

G. Parmeggiani, 12/11/2019

Algebra Lineare, a.a. 2019/2020,

Scuola di Scienze - Corsi di laurea:

Statistica per l'economia e l'impresa
Statistica per le tecnologie e le scienze

Studenti:

numero di MATRICOLA PARI

Svolgimento degli Esercizi per casa 6

1 Sia $W = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R} \right\}$ l'insieme delle matrici reali anti-simmetriche di ordine 2. Si provi che W è un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale reale $M_2(\mathbb{R})$ e si dica quali dei seguenti sottoinsiemi di $M_2(\mathbb{R})$ è un insieme di generatori per W :

$$\mathcal{S}_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\mathcal{S}_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\mathcal{S}_3 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Proviamo prima che W è un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale reale $M_2(\mathbb{R})$.

1^o MODO (i) $\mathbf{0}_{2 \times 2} \in W$: $\mathbf{0}_{2 \times 2} \in M_2(\mathbb{R})$ e $\mathbf{0}_{2 \times 2}^T = \mathbf{0}_{2 \times 2} = -\mathbf{0}_{2 \times 2}$

(ii)

$$\left. \begin{array}{l} \mathbf{A} \in W \implies \mathbf{A} \in M_2(\mathbb{R}) \\ \mathbf{B} \in W \implies \mathbf{B} \in M_2(\mathbb{R}) \end{array} \right\} \implies \mathbf{A} + \mathbf{B} \in M_2(\mathbb{R})$$

$$\left. \begin{array}{l} \mathbf{A} \in W \implies \mathbf{A}^T = -\mathbf{A} \\ \mathbf{B} \in W \implies \mathbf{B}^T = -\mathbf{B} \end{array} \right\} \implies (\mathbf{A} + \mathbf{B})^T = \mathbf{A}^T + \mathbf{B}^T = -\mathbf{A} - \mathbf{B} = -(\mathbf{A} + \mathbf{B})$$

$$\implies \mathbf{A} + \mathbf{B} \in W.$$

$$(iii) \quad \alpha \in \mathbb{C}, \mathbf{A} \in W \stackrel{?}{\implies} \alpha \mathbf{A} \in W$$

$$\left. \begin{array}{l} \mathbf{A} \in W \implies \mathbf{A} \in M_2(\mathbb{R}) \implies \alpha \mathbf{A} \in M_2(\mathbb{R}) \\ \mathbf{A} \in W \implies \mathbf{A}^T = -\mathbf{A} \implies (\alpha \mathbf{A})^T = \alpha \mathbf{A}^T = \alpha(-\mathbf{A}) = -\alpha \mathbf{A} \end{array} \right\} \implies \alpha \mathbf{A} \in W$$

2^o MODO (i) esiste $a \in \mathbb{R}$ tale che $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix}$: si prenda $a = 0$.

(ii) Se $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in W$ esistono $a, b \in \mathbb{R}$ tali che

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix},$$

inoltre

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} \in W \iff \exists c \in \mathbb{R} \mid \mathbf{A} + \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & c \\ -c & 0 \end{pmatrix}.$$

Poichè

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & a+b \\ -(a+b) & 0 \end{pmatrix},$$

basta prendere $c = a + b$.

(iii) Se $\mathbf{A} \in W$ esiste $a \in \mathbb{R}$ tale che $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix}$, inoltre per ogni scalare $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\alpha \mathbf{A} \in W \iff \exists b \in \mathbb{R} \mid \alpha \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix}.$$

Poichè

$$\alpha \mathbf{A} = \alpha \begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \alpha a \\ -\alpha a & 0 \end{pmatrix},$$

basta prendere $b = \alpha a$.

Dunque W è un sottospazio di $M_2(\mathbb{R})$.

Vediamo ora quale tra \mathcal{S}_1 , \mathcal{S}_2 e \mathcal{S}_3 è un insieme di generatori di W .

