G. Parmeggiani, 5/11/2019 **Algebra Lineare, a.a. 2019/2020,**

Scuola di Scienze - Corsi di laurea: **Statistica per l'economia e l'impresa**
Statistica per le tecnologie e le scienze

Studenti: **numero di MATRICOLA PARI**

Svolgimento degli Esercizi per casa 5 (prima parte)

$\boxed{1}$ **(prima parte):** Si provi che l'insieme delle matrici simmetriche complesse di ordine n è un sottospazio vettoriale di $M_n(\mathbb{C})$.

Sia $W_1 = \{\mathbf{A} \in M_n(\mathbb{C}) | \mathbf{A} = \mathbf{A}^T\}$ l'insieme delle matrici simmetriche (complesse) di ordine n.

(i) $\mathbf{O}_{n\times n} \in W_1$: $\mathbf{O}_{n\times n}^T = \mathbf{O}_{n\times n}$

(ii) $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in W_1 \overset{?}{\Longrightarrow} \mathbf{A}+\mathbf{B} \in W_1$

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}\mathbf{A} \in W_1 \Longrightarrow \mathbf{A} \in M_n(\mathbb{C}) \\ \\ \mathbf{B} \in W_1 \Longrightarrow \mathbf{B} \in M_n(\mathbb{C})\end{array}\right\} \Longrightarrow \mathbf{A}+\mathbf{B} \in M_n(\mathbb{C}) \\ \\ \left.\begin{array}{l}\mathbf{A} \in W_1 \Longrightarrow \mathbf{A} = \mathbf{A}^T \\ \\ \mathbf{B} \in W_1 \Longrightarrow \mathbf{B} = \mathbf{B}^T\end{array}\right\} \Longrightarrow (\mathbf{A}+\mathbf{B})^T = \mathbf{A}^T + \mathbf{B}^T = \mathbf{A}+\mathbf{B}\end{array}\right\} \Longrightarrow \mathbf{A}+\mathbf{B} \in W_1$$

(iii) $\alpha \in \mathbb{C}, \mathbf{A} \in W_1 \overset{?}{\Longrightarrow} \alpha\mathbf{A} \in W_1$

$$\left.\begin{array}{r}\mathbf{A} \in W_1 \Longrightarrow \mathbf{A} \in M_n(\mathbb{C}) \Longrightarrow \alpha\mathbf{A} \in M_n(\mathbb{C}) \\ \mathbf{A} \in W_1 \Longrightarrow \mathbf{A} = \mathbf{A}^T \Longrightarrow (\alpha\mathbf{A})^T = \alpha\mathbf{A}^T = \alpha\mathbf{A}\end{array}\right\} \Longrightarrow \alpha\mathbf{A} \in W_1$$

$\boxed{2}$ Si dica quale dei seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{R}^2$ è un suo sottospazio:

$$W_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Big| x - 2y = 0 \right\};$$

$$W_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Big| x^2 - 2y = 0 \right\};$$

$$W_3 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Big| x - 2y = 1 \right\}.$$

• Per vedere se W_1 è o non è un sottospazio di $\mathbb{R}^2$ occorre stabilire se le seguenti condizioni sono soddisfatte:
(*i*) $\mathbf{0} \in W_1$,
(*ii*) $\mathbf{u} + \mathbf{v} \in W_1$ per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in W_1$,
(*iii*) $\alpha\mathbf{u} \in W_1$ per ogni $\mathbf{u} \in W_1$ ed ogni scalare α.

(*i*) $\mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in W_1$ perchè $0 - 2 \cdot 0 = 0$.

(*ii*) Se $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \in W_1$, allora

$$\begin{cases} x_1 - 2y_1 = 0 \\ x_2 - 2y_2 = 0 \end{cases}$$

Di conseguenza

$$(x_1 + x_2) - 2(y_1 + y_2) = (x_1 - 2y_1) + (x_2 - 2y_2) = 0 + 0 = 0,$$

e quindi $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \end{pmatrix} \in W_1$.

(*iii*) Se $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in W_1$, allora $x - 2y = 0$. Ne segue che per ogni scalare $\alpha \in \mathbb{R}$ si ha

$$\alpha x - 2\alpha y = \alpha(x - 2y) = \alpha \cdot 0 = 0,$$

e quindi $\alpha\mathbf{u} = \alpha \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha x \\ \alpha y \end{pmatrix} \in W_1$.

