**G. Parmeggiani, 13/1/2020** **Algebra Lineare, a.a. 2019/2020,**

**Scuola di Scienze - Corsi di laurea:** **Statistica per l'economia e l'impresa**
**Statistica per le tecnologie e le scienze**

**Studenti:** **numero di MATRICOLA PARI**

**Svolgimento degli Esercizi per casa 12 (seconda parte)**

$\boxed{\mathbf{4}}$ Sia $\quad \mathbf{A}(\alpha) = \begin{pmatrix} 2 & i \\ i & \alpha \end{pmatrix}, \quad$ dove $\alpha \in \mathbb{C}$.

$(a)$ Per quali $\alpha \in \mathbb{C}$ si ha che di $\mathbf{A}(\alpha)$ è unitariamente diagonalizzabile ?
$(b)$ Per quali $\alpha \in \mathbb{C}$ si ha che di $\mathbf{A}(\alpha)$ è diagonalizzabile ?
$(c)$ Sia $\mathbf{A} = \mathbf{A}(2)$ la matrice che si ottiene ponendo $\alpha = 2$. Si trovi una diagonalizzazione unitaria $\mathbf{A} = \mathbf{U}\mathbf{D}\mathbf{U}^H$ per $\mathbf{A}$.
$(d)$ Sia $\mathbf{A} = \mathbf{A}(2)$ la matrice che si ottiene ponendo $\alpha = 2$. Si scriva $\mathbf{A}$ nella forma $\mathbf{A} = \lambda_1\mathbf{P}_1 + \lambda_2\mathbf{P}_2$, con $\lambda_1$ e $\lambda_2$ autovalori di $\mathbf{A}$, e $\mathbf{P}_1$ e $\mathbf{P}_2$ matrici di proiezione su $E_{\mathbf{A}}(\lambda_1)$ ed $E_{\mathbf{A}}(\lambda_2)$ rispettivamente.
$(e)$ Sia $\mathbf{A} = \mathbf{A}(2)$ la matrice che si ottiene ponendo $\alpha = 2$. Posto $z_1 = (2+i)^{300}$ e $z_2 = (2-i)^{300}$, si scriva $\mathbf{A}^{300}$ in funzione di $z_1$ e $z_2$.

$(a)$ $\mathbf{A}(\alpha)$ è unitariamente diagonalizzabile $\iff$ $\mathbf{A}(\alpha)$ è normale $\iff$

$$\iff \mathbf{A}(\alpha)\mathbf{A}(\alpha)^H = \mathbf{A}(\alpha)^H\mathbf{A}(\alpha).$$

Calcoliamo $\mathbf{A}(\alpha)^H$:

$$\mathbf{A}(\alpha)^H = \begin{pmatrix} \overline{2} & \overline{i} \\ \overline{i} & \overline{\alpha} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -i \\ -i & \overline{\alpha} \end{pmatrix}.$$

Calcoliamo ora $\mathbf{A}(\alpha)\mathbf{A}(\alpha)^H$ ed $\mathbf{A}(\alpha)^H\mathbf{A}(\alpha)$:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{A}(\alpha)\mathbf{A}(\alpha)^H &= \begin{pmatrix} 2 & i \\ i & \alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -i \\ -i & \overline{\alpha} \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} 4+1 & -2i+i\overline{\alpha} \\ 2i-\alpha i & 1+\alpha\overline{\alpha} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -2i+i\overline{\alpha} \\ 2i-\alpha i & 1+|\alpha|^2 \end{pmatrix}, \\
\mathbf{A}(\alpha)^H\mathbf{A}(\alpha) &= \begin{pmatrix} 2 & -i \\ -i & \overline{\alpha} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & i \\ i & \alpha \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} 4+1 & 2i-i\alpha \\ -2i+\overline{\alpha}i & 1+\overline{\alpha}\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 2i-i\alpha \\ -2i+\overline{\alpha}i & 1+|\alpha|^2 \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

Imponendo l'uguaglianza $\mathbf{A}(\alpha)\mathbf{A}(\alpha)^H = \mathbf{A}(\alpha)^H\mathbf{A}(\alpha)$ otteniamo:

$$\mathbf{A}(\alpha)\mathbf{A}(\alpha)^H = \mathbf{A}(\alpha)^H\mathbf{A}(\alpha) \quad \iff \quad -2i+i\overline{\alpha} = 2i-i\alpha \quad \iff \quad \alpha+\overline{\alpha} = 4.$$

Scrivendo $\alpha$ in forma algebrica:

$$\alpha = a+ib \quad \text{con} \quad a,b\in\mathbb{R},$$

abbiamo che $\overline{\alpha} = a-ib$ per cui

$$\alpha+\overline{\alpha} = (a+ib)+(a-ib) = 2a = 4 \iff a=2 \iff \alpha = 2+ib \text{ con } b\in\mathbb{R}.$$

In conclusione,

$$\mathbf{A}(\alpha) \text{ è unitariamente diagonalizzabile} \iff \alpha = 2+ib \text{ con } b\in\mathbb{R}.$$

$(b)$ **Poichè $\mathbf{A}(\alpha)$ è una matrice $2\times 2$ NON SCALARE, allora $\mathbf{A}(\alpha)$ è diagonalizzabile se e solo se ha i (due) autovalori distinti.**

**INFATTI:** Sia $\mathbf{A}$ $2\times 2$. Allora $p_{\mathbf{A}}(x)$ ha grado 2.

- **caso 1:** $p_{\mathbf{A}}(x) = (x-\lambda_1)(x-\lambda_2)$ con $\lambda_1\neq\lambda_2$ . $\mathbf{A}$ è diagonalizzabile.
- **caso 2:** $p_{\mathbf{A}}(x) = (x-\lambda)^2$. $\mathbf{A}$ è diagonalizzabile se e solo se $\dim E_{\mathbf{A}}(\lambda) = 2$. Dal momento che $E_{\mathbf{A}}(\lambda) = N(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I}_2)$, in questo caso

$$\mathbf{A} \text{ è diagonalizzabile} \iff \mathrm{rk}(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I}_2) = 0 \iff \mathbf{A}-\lambda\mathbf{I}_2 = \mathbf{O} \iff \mathbf{A} = \lambda\mathbf{I}_2.$$

**Quindi se $\mathbf{A}$ è $2 \times 2$ NON SCALARE, allora $\mathbf{A}$ è diagonalizzabile se e solo se i suoi due autovalori sono distinti.**

Il polinomio caratteristico di $\mathbf{A}(\alpha)$ è:

$$\begin{aligned} p_{\mathbf{A}(\alpha)}(x) &= \mathrm{Det}(\mathbf{A}(\alpha) - x\mathbf{I}_2) = \mathrm{Det}\begin{pmatrix} 2-x & i \\ i & \alpha - x \end{pmatrix} = \\ &= (2-x)(\alpha - x) - i^2 = \\ &= 2\alpha - \alpha x - 2x + x^2 + 1 = \\ &= x^2 - (\alpha+2)x + (2\alpha+1). \end{aligned}$$

