 2$	$m_1 = 2$ $m_2 = 1$	$1 \leq d_1 \leq 2$ $d_2 = 1$
$\mathbf{A}(0)$	$\lambda_1 = 0$ $\lambda_2 = 1$	$m_1 = 1$ $m_2 = 2$	$d_1 = 1$ $1 \leq d_2 \leq 2$

Dal momento che una matrice è diagonalizzabile se e solo se ciascun suo autovalore ha le due molteplicità, algebrica e geometrica, uguali tra loro, abbiamo:

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}(1) \quad \text{è diagonalizzabile} \quad &\Longleftrightarrow \quad d_1 = \dim(E_{\mathbf{A}(1)}(1)) = m_1 = 2 \\
\mathbf{A}(0) \quad \text{è diagonalizzabile} \quad &\Longleftrightarrow \quad d_2 = \dim(E_{\mathbf{A}(0)}(1)) = m_2 = 2.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
d_1 &= \dim(E_{\mathbf{A}(1)}(1)) = \dim(N(\mathbf{A}(1) - \mathbf{I}_3) = \\
&= [\text{numero di colonne di } \mathbf{A}(1) - \mathbf{I}_3] - \mathrm{rk}(\mathbf{A}(1) - \mathbf{I}_3) = \\
&= 3 - \mathrm{rk}(\mathbf{A}(1) - \mathbf{I}_3) \\
d_2 &= \dim(E_{\mathbf{A}(0)}(1)) = \dim(N(\mathbf{A}(0) - \mathbf{I}_3) = \\
&= [\text{numero di colonne di } \mathbf{A}(0) - \mathbf{I}_3] - \mathrm{rk}(\mathbf{A}(0) - \mathbf{I}_3) = \\
&= 3 - \mathrm{rk}(\mathbf{A}(0) - \mathbf{I}_3)
\end{aligned}$$

Da una E.G. su $\mathbf{A}(1) - \mathbf{I}_3$:

$$\mathbf{A}(1) - \mathbf{I}_3 = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \mathbf{I}_3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{21}(-\frac{1}{2})E_1(2)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

per cui $\mathrm{rk}(\mathbf{A}(1) - \mathbf{I}_3) = 1$, e quindi

$$d_1 = \dim(E_{\mathbf{A}(1)}(1)) = 3 - 1 = 2.$$

In conclusione, $\mathbf{A}(1)$ è diagonalizzabile.

Da una E.G. su $\mathbf{A}(0) - \mathbf{I}_3$:

$$\mathbf{A}(0) - \mathbf{I}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \mathbf{I}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_1(-1)E_{13}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

per cui $\mathrm{rk}(\mathbf{A}(0) - \mathbf{I}_3) = 1$, e quindi

$$d_2 = \dim(E_{\mathbf{A}(0)}(1)) = 3 - 1 = 2.$$

In conclusione, anche $\mathbf{A}(0)$ è diagonalizzabile.

$\boxed{\mathbf{2}}$ Si dica se le matrici considerate negli esercizi 3 e 4 degli "Esercizi 11"sono diagonalizzabili oppure no.

Le matrici considerate negli esercizi 3 e 4 degli "Esercizi 11"sono:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & -2i \\ 2i & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2i \\ 0 & -8 & 0 \\ 2i & 0 & -6 \end{pmatrix},$$

matrice	**autovalori**	**molteplicità algebriche**	**molteplicità geometriche**
A	$\lambda_1 = -2$ $\lambda_2 = 2$	$m_1 = 1$ $m_2 = 1$	$d_1 = 1$ $d_2 = 1$
B	$\lambda_1 = -8$ $\lambda_2 = -4$	$m_1 = 1$ $m_2 = 2$	$d_1 = 1$ $d_2 = 1$

ed abbiamo calcolato:

Ogni autovalore di **A** ha molteplicità algebrica e geometrica uguali (**A** ha autovalori distinti, per cui ogni suo autovalore ha molteplicità algebrica uguale ad 1 e conseguentemente, essendo

$$1 \leq \text{ molteplicità geometrica } \leq \text{ molteplicità algebrica } (= 1)$$

anche molteplicità geometrica uguale ad 1).