Dunque W_1 è un sottospazio di $\mathbb{R}^2$.

• Per vedere se W_2 è o non è un sottospazio di $\mathbb{R}^2$ occorre stabilire se le seguenti condizioni sono soddisfatte:

(*i*) $\mathbf{0} \in W_2$,
(*ii*) $\mathbf{u} + \mathbf{v} \in W_2$ per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in W_2$,
(*iii*) $\alpha\mathbf{u} \in W_2$ per ogni $\mathbf{u} \in W_2$ ed ogni scalare α.

(*i*) $\mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in W_2$ perchè $0^2 - 2 \cdot 0 = 0$.

(*ii*) Se $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \in W_2$, allora

$$(*) \qquad \begin{cases} x_1^2 - 2y_1 = 0 \\ x_2^2 - 2y_2 = 0 \end{cases}$$

Perchè $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \end{pmatrix}$ appartenga a W_2 occorre che sia soddisfatta la condizione:

$$(**) \qquad (x_1 + x_2)^2 - 2(y_1 + y_2) = 0.$$

Da $(*)$ segue

$$\begin{aligned}(x_1+x_2)^2-2(y_1+y_2) &= x_1^2+x_2^2+2x_1x_2-2(y_1+y_2) = \\ &= (x_1^2-2y_1)+(x_2^2-2y_2)+2x_1x_2 \quad \overset{(*)}{=} 2x_1x_2,\end{aligned}$$

per cui prendendo

$$\begin{cases} x_1 \neq 0 \\ x_2 \neq 0 \\ y_1 = \frac{x_1^2}{2} \\ y_2 = \frac{x_2^2}{2} \end{cases}$$

si ha che $(*)$ è soddisfatta, ma $(**)$ no, ossia $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \in W_2$, ma $\mathbf{u}+\mathbf{v} = \begin{pmatrix} x_1+x_2 \\ y_1+y_2 \end{pmatrix} \notin W_2$ (ad esempio, con $\mathbf{u} = \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \in W_2$ si ha che $2\mathbf{u} = \mathbf{u}+\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \notin W_2$). Quindi W_2, non soddisfacendo la condizione (ii), non è un sottospazio di $\mathbb{R}^2$.

• Per vedere se W_3 è o non è un sottospazio di $\mathbb{R}^2$ occorre stabilire se le seguenti condizioni sono soddisfatte:

(i) $\mathbf{0} \in W_3$,
(ii) $\mathbf{u}+\mathbf{v} \in W_3$ per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in W_3$,
(iii) $\alpha\mathbf{u} \in W_3$ per ogni $\mathbf{u} \in W_3$ ed ogni scalare α.

(i) $\mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \notin W_3$ perchè $0 - 2 \cdot 0 = 0 \neq 1$.

Dunque W_3, non soddisfacendo la condizione (i), non è un sottospazio di $\mathbb{R}^2$.

$\boxed{\mathbf{3}}$ Sia $\mathbf{A} \in M_n(\mathbb{C})$. Si provi che i tre seguenti sottoinsiemi di $M_n(\mathbb{C})$ sono sottospazi vettoriali di $M_n(\mathbb{C})$:

$$\begin{aligned} W_1 &= \{\mathbf{B} \in M_n(\mathbb{C}) | \mathbf{AB} = \mathbf{BA}\}; \\ W_2 &= \{\mathbf{B} \in M_n(\mathbb{C}) | \mathbf{AB} \text{ è scalare}\}; \\ W_3 &= \{\mathbf{B} \in M_n(\mathbb{C}) | \mathbf{AB} = \mathbf{B}^T\}. \end{aligned}$$

W_1 è un sottospazio di $M_n(\mathbb{C})$:

(i) $\mathbf{O}_{n\times n} \in W_1$: $\mathbf{O}_{n\times n} \in M_n(\mathbb{C})$ e $\mathbf{AO} = \mathbf{O} = \mathbf{OA}$.