Quindi gli autovalori di $\mathbf{A}(\alpha)$ sono:

$$\lambda_1 = \tfrac{\alpha+2+\sqrt{(\alpha+2)^2-4(2\alpha+1)}}{2} = \tfrac{\alpha+2+\sqrt{\alpha^2+4+4\alpha-8\alpha-4}}{2} = \tfrac{\alpha+2+\sqrt{\alpha^2-4\alpha}}{2} \quad \text{e}$$

$$\lambda_2 = \tfrac{\alpha+2-\sqrt{(\alpha+2)^2-4(2\alpha+1)}}{2} = \tfrac{\alpha+2-\sqrt{\alpha^2+4+4\alpha-8\alpha-4}}{2} = \tfrac{\alpha+2-\sqrt{\alpha^2-4\alpha}}{2}.$$

Quindi

$$\lambda_1 \neq \lambda_2 \iff \sqrt{\alpha^2 - 4\alpha} \neq 0 \iff \alpha^2 - 4\alpha \neq 0 \iff \alpha \notin \{0, 4\},$$

e concludiamo che

$$\mathbf{A}(\alpha) \quad \text{è diagonalizzabile} \quad \iff \quad \alpha \notin \{0, 4\},$$

$(c)$ Sia $\mathbf{A} = \mathbf{A}(2) = \begin{pmatrix} 2 & i \\ i & 2 \end{pmatrix}$. Abbiamo visto in $(a)$ che $\mathbf{A}$ è unitariamente diagonalizzabile (perchè $2 = 2 + ib$ con $b = 0 \in \mathbb{R}$). I suoi autovalori (calcolati in $(b)$) sono:

$$\lambda_1 = \tfrac{2+2+\sqrt{4-8}}{2} = \tfrac{4+\sqrt{-4}}{2} = \tfrac{4+2i}{2} = 2 + i \quad \text{e}$$

$$\lambda_2 = \tfrac{2+2-\sqrt{4-8}}{2} = \tfrac{4-\sqrt{-4}}{2} = \tfrac{4-2i}{2} = 2 - i.$$

con molteplicità algebriche e geometriche uguali a

$$m_1 = d_1 = m_2 = d_2 = 1.$$

Cerchiamo **basi ortonormali** degli autospazi di $\mathbf{A}$.

$$E_{\mathbf{A}}(\lambda_1) = E_{\mathbf{A}}(2+i) = N(\mathbf{A} - (2+i)\mathbf{I}_2).$$

Da una E.G. su $\quad \mathbf{A} - (2+i)\mathbf{I}_2 \quad$ :

$$\mathbf{A} - (2+i)\mathbf{I}_2 = \begin{pmatrix} -i & i \\ i & -i \end{pmatrix} \quad \xrightarrow{E_{21}(-i)E_1(i)} \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

segue che

$$E_{\mathbf{A}}(\lambda_1) = E_{\mathbf{A}}(2+i) = N\Big( \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Big) = \Big\{ \begin{pmatrix} h \\ h \end{pmatrix} \Big| h \in \mathbb{C} \Big\},$$

e quindi $\Big\{ \mathbf{v_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Big\}$ è una base di $E_{\mathbf{A}}(\lambda_1) = E_{\mathbf{A}}(2+i)$.

**N.B.:** Poichè ha un unico elemento, $\{\mathbf{v_1}\}$ è già una base ortogonale di $E_{\mathbf{A}}(2+i)$. Per ottenere una base ortonormale di $E_{\mathbf{A}}(2+i)$, "normalizziamo" $\mathbf{v_1}$.

$$\|\mathbf{v_1}\|_2 = \sqrt{\mathbf{v_1}^H \mathbf{v_1}} = \sqrt{\begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

per cui

$$\Big\{ \frac{\mathbf{v_1}}{\|\mathbf{v_1}\|_2} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \Big\}$$

è una **base ortonormale** di $E_{\mathbf{A}}(\lambda_1) = E_{\mathbf{A}}(2+i)$.

$$E_{\mathbf{A}}(\lambda_2) = E_{\mathbf{A}}(2-i) = N(\mathbf{A} - (2-i)\mathbf{I}_2).$$

Da una E.G. su $\quad \mathbf{A} - (2-i)\mathbf{I}_2 \quad$ :

$$\mathbf{A} - (2-i)\mathbf{I}_2 = \begin{pmatrix} i & i \\ i & i \end{pmatrix} \quad \xrightarrow{E_{21}(-i)E_1(-i)} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

segue che

$$E_{\mathbf{A}}(\lambda_2) = E_{\mathbf{A}}(2-i) = N\Big( \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Big) = \Big\{ \begin{pmatrix} -h \\ h \end{pmatrix} \Big| h \in \mathbb{C} \Big\},$$

e quindi $\Big\{ \mathbf{v_2} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \Big\}$ è una base di $E_{\mathbf{A}}(\lambda_2) = E_{\mathbf{A}}(2-i)$.

**N.B.:** Poichè ha un unico elemento, $\{\mathbf{v_2}\}$ è già una base ortogonale di $E_{\mathbf{A}}(2-i)$. Per ottenere una base ortonormale di $E_{\mathbf{A}}(2-i)$, "normalizziamo" $\mathbf{v_2}$.

$$\|\mathbf{v_2}\|_2 = \sqrt{\mathbf{v_2}^H \mathbf{v_2}} = \sqrt{\begin{pmatrix} -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

per cui

$$\left\{ \frac{\mathbf{v_2}}{\|\mathbf{v_2}\|_2} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \right\}$$

è una **base ortonormale** di $E_{\mathbf{A}}(\lambda_2) = E_{\mathbf{A}}(2-i)$.

Dunque se $\alpha = 2$, una diagonalizzazione unitaria di $\mathbf{A} = \mathbf{A}(2)$ è:

$$\mathbf{A} = \mathbf{U}\mathbf{D}\mathbf{U}^H \quad \text{con}$$

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+i & 0 \\ 0 & 2-i \end{pmatrix} \quad \text{ed}$$

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} \frac{\mathbf{v_1}}{\|\mathbf{v_1}\|_2} & \frac{\mathbf{v_2}}{\|\mathbf{v_2}\|_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

$(d)$ Al punto $(c)$ abbiamo visto:

gli autovalori di $\mathbf{A} = \mathbf{A}(2) = \begin{pmatrix} 2 & i \\ i & 2 \end{pmatrix}$ sono $\lambda_1 = 2+i$ e $\lambda_2 = 2-i$;

$\left\{ \frac{\mathbf{v_1}}{\|\mathbf{v_1}\|_2} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \right\}$ è una base ortonormale di $E_{\mathbf{A}}(\lambda_1) = E_{\mathbf{A}}(2+i)$;

$\left\{ \frac{\mathbf{v_2}}{\|\mathbf{v_2}\|_2} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \right\}$ è una base ortonormale di $E_{\mathbf{A}}(\lambda_2) = E_{\mathbf{A}}(2-i)$.

