

G. Parmeggiani, 22/10/2019

Algebra Lineare, a.a. 2019/2020,

Scuola di Scienze - Corsi di laurea:

Statistica per l'economia e l'impresa
Statistica per le tecnologie e le scienze

Studenti:

numero di MATRICOLA PARI

Svolgimento degli Esercizi per casa 3 (prima parte)

1 Si risolva il sistema lineare $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ nei seguenti casi:

$$(a) \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 9 & 6 \\ 1 & -1 & 7 & 4 \\ 1 & -1 & 3 & 2 \\ -2 & 2 & -6 & -4 \end{pmatrix} \text{ e } \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix};$$

$$(b) \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 9 & 6 \\ 1 & -1 & 7 & 4 \\ 1 & -1 & 3 & 2 \\ -2 & 2 & -6 & -4 \end{pmatrix} \text{ e } \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix};$$

$$(c) \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 9 & 6 \\ 1 & 0 & 7 & 4 \\ 1 & -1 & 5 & 2 \\ 1 & 0 & 5 & 6 \end{pmatrix} \text{ e } \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

(a) Troviamo una forma ridotta di Gauss della matrice aumentata del sistema.

$$\begin{aligned} (\mathbf{A} \mid \mathbf{b}) &= \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & -3 & 9 & 6 & 6 \\ 1 & -1 & 7 & 4 & 4 \\ 1 & -1 & 3 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & -6 & -4 & -4 \end{array} \right) \xrightarrow{E_{41}(2)E_{31}(-1)E_{21}(-1)E_1(\frac{1}{3})} \\ &\rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{E_2(\frac{1}{4})} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) = (\mathbf{U} \mid \mathbf{d}). \end{aligned}$$

Il sistema $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ è equivalente al sistema $\mathbf{Ux} = \mathbf{d}$ che è una forma compatta

per

$$(*) \quad \begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 2 \\ x_3 + \frac{1}{2}x_4 = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Poichè \mathbf{d} è libera, $\mathbf{U}\mathbf{x} = \mathbf{d}$ ammette soluzioni.

Poichè \mathbf{U} ha esattamente due colonne libere, $\mathbf{U}\mathbf{x} = \mathbf{d}$ ha ∞^2 soluzioni.

Scegliamo come parametri le variabili corrispondenti alle colonne libere di \mathbf{U} (la 2^a e la 4^a) e con la sostituzione all'indietro da (*) otteniamo

$$\begin{cases} x_2 = h \\ x_4 = k \\ x_3 = -\frac{1}{2}x_4 + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}k + \frac{1}{2} \\ x_1 = x_2 - 3x_3 - 2x_4 + 2 = h - 3(-\frac{1}{2}k + \frac{1}{2}) - 2k + 2 = h - \frac{1}{2}k + \frac{1}{2} \end{cases}$$

L'insieme delle soluzioni del sistema $\mathbf{U}\mathbf{x} = \mathbf{d}$ (e quindi l'insieme delle soluzioni del sistema $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$) è

$$\left\{ \begin{pmatrix} h - \frac{1}{2}k + \frac{1}{2} \\ h \\ -\frac{1}{2}k + \frac{1}{2} \\ k \end{pmatrix} \mid h, k \in \mathbb{C} \right\}.$$

(b) Troviamo una forma ridotta di Gauss della matrice aumentata del sistema.

$$\begin{aligned} (\mathbf{A} \mid \mathbf{b}) &= \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & -3 & 9 & 6 & 6 \\ 1 & -1 & 7 & 4 & 4 \\ 1 & -1 & 3 & 2 & 3 \\ -2 & 2 & -6 & -4 & -4 \end{array} \right) \xrightarrow{E_{41}(2)E_{31}(-1)E_{21}(-1)E_1(\frac{1}{3})} \\ &\rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{E_2(\frac{1}{4})} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) = (\mathbf{U} \mid \mathbf{d}). \end{aligned}$$

Il sistema $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ è equivalente al sistema $\mathbf{U}\mathbf{x} = \mathbf{d}$.

Poichè \mathbf{d} è dominante, allora $\mathbf{U}\mathbf{x} = \mathbf{d}$ e quindi $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$, non ha soluzioni.