Dunque **A** è diagonalizzabile.

La matrice **B** ha un autovalore (l'autovalore $\lambda_2 = -4$) in cui la molteplicità algebrica ($m_2 = 2$) è diversa dalla molteplicità geometrica ($d_2 = 1$).

Dunque **B** non è diagonalizzabile.

$\boxed{\mathbf{3}}$ Sia $\mathbf{A}(\alpha)$ la matrice considerata nell'esercizio 6 degli "Esercizi 11". Per quegli $\alpha \in \mathbb{C}$ per cui $\mathbf{A}(\alpha)$ è diagonalizzabile, si trovi una diagonalizzazione di $\mathbf{A}(\alpha)$.

La matrice considerata nell'esercizio 6 degli "Esercizi 11" è $\mathbf{A}(\alpha) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 1 & \alpha & -1 \\ 7 & 0 & -5 \end{pmatrix}$, dove $\alpha \in \mathbb{C}$, ed abbiamo calcolato:

Solo per $\alpha = -8$ la matrice $\mathbf{A}(\alpha) = \mathbf{A}(-8) = \mathbf{B}$ ha un autovalore ($\lambda_1 = -8$) con molteplicità algebrica ($m_1 = 2$) diversa dalla molteplicità geometrica ($d_1 = 1$). Quindi

$$\mathbf{A}(\alpha) \text{ è diagonalizzabile} \quad \Longleftrightarrow \quad \alpha \neq -8.$$

Troviamo una diagonalizzazione per $\mathbf{A}(\alpha)$ per ogni $\alpha \neq -8$.

matrice	autovalori	molteplicità algebriche	molteplicità geometriche
$\mathbf{A}(\alpha)$ $\alpha \notin \{-8, 2\}$	$\lambda_1 = -8$ $\lambda_2 = 2$ $\lambda_3 = \alpha$	$m_1 = 1$ $m_2 = 1$ $m_3 = 1$	$d_1 = 1$ $d_2 = 1$ $d_3 = 1$
$\mathbf{A} = \mathbf{A}(2)$	$\lambda_1 = -8$ $\lambda_2 = 2$	$m_1 = 1$ $m_2 = 2$	$d_1 = 1$ $d_2 = 2$
$\mathbf{B} = \mathbf{A}(-8)$	$\lambda_1 = -8$ $\lambda_2 = 2$	$m_1 = 2$ $m_2 = 1$	$d_1 = 1$ $d_2 = 1$

$\boxed{\text{caso} \quad \alpha \notin \{\mathbf{-8}, \mathbf{2}\} :}$

$$E_{\mathbf{A}(\alpha)}(\lambda_1) = E_{\mathbf{A}(\alpha)}(-8) = N(\mathbf{A}(\alpha) + 8\mathbf{I}_3) = N\Big(\begin{pmatrix} 7 & 0 & 3 \\ 1 & \alpha+8 & -1 \\ 7 & 0 & 3 \end{pmatrix} \Big)$$

Da una E.G. su $\quad \mathbf{A}(\alpha) + 8\mathbf{I}_3 \quad$:

$$\begin{pmatrix} 7 & 0 & 3 \\ 1 & \alpha+8 & -1 \\ 7 & 0 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{31}(-7)E_{21}(-1)E_1(\frac{1}{7})} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{3}{7} \\ 0 & \alpha+8 & -\frac{10}{7} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to$$

$$\xrightarrow{\alpha\neq-8: \quad E_2(\frac{1}{\alpha+8})} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{3}{7} \\ 0 & 1 & -\frac{10}{7(\alpha+8)} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

segue che

$$\begin{aligned} E_{\mathbf{A}(\alpha)}(-8) \quad &= N\Big(\begin{pmatrix} 7 & 0 & 3 \\ 1 & \alpha+8 & -1 \\ 7 & 0 & 3 \end{pmatrix} \Big) = N\Big(\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{3}{7} \\ 0 & 1 & -\frac{10}{7(\alpha+8)} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Big) = \\ &= \Big\{ \begin{pmatrix} -\frac{3}{7}h \\ \frac{10}{7(\alpha+8)}h \\ h \end{pmatrix} \Big| h \in \mathbb{C} \Big\}, \end{aligned}$$

e quindi $\left\{ \mathbf{v_1} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{7} \\ \frac{10}{7(\alpha+8)} \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ è una base di $E_{\mathbf{A}(\alpha)}(\lambda_1) = E_{\mathbf{A}(\alpha)}(-8)$.