Posto $\mathbf{Q}_1 = \frac{\mathbf{v_1}}{\|\mathbf{v_1}\|_2} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$, la matrice di proiezione $\mathbf{P}_1$ su $E_{\mathbf{A}}(\lambda_1) = E_{\mathbf{A}}(2+i)$ è

$$\mathbf{P}_1 = \mathbf{Q}_1\mathbf{Q}_1^H = \frac{\mathbf{v_1}}{\|\mathbf{v_1}\|_2} \cdot \frac{\mathbf{v_1}^H}{\|\mathbf{v_1}\|_2} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Analogamente, posto $\mathbf{Q}_2 = \frac{\mathbf{v_2}}{\|\mathbf{v_2}\|_2} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$, la matrice di proiezione $\mathbf{P}_2$ su $E_{\mathbf{A}}(\lambda_2) = E_{\mathbf{A}}(2-i)$ è

$$\mathbf{P}_2 = \mathbf{Q}_2\mathbf{Q}_2^H = \frac{\mathbf{v_2}}{\|\mathbf{v_2}\|_2} \cdot \frac{\mathbf{v_2}^H}{\|\mathbf{v_2}\|_2} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

N.B.: Siccome $\mathbf{A}$ ha due soli autovalori, allora $\mathbf{P}_2 = \mathbf{I} - \mathbf{P}_1$.

Dunque

$$\mathbf{A} = \lambda_1 \mathbf{P}_1 + \lambda_2 + \mathbf{P}_2 = \frac{2+i}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \frac{2-i}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$(e)$ Al punto $(c)$ abbiamo visto che $\mathbf{A} = \mathbf{A}(2) = \begin{pmatrix} 2 & i \\ i & 2 \end{pmatrix}$ ha una diagonalizzazione unitaria

$$\mathbf{A} = \mathbf{U}\mathbf{D}\mathbf{U}^H \quad \text{con} \quad \mathbf{D} = \begin{pmatrix} 2+i & 0 \\ 0 & 2-i \end{pmatrix} \quad \text{ed} \quad \mathbf{U} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

Allora

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}^{300} &= (\mathbf{U}\mathbf{D}\mathbf{U}^H)^{300} = \mathbf{U}\mathbf{D}^{300}\mathbf{U}^H = \\
&= \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (2+i)^{300} & 0 \\ 0 & (2-i)^{300} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \\
&= \tfrac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 & 0 \\ 0 & z_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \\
&= \tfrac{1}{2} \begin{pmatrix} z_1 & -z_2 \\ z_1 & z_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \\
&= \tfrac{1}{2} \begin{pmatrix} z_1 + z_2 & z_1 - z_2 \\ z_1 - z_2 & z_1 + z_2 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

$\boxed{\mathbf{5}}$ Sia $\quad \mathbf{A}(\alpha) = \begin{pmatrix} -2 & 2i & 0 \\ 2i & 2+\alpha & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}, \quad$ dove $\alpha \in \mathbb{R}$.

($a$) Per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ si ha che di $\mathbf{A}(\alpha)$ è unitariamente diagonalizzabile ?
($b$) Per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ si ha che di $\mathbf{A}(\alpha)$ è diagonalizzabile ?
($c$) Sia $\mathbf{A} = \mathbf{A}(-4)$ la matrice che si ottiene ponendo $\alpha = -4$. Si trovi una diagonalizzazione unitaria $\mathbf{A} = \mathbf{U}\mathbf{D}\mathbf{U}^H$ per $\mathbf{A}$.
($d$) Sia $\mathbf{A} = \mathbf{A}(-4)$ la matrice che si ottiene ponendo $\alpha = 2$. Si scriva $\mathbf{A}$ nella forma $\mathbf{A} = \lambda_1\mathbf{P}_1 + \lambda_2\mathbf{P}_2 + \lambda_3\mathbf{P}_3$, con $\lambda_1$, $\lambda_2$, $\lambda_3$ autovalori di $\mathbf{A}$, e $\mathbf{P}_1$, $\mathbf{P}_2$, $\mathbf{P}_3$ matrici di proiezione su $E_{\mathbf{A}}(\lambda_1)$, $E_{\mathbf{A}}(\lambda_2)$, $E_{\mathbf{A}}(\lambda_3)$ rispettivamente.

$$\begin{aligned}(a)\ \mathbf{A}(\alpha) \text{ è unitariamente diagonalizzabile } &\iff \mathbf{A}(\alpha) \text{ è normale } \iff \\ &\iff \mathbf{A}(\alpha)\mathbf{A}(\alpha)^H = \mathbf{A}(\alpha)^H\mathbf{A}(\alpha).\end{aligned}$$

Calcoliamo $\mathbf{A}(\alpha)^H$, tenendo conto del fatto che da $\alpha \in \mathbb{R}$ segue $\overline{\alpha} = \alpha$:

$$\mathbf{A}(\alpha)^H = \begin{pmatrix} \overline{-2} & \overline{2i} & \overline{0} \\ \overline{2i} & \overline{2+\alpha} & \overline{0} \\ \overline{0} & \overline{0} & \overline{\alpha} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -2i & 0 \\ -2i & 2+\alpha & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}.$$

Calcoliamo ora $\mathbf{A}(\alpha)\mathbf{A}(\alpha)^H$ ed $\mathbf{A}(\alpha)^H\mathbf{A}(\alpha)$:

$$\begin{aligned}\mathbf{A}(\alpha)\mathbf{A}(\alpha)^H &= \begin{pmatrix} -2 & 2i & 0 \\ 2i & 2+\alpha & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & -2i & 0 \\ -2i & 2+\alpha & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 8 & 8i+2i\alpha & 0 \\ -8i-2i\alpha & 4+(2+\alpha)^2 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha^2 \end{pmatrix}, \\ \mathbf{A}(\alpha)^H\mathbf{A}(\alpha) &= \begin{pmatrix} -2 & -2i & 0 \\ -2i & 2+\alpha & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 2i & 0 \\ 2i & 2+\alpha & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 8 & -8i-2i\alpha & 0 \\ 8i+2i\alpha & 4+(2+\alpha)^2 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha^2 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Imponendo l'uguaglianza $\mathbf{A}(\alpha)\mathbf{A}(\alpha)^H = \mathbf{A}(\alpha)^H\mathbf{A}(\alpha)$ otteniamo:

$$\mathbf{A}(\alpha)\mathbf{A}(\alpha)^H = \mathbf{A}(\alpha)^H\mathbf{A}(\alpha) \quad \iff \quad 8i+2i\alpha = -8i-2i\alpha \quad \iff \quad \alpha = -4.$$

($b$) $\mathbf{A}(\alpha)$ è diagonalizzabile se e solo se ciascun suo autovalore ha le due molteplicità, algebrica e geometrica, uguali tra loro. Calcoliamo gli autovalori di $\mathbf{A}(\alpha)$ e le loro molteplicità.