\mathcal{S}_1 : Dal momento che ogni elemento di $\mathcal{S}_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \right\}$ è un elemento di W , per stabilire se \mathcal{S}_1 è o non è un insieme di generatori di W , spazio vettoriale **reale**, occorre stabilire se **per ogni** $\mathbf{A} \in W$ **esistono** α_1 ed α_2 numeri **reali** tali che

$$\mathbf{A} = \alpha_1 \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha_1 + 2\alpha_2 \\ \alpha_1 - 2\alpha_2 & 0 \end{pmatrix}$$

Poichè per ogni $\mathbf{A} \in W$ esiste $a \in \mathbb{R}$ tale che $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix}$, il problema diventa stabilire se per ogni $a \in \mathbb{R}$ il sistema

$$(*) \quad \begin{cases} -\alpha_1 + 2\alpha_2 = a \\ \alpha_1 - 2\alpha_2 = -a \end{cases}$$

nelle incognite **reali** α_1, α_2 ha soluzione. (*) è equivalente all'unica equazione

$$\alpha_1 - 2\alpha_2 = -a$$

che ha soluzioni per ogni $a \in \mathbb{R}$ (si prendano ad esempio $\alpha_2 = 0$ ed $\alpha_1 = -a$).

Dunque \mathcal{S}_1 è un insieme di generatori per W come spazio vettoriale reale.

\mathcal{S}_2 : Poichè $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \notin W$, allora $\mathcal{S}_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$ non è un insieme di generatori per W .

\mathcal{S}_3 : Dal momento che $\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} \in W$, per stabilire se $\mathcal{S}_3 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} \right\}$ è o non è un insieme di generatori per W come spazio vettoriale **reale** occorre stabilire se **per ogni** $\mathbf{A} \in W$ **esiste** $\alpha \in \mathbb{R}$ tale che

$$\mathbf{A} = \alpha \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3\alpha \\ -3\alpha & 0 \end{pmatrix}$$

Poichè per ogni $\mathbf{A} \in W$ esiste $a \in \mathbb{R}$ tale che $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix}$, il problema diventa stabilire se per ogni $a \in \mathbb{R}$ il sistema

$$(**) \quad \begin{cases} 3\alpha = a \\ -3\alpha = -a \end{cases}$$

nell' incognita **reale** α ha soluzione. Poichè (**) ha soluzione per ogni $a \in \mathbb{R}$ ($\alpha = a/3$), allora \mathcal{S}_3 è un insieme di generatori per W come spazio vettoriale reale.

2 Si dica se

$$\mathcal{S} = \left\{ \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}; \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 8 \end{pmatrix}; \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} \right\}$$

è un insieme di generatori di \mathbb{R}^3 .

Per stabilire se \mathcal{S} è o non è un insieme di generatori di \mathbb{R}^3 occorre stabilire se

per ogni $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ esistono $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ tali che

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \alpha_1 \mathbf{v}_1 + \alpha_2 \mathbf{v}_2 + \alpha_3 \mathbf{v}_3 = \alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 8 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 + 3\alpha_2 + \alpha_3 \\ -\alpha_1 - 4\alpha_2 + 2\alpha_3 \\ 2\alpha_1 + 8\alpha_2 - 4\alpha_3 \end{pmatrix}$$

ossia che il sistema lineare

$$(*) \quad \begin{cases} \alpha_1 + 3\alpha_2 + \alpha_3 = a \\ -\alpha_1 - 4\alpha_2 + 2\alpha_3 = b \\ 2\alpha_1 + 8\alpha_2 - 4\alpha_3 = c \end{cases}$$

nelle incognite $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ ha soluzione **qualunque** siano $a, b, c \in \mathbb{R}$.