$$E_{\mathbf{A}(\alpha)}(\lambda_2) = E_{\mathbf{A}(\alpha)}(2) = N(\mathbf{A}(\alpha) - 2\mathbf{I}_3) = N\Big(\begin{pmatrix} -3 & 0 & 3 \\ 1 & \alpha-2 & -1 \\ 7 & 0 & -7 \end{pmatrix} \Big)$$

Da una E.G. su $\quad \mathbf{A}(\alpha) - 2\mathbf{I}_3 \quad$:

$$\begin{pmatrix} -3 & 0 & 3 \\ 1 & \alpha-2 & -1 \\ 7 & 0 & -7 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{31}(-7)E_{21}(-1)E_1(-\frac{1}{3})} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & \alpha-2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\xrightarrow{\alpha\neq 2:\quad E_2(\frac{1}{\alpha-2})} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

segue che

$$E_{\mathbf{A}(\alpha)}(2) = N\Big(\begin{pmatrix} -3 & 0 & 3 \\ 1 & \alpha-2 & -1 \\ 7 & 0 & -7 \end{pmatrix} \Big) = N\Big(\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Big) = \Big\{ \begin{pmatrix} h \\ 0 \\ h \end{pmatrix} \Big| h \in \mathbb{C} \Big\},$$

e quindi $\left\{ \mathbf{v_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ è una base di $E_{\mathbf{A}(\alpha)}(\lambda_2) = E_{\mathbf{A}(\alpha)}(2)$.

$$E_{\mathbf{A}(\alpha)}(\lambda_3) = E_{\mathbf{A}(\alpha)}(\alpha) = N(\mathbf{A}(\alpha) - \alpha\mathbf{I}_3) = N\Big(\begin{pmatrix} -1-\alpha & 0 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 7 & 0 & -5-\alpha \end{pmatrix} \Big)$$

Da una E.G. su $\quad \mathbf{A}(\alpha) - \alpha\mathbf{I}_3 \quad$:

$$\begin{pmatrix} -1-\alpha & 0 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 7 & 0 & -5-\alpha \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{12}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1-\alpha & 0 & 3 \\ 7 & 0 & -5-\alpha \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{31}(-7)E_{21}(1+\alpha)}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2-\alpha \\ 0 & 0 & 2-\alpha \end{pmatrix} \xrightarrow{\alpha\neq 2:\quad E_{32}(-2+\alpha)E_2(\frac{1}{\alpha-2})} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

segue che

$$E_{\mathbf{A}(\alpha)}(\alpha) = N\Big(\begin{pmatrix} -1-\alpha & 0 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 7 & 0 & -5-\alpha \end{pmatrix}\Big) = N\Big(\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\Big) =$$

$$= \Big\{ \begin{pmatrix} 0 \\ h \\ 0 \end{pmatrix} \Big| h \in \mathbb{C} \Big\},$$

e quindi $\Big\{ \mathbf{v_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Big\}$ è una base di $E_{\mathbf{A}(\alpha)}(\lambda_3) = E_{\mathbf{A}(\alpha)}(\alpha)$.

