G. Parmeggiani, 12/11/2019 **Algebra Lineare, a.a. 2019/2020,**

Scuola di Scienze - Corsi di laurea: **Statistica per l'economia e l'impresa**
Statistica per le tecnologie e le scienze

Studenti: **numero di MATRICOLA PARI**

Svolgimento degli Esercizi per casa 5 (seconda parte)

$\boxed{\mathbf{1}}$ **(seconda parte):** Si provi che l'insieme delle matrici anti-hermitiane (complesse) di ordine n non è un sottospazio vettoriale di $M_n(\mathbb{C})$.

Sia $W_2 = \{\mathbf{A} \in M_n(\mathbb{C}) | \mathbf{A}^H = -\mathbf{A}\}$ l'insieme delle matrici anti-hermitiane (complesse) di ordine n.

(i) $\quad \mathbf{O}_{n\times n} \in W_2$: $\mathbf{O}^H = \mathbf{O} = -\mathbf{O}$

(ii) $\quad \mathbf{A}, \mathbf{B} \in W_2 \quad \overset{?}{\Longrightarrow} \quad \mathbf{A}+\mathbf{B} \in W_2$

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}\mathbf{A} \in W_2 \Longrightarrow \mathbf{A} \in M_n(\mathbb{C})\\[1em] \mathbf{B} \in W_2 \Longrightarrow \mathbf{B} \in M_n(\mathbb{C})\end{array}\right\} \quad \Longrightarrow \quad \mathbf{A}+\mathbf{B} \in M_n(\mathbb{C}) \\[3em] \left.\begin{array}{l}\mathbf{A} \in W_2 \Longrightarrow \mathbf{A}^H = -\mathbf{A}\\[1em] \mathbf{B} \in W_2 \Longrightarrow \mathbf{B}^H = -\mathbf{B}\end{array}\right\} \Longrightarrow (\mathbf{A}+\mathbf{B})^H = \mathbf{A}^H + \mathbf{B}^H = -\mathbf{A} + (-\mathbf{B}) = -(\mathbf{A}+\mathbf{B})\end{array}\right\} \Longrightarrow$$

$\Longrightarrow \quad \mathbf{A}+\mathbf{B} \in W_2$

(iii) $\quad \alpha \in \mathbb{C}, \mathbf{A} \in W_2 \quad \overset{?}{\Longrightarrow} \quad \alpha\mathbf{A} \in W_2$

$$\mathbf{A} \in W_2 \Longrightarrow \mathbf{A} \in M_n(\mathbb{C}) \Longrightarrow \alpha\mathbf{A} \in M_n(\mathbb{C})$$

$$\mathbf{A} \in W_2 \Longrightarrow \mathbf{A}^H = -\mathbf{A} \Longrightarrow (\alpha\mathbf{A})^H = \overline{\alpha}\mathbf{A}^H = \overline{\alpha}(-\mathbf{A}) = -\overline{\alpha}\mathbf{A}$$

Non è vero che $\alpha\mathbf{A} \in W_2$ **per ogni scalare** α **ed ogni** $\mathbf{A} \in W_2$:

prendendo $\mathbf{A} \neq \mathbf{O}$si ottiene che

$$\overline{\alpha}\mathbf{A} = \alpha\mathbf{A} \quad \underset{\substack{\uparrow \\ \boxed{\text{poichè } \mathbf{A} \neq \mathbf{O}}}}{\Longleftrightarrow} \quad \overline{\alpha} = \alpha \iff \alpha \in \mathbb{R}$$

Quindi se $\mathbf{O} \neq \mathbf{A} \in W_2$ e $\alpha \notin \mathbb{R}$ (ad esempio se $\mathbf{A}$ è la matrice $n \times n$ con 1 al posto $(1, n)$, -1 al posto $(n, 1)$ e 0 altrove, ed $\alpha = i$) allora $\alpha\mathbf{A} \notin W_2$.

Dunque W_2 non è un sottospazio dello spazio vettoriale $M_n(\mathbb{C})$.

$\boxed{\mathbf{5}}$ Si dica se

$$\mathcal{W}_1 = \{i \cdot \mathbf{v} | \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n\} \text{ e}$$
$$\mathcal{W}_2 = \{2 \cdot \mathbf{v} | \mathbf{v} \in \mathbb{C}^n\}$$

sono sottospazi di $\mathbb{C}^n$.

Per vedere se $\mathcal{W}_1$ è o non è un sottospazio di $\mathbb{C}^n$ occorre stabilire se le seguenti condizioni sono soddisfatte:

(i) $\mathbf{0} \in \mathcal{W}_1$,
(ii) $\mathbf{u_1} + \mathbf{u_2} \in \mathcal{W}_1$ per ogni $\mathbf{u_1}, \mathbf{u_2} \in \mathcal{W}_1$,
(iii) $\alpha\mathbf{u} \in \mathcal{W}_1$ per ogni $\mathbf{u} \in \mathcal{W}_1$ ed ogni $\alpha \in \mathbb{C}$.