Il polinomio caratteristico di $\mathbf{A}(\alpha)$ è:

$$\begin{aligned} p_{\mathbf{A}(\alpha)}(x) \quad &= \mathrm{Det}(\mathbf{A}(\alpha) - x\mathbf{I}_3) = \mathrm{Det}\begin{pmatrix} -2-x & 2i & 0 \\ 2i & 2+\alpha-x & 0 \\ 3i & 0 & \alpha-x \end{pmatrix} = \\ &= (-1)^{3+3}(\alpha-x)\mathrm{Det}\begin{pmatrix} -2-x & 2i \\ 2i & 2+\alpha-x \end{pmatrix} = \\ &= (\alpha-x)[(-2-x)(2+\alpha-x) - 4i^2] = \\ &= (\alpha-x)(-4-2x-2\alpha-\alpha x+2x+x^2+4) = \\ &= (\alpha-x)(x^2-\alpha x-2\alpha). \end{aligned}$$

Qundi gli autovalori di $\mathbf{A}(\alpha)$ sono:

$$\lambda_1 = \alpha, \quad \lambda_2 = \frac{\alpha + \sqrt{\alpha^2+8\alpha}}{2} \quad \text{e} \quad \lambda_3 = \frac{\alpha - \sqrt{\alpha^2+8\alpha}}{2}.$$

Dal momento che

$$\begin{aligned} &\lambda_1 = \lambda_2 \iff 2\alpha = \alpha + \sqrt{\alpha^2+8\alpha} \iff \alpha = \sqrt{\alpha^2+8\alpha} \iff \alpha = 0, \\ &\lambda_1 = \lambda_3 \iff 2\alpha = \alpha - \sqrt{\alpha^2+8\alpha} \iff \alpha = -\sqrt{\alpha^2+8\alpha} \iff \alpha = 0, \\ &\lambda_2 = \lambda_3 \iff \sqrt{\alpha^2+8\alpha} = 0 \iff \alpha \in \{0, -8\}, \end{aligned}$$

abbiamo:

Dunque:

- se $\alpha \notin \{0, -8\}$ la matrice $\mathbf{A}(\alpha)$ è diagonalizzabile.
- •• $\mathbf{A}(0)$ sarebbe diagonalizzabile solo se fosse $d_1 = \mathrm{dim}(E_{\mathbf{A}(0)}(0)) = m_3 = 3$.

**N.B.:** Se fosse $\dim(E_{\mathbf{A}(0)}(0)) = 3$ sarebbe $E_{\mathbf{A}(0)}(0) = \mathbb{C}^3$, e quindi $\mathbf{A}(0) = \mathbf{O}$.

Dunque, essendo $\mathbf{A}(0) = \begin{pmatrix} -2 & 2i & 0 \\ 2i & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \neq \mathbf{O}$, $\mathbf{A}(0)$ non è diagonalizzabile.

- ••• $\mathbf{A}(-8)$ è diagonalizzabile $\quad \iff \quad d_2 = \dim(E_{\mathbf{A}(-8)}(-4)) = m_2 = 2$

| **matrice** | **autovalori** | **molteplicità algebriche** | **molteplicità geometriche** |
|---|---|---|---|
| $\mathbf{A}(\alpha)$ <br> $\alpha \notin \{0,-8\}$ | $\lambda_1 = \alpha$ <br> $\lambda_2 = \frac{\alpha+\sqrt{\alpha^2+8\alpha}}{2}$ <br> $\lambda_3 = \frac{\alpha-\sqrt{\alpha^2+8\alpha}}{2}$ | $m_1 = 1$ <br> $m_2 = 1$ <br> $m_3 = 1$ | $d_1 = 1$ <br> $d_2 = 1$ <br> $d_3 = 1$ |
| $\mathbf{A}(0)$ | $\lambda_1 = 0$ | $m_1 = 3$ | $1 \leq d_1 \leq 3$ |
| $\mathbf{A}(-8)$ | $\lambda_1 = -8$ <br> $\lambda_2 = -4$ | $m_1 = 1$ <br> $m_2 = 2$ | $d_1 = 1$ <br> $1 \leq d_2 \leq 2$ |

$$\begin{aligned} d_2 &= \dim(E_{\mathbf{A}(-8)}(-4)) = \dim(N(\mathbf{A}(-8)+4\mathbf{I}_3) = \\ &= [\text{numero di colonne di } \mathbf{A}(-8)+4\mathbf{I}_3] - \mathrm{rk}(\mathbf{A}(-8)+4\mathbf{I}_3) = \\ &= 3 - \mathrm{rk}(\mathbf{A}(-8)+4\mathbf{I}_3) \end{aligned}$$

Da una E.G. su $\mathbf{A}(-8)+4\mathbf{I}_3$:

$$\mathbf{A}(1)+2\mathbf{I}_3 = \begin{pmatrix} -2 & 2i & 0 \\ 2i & -6 & 0 \\ 0 & 0 & -8 \end{pmatrix} + 4\mathbf{I}_3 = \begin{pmatrix} 2 & 2i & 0 \\ 2i & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{21}(-2i)E_1(\frac{1}{2})}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_2(-\frac{1}{4})E_{23}} \begin{pmatrix} 1 & i & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

per cui $\mathrm{rk}(\mathbf{A}(-8)+4\mathbf{I}_3) = 2$, e quindi

$$d_2 = \dim(E_{\mathbf{A}(-8)}(-4)) = 3 - 2 = 1.$$

Dunque $\mathbf{A}(-8)$ non è diagonalizzabile.

In conclusione abbiamo:

$$\mathbf{A}(\alpha) \quad \text{è diagonalizzabile} \quad \iff \quad \alpha \notin \{0,-8\}.$$

$(c)$ Abbiamo visto in $(a)$ che $\mathbf{A} = \mathbf{A}(-4) = \begin{pmatrix} -2 & 2i & 0 \\ 2i & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$ è unitariamente diagonalizzabile. I suoi autovalori (calcolati in $(b)$) sono:

$$\lambda_1 = \alpha = -4$$

$$\lambda_2 = \tfrac{\alpha+\sqrt{\alpha^2+8\alpha}}{2} = \tfrac{-4+\sqrt{(-4)^2+8(-4)}}{2} = \tfrac{-4+\sqrt{-16}}{2} = \tfrac{-4+4i}{2} = -2+2i,$$

$$\lambda_3 = \tfrac{\alpha-\sqrt{\alpha^2+8\alpha}}{2} = \tfrac{-4-\sqrt{(-4)^2+8(-4)}}{2} = \tfrac{-4-\sqrt{-16}}{2} = \tfrac{-4-4i}{2} = -2-2i,$$

ciascuno con molteplicità algebrica e geometrica uguali ad 1.