Facendo una eliminazione di Gauss sulla matrice aumentata del sistema si ottiene

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & | & a \\ -1 & -4 & 2 & | & b \\ 2 & 8 & -4 & | & c \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{31}(-2)E_{21}(1)} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & | & a \\ 0 & -1 & 3 & | & a+b \\ 0 & 2 & -6 & | & c-2a \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\xrightarrow{E_{32}(-2)E_2(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & | & a \\ 0 & 1 & -3 & | & -a-b \\ 0 & 0 & 0 & | & 2b+c \end{pmatrix}.$$

Poichè esistono $a, b, c \in \mathbb{R}$ tali che $2b+c \neq 0$ (si prendano ad esempio $a = b = 0$ e $c = 1$), allora $(*)$ non ha soluzione qualunque siano $a, b, c \in \mathbb{R}$, per cui \mathcal{S} non è un insieme di generatori di \mathbb{R}^3 .

3 Siano $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$; $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $\mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ ed $\mathbf{e}_3 \in \mathbb{R}^3$. Si dica per quali

$x \in \mathbb{R}$ l'insieme di vettori $\mathcal{S}(x) = \{\mathbf{v}_1; \mathbf{v}_2; \mathbf{v}_3; x \cdot \mathbf{e}_3\}$ è un insieme di generatori di \mathbb{R}^3 .

$\mathcal{S}(x) = \{\mathbf{v}_1; \mathbf{v}_2; \mathbf{v}_3; x \cdot \mathbf{e}_3\}$ è un insieme di generatori di \mathbb{R}^3 se e solo se per ogni $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ esistono $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 \in \mathbb{R}$ tali che

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \alpha_1 \mathbf{v}_1 + \alpha_2 \mathbf{v}_2 + \alpha_3 \mathbf{v}_3 + \alpha_4 \cdot x \cdot \mathbf{e}_3 =$$

$$= \alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + \alpha_4 \cdot x \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 + 3\alpha_2 + \alpha_3 \\ 2\alpha_1 + 6\alpha_2 + 3\alpha_3 \\ 4\alpha_3 + \alpha_4 x \end{pmatrix}$$

ossia se e solo se il sistema lineare

$$(*) \quad \begin{cases} \alpha_1 + 3\alpha_2 + \alpha_3 = a \\ 2\alpha_1 + 6\alpha_2 + 3\alpha_3 = b \\ 4\alpha_3 + \alpha_4 x = c \end{cases}$$

nelle incognite $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ ha soluzione **per ogni** $a, b, c \in \mathbb{R}$.

Facendo una eliminazione di Gauss sulla matrice aumentata del sistema si ottiene

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 1 & 0 & a \\ 2 & 6 & 3 & 0 & b \\ 0 & 0 & 4 & x & c \end{array} \right) & \xrightarrow{E_{21}(-2)} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 1 & 0 & a \\ 0 & 0 & 1 & 0 & b-2a \\ 0 & 0 & 4 & x & c \end{array} \right) \rightarrow \\ & \xrightarrow{E_{32}(-4)} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 1 & 0 & a \\ 0 & 0 & 1 & 0 & b-2a \\ 0 & 0 & 0 & x & c-4b+2a \end{array} \right) = (\mathbf{B}(x) \mid \mathbf{c}(x)) \end{aligned}$$

Se $x \neq 0$

$$(\mathbf{B}(x) \mid \mathbf{c}(x)) \xrightarrow{E_3(\frac{1}{x})} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 1 & 0 & a \\ 0 & 0 & 1 & 0 & b-2a \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{c-4b+8a}{x} \end{array} \right) = (\mathbf{U}(x) \mid \mathbf{d}(x))$$

Poichè $\mathbf{d}(x)$ è libera **per ogni** $a, b, c \in \mathbb{R}$, allora $\mathcal{S}(x)$ è un insieme di generatori di \mathbb{R}^3 .

Se $x = 0$

$$(\mathbf{B}(0) \mid \mathbf{c}(0)) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 1 & 0 & a \\ 0 & 0 & 1 & 0 & b-2a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c-4b+8a \end{array} \right) = (\mathbf{U}(0) \mid \mathbf{d}(0))$$

Poichè esistono $a, b, c \in \mathbb{R}$ per cui $\mathbf{d}(0)$ è dominante (ad esempio si prendano $a = b = 0$ e $c = 1$), allora $\mathcal{S}(0)$ non è un insieme di generatori di \mathbb{R}^3 .