(i) esiste $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ tale che $\mathbf{0} = i \cdot \mathbf{v}$: si prenda $\mathbf{v} = \mathbf{0}$. Quindi $\mathbf{0} \in \mathcal{W}_1$
(ii) Se $\mathbf{u_1}, \mathbf{u_2} \in \mathcal{W}_1$ esistono $\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2} \in \mathbb{R}^n$ tali che $\mathbf{u_1} = i \cdot \mathbf{v_1}$ ed $\mathbf{u_2} = i \cdot \mathbf{v_2}$. inoltre

$$\mathbf{u_1} + \mathbf{u_2} \in \mathcal{W}_1 \quad \iff \quad \exists \quad \mathbf{v_3} \in \mathbb{R}^n \,|\, \mathbf{u_1} + \mathbf{u_2} = i \cdot \mathbf{v_3}.$$

Poichè $\mathbf{u_1} + \mathbf{u_2} = i \cdot \mathbf{v_1} + i \cdot \mathbf{v_2} = i \cdot (\mathbf{v_1} + \mathbf{v_2})$, basta prendere $\mathbf{v_3} = \mathbf{v_1} + \mathbf{v_2}$.

(iii) Se $\mathbf{u} \in \mathcal{W}_1$, esiste $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ tale che $\mathbf{u} = i \cdot \mathbf{v}$, inoltre per ogni scalare $\alpha \in \mathbb{C}$

$$\alpha\mathbf{u} \in \mathcal{W}_1 \quad \iff \quad \exists \mathbf{w} \in \mathbb{R}^n \,|\, \alpha\mathbf{u} = i \cdot \mathbf{w}.$$

Poichè $\alpha\mathbf{u} = \alpha \cdot (i \cdot \mathbf{v}) = i \cdot (\alpha \cdot \mathbf{v})$,

$$\alpha\mathbf{u} \in \mathcal{W}_1 \quad \forall \mathbf{u} \in \mathcal{W}_1, \alpha \in \mathbb{C} \quad \iff \mathbf{w} = \alpha \cdot \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n, \alpha \in \mathbb{C}.$$

Prendendo ad esempio $\mathbf{v} = \mathbf{e_1} \in \mathbb{R}^n$ ed $\alpha = i \in \mathbb{C}$, si ha che $\alpha\mathbf{v} = i \cdot \mathbf{e_1} \notin \mathbb{R}^n$ (quindi $\mathbf{u} = i \cdot \mathbf{e_1} \in \mathcal{W}_1$ mentre $\alpha\mathbf{u} = i^2 \cdot \mathbf{e_1} = -\mathbf{e_1} \notin \mathcal{W}_1$, non esistendo $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$ tale che $-\mathbf{e_1} = i \cdot \mathbf{z}$).

Concludendo, $\mathcal{W}_1$ non è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{C}^n$.

Per vedere se $\mathcal{W}_2$ è o non è un sottospazio di $\mathbb{C}^n$ occorre stabilire se le seguenti condizioni sono soddisfatte:

(i) $\mathbf{0} \in \mathcal{W}_2$,
(ii) $\mathbf{u_1} + \mathbf{u_2} \in \mathcal{W}_2$ per ogni $\mathbf{u_1}, \mathbf{u_2} \in \mathcal{W}_2$,
(iii) $\alpha\mathbf{u} \in \mathcal{W}_2$ per ogni $\mathbf{u} \in \mathcal{W}_2$ ed ogni $\alpha \in \mathbb{C}$.

(i) esiste $\mathbf{v} \in \mathbb{C}^n$ tale che $\mathbf{0} = 2 \cdot \mathbf{v}$: si prenda $\mathbf{v} = \mathbf{0}$. Quindi $\mathbf{0} \in \mathcal{W}_2$.

(ii) Se $\mathbf{u_1}, \mathbf{u_2} \in \mathcal{W}_2$ esistono $\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2} \in \mathbb{C}^n$ tali che $\mathbf{u_1} = 2 \cdot \mathbf{v_1}$ ed $\mathbf{u_2} = 2 \cdot \mathbf{v_2}$. inoltre

$$\mathbf{u_1} + \mathbf{u_2} \in \mathcal{W}_2 \quad \iff \quad \exists \quad \mathbf{v_3} \in \mathbb{C}^n \,|\, \mathbf{u_1} + \mathbf{u_2} = 2 \cdot \mathbf{v_3}.$$

Poichè $\mathbf{u_1} + \mathbf{u_2} = 2 \cdot \mathbf{v_1} + 2 \cdot \mathbf{v_2} = 2 \cdot (\mathbf{v_1} + \mathbf{v_2})$, basta prendere $\mathbf{v_3} = \mathbf{v_1} + \mathbf{v_2}$.

(*iii*) Se $\mathbf{u} \in \mathcal{W}_2$, esiste $\mathbf{v} \in \mathbb{C}^n$ tale che $\mathbf{u} = 2 \cdot \mathbf{v}$, inoltre per ogni scalare $\alpha \in \mathbb{C}$

$$\alpha\mathbf{u} \in \mathcal{W}_2 \quad \Longleftrightarrow \quad \exists \mathbf{w} \in \mathbb{C}^n \,|\, \alpha\mathbf{u} = 2 \cdot \mathbf{w}.$$

Poichè $\alpha\mathbf{u} = \alpha \cdot (2 \cdot \mathbf{v}) = 2 \cdot (\alpha \cdot \mathbf{v})$,

$$\alpha\mathbf{u} \in \mathcal{W}_2 \quad \forall \mathbf{u} \in \mathcal{W}_2, \alpha \in \mathbb{C} \quad \Longleftrightarrow \mathbf{w} = \alpha \cdot \mathbf{v} \in \mathbb{C}^n \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbb{C}^n, \alpha \in \mathbb{C}.$$

Dal momento che $\mathbb{C}^n$ è uno spazio vettoriale, allora $\alpha\mathbf{v} \in \mathbb{C}^n$ per ogni $\mathbf{v} \in \mathbb{C}^n$ ed ogni $\alpha \in \mathbb{C}$.

Concludendo, $\mathcal{W}_2$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{C}^n$.