Cerchiamo **basi ortonormali** degli autospazi di $\mathbf{A}$.

$$E_{\mathbf{A}}(\lambda_1) = E_{\mathbf{A}}(-4) = N(\mathbf{A} + 4\mathbf{I}_3).$$

Da una E.G. su $\quad \mathbf{A} + 4\mathbf{I}_3 \quad$ :

$$\mathbf{A} + 4\mathbf{I}_3 = \begin{pmatrix} 2 & 2i & 0 \\ 2i & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_2(\frac{1}{4})E_{21}(-2i)E_1(\frac{1}{2})} \begin{pmatrix} 1 & i & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

segue che

$$E_{\mathbf{A}}(\lambda_1) = E_{\mathbf{A}}(-4) = N\Big( \begin{pmatrix} 1 & i & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Big) = \Big\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ h \end{pmatrix} \Big| h \in \mathbb{C} \Big\},$$

e quindi $\Big\{ \mathbf{w_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Big\}$ è una base di $E_{\mathbf{A}}(\lambda_1) = E_{\mathbf{A}}(-4)$.

**N.B.:** Poichè ha un unico elemento, $\{\mathbf{w_1}\}$ è già una base ortogonale di $E_{\mathbf{A}}(-4)$. Inoltre, essendo $\|\mathbf{w_1}\|_2 = 1$, non occorre "normalizzare" $\mathbf{w_1}$: $\{\mathbf{w_1}\}$ è già una base ortonormale di $E_{\mathbf{A}}(-4)$.

$$E_{\mathbf{A}}(\lambda_2) = E_{\mathbf{A}}(-2+2i) = N(\mathbf{A} + (2-2i)\mathbf{I}_3).$$

Da una E.G. su $\quad \mathbf{A} + (2-2i)\mathbf{I}_3 \quad$ :

$$\mathbf{A}+(2-2i)\mathbf{I}_3 = \begin{pmatrix} -2i & 2i & 0 \\ 2i & -2i & 0 \\ 0 & 0 & -2-2i \end{pmatrix} \xrightarrow{E_2(\frac{-1+i}{4})E_{23}E_{21}(-2i)E_1(\frac{1}{2}i)} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

segue che

$$E_{\mathbf{A}}(\lambda_2) = E_{\mathbf{A}}(-2+2i) = N\Big(\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\Big) = \Big\{\begin{pmatrix} h \\ h \\ 0 \end{pmatrix} \Big| h \in \mathbb{C}\Big\},$$

e quindi $\Big\{\mathbf{w_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\Big\}$ è una base di $E_{\mathbf{A}}(\lambda_2) = E_{\mathbf{A}}(-2+2i)$.

**N.B.:** Poichè ha un unico elemento, $\{\mathbf{w_2}\}$ è già una base ortogonale di $E_{\mathbf{A}}(-2+2i)$. Per ottenere una base ortonormale di $E_{\mathbf{A}}(-2+2i)$, "normalizziamo" $\mathbf{w_2}$.

$$\|\mathbf{w_2}\|_2 = \sqrt{\mathbf{w_2}^H \mathbf{w_2}} = \sqrt{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

per cui

$$\Big\{\frac{\mathbf{w_2}}{\|\mathbf{w_2}\|_2} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}\Big\}$$

è una **base ortonormale** di $E_{\mathbf{A}}(\lambda_2) = E_{\mathbf{A}}(-2+2i)$.

$$E_{\mathbf{A}}(\lambda_3) = E_{\mathbf{A}}(-2-2i) = N(\mathbf{A} + (2+2i)\mathbf{I}_3).$$

Da una E.G. su $\quad \mathbf{A} + (2+2i)\mathbf{I}_3 \quad$ :

$$\mathbf{A}+(2+2i)\mathbf{I}_3 = \begin{pmatrix} 2i & 2i & 0 \\ 2i & 2i & 0 \\ 0 & 0 & -2+2i \end{pmatrix} \xrightarrow{E_2(-\frac{1+i}{4})E_{23}E_{21}(-2i)E_1(-\frac{1}{2}i)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

segue che

$$E_{\mathbf{A}}(\lambda_3) = E_{\mathbf{A}}(-2-2i) = N\Big(\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\Big) = \Big\{\begin{pmatrix} -h \\ h \\ 0 \end{pmatrix} \Big| h \in \mathbb{C}\Big\},$$

e quindi $\Big\{\mathbf{w_3} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\Big\}$ è una base di $E_{\mathbf{A}}(\lambda_3) = E_{\mathbf{A}}(-2-2i)$.

**N.B.:** Poichè ha un unico elemento, $\{\mathbf{w_3}\}$ è già una base ortogonale di $E_{\mathbf{A}}(-2-2i)$. Per ottenere una base ortonormale di $E_{\mathbf{A}}(-2-2i)$, "normalizziamo" $\mathbf{w_3}$.

$$\|\mathbf{w_3}\|_2 = \sqrt{\mathbf{w_3}^H\mathbf{w_3}} = \sqrt{\begin{pmatrix}-1 & 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

per cui

$$\left\{\frac{\mathbf{w_3}}{\|\mathbf{w_3}\|_2} = \begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}\\0\end{pmatrix}\right\}$$

è una **base ortonormale** di $E_{\mathbf{A}}(\lambda_3) = E_{\mathbf{A}}(-2-2i)$.

Dunque se $\alpha = -4$, una diagonalizzazione unitaria di $\mathbf{A} = \mathbf{A}(-4)$ è:

$$\mathbf{A} = \mathbf{U}\mathbf{D}\mathbf{U}^H \quad \text{con}$$

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix}\lambda_1 & 0 & 0\\0 & \lambda_2 & 0\\0 & 0 & \lambda_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-4 & 0 & 0\\0 & -2+2i & 0\\0 & 0 & -2-2i\end{pmatrix} \quad \text{ed}$$

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix}\mathbf{w_1} & \frac{\mathbf{w_2}}{\|\mathbf{w_2}\|_2} & \frac{\mathbf{w_3}}{\|\mathbf{w_3}\|_2}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}}\\0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\\1 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

$(d)$ Al punto $(c)$ abbiamo visto:

gli autovalori di $\mathbf{A} = \mathbf{A}(-4) = \begin{pmatrix}-2 & 2i & 0\\2i & -2 & 0\\0 & 0 & -4\end{pmatrix}$ sono $\lambda_1 = -4$, $\lambda_2 = -2+2i$ e $\lambda_3 = -2-2i$;

$\left\{\frac{\mathbf{w_1}}{\|\mathbf{w_1}\|_2} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$ è una base ortonormale di $E_{\mathbf{A}}(\lambda_1) = E_{\mathbf{A}}(-4)$;

$\left\{\frac{\mathbf{w_2}}{\|\mathbf{w_2}\|_2} = \begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}\\0\end{pmatrix}\right\}$ è una base ortonormale di $E_{\mathbf{A}}(\lambda_2) = E_{\mathbf{A}}(-2+2i)$.