Dunque se $\alpha \notin \{-8, 2\}$, una diagonalizzazione di $\mathbf{A}(\alpha)$ è:

$$\mathbf{A}(\alpha) = \mathbf{S}(\alpha)\mathbf{D}(\alpha)\mathbf{S}(\alpha)^{-1} \quad \text{con}$$

$$\mathbf{D}(\alpha) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix} \quad \text{ed}$$

$$\mathbf{S}(\alpha) = \begin{pmatrix} \mathbf{v_1} & \mathbf{v_2} & \mathbf{v_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{7} & 1 & 0 \\ \frac{10}{7(\alpha+8)} & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$\boxed{\text{caso} \quad \alpha = \mathbf{2}:}$ Posto $\mathbf{A} = \mathbf{A}(2)$, nell'Esercizio 6 degli "Esercizi 11" abbiamo visto che

$$\Big\{ \mathbf{v_1} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{7} \\ \frac{1}{7} \\ 1 \end{pmatrix} \Big\} \text{è una base di } E_{\mathbf{A}}(\lambda_1) = E_{\mathbf{A}}(-8) \text{ e}$$

$$\Big\{ \mathbf{w_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} ; \mathbf{w_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Big\} \text{è una base di } E_{\mathbf{A}}(\lambda_2) = E_{\mathbf{A}}(2).$$

Dunque se $\alpha = 2$, una diagonalizzazione di $\mathbf{A} = \mathbf{A}(2)$ è:

$$\mathbf{A} = \mathbf{S}\mathbf{D}\mathbf{S}^{-1} \quad \text{con}$$

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{ed}$$

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} \mathbf{v_1} & \mathbf{w_1} & \mathbf{w_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{7} & 1 & 0 \\ \frac{1}{7} & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

N.B.: Per ogni $\alpha \neq -8$, una diagonalizzazione di $\mathbf{A}(\alpha)$ è:

$$\mathbf{A}(\alpha) = \mathbf{S}(\alpha)\mathbf{D}(\alpha)\mathbf{S}(\alpha)^{-1} \quad \text{con}$$

$$\mathbf{D}(\alpha) = \begin{pmatrix} -8 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix} \quad \text{ed} \quad \mathbf{S}(\alpha) = \begin{pmatrix} -\frac{3}{7} & 1 & 0 \\ \frac{10}{7(\alpha+8)} & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$\boxed{4}$ Sia $\quad \mathbf{A}(\alpha) = \begin{pmatrix} 2 & i \\ i & \alpha \end{pmatrix}, \quad$ dove $\alpha \in \mathbb{C}$.

(b) Per quali $\alpha \in \mathbb{C}$ si ha che di $\mathbf{A}(\alpha)$ è diagonalizzabile ?

(b) **Poichè $\mathbf{A}(\alpha)$ è una matrice 2×2 NON SCALARE, allora $\mathbf{A}(\alpha)$ è diagonalizzabile se e solo se ha i (due) autovalori distinti.**

INFATTI: Sia $\mathbf{A}$ 2×2. Allora $p_{\mathbf{A}}(x)$ ha grado 2.

- **caso 1:** $p_{\mathbf{A}}(x) = (x - \lambda_1)(x - \lambda_2)$ con $\lambda_1 \neq \lambda_2$. $\mathbf{A}$ è diagonalizzabile.
- **caso 2:** $p_{\mathbf{A}}(x) = (x - \lambda)^2$. $\mathbf{A}$ è diagonalizzabile se e solo se $\dim E_{\mathbf{A}}(\lambda) = 2$. Dal momento che $E_{\mathbf{A}}(\lambda) = N(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}_2)$, in questo caso

$\mathbf{A}$ è diagonalizzabile $\iff \operatorname{rk}(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}_2) = 0 \iff \mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}_2 = \mathbf{O} \iff \mathbf{A} = \lambda\mathbf{I}_2$.

Quindi se $\mathbf{A}$ è 2×2 NON SCALARE, allora $\mathbf{A}$ è diagonalizzabile se e solo se i suoi due autovalori sono distinti.

Il polinomio caratteristico di $\mathbf{A}(\alpha)$ è:

$$\begin{aligned} p_{\mathbf{A}(\alpha)}(x) &= \operatorname{Det}(\mathbf{A}(\alpha) - x\mathbf{I}_2) = \operatorname{Det}\begin{pmatrix} 2-x & i \\ i & \alpha - x \end{pmatrix} = \\ &= (2-x)(\alpha - x) - i^2 = \\ &= 2\alpha - \alpha x - 2x + x^2 + 1 = \\ &= x^2 - (\alpha+2)x + (2\alpha+1). \end{aligned}$$