(ii) $\mathbf{B}, \mathbf{C} \in W_1 \overset{?}{\Longrightarrow} \mathbf{B}+\mathbf{C} \in W_1$

$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} \mathbf{B} \in W_1 \Longrightarrow \mathbf{B} \in M_n(\mathbb{C}) \\ \mathbf{C} \in W_1 \Longrightarrow \mathbf{C} \in M_n(\mathbb{C}) \end{array}\right\} \Longrightarrow \mathbf{B}+\mathbf{C} \in M_n(\mathbb{C}) \\ \left.\begin{array}{l} \mathbf{B} \in W_1 \Longrightarrow \mathbf{AB} = \mathbf{BA} \\ \mathbf{C} \in W_1 \Longrightarrow \mathbf{AC} = \mathbf{CA} \end{array}\right\} \Longrightarrow \mathbf{A}(\mathbf{B}+\mathbf{C}) = \mathbf{AB}+\mathbf{AC} = \mathbf{BA}+\mathbf{CA} = (\mathbf{B}+\mathbf{C})\mathbf{A} \end{array}\right\} \Longrightarrow$$

$\Longrightarrow \quad \mathbf{B}+\mathbf{C} \in W_1$

$(iii) \quad \alpha \in \mathbb{C}, \mathbf{B} \in W_1 \quad \overset{?}{\Longrightarrow} \quad \alpha\mathbf{B} \in W_1$

$$\left.\begin{array}{r} \mathbf{B} \in W_1 \Longrightarrow \mathbf{B} \in M_n(\mathbb{C}) \Longrightarrow \alpha\mathbf{B} \in M_n(\mathbb{C}) \\ \mathbf{B} \in W_1 \Longrightarrow \mathbf{AB} = \mathbf{BA} \Longrightarrow \mathbf{A}(\alpha\mathbf{B}) = \alpha(\mathbf{AB}) = \alpha(\mathbf{BA}) = (\alpha\mathbf{B})\mathbf{A} \end{array}\right\} \Longrightarrow \alpha\mathbf{B} \in W_1$$

W_2 è un sottospazio di $M_n(\mathbb{C})$: poichè

$$\mathbf{B} \in W_2 \iff \mathbf{B} \in M_n(\mathbb{C}) \text{ ed } \exists \delta_{\mathbf{B}} \in \mathbb{C} | \mathbf{AB} = \delta_{\mathbf{B}} \boldsymbol{I_n},$$

e poichè $M_n(\mathbb{C})$ è uno spazio vettoriale (per cui la somma di due matrici di ordine n ed il prodotto di una matrice di ordine n per uno scalare sono matrici di ordine n) è sufficiente verificare che

(i) $\mathbf{AO}_{n\times n} = \mathbf{O} = 0\boldsymbol{I_n}$ per cui esiste $\delta_{\mathbf{O}} \in \mathbb{C}$ tale che $\mathbf{AO} = \delta_{\mathbf{O}}\boldsymbol{I_n}$ (si prenda $\delta_{\mathbf{O}} = 0$).

(ii) Se $\mathbf{B}$ e $\mathbf{C}$ sono matrici di ordine n tali che esistano $\delta_{\mathbf{B}}, \delta_{\mathbf{C}} \in \mathbb{C}$ per cui $\mathbf{AB} = \delta_{\mathbf{B}}\boldsymbol{I_n}$ e $\mathbf{AC} = \delta_{\mathbf{C}}\boldsymbol{I_n}$, allora

$$\mathbf{A}(\mathbf{B}+\mathbf{C}) = \mathbf{AB} + \mathbf{AC} = \delta_{\mathbf{B}}\boldsymbol{I_n} + \delta_{\mathbf{C}}\boldsymbol{I_n} = (\delta_{\mathbf{B}} + \delta_{\mathbf{C}})\boldsymbol{I_n}.$$

Quindi esiste $\delta_{\mathbf{B}+\mathbf{C}} \in \mathbb{C}$ tale che $\mathbf{A}(\mathbf{B}+\mathbf{C}) = \delta_{\mathbf{B}+\mathbf{C}}\boldsymbol{I_n}$: si prenda $\delta_{\mathbf{B}+\mathbf{C}} = \delta_{\mathbf{B}} + \delta_{\mathbf{C}}$.