$\left\{\frac{\mathbf{w_3}}{\|\mathbf{w_3}\|_2} = \begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}\\0\end{pmatrix}\right\}$ è una base ortonormale di $E_{\mathbf{A}}(\lambda_3) = E_{\mathbf{A}}(-2-2i)$.

Posto $\mathbf{Q}_1 = \frac{\mathbf{w_1}}{\|\mathbf{w_1}\|_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, la matrice di proiezione $\mathbf{P}_1$ su $E_{\mathbf{A}}(\lambda_1) = E_{\mathbf{A}}(-4)$ è

$$\mathbf{P}_1 = \mathbf{Q}_1\mathbf{Q}_1^H = \frac{\mathbf{w_1}}{\|\mathbf{w_1}\|_2} \cdot \frac{\mathbf{w_1}^H}{\|\mathbf{w_1}\|_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Posto $\mathbf{Q}_2 = \frac{\mathbf{w_2}}{\|\mathbf{w_2}\|_2} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}$, la matrice di proiezione $\mathbf{P_2}$ su $E_{\mathbf{A}}(\lambda_2) = E_{\mathbf{A}}(-2+2i)$ è

$$\mathbf{P}_2 = \mathbf{Q}_2\mathbf{Q}_2^H = \frac{\mathbf{w_2}}{\|\mathbf{w_2}\|_2} \cdot \frac{\mathbf{w_2}^H}{\|\mathbf{w_2}\|_2} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Posto $\mathbf{Q}_3 = \frac{\mathbf{w_3}}{\|\mathbf{w_3}\|_2} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}$, la matrice di proiezione $\mathbf{P}_3$ su $E_{\mathbf{A}}(\lambda_3) = E_{\mathbf{A}}(-2-2i)$ è

$$\mathbf{P}_3 = \mathbf{Q}_3\mathbf{Q}_3^H = \frac{\mathbf{w_3}}{\|\mathbf{w_3}\|_2} \cdot \frac{\mathbf{w_3}^H}{\|\mathbf{w_3}\|_2} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Dunque

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \lambda_1\mathbf{P}_1 + \lambda_2 + \mathbf{P}_2 + \lambda_3\mathbf{P}_3 = \\ &= -4 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{-2+2i}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{-2-2i}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

$\boxed{\mathbf{6}}$ Sia $\mathbf{A}(\alpha) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -3i \\ 0 & -3 & 0 \\ -3i\alpha & 0 & 0 \end{pmatrix}$, dove $\alpha$ è **un numero reale non positivo**.

($a$) Per quali $\alpha$ numeri reali non positivi si ha che di $\mathbf{A}(\alpha)$ è unitariamente diagonalizzabile ?
($b$) Per quali $\alpha$ numeri reali non positivi si ha che di $\mathbf{A}(\alpha)$ è diagonalizzabile ?

$(c)$ Sia $\mathbf{A} = \mathbf{A}(-1)$ la matrice che si ottiene ponendo $\alpha = -1$. Si trovi una diagonalizzazione unitaria $\mathbf{A} = \mathbf{U}\mathbf{D}\mathbf{U}^H$ per $\mathbf{A}$.

$$(a)\ \mathbf{A}(\alpha) \text{ è unitariamente diagonalizzabile} \iff \mathbf{A}(\alpha) \text{ è normale} \iff$$

$$\iff \mathbf{A}(\alpha)\mathbf{A}(\alpha)^H = \mathbf{A}(\alpha)^H\mathbf{A}(\alpha).$$

Calcoliamo $\mathbf{A}(\alpha)^H$, tenendo conto del fatto che da $\alpha \in \mathbb{R}$ segue $\overline{\alpha} = \alpha$:

$$\mathbf{A}(\alpha)^H = \begin{pmatrix} \overline{0} & \overline{0} & \overline{-3i\alpha} \\ \overline{0} & \overline{-3} & \overline{0} \\ \overline{-3i} & \overline{0} & \overline{0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3i\alpha \\ 0 & -3 & 0 \\ 3i & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Calcoliamo ora $\mathbf{A}(\alpha)\mathbf{A}(\alpha)^H$ ed $\mathbf{A}(\alpha)^H\mathbf{A}(\alpha)$:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(\alpha)\mathbf{A}(\alpha)^H &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -3i \\ 0 & -3 & 0 \\ -3i\alpha & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3i\alpha \\ 0 & -3 & 0 \\ 3i & 0 & 0 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9\alpha^2 \end{pmatrix}, \\ \mathbf{A}(\alpha)^H\mathbf{A}(\alpha) &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3i\alpha \\ 0 & -3 & 0 \\ 3i & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -3i \\ 0 & -3 & 0 \\ -3i\alpha & 0 & 0 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 9\alpha^2 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Imponendo l'uguaglianza $\mathbf{A}(\alpha)\mathbf{A}(\alpha)^H = \mathbf{A}(\alpha)^H\mathbf{A}(\alpha)$, e tenendo conto che $\alpha$ **è non positivo**, otteniamo:

$$\mathbf{A}(\alpha)\mathbf{A}(\alpha)^H = \mathbf{A}(\alpha)^H\mathbf{A}(\alpha) \quad \iff \quad \alpha^2 = 1 \quad \iff \quad \alpha = -1.$$

$(b)$ $\mathbf{A}(\alpha)$ è diagonalizzabile se e solo se ciascun suo autovalore ha le due molteplicità, algebrica e geometrica, uguali tra loro. Calcoliamo gli autovalori di $\mathbf{A}(\alpha)$ e le loro molteplicità.