Quindi gli autovalori di $\mathbf{A}(\alpha)$ sono:

$$\lambda_1 = \tfrac{\alpha+2+\sqrt{(\alpha+2)^2-4(2\alpha+1)}}{2} = \tfrac{\alpha+2+\sqrt{\alpha^2+4+4\alpha-8\alpha-4}}{2} = \tfrac{\alpha+2+\sqrt{\alpha^2-4\alpha}}{2} \quad \text{e}$$

$$\lambda_2 = \tfrac{\alpha+2-\sqrt{(\alpha+2)^2-4(2\alpha+1)}}{2} = \tfrac{\alpha+2-\sqrt{\alpha^2+4+4\alpha-8\alpha-4}}{2} = \tfrac{\alpha+2-\sqrt{\alpha^2-4\alpha}}{2}.$$

Quindi

$$\lambda_1 \neq \lambda_2 \iff \sqrt{\alpha^2-4\alpha} \neq 0 \iff \alpha^2 - 4\alpha \neq 0 \iff \alpha \notin \{0,4\},$$

e concludiamo che

$$\mathbf{A}(\alpha) \quad \text{è diagonalizzabile} \quad \iff \quad \alpha \notin \{0,4\},$$

$\boxed{\mathbf{5}}$ Sia $\quad \mathbf{A}(\alpha) = \begin{pmatrix} -2 & 2i & 0 \\ 2i & 2+\alpha & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}, \quad$ dove $\alpha \in \mathbb{R}$.

(b) Per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ si ha che di $\mathbf{A}(\alpha)$ è diagonalizzabile ?

(b) $\mathbf{A}(\alpha)$ è diagonalizzabile se e solo se ciascun suo autovalore ha le due molteplicità, algebrica e geometrica, uguali tra loro. Calcoliamo gli autovalori di $\mathbf{A}(\alpha)$ e le loro molteplicità.

Il polinomio caratteristico di $\mathbf{A}(\alpha)$ è:

$$\begin{aligned} p_{\mathbf{A}(\alpha)}(x) \quad &= \mathrm{Det}(\mathbf{A}(\alpha) - x\mathbf{I}_3) = \mathrm{Det}\begin{pmatrix} -2-x & 2i & 0 \\ 2i & 2+\alpha-x & 0 \\ 3i & 0 & \alpha-x \end{pmatrix} = \\ &= (-1)^{3+3}(\alpha-x)\mathrm{Det}\begin{pmatrix} -2-x & 2i \\ 2i & 2+\alpha-x \end{pmatrix} = \\ &= (\alpha-x)[(-2-x)(2+\alpha-x) - 4i^2] = \\ &= (\alpha-x)(-4-2x-2\alpha-\alpha x+2x+x^2+4) = \\ &= (\alpha-x)(x^2-\alpha x-2\alpha). \end{aligned}$$

Qundi gli autovalori di $\mathbf{A}(\alpha)$ sono:

$$\lambda_1 = \alpha, \quad \lambda_2 = \frac{\alpha + \sqrt{\alpha^2 + 8\alpha}}{2} \quad \text{e} \quad \lambda_3 = \frac{\alpha - \sqrt{\alpha^2 + 8\alpha}}{2}.$$

Dal momento che

$$\lambda_1 = \lambda_2 \iff 2\alpha = \alpha + \sqrt{\alpha^2 + 8\alpha} \iff \alpha = \sqrt{\alpha^2 + 8\alpha} \iff \alpha = 0,$$

$$\lambda_1 = \lambda_3 \iff 2\alpha = \alpha - \sqrt{\alpha^2 + 8\alpha} \iff \alpha = -\sqrt{\alpha^2 + 8\alpha} \iff \alpha = 0,$$

$$\lambda_2 = \lambda_3 \iff \sqrt{\alpha^2 + 8\alpha} = 0 \iff \alpha \in \{0, -8\},$$

abbiamo:

matrice	**autovalori**	**molteplicità algebriche**	**molteplicità geometriche**
$\mathbf{A}(\alpha)$ $\alpha \notin \{0, -8\}$	$\lambda_1 = \alpha$ $\lambda_2 = \frac{\alpha+\sqrt{\alpha^2+8\alpha}}{2}$ $\lambda_3 = \frac{\alpha-\sqrt{\alpha^2+8\alpha}}{2}$	$m_1 = 1$ $m_2 = 1$ $m_3 = 1$	$d_1 = 1$ $d_2 = 1$ $d_3 = 1$
$\mathbf{A}(0)$	$\lambda_1 = 0$	$m_1 = 3$	$1 \leq d_1 \leq 3$
$\mathbf{A}(-8)$	$\lambda_1 = -8$ $\lambda_2 = -4$	$m_1 = 1$ $m_2 = 2$	$d_1 = 1$ $1 \leq d_2 \leq 2$

Dunque:

- se $\alpha \notin \{0, -8\}$ la matrice $\mathbf{A}(\alpha)$ è diagonalizzabile.

•• $\mathbf{A}(0)$ sarebbe diagonalizzabile solo se fosse $d_1 = \dim(E_{\mathbf{A}(0)}(0)) = m_3 = 3$.

N.B.: Se fosse $\dim(E_{\mathbf{A}(0)}(0)) = 3$ sarebbe $E_{\mathbf{A}(0)}(0) = \mathbb{C}^3$, e quindi $\mathbf{A}(0) = \mathbf{O}$.

Dunque, essendo $\mathbf{A}(0) = \begin{pmatrix} -2 & 2i & 0 \\ 2i & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \neq \mathbf{O}$, $\mathbf{A}(0)$ non è diagonalizzabile.

••• $\mathbf{A}(-8)$ è diagonalizzabile $\iff$ $d_2 = \dim(E_{\mathbf{A}(-8)}(-4)) = m_2 = 2$

$$\begin{aligned} d_2 &= \dim(E_{\mathbf{A}(-8)}(-4)) = \dim(N(\mathbf{A}(-8)+4\mathbf{I}_3) = \\ &= [\text{numero di colonne di } \mathbf{A}(-8)+4\mathbf{I}_3] - \text{rk}(\mathbf{A}(-8)+4\mathbf{I}_3) = \\ &= 3 - \text{rk}(\mathbf{A}(-8)+4\mathbf{I}_3) \end{aligned}$$

Da una E.G. su $\mathbf{A}(-8)+4\mathbf{I}_3$:

$$\mathbf{A}(1)+2\mathbf{I}_3 = \begin{pmatrix} -2 & 2i & 0 \\ 2i & -6 & 0 \\ 0 & 0 & -8 \end{pmatrix} + 4\mathbf{I}_3 = \begin{pmatrix} 2 & 2i & 0 \\ 2i & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{21}(-2i)E_1(\frac{1}{2})}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_2(-\frac{1}{4})E_{23}} \begin{pmatrix} 1 & i & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

per cui $\text{rk}(\mathbf{A}(-8)+4\mathbf{I}_3) = 2$, e quindi

$$d_2 = \dim(E_{\mathbf{A}(-8)}(-4)) = 3 - 2 = 1.$$

Dunque $\mathbf{A}(-8)$ non è diagonalizzabile.

In conclusione abbiamo:

$$\mathbf{A}(\alpha) \quad \text{è diagonalizzabile} \quad \iff \quad \alpha \notin \{0, -8\}.$$

$\boxed{\mathbf{6}}$ Sia $\mathbf{A}(\alpha) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -3i \\ 0 & -3 & 0 \\ -3i\alpha & 0 & 0 \end{pmatrix}$, dove α è **un numero reale non positivo**.

(b) Per quali α numeri reali non positivi si ha che di $\mathbf{A}(\alpha)$ è diagonalizzabile ?

(b) $\mathbf{A}(\alpha)$ è diagonalizzabile se e solo se ciascun suo autovalore ha le due molteplicità, algebrica e geometrica, uguali tra loro. Calcoliamo gli autovalori di $\mathbf{A}(\alpha)$ e le loro molteplicità.

