G. Parmeggiani, 29/10/2019 **Algebra Lineare, a.a. 2019/2020,**

Scuola di Scienze - Corsi di laurea: **Statistica per l'economia e l'impresa**
Statistica per le tecnologie e le scienze

Studenti: **numero di MATRICOLA PARI**

Svolgimento degli Esercizi per casa 3 (seconda parte)

$\boxed{\mathbf{3}}$ Si trovino tutte le inverse destre della matrice $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

Un'inversa destra di $\mathbf{A}$ è una matrice 3×2 $\mathbf{R}$ tale che se $\mathbf{R} = \begin{pmatrix} \mathbf{c_1} & | & \mathbf{c_2} \end{pmatrix}$, allora

$\mathbf{c_1}$ è soluzione di (1) $\mathbf{Ax} = \mathbf{e_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e

$\mathbf{c_2}$ è soluzione di (2) $\mathbf{Ax} = \mathbf{e_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Cerchiamo tutte le soluzioni di (1) e (2).

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A} & | & \mathbf{I_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & | & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & | & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{21}(-1)E_1(\frac{1}{2})} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 & | & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 3 & | & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \to$$

$$\xrightarrow{E_2(-2)} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 & | & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & -6 & | & 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{U} & | & \mathbf{b_1} & \mathbf{b_2} \end{pmatrix}.$$

(1) è equivalente a (1′) $\mathbf{Ux} = \mathbf{b_1}$ che è una forma compatta per

$$\begin{cases} x_1 + \frac{1}{2}x_2 \quad = \frac{1}{2} \\ \quad x_2 - 6x_3 = 1 \end{cases}$$

Scegliamo come parametro la variabile corrispondente all'unica colonna libera di $\mathbf{U}$ (la 3^a) e con la sostituzione all'indietro otteniamo

$$\begin{cases} x_3 = h \\ x_2 = 6x_3 + 1 = 6h + 1 \\ x_1 = -\dfrac{1}{2}x_2 + \dfrac{1}{2} = -\dfrac{1}{2}(6h+1) + \dfrac{1}{2} = -3h \end{cases}$$

L'insieme delle soluzioni di (1) è

$$\left\{ \begin{pmatrix} -3h \\ 6h+1 \\ h \end{pmatrix} |h \in \mathbb{C} \right\}.$$

(2) è equivalente a (2′) $\mathbf{U}\mathbf{x} = \mathbf{b_2}$ che è una forma compatta per

$$\begin{cases} x_1 + \frac{1}{2}x_2 \quad = 0 \\ x_2 - 6x_3 = -2 \end{cases}$$

Scegliamo come parametro la variabile corrispondente all'unica colonna libera di $\mathbf{U}$ (la 3^a) e con la sostituzione all'indietro otteniamo

$$\begin{cases} x_3 = k \\ x_2 = 6x_3 - 2 = 6k - 2 \\ x_1 = -\dfrac{1}{2}x_2 = -\dfrac{1}{2}(6k-2) = -3k + 1 \end{cases}$$

L'insieme delle soluzioni di (2) è

$$\left\{ \begin{pmatrix} -3k+1 \\ 6k-2 \\ k \end{pmatrix} | k \in \mathbb{C} \right\}.$$

Le inverse destre di $\mathbf{A}$ sono esattamente tutte le matrici del tipo $\mathbf{R}(h,k) = \begin{pmatrix} -3h & -3k+1 \\ 6h+1 & 6k-2 \\ h & k \end{pmatrix}$, al variare di $h, k \in \mathbb{C}$.

$\boxed{4}$ Si trovino tutte le inverse sinistre della matrice $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.

1. Poniamo $\mathbf{B} = \mathbf{A}^T$.

2. Cerchiamo tutte le inverse destre di $\mathbf{B}$. Dall'esercizio $\boxed{1}$ sappiamo che sono tutte e sole le matrici del tipo $\begin{pmatrix} -3h & -3k+1 \\ 6h+1 & 6k-2 \\ h & k \end{pmatrix}$ con $h, k \in \mathbb{C}$.

3. Una matrice è inversa sinistra di $\mathbf{A}$ se e solo se è la trasposta di una inversa destra di $\mathbf{B}$. Quindi le inverse sinistre di $\mathbf{A}$ sono esattamente tutte le matrici del tipo $\begin{pmatrix} -3h & 6h+1 & h \\ -3k+1 & 6k-2 & k \end{pmatrix}$ al variare di $h, k \in \mathbb{C}$.

$\boxed{5}$ Si trovi una forma ridotta di Gauss-Jordan per la matrice $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 & 0 & 0 & 6 \\ 2 & -2 & 3 & -2 & -1 & 8 \\ -2 & 2 & -2 & 0 & 0 & 5 \\ 3 & -3 & 4 & -2 & -1 & 12 \end{pmatrix}$.

Facendo una E.G. "in avanti" su $\mathbf{A}$ otteniamo

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 & 0 & 0 & 6 \\ 2 & -2 & 3 & -2 & -1 & 8 \\ -2 & 2 & -2 & 0 & 0 & 5 \\ 3 & -3 & 4 & -2 & -1 & 12 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{41}(-3)E_{31}(2)E_{21}(-2)E_1(\frac{1}{2})} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 11 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -1 & 3 \end{pmatrix} \to$$

$$\xrightarrow{E_{42}(-1)} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{43}(-1)E_3(\frac{1}{11})} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{U}$$

Facendo ora una E.G. "all'indietro" su $\mathbf{U}$ otteniamo

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{13}(-3)E_{23}(-2)} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{12}(-1)}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{W}$$

$\mathbf{W}$ è una forma ridotta di Gauss-Jordan per $\mathbf{A}$.