Il polinomio caratteristico di $\mathbf{A}(\alpha)$ è:

$$
\begin{aligned}
p_{\mathbf{A}(\alpha)}(x) &= \mathrm{Det}(\mathbf{A}(\alpha) - x\mathbf{I}_3) = \mathrm{Det}\begin{pmatrix} -x & 0 & -3i \\ 0 & -3-x & 0 \\ -3i\alpha & 0 & -x \end{pmatrix} = \\
&= (-1)^{2+2}(-3-x)\mathrm{Det}\begin{pmatrix} -x & -3i \\ -3i\alpha & -x \end{pmatrix} = \\
&= (-3-x)(x^2 - 9i^2\alpha) = \\
&= (-3-x)(x^2 + 9\alpha).
\end{aligned}
$$

Quindi gli autovalori di $\mathbf{A}(\alpha)$ sono ($\alpha \in \mathbb{R}$ con $\alpha \leq 0$):

$$\lambda_1 = -3, \quad \lambda_2 = \sqrt{-9\alpha} = 3\sqrt{-\alpha} \quad \text{e} \quad \lambda_3 = -\sqrt{-9\alpha} = -3\sqrt{-\alpha}.$$

Dal momento che $\alpha$ è un numero reale non positivo, allora

$$
\begin{aligned}
&\lambda_1 \neq \lambda_2, \\
&\lambda_1 = \lambda_3 \quad \Longleftrightarrow \quad \alpha = -1, \\
&\lambda_2 = \lambda_3 \quad \Longleftrightarrow \quad \alpha = 0.
\end{aligned}
$$

| **matrice** | **autovalori** | **molteplicità algebriche** | **molteplicità geometriche** |
|---|---|---|---|
| $\mathbf{A}(\alpha)$<br>$\alpha \notin \{0, -1\}$ | $\lambda_1 = -3$<br>$\lambda_2 = 3\sqrt{-\alpha}$<br>$\lambda_3 = -3\sqrt{-\alpha}$ | $m_1 = 1$<br>$m_2 = 1$<br>$m_3 = 1$ | $d_1 = 1$<br>$d_2 = 1$<br>$d_3 = 1$ |
| $\mathbf{A}(0)$ | $\lambda_1 = -3$<br>$\lambda_2 = 0$ | $m_1 = 1$<br>$m_2 = 2$ | $d_1 = 1$<br>$1 \leq d_2 \leq 2$ |
| $\mathbf{A}(-1)$ | $\lambda_1 = -3$<br>$\lambda_2 = 3$ | $m_1 = 2$<br>$m_2 = 1$ | $1 \leq d_1 \leq 2$<br>$d_2 = 1$ |

Quindi se $\alpha \notin \{0, -1\}$ allora $\mathbf{A}(\alpha)$ è diagonalizzabile.

Anche $\mathbf{A} = \mathbf{A}(-1)$ è diagonalizzabile: abbiamo visto in $(a)$ che è addirittura unitariamente diagonalizzabile (quindi è vero, e non occorre verificarlo, che $d_1 = \dim(E_{\mathbf{A}(-1)}(-3)) = m_1 = 2$).

Inoltre:

$$\mathbf{A}(0) \quad \text{è diagonalizzabile} \qquad \Longleftrightarrow \qquad d_2 = \dim(E_{\mathbf{A}(0)}(0)) = m_2 = 2.$$

$$\begin{aligned} d_2 &= \dim(E_{\mathbf{A}(0)}(0)) = \dim(N(\mathbf{A}(0)) = \\ &= [\text{numero di colonne di } \mathbf{A}(0)] - \text{rk}(\mathbf{A}(0)) = \\ &= 3 - \text{rk}(\mathbf{A}(0)) \end{aligned}$$

Da una E.G. su $\mathbf{A}(0)$:

$$\mathbf{A}(0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -3i \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_2(\frac{1}{3}i)E_1(-\frac{1}{3})E_{12}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

per cui $\text{rk}(\mathbf{A}(0)) = 2$, e quindi

$$d_2 = \dim(E_{\mathbf{A}(0)}(0)) = 3 - 2 = 1.$$

Dunque $\mathbf{A}(0)$ non è diagonalizzabile.

In conclusione (essendo $\alpha$ reale non positivo):

$$\mathbf{A}(\alpha) \quad \text{è diagonalizzabile} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \alpha \in \mathbb{R} \text{ con } \alpha < 0.$$

$(c)$ Abbiamo visto in $(a)$ che $\mathbf{A} = \mathbf{A}(-1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -3i \\ 0 & -3 & 0 \\ 3i & 0 & 0 \end{pmatrix}$ è unitariamente diagonalizzabile. I suoi autovalori (calcolati in $(b)$) sono:

$$\lambda_1 = -3 \quad \text{e} \quad \lambda_2 = 3$$

con molteplicità algebriche e geometriche uguali a

$$m_1 = 2 = d_1 \quad \text{e} \quad m_2 = 1 = d_2.$$

Cerchiamo **basi ortonormali** degli autospazi di $\mathbf{A}$.

$$E_{\mathbf{A}}(\lambda_1) = E_{\mathbf{A}}(-3) = N(\mathbf{A} + 3\mathbf{I}_3).$$

Da una E.G. su $\quad \mathbf{A} + 3\mathbf{I}_3 \quad$ :

$$\mathbf{A} + 3\mathbf{I}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -3i \\ 0 & -3 & 0 \\ 3i & 0 & 0 \end{pmatrix} + 3\mathbf{I}_3 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -3i \\ 0 & 0 & 0 \\ 3i & 0 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{31}(-3i)E_1(\frac{1}{3})}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

segue che

$$E_{\mathbf{A}}(\lambda_1) = E_{\mathbf{A}}(-3) = N\Big( \begin{pmatrix} 1 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Big) = \Big\{ \begin{pmatrix} ik \\ h \\ k \end{pmatrix} \Big| h, k \in \mathbb{C} \Big\},$$

e quindi $\Big\{ \mathbf{v_1} = \begin{pmatrix} i \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} ; \mathbf{v_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Big\}$ è una base di $E_{\mathbf{A}}(\lambda_1) = E_{\mathbf{A}}(-3)$.

**N.B.:** In questo caso non occorre applicare l'algoritmo di G.S. a $\{\mathbf{v_1}; \mathbf{v_2}\}$: ${\mathbf{v_1}}^H \mathbf{v_2} = \mathbf{0}$, per cui

$$\{\mathbf{v_1}; \mathbf{v_2}\} \quad \textbf{è già una base ortogonale di } E_{\mathbf{A}}(-3)$$

Per ottenere una base ortonormale di $E_{\mathbf{A}}(-3)$, "normalizziamo" $\mathbf{v_1}$ e $\mathbf{v_2}$.

$$\|\mathbf{v_1}\|_2 = \sqrt{{\mathbf{v_1}}^H \mathbf{v_1}} = \sqrt{\begin{pmatrix} -i & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

$$\|\mathbf{v_2}\|_2 = \sqrt{{\mathbf{v_2}}^H \mathbf{v_2}} = \sqrt{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}} = \sqrt{1} = 1$$

per cui

$$\Big\{ \frac{\mathbf{v_1}}{\|\mathbf{v_1}\|_2} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} i \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} ; \frac{\mathbf{v_2}}{\|\mathbf{v_2}\|_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Big\}$$