Il polinomio caratteristico di $\mathbf{A}(\alpha)$ è:

$$
\begin{aligned}
p_{\mathbf{A}(\alpha)}(x) &= \mathrm{Det}(\mathbf{A}(\alpha) - x\mathbf{I}_3) = \mathrm{Det}\begin{pmatrix} -x & 0 & -3i \\ 0 & -3-x & 0 \\ -3i\alpha & 0 & -x \end{pmatrix} = \\
&= (-1)^{2+2}(-3-x)\mathrm{Det}\begin{pmatrix} -x & -3i \\ -3i\alpha & -x \end{pmatrix} = \\
&= (-3-x)(x^2 - 9i^2\alpha) = \\
&= (-3-x)(x^2 + 9\alpha).
\end{aligned}
$$

Quindi gli autovalori di $\mathbf{A}(\alpha)$ sono ($\alpha \in \mathbb{R}$ con $\alpha \leq 0$):

$$
\lambda_1 = -3, \quad \lambda_2 = \sqrt{-9\alpha} = 3\sqrt{-\alpha} \quad \text{e} \quad \lambda_3 = -\sqrt{-9\alpha} = -3\sqrt{-\alpha}.
$$

Dal momento che α è un numero reale non positivo, allora

$$
\begin{aligned}
&\lambda_1 \neq \lambda_2, \\
&\lambda_1 = \lambda_3 \quad \Longleftrightarrow \quad \alpha = -1, \\
&\lambda_2 = \lambda_3 \quad \Longleftrightarrow \quad \alpha = 0.
\end{aligned}
$$

matrice	**autovalori**	**molteplicità algebriche**	**molteplicità geometriche**
$\mathbf{A}(\alpha)$ $\alpha \notin \{0, -1\}$	$\lambda_1 = -3$ $\lambda_2 = 3\sqrt{-\alpha}$ $\lambda_3 = -3\sqrt{-\alpha}$	$m_1 = 1$ $m_2 = 1$ $m_3 = 1$	$d_1 = 1$ $d_2 = 1$ $d_3 = 1$
$\mathbf{A}(0)$	$\lambda_1 = -3$ $\lambda_2 = 0$	$m_1 = 1$ $m_2 = 2$	$d_1 = 1$ $1 \leq d_2 \leq 2$
$\mathbf{A}(-1)$	$\lambda_1 = -3$ $\lambda_2 = 3$	$m_1 = 2$ $m_2 = 1$	$1 \leq d_1 \leq 2$ $d_2 = 1$

Quindi se $\alpha \notin \{0, -1\}$ allora $\mathbf{A}(\alpha)$ è diagonalizzabile.

Anche $\mathbf{A} = \mathbf{A}(-1)$ è diagonalizzabile: abbiamo visto in (a) che è addirittura unitariamente diagonalizzabile (quindi è vero, e non occorre verificarlo, che $d_1 = \dim(E_{\mathbf{A}(-1)}(-3)) = m_1 = 2$).

Inoltre:

$$\mathbf{A}(0) \quad \text{è diagonalizzabile} \quad \Longleftrightarrow \quad d_2 = \dim(E_{\mathbf{A}(0)}(0)) = m_2 = 2.$$

$$\begin{aligned} d_2 &= \dim(E_{\mathbf{A}(0)}(0)) = \dim(N(\mathbf{A}(0)) = \\ &= [\text{numero di colonne di } \mathbf{A}(0)] - \mathrm{rk}(\mathbf{A}(0)) = \\ &= 3 - \mathrm{rk}(\mathbf{A}(0)) \end{aligned}$$

Da una E.G. su $\mathbf{A}(0)$:

$$\mathbf{A}(0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -3i \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_2(\frac{1}{3}i)E_1(-\frac{1}{3})E_{12}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

per cui $\mathrm{rk}(\mathbf{A}(0)) = 2$, e quindi

$$d_2 = \dim(E_{\mathbf{A}(0)}(0)) = 3 - 2 = 1.$$

Dunque $\mathbf{A}(0)$ non è diagonalizzabile.

In conclusione (essendo α reale non positivo):

$$\mathbf{A}(\alpha) \quad \text{è diagonalizzabile} \quad \Longleftrightarrow \quad \alpha \in \mathbb{R} \text{ con } \alpha < 0.$$