Concludendo, $\mathcal{S}(x)$ è un insieme di generatori di \mathbb{R}^3 se e solo se $x \neq 0$.

4 Si dica quale dei seguenti sottoinsiemi di \mathbb{R}^3 è linearmente indipendente:

$$\left\{ \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}; \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}; \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\},$$

$$\left\{ \mathbf{w}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}; \mathbf{w}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}; \mathbf{w}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}; \right\}.$$

(1) Per stabilire se $\{\mathbf{v}_1; \mathbf{v}_2; \mathbf{v}_3\}$ sia linearmente indipendente o linearmente dipendente, occorre stabilire se gli unici numeri reali $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ per cui $\alpha_1\mathbf{v}_1 + \alpha_2\mathbf{v}_2 + \alpha_3\mathbf{v}_3 = \mathbf{0}$ siano $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$, oppure no. Poichè, dati $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$, si ha

$$\alpha_1\mathbf{v}_1 + \alpha_2\mathbf{v}_2 + \alpha_3\mathbf{v}_3 = \alpha_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4\alpha_2 + 2\alpha_3 \\ 4\alpha_1 + 6\alpha_2 - \alpha_3 \\ 2\alpha_2 + \alpha_3 \end{pmatrix},$$

allora $\alpha_1\mathbf{v}_1 + \alpha_2\mathbf{v}_2 + \alpha_3\mathbf{v}_3 = \mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ se e solo se

$$(*) \quad \begin{cases} 4\alpha_2 + 2\alpha_3 = 0 \\ 4\alpha_1 + 6\alpha_2 - \alpha_3 = 0 \\ 2\alpha_2 + \alpha_3 = 0 \end{cases}$$

Il problema diventa quindi stabilire se il sistema (*) (nelle incognite $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$) abbia un'unica soluzione (e quindi la soluzione nulla $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$), oppure no. La

matrice aumentata di (*) è: $\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 4 & 2 & 0 \\ 4 & 6 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{array} \right)$.

Facendo un'eliminazione di Gauss si ottiene:

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 4 & 2 & 0 \\ 4 & 6 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{array} \right) &\xrightarrow{E_1(\frac{1}{4})E_{12}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3/2 & -1/4 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \\ &\xrightarrow{E_{32}(-2)E_2(\frac{1}{4})} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3/2 & -1/4 & 0 \\ 0 & 1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) = (\mathbf{U} \mid \mathbf{0}). \end{aligned}$$

Poichè **non tutte** le colonne di \mathbf{U} sono **dominanti**, allora (*) ha ∞ soluzioni. In particolare (*) ha una soluzione non nulla, e quindi $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ è **linearmente dipendente** (ad esempio, poichè (*) è equivalente a

$$\begin{cases} \alpha_1 + \frac{3}{2}\alpha_2 - \frac{1}{4}\alpha_3 = 0 \\ \alpha_2 + \frac{1}{2}\alpha_3 = 0 \end{cases}$$

prendendo $\alpha_3 = 1$ con la sostituzione all'indietro si ottiene

$$\alpha_2 = -\frac{1}{2} \quad \text{e} \quad \alpha_1 = -\frac{3}{2}\alpha_2 - \frac{1}{4}\alpha_3 = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} = 1,$$

ossia $\begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$ è una soluzione non nulla di (*) e $\mathbf{v}_1 - \frac{1}{2}\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3 = \mathbf{0}$ è una combinazione lineare nulla di $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ con coefficienti non tutti nulli).