è una **base ortonormale** di $E_{\mathbf{A}}(\lambda_1) = E_{\mathbf{A}}(-3)$.

$$E_{\mathbf{A}}(\lambda_2) = E_{\mathbf{A}}(3) = N(\mathbf{A} - 3\mathbf{I}_3).$$

Da una E.G. su $\quad \mathbf{A} - 3\mathbf{I}_3 \quad :$

$$\mathbf{A} - 3\mathbf{I}_3 = \begin{pmatrix} -3 & 0 & -3i \\ 0 & -6 & 0 \\ 3i & 0 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_2(-\frac{1}{6})E_{31}(-3i)E_1(-\frac{1}{3})} \begin{pmatrix} 1 & 0 & i \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

segue che

$$E_{\mathbf{A}}(\lambda_2) = E_{\mathbf{A}}(3) = N\Big( \begin{pmatrix} 1 & 0 & i \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Big) = \Big\{ \begin{pmatrix} -ih \\ 0 \\ h \end{pmatrix} \Big| h \in \mathbb{C} \Big\},$$

e quindi $\Big\{ \mathbf{w_1} = \begin{pmatrix} -i \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Big\}$ è una base di $E_{\mathbf{A}}(\lambda_2) = E_{\mathbf{A}}(3)$.

**N.B.:** Poichè ha un unico elemento, $\{\mathbf{w_1}\}$ è già una base ortogonale di $E_{\mathbf{A}}(3)$. Per ottenere una base ortonormale di $E_{\mathbf{A}}(3)$, "normalizziamo" $\mathbf{w_1}$.

$$\|\mathbf{w_1}\|_2 = \sqrt{\mathbf{w_1}^H \mathbf{w_1}} = \sqrt{\begin{pmatrix} i & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -i \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

per cui

$$\Big\{ \frac{\mathbf{w_1}}{\|\mathbf{w_1}\|_2} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} i \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \Big\}$$

è una **base ortonormale** di $E_{\mathbf{A}}(\lambda_2) = E_{\mathbf{A}}(3)$.

Dunque se $\alpha = -1$, una diagonalizzazione unitaria di $\mathbf{A} = \mathbf{A}(-1)$ è:

$$\mathbf{A} = \mathbf{U}\mathbf{D}\mathbf{U}^H \quad \text{con}$$

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{ed}$$

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} \frac{\mathbf{v_1}}{\|\mathbf{v_1}\|_2} & \frac{\mathbf{v_2}}{\|\mathbf{v_2}\|_2} & \frac{\mathbf{w_1}}{\|\mathbf{w_1}\|_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} i & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} i \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

$\boxed{7}$ Siano

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & i & -2 & 9i \\ i & -1 & -2i & 0 \\ -1 & -i & 2 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Si trovino le soluzioni ai minimi quadrati del sistema $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$.
(Si noti che $\mathbf{A}$ è la matrice considerata nell'esercizio 7 degli "Esercizi 10".)

Le soluzioni ai minimi quadrati del sistema $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ sono le soluzioni del sistema delle equazioni normali $\mathbf{A}^H\mathbf{Ax} = \mathbf{A}^H\mathbf{b}$.

Nell'esercizio 7 degli "Esercizi 10" abbiamo calcolato una decomposizione **QR**-normalizzata $\mathbf{A} = \mathbf{QR}$ per $\mathbf{A}$, trovando

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{6}{\sqrt{54}}\,i \\ \frac{1}{\sqrt{3}}\,i & \frac{3}{\sqrt{54}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{3}{\sqrt{54}}\,i \end{pmatrix} \quad \text{ed} \quad \mathbf{R} = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & \sqrt{3}\,i & -2\sqrt{3} & 3\sqrt{3}\,i \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{54} \end{pmatrix}.$$

Dal momento che il sistema $\mathbf{A}^H\mathbf{Ax} = \mathbf{A}^H\mathbf{b}$ è equivalente al sistema $\mathbf{Rx} = \mathbf{Q}^H\mathbf{b}$, risolviamo $\mathbf{Rx} = \mathbf{Q}^H\mathbf{b}$. Da

$$\mathbf{Q}^H\mathbf{b} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}}\,i & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{6}{\sqrt{54}}\,i & \frac{3}{\sqrt{54}} & -\frac{3}{\sqrt{54}}\,i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{3}{\sqrt{54}}\,i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}}\,i \end{pmatrix}$$

otteniamo, facendo una E.G. sulla matrice aumentata del sistema:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{R} & \mid & \mathbf{Q}^H\mathbf{b} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & \sqrt{3}\,i & -2\sqrt{3} & 3\sqrt{3}\,i & \mid & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{54} & \mid & -\frac{1}{\sqrt{6}}\,i \end{pmatrix} \to$$

$$\xrightarrow{E_2(\frac{1}{\sqrt{54}})E_1(\frac{1}{\sqrt{3}})} \begin{pmatrix} 1 & i & -2 & 3i & \mid & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \mid & -\frac{1}{18}\,i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{U} & \mid & \mathbf{d} \end{pmatrix}.$$

Il sistema $\mathbf{Rx} = \mathbf{Q}^H\mathbf{b}$ è equivalente al sistema $\mathbf{Ux} = \mathbf{d}$, che è una scrittura compatta per

$$\begin{cases} x_1 + ix_2 - 2x_3 + 3ix_4 & = -\frac{1}{3} \\ \qquad\qquad\qquad\quad x_4 & = -\frac{1}{18}\,i \end{cases}$$

Poichè $\mathbf{d}$ è libera ed $\mathbf{U}$ ha esattamente due colonne libere (la $2^a$ e la $3^a$), $\mathbf{Ux} = \mathbf{d}$ ha $\infty^2$ soluzioni.

Scegliamo come parametri le variabili corrispondenti alle colonne libere di $\mathbf{U}$ e con la sostituzione all'indietro otteniamo:

$$\begin{cases} x_2 & = h \\ x_3 & = k \\ x_4 & = -\frac{1}{18}\ i \\ x_1 & = -ix_2 + 2x_3 - 3ix_4 - \frac{1}{3} = -ih + 2k - 3i \cdot \Big( -\frac{1}{18}\ i \Big) - \frac{1}{3} = \\ & = -ih + 2k - \frac{1}{6} - \frac{1}{3} = -ih + 2k - \frac{1}{2} \end{cases}$$

Dunque l'insieme delle soluzioni ai minimi quadrati $\mathbf{Ax} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ è

$$\left\{ \begin{pmatrix} -ih + 2k - \frac{1}{2} \\ h \\ k \\ -\frac{1}{18}\ i \end{pmatrix} | h, k \in \mathbb{C} \right\}.$$