(c) Troviamo una forma ridotta di Gauss della matrice aumentata del sistema.

$$\begin{aligned} (\mathbf{A} \mid \mathbf{b}) &= \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & -3 & 9 & 6 & 6 \\ 1 & 0 & 7 & 4 & 4 \\ 1 & -1 & 5 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 5 & 6 & 8 \end{array} \right) \xrightarrow{E_{41}(-1)E_{31}(-1)E_{21}(-1)E_1(\frac{1}{3})} \\ &\rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 4 & 6 \end{array} \right) \xrightarrow{E_{42}(-1)} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 2 \end{array} \right) \xrightarrow{E_{43}(2)E_3(\frac{1}{2})} \\ &\rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 6 \end{array} \right) \xrightarrow{E_4(\frac{1}{2})} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right) = (\mathbf{U} \mid \mathbf{d}). \end{aligned}$$

Il sistema $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ è equivalente al sistema $\mathbf{Ux} = \mathbf{d}$ che è una forma compatta per

$$(*) \quad \begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 2 \\ x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 2 \\ x_3 = 1 \\ x_4 = 3 \end{cases}$$

Poichè \mathbf{d} è libera, $\mathbf{Ux} = \mathbf{d}$ ammette soluzioni.

Poichè \mathbf{U} non ha colonne libere, $\mathbf{Ux} = \mathbf{d}$ ha esattamente una soluzione.

Con la sostituzione all'indietro da (*) otteniamo

$$\begin{cases} x_4 = 3 \\ x_3 = 1 \\ x_2 = -4x_3 - 2x_4 + 2 = -8 \\ x_1 = x_2 - 3x_3 - 2x_4 + 2 = -15 \end{cases}$$

Dunque l'unica soluzione di $\mathbf{Ux} = \mathbf{d}$, e quindi anche di $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, è il vettore $\begin{pmatrix} -15 \\ -8 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

2 Si risolva il sistema lineare $\mathbf{A}(\alpha)\mathbf{x} = \mathbf{b}(\alpha)$ dipendente dal parametro complesso α dove

$$\mathbf{A}(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & \alpha - i & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & \alpha - i & \alpha + i \\ -\alpha - i & -\alpha^2 - 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{b}(\alpha) = \begin{pmatrix} \alpha - i \\ \alpha^2 + 1 \\ 2\alpha \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^4.$$

Troviamo una forma ridotta di Gauss della matrice aumentata del sistema.

$$\begin{aligned} (\mathbf{A}(\alpha) \mid \mathbf{b}(\alpha)) &= \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \alpha - i & 0 & \alpha - i \\ 0 & 1 & 0 & \alpha^2 + 1 \\ 1 & \alpha - i & \alpha + i & 2\alpha \\ -\alpha - i & -\alpha^2 - 1 & 0 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{E_{41}(\alpha+i)E_{31}(-1)} \\ &\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \alpha - i & 0 & \alpha - i \\ 0 & 1 & 0 & \alpha^2 + 1 \\ 0 & 0 & \alpha + i & \alpha + i \\ 0 & 0 & 0 & \alpha^2 + 1 \end{array} \right) = (\mathbf{B}(\alpha) \mid \mathbf{c}(\alpha)). \end{aligned}$$

$$\boxed{1^0 \text{ CASO}} \quad \alpha = -i \quad (\mathbf{B}(-i) \mid \mathbf{c}(-i)) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2i & 0 & -2i \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

è una forma ridotta di Gauss per $(\mathbf{A}(-i) \mid \mathbf{b}(-i))$, quindi $\mathbf{A}(-i)\mathbf{x} = \mathbf{b}(-i)$ è equivalente a $\mathbf{B}(-i)\mathbf{x} = \mathbf{c}(-i)$ che è una forma compatta per

$$(*) \quad \begin{cases} x_1 - 2ix_2 & = -2i \\ x_2 & = 0 \end{cases}$$

Poichè $\mathbf{c}(-i)$ è libera, $\mathbf{B}(-i)\mathbf{x} = \mathbf{c}(-i)$ ammette soluzioni.