(iii) Se $\alpha \in \mathbb{C}$ e $\mathbf{B}$ è una matrice di ordine n per cui esista $\delta_{\mathbf{B}} \in \mathbb{C}$ tale che $\mathbf{AB} = \delta_{\mathbf{B}}\boldsymbol{I_n}$, allora

$$\mathbf{A}(\alpha\mathbf{B}) = \alpha(\mathbf{AB}) = \alpha(\delta_{\mathbf{B}}\boldsymbol{I_n}) = (\alpha\delta_{\mathbf{B}})\boldsymbol{I_n}.$$

Quindi esiste $\delta_{\alpha\mathbf{B}} \in \mathbb{C}$ tale che $\mathbf{A}(\alpha\mathbf{B}) = \delta_{\alpha\mathbf{B}}\boldsymbol{I_n}$: si prenda $\delta_{\alpha\mathbf{B}} = \alpha\delta_{\mathbf{B}}$.

W_3 è un sottospazio di $M_n(\mathbb{C})$:

(i) $\mathbf{O}_{n\times n} \in W_3$: $\mathbf{O}_{n\times n} \in M_n(\mathbb{C})$ e$\mathbf{AO} = \mathbf{O} = \mathbf{O}^T$.

(ii) $\mathbf{B}, \mathbf{C} \in W_3 \quad \overset{?}{\Longrightarrow} \quad \mathbf{B}+\mathbf{C} \in W_3$

$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{r} \mathbf{B} \in W_3 \Longrightarrow \mathbf{B} \in M_n(\mathbb{C}) \\ \mathbf{C} \in W_3 \Longrightarrow \mathbf{C} \in M_n(\mathbb{C}) \end{array}\right\} \Longrightarrow \mathbf{B}+\mathbf{C} \in M_n(\mathbb{C}) \\ \left.\begin{array}{r} \mathbf{B} \in W_3 \Longrightarrow \mathbf{AB} = \mathbf{B}^T \\ \mathbf{C} \in W_3 \Longrightarrow \mathbf{AC} = \mathbf{C}^T \end{array}\right\} \Longrightarrow \mathbf{A}(\mathbf{B}+\mathbf{C}) = \mathbf{AB} + \mathbf{AC} = \mathbf{B}^T + \mathbf{C}^T = (\mathbf{B}+\mathbf{C})^T \end{array}\right\} \Longrightarrow$$

$\Longrightarrow \quad \mathbf{B}+\mathbf{C} \in W_3$

$(iii) \quad \alpha \in \mathbb{C}, \mathbf{B} \in W_3 \quad \overset{?}{\Longrightarrow} \quad \alpha\mathbf{B} \in W_3$

$$\left.\begin{array}{r} \mathbf{B} \in W_3 \Longrightarrow \mathbf{B} \in M_n(\mathbb{C}) \Longrightarrow \alpha\mathbf{B} \in M_n(\mathbb{C}) \\ \mathbf{B} \in W_3 \Longrightarrow \mathbf{AB} = \mathbf{B}^T \Longrightarrow \mathbf{A}(\alpha\mathbf{B}) = \alpha(\mathbf{AB}) = \alpha\mathbf{B}^T = (\alpha\mathbf{B})^T \end{array}\right\} \Longrightarrow \alpha\mathbf{B} \in W_3$$

$\boxed{\mathbf{4}}$ Sia $V = \mathbb{R}^2$ (sp. vett. reale). Si dica quale dei seguenti sottoinsiemi di V è un sottospazio vettoriale di V:

$$\mathcal{S}_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\};$$

$$\mathcal{S}_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\};$$

$$\mathcal{S}_3 = \left\{ \begin{pmatrix} a-2 \\ b \end{pmatrix} | a, b \in \mathbb{R} \right\};$$

$$\mathcal{S}_4 = \left\{ \begin{pmatrix} a-2 \\ a+1 \end{pmatrix} | a \in \mathbb{R} \right\}.$$

• $\mathcal{S}_1$ è un sottospazio vettoriale di V: l'unico elemento di $\mathcal{S}_1$ è il vettore $\mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, e $\mathbf{0}+\mathbf{0} = \mathbf{0} \in \mathcal{S}_1$ e $\alpha\mathbf{0} = \mathbf{0} \in \mathcal{S}_1$ per ogni scalare α ($\mathcal{S}_1$ è il sottospazio nullo di $\mathbb{R}^2$).

