

G. Parmeggiani, 15/10/2019

Algebra Lineare, a.a. 2019/2020,

Scuola di Scienze - Corsi di laurea:

Statistica per l'economia e l'impresa
Statistica per le tecnologie e le scienze

Studenti:

numero di MATRICOLA PARI

Svolgimento degli Esercizi per casa 2 (seconda parte)

2 Si trovino forme ridotte di Gauss per le seguenti matrici:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 4 & 0 \\ 3 & -3 & 9 & 6 \\ 3 & -3 & 3 & -6 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 3 & -9 \\ -2 & 6 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{w}^T = (4 \ 0 \ 3), \quad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Facendo un'eliminazione di Gauss su \mathbf{A} si ottiene:

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \begin{pmatrix} 2 & -2 & 4 & 0 \\ 3 & -3 & 9 & 6 \\ 3 & -3 & 3 & -6 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{31}(-3)E_{21}(-3)E_1(1/2)} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & -3 & -6 \end{pmatrix} \rightarrow \\ &\xrightarrow{E_{32}(3)E_2(1/3)} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{U}_1 \end{aligned}$$

ed \mathbf{U}_1 è una forma ridotta di Gauss per \mathbf{A} .

Facendo un'eliminazione di Gauss su \mathbf{B} si ottiene:

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 3 & -9 \\ -2 & 6 \\ 4 & 8 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{31}(-4)E_{21}(2)E_1(1/3)} \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 0 \\ 0 & 20 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_2(\frac{1}{20})E_{23}} \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{U}_2$$

ed \mathbf{U}_2 è una forma ridotta di Gauss per \mathbf{B} .

Facendo un'eliminazione di Gauss su \mathbf{w}^T si ottiene:

$$\mathbf{w}^T = (4 \ 0 \ 3) \xrightarrow{E_1(1/4)} (1 \ 0 \ 3/4) = \mathbf{z}^T$$

e \mathbf{z}^T è una forma ridotta di Gauss per \mathbf{w}^T .

Facendo un'eliminazione di Gauss su \mathbf{v} si ottiene:

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{12}} \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{31}(-3)E_1(1/7)} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \mathbf{u}$$

ed \mathbf{u} è una forma ridotta di Gauss per \mathbf{v} .

3 Sia $\mathbf{A}(\alpha) = \begin{pmatrix} 2i & 0 & -2i & 2i\alpha \\ 1 & \alpha^2 + 4 & 0 & \alpha \\ 2 & 2\alpha^2 + 8 & 0 & 4\alpha \end{pmatrix}$, dove $\alpha \in \mathbb{C}$. Per ogni $\alpha \in \mathbb{C}$ si trovi una forma ridotta di Gauss $\mathbf{U}(\alpha)$ per $\mathbf{A}(\alpha)$ e si dica quali sono le colonne dominanti e quali sono le colonne libere di $\mathbf{U}(\alpha)$.

Facciamo un'eliminazione di Gauss su $\mathbf{a}(\alpha)$:

$$\mathbf{A}(\alpha) = \begin{pmatrix} 2i & 0 & -2i & 2i\alpha \\ 1 & \alpha^2 + 4 & 0 & \alpha \\ 2 & 2\alpha^2 + 8 & 0 & 4\alpha \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{31}(-2)E_{21}(-1)E_1(-\frac{1}{2}i)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & \alpha \\ 0 & \alpha^2 + 4 & 1 & 0 \\ 0 & 2\alpha^2 + 8 & 2 & 2\alpha \end{pmatrix} = \mathbf{B}(\alpha)$$

1° CASO $\alpha^2 + 4 \neq 0$ ossia $\alpha \neq 2i$ ed $\alpha \neq -2i$.

$$\mathbf{B}(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & \alpha \\ 0 & \alpha^2 + 4 & 1 & 0 \\ 0 & 2\alpha^2 + 8 & 2 & 2\alpha \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{32}(-2\alpha^2 - 8)E_2(\frac{1}{\alpha^2 + 4})} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & \alpha \\ 0 & 1 & 1/(\alpha^2 + 4) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2\alpha \end{pmatrix} = \mathbf{C}(\alpha)$$

1° sottocaso del 1° caso $\alpha \neq 2i, \alpha \neq -2i, \alpha \neq 0$

$$\mathbf{C}(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & \alpha \\ 0 & 1 & 1/(\alpha^2 + 4) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2\alpha \end{pmatrix} \xrightarrow{E_3(1/2\alpha)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & \alpha \\ 0 & 1 & 1/(\alpha^2 + 4) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{U}(\alpha)$$

$\mathbf{U}(\alpha)$ è una forma ridotta di Gauss per $\mathbf{A}(\alpha)$, le colonne dominanti sono la 1^a, la 2^a e la 4^a, l'unica colonna libera è la 3^a.

$$\boxed{2^o \text{ sottocaso del } 1^o \text{ caso}} \quad \alpha = 0 \quad \mathbf{C}(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} =$$

$\mathbf{U}(0)$ è una forma ridotta di Gauss per $\mathbf{A}(0)$, le colonne dominanti sono la 1^a e la 2^a, quelle libere la 3^a e la 4^a.

$$\boxed{2^o \text{ CASO}} \quad \alpha^2 + 4 = 0 \text{ ossia } \alpha = 2i \text{ oppure } \alpha = -2i.$$

$$\begin{aligned} \mathbf{B}(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & \alpha \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2\alpha \end{pmatrix} &\xrightarrow{E_{32}(-2)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & \alpha \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2\alpha \end{pmatrix} \rightarrow \\ &\xrightarrow{E_3(1/2\alpha) \quad (\alpha \neq 0)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & \alpha \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{U}(\alpha) \end{aligned}$$

$\mathbf{U}(\alpha)$ è una forma ridotta di Gauss per $\mathbf{A}(\alpha)$, le colonne dominanti sono la 1^a, la 3^a e la 4^a, l'unica colonna libera è la 2^a.