Poichè $\mathbf{B}(-i)$ ha esattamente una colonna libera, $\mathbf{B}(-i)\mathbf{x} = \mathbf{c}(-i)$ ha ∞^1 soluzioni.

Scegliamo come parametro la variabile corrispondente alla colonna libera di $\mathbf{B}(-i)$ (la 3^a) e con la sostituzione all'indietro da (*) otteniamo

$$\begin{cases} x_3 = h \\ x_2 = 0 \\ x_1 = 2ix_2 - 2i = -2i \end{cases}$$

L'insieme delle soluzioni del sistema $\mathbf{B}(-i)\mathbf{x} = \mathbf{c}(-i)$ (e quindi l'insieme delle soluzioni del sistema $\mathbf{A}(-i)\mathbf{x} = \mathbf{b}(-i)$) è

$$\left\{ \begin{pmatrix} -2i \\ 0 \\ h \end{pmatrix} \mid h \in \mathbb{C} \right\}.$$

$$\boxed{2^0 \text{ CASO}} \quad \alpha \neq -i$$

$$(\mathbf{B}(\alpha) \mid \mathbf{c}(\alpha)) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \alpha - i & 0 & \alpha - i \\ 0 & 1 & 0 & \alpha^2 + 1 \\ 0 & 0 & \alpha + i & \alpha + i \\ 0 & 0 & 0 & \alpha^2 + 1 \end{array} \right) \longrightarrow$$

$$\xrightarrow{E_3(\frac{1}{\alpha+i})} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \alpha - i & 0 & \alpha - i \\ 0 & 1 & 0 & \alpha^2 + 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha^2 + 1 \end{array} \right) \xrightarrow{E_4(\frac{1}{\alpha+i})}$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \alpha - i & 0 & \alpha - i \\ 0 & 1 & 0 & \alpha^2 + 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha - i \end{array} \right) = (\mathbf{C}(\alpha) \mid \mathbf{d}(\alpha)).$$

$$\boxed{1^0 \text{ Sottocaso}} \quad \alpha = i \quad (\mathbf{C}(i) \mid \mathbf{d}(i)) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \text{ è una}$$

forma ridotta di Gauss per $(\mathbf{A}(i) \mid \mathbf{b}(i))$, quindi $\mathbf{A}(i)\mathbf{x} = \mathbf{b}(i)$ è equivalente a $\mathbf{C}(i)\mathbf{x} = \mathbf{d}(i)$ che è una forma compatta per

$$(*) \quad \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 1 \end{cases}$$

Poichè $\mathbf{d}(i)$ è libera, $\mathbf{C}(i)\mathbf{x} = \mathbf{d}(i)$ ammette soluzioni.

Poichè tutte le colonne di $\mathbf{C}(i)$ sono dominanti, $\mathbf{C}(i)\mathbf{x} = \mathbf{d}(i)$ ammette un'unica soluzione. L'unica soluzione di $\mathbf{C}(i)\mathbf{x} = \mathbf{d}(i)$ (e quindi di $\mathbf{A}(i)\mathbf{x} = \mathbf{b}(i)$) è

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$\boxed{2^0 \text{ Sottocaso}} \quad \alpha \notin \{i, -i\}$$

$$\begin{aligned} (\mathbf{C}(\alpha) \mid \mathbf{d}(\alpha)) &= \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \alpha - i & 0 & \alpha - i \\ 0 & 1 & 0 & \alpha^2 + 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha - i \end{array} \right) \xrightarrow{E_4(\frac{1}{\alpha-i})} \\ &\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \alpha - i & 0 & \alpha - i \\ 0 & 1 & 0 & \alpha^2 + 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) = (\mathbf{D}(\alpha) \mid \mathbf{e}(\alpha)) \end{aligned}$$

è una forma ridotta di Gauss per $(\mathbf{A}(\alpha) \mid \mathbf{b}(\alpha))$.

Poichè $\mathbf{e}(\alpha)$ è dominante, $\mathbf{D}(\alpha)\mathbf{x} = \mathbf{e}(\alpha)$ (e quindi di $\mathbf{A}(\alpha)\mathbf{x} = \mathbf{b}(\alpha)$) non ammette soluzioni.