• $\mathcal{S}_2$ non è un sottospazio di V: contiene $\mathbf{e_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ma non contiene $\mathbf{e_2}+\mathbf{e_2} = 2\mathbf{e_2}$ (d'altra parte nessun sottoinsieme **finito** di uno spazio vettoriale W che contenga un elemento non nullo $\mathbf{w} \neq \mathbf{0}$ può essere un sottospazio di W: se U è un sottospazio di W che contiene $\mathbf{w} \neq \mathbf{0}$, allora U deve contenere l'insieme **infinito** di vettori $\{\alpha\mathbf{w} | \alpha \text{ scalare }\}$, per cui U stesso deve essere infinito).

• Per vedere se $\mathcal{S}_3$ è o non è un sottospazio di V occorre stabilire se le seguenti condizioni sono soddisfatte:

(i) $\mathbf{0} \in \mathcal{S}_3$,
(ii) $\mathbf{u}+\mathbf{v} \in \mathcal{S}_3$ per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathcal{S}_3$,
(iii) $\alpha\mathbf{u} \in \mathcal{S}_3$ per ogni $\mathbf{u} \in \mathcal{S}_3$ ed ogni scalare α.

(i) esistono $a, b \in \mathbb{R}$ tali che $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-2 \\ b \end{pmatrix}$: si prenda $a = 2$ e $b = 0$, quindi $\mathbf{0} \in \mathcal{S}_3$.

(ii) Se $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \boldsymbol{\mathcal{S}}_3$ esistono $a_1, b_1, a_2, b_2 \in \mathbb{R}$ tali che

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} a_1 - 2 \\ b_1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} a_2 - 2 \\ b_2 \end{pmatrix},$$

inoltre

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} \in \boldsymbol{\mathcal{S}}_3 \quad \iff \quad \exists \quad a_3, b_3 \in \mathbb{R} \,|\, \mathbf{u} + \mathbf{v} = \begin{pmatrix} a_3 - 2 \\ b_3 \end{pmatrix}.$$

Poichè $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \begin{pmatrix} a_1 - 2 \\ b_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2 - 2 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + a_2 - 4 \\ b_1 + b_2 \end{pmatrix}$, basta prendere $a_3 = a_1 + a_2 - 2$ e $b_3 = b_1 + b_2$.

(iii) Se $\mathbf{u} \in \boldsymbol{\mathcal{S}}_3$ esistono $a, b \in \mathbb{R}$ tali che $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} a - 2 \\ b \end{pmatrix}$, inoltre per ogni scalare $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\alpha\mathbf{u} \in \boldsymbol{\mathcal{S}}_3 \quad \iff \quad \exists \quad c, d \in \mathbb{R} \,|\, \alpha\mathbf{u} = \begin{pmatrix} c - 2 \\ d \end{pmatrix}.$$

Poichè $\alpha\mathbf{u} = \alpha \begin{pmatrix} a - 2 \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha a - 2\alpha \\ \alpha b \end{pmatrix}$, basta prendere $c = \alpha a - 2\alpha + 2$ e $d = \alpha b$.

Dunque $\boldsymbol{\mathcal{S}}_3$ è un sottospazio di V.

• Per vedere se $\boldsymbol{\mathcal{S}}_4$ è o non è un sottospazio di V occorre stabilire se le seguenti condizioni sono soddisfatte:

(i) $\mathbf{0} \in \boldsymbol{\mathcal{S}}_4$,
(ii) $\mathbf{u} + \mathbf{v} \in \boldsymbol{\mathcal{S}}_4$ per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \boldsymbol{\mathcal{S}}_4$,
(iii) $\alpha\mathbf{u} \in \boldsymbol{\mathcal{S}}_4$ per ogni $\mathbf{u} \in \boldsymbol{\mathcal{S}}_4$ ed ogni scalare α.

(i) Perchè $\mathbf{0}$ appartenga a $\boldsymbol{\mathcal{S}}_4$ occorre che esista $a \in \mathbb{R}$ tale che $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a - 2 \\ a + 1 \end{pmatrix}$. Poichè il sistema

$$\begin{cases} a - 2 = 0 \\ \\ a + 1 = 0 \end{cases}$$

nell'incognita a non ha soluzioni, allora $\boldsymbol{\mathcal{S}}_4$ non è un sottospazio di V.