(2) Per stabilire se $\{\mathbf{w}_1; \mathbf{w}_2; \mathbf{w}_3\}$ sia linearmente indipendente o linearmente dipendente, occorre stabilire se gli unici numeri reali $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ per cui $\alpha_1\mathbf{w}_1 + \alpha_2\mathbf{w}_2 + \alpha_3\mathbf{w}_3 = \mathbf{0}$ siano $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$, oppure no. Poichè, dati $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$, si ha

$$\alpha_1\mathbf{w}_1 + \alpha_2\mathbf{w}_2 + \alpha_3\mathbf{w}_3 = \alpha_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_2 + \alpha_3 \\ 4\alpha_1 - \alpha_3 \\ 2\alpha_2 + \alpha_3 \end{pmatrix}$$

allora $\alpha_1\mathbf{w}_1 + \alpha_2\mathbf{w}_2 + \alpha_3\mathbf{w}_3 = \mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ se e solo se

$$(**) \quad \begin{cases} \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \\ 4\alpha_1 - \alpha_3 = 0 \\ 2\alpha_2 + \alpha_3 = 0 \end{cases}$$

Facendo un'eliminazione di Gauss sulla matrice aumentata di (**) si ottiene:

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{array} \right) & \xrightarrow{E_1(\frac{1}{4})E_{12}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1/4 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{E_{32}(-2)} \\ \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1/4 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{array} \right) & \xrightarrow{E_3(-1)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1/4 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right) = (\mathbf{U} \mid \mathbf{0}). \end{aligned}$$

Poichè **tutte** le colonne di \mathbf{U} sono **dominanti**, allora (**) ha come unica soluzione la soluzione nulla $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, ossia

$$\alpha_1\mathbf{w}_1 + \alpha_2\mathbf{w}_2 + \alpha_3\mathbf{w}_3 = \mathbf{0} \implies \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0.$$

Quindi $\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3\}$ è **linearmente indipendente**.

5 Sia W l'insieme delle matrici anti-simmetriche reali di ordine 2. W è uno spazio vettoriale reale, essendo un sottospazio di $M_2(\mathbb{R})$ (si veda l'esercizio 1). Si considerino i suoi sottoinsiemi $\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2$ e \mathcal{S}_3 definiti nell'esercizio 1. Per ciascuno di essi si dica se è linearmente indipendente oppure linearmente dipendente.

\mathcal{S}_1 : Per stabilire se \mathcal{S}_1 sia linearmente indipendente o linearmente dipendente, occorre stabilire se gli unici numeri reali α_1 ed α_2 per cui

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

siano $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$, oppure no. Poichè, dati $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$, si ha

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha_1 + 2\alpha_2 \\ \alpha_1 - 2\alpha_2 & 0 \end{pmatrix}$$

allora

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

se e solo se

$$(*) \quad \begin{cases} -\alpha_1 + 2\alpha_2 = 0 \\ \alpha_1 - 2\alpha_2 = 0 \end{cases}$$

Poichè (*) è equivalente all'unica equazione

$$-\alpha_1 + 2\alpha_2 = 0$$

che ha una soluzione non nulla (si prenda ad esempio $\alpha_2 = 1$ e con la sostituzione all'indietro si ottiene $\alpha_1 = 2$, per cui $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ è una soluzione non nulla di (*) e

$$2 \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

è una combinazione lineare nulla degli elementi di \mathcal{S}_1 con coefficienti non tutti nulli).

Quindi \mathcal{S}_1 è **linearmente dipendente**.

\mathcal{S}_2 : \mathcal{S}_2 non è un sottoinsieme di W .

La domanda se \mathcal{S}_2 sia o non sia linearmente indipendente ha senso non nello spazio vettoriale W , ma in tutto $M_2(\mathbb{R})$.

Per stabilire se \mathcal{S}_2 sia linearmente indipendente o linearmente dipendente (in $M_2(\mathbb{R})$), occorre stabilire se gli unici numeri reali α_1 ed α_2 per cui

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

siano $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$, oppure no. Poichè, dati $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$, si ha

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_2 & \alpha_1 \\ -\alpha_1 & 0 \end{pmatrix}$$

allora

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

se e solo se

$$\alpha_1 = \alpha_2 = 0,$$

Quindi \mathcal{S}_2 è **linearmente indipendente** in $M_2(\mathbb{R})$.

\mathcal{S}_3 : Essendo $\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, l'unico $\alpha \in \mathbb{R}$ per cui si abbia

$$\alpha \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

è $\alpha = 0$, per cui

\mathcal{S}_3 è **linearmente indipendente**.