G. Parmeggiani, 19/11/2019 **Algebra Lineare, a.a. 2019/2020,**

Scuola di Scienze - Corsi di laurea: **Statistica per l'economia e l'impresa**
Statistica per le tecnologie e le scienze

Studenti: **numero di MATRICOLA PARI**

Svolgimento degli Esercizi per casa 7 (prima parte)

$\boxed{1}$ Sia $V = \{a + bx + cx^2 \mid a, b, c \in \mathbb{C}\}$ lo spazio dei polinomi a coefficienti complessi di grado minore od uguale a 2. Si provi che $\boldsymbol{\mathcal{B}} = \{2+x^2; x-x^2; 1+x\}$ è una base di V.

Per provare che $\boldsymbol{\mathcal{B}}$ è una base di V occorre provare che $\boldsymbol{\mathcal{B}}$ è un insieme di generatori di V e che $\boldsymbol{\mathcal{B}}$ è linearmente indipendente (L.I.).
Per provare che $\boldsymbol{\mathcal{B}} \subseteq V$ è un insieme di generatori di V occorre provare che per ogni $a + bx + cx^2 \in V$ esistono scalari $\alpha, \beta, \delta \in \mathbb{C}$ tali che

$$a + bx + cx^2 = \alpha(2 + x^2) + \beta(x - x^2) + \delta(1 + x),$$

ossia che il sistema lineare

$$(*) \qquad \begin{cases} 2\alpha + \delta = a \\ \beta + \delta = b \\ \alpha - \beta = c \end{cases}$$

nelle incognite α, β e δ ha soluzione **qualunque** siano $a, b, c \in \mathbb{C}$. Facendo una eliminazione di Gauss sulla matrice aumentata del sistema si ottiene

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 1 & a \\ 0 & 1 & 1 & b \\ 1 & -1 & 0 & c \end{array}\right) \xrightarrow{E_{31}(-1)E_1(\frac{1}{2})} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{a}{2} \\ 0 & 1 & 1 & b \\ 0 & -1 & -\frac{1}{2} & c - \frac{a}{2} \end{array}\right) \xrightarrow{E_{32}(1)}$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{a}{2} \\ 0 & 1 & 1 & b \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & c - \frac{a}{2} + b \end{array}\right) \xrightarrow{E_3(2)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{a}{2} \\ 0 & 1 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 & 2c - a + 2b \end{array}\right) = \left(\mathbf{U} \mid \mathbf{d}\right).$$

Poichè $\mathbf{d}$ è libera qualunque siano $a, b, c \in \mathbb{C}$, allora $(*)$ ha soluzione per ogni $a, b, c \in \mathbb{C}$, e quindi $\boldsymbol{\mathcal{B}}$ è un insieme di generatori di V.

Per provare che $\boldsymbol{\mathcal{B}}$ è L.I. occorre provare che l'unica combinazione lineare nulla di suoi elementi ha tutti i coefficienti nulli, ossia che

$$\alpha(2 + x^2) + \beta(x - x^2) + \delta(1 + x) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \alpha = \beta = \delta = 0.$$

Da

$$0 = \alpha(2+x^2) + \beta(x-x^2) + \delta(1+x) = (2\alpha+\delta) + (\beta+\delta)x + (\alpha-\beta)x^2$$

si ottiene il sistema lineare nelle incognite α, β e δ

$$(**) \qquad \begin{cases} 2\alpha + \delta = 0 \\ \beta + \delta = 0 \\ \alpha - \beta = 0 \end{cases}$$

Dal momento che $(**)$ si ottiene da $(*)$ ponendo $a = b = c = 0$, una forma ridotta di Gauss della matrice aumentata di $(**)$ si ottiene da quella trovata per $(*)$ ponendo $a = b = c = 0$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} & | & \frac{a}{2} \\ 0 & 1 & 1 & | & b \\ 0 & 0 & 1 & | & 2c-a+2b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} & | & 0 \\ 0 & 1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{U} & | & \mathbf{0} \end{pmatrix}.$$

Poichè l'ultima colonna di $\begin{pmatrix} \mathbf{U} & | & \mathbf{0} \end{pmatrix}$ è libera, $(**)$ ha soluzioni, e poichè l'ultima colonna di $\begin{pmatrix} \mathbf{U} & | & \mathbf{0} \end{pmatrix}$ è nulla, tra le soluzioni di $(**)$ c'è quella nulla (ossia $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$). Inoltre, dal momento che tutte le colonne di $\mathbf{U}$ sono dominanti, $(**)$ ha un'unica soluzione.

Dunque l'unica soluzione di $(**)$ è quella nulla, per cui $\boldsymbol{\mathcal{B}}$ è L.I.

$\boxed{\mathbf{2}}$ Si provi che

$$\boldsymbol{\mathcal{B}} = \left\{ \mathbf{B_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}; \mathbf{B_2} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}; \mathbf{B_3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

è una base dello spazio vettoriale V delle matrici complesse triangolari inferiori 2×2.

Per provare che $\boldsymbol{\mathcal{B}}$ è una base di V occorre provare che $\boldsymbol{\mathcal{B}}$ è un insieme di generatori di V e che $\boldsymbol{\mathcal{B}}$ è linearmente indipendente (L.I.).

Per provare che $\boldsymbol{\mathcal{B}} \subseteq V$ è un insieme di generatori di V occorre provare che per ogni $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix} \in V$ esistono scalari $\alpha, \beta, \delta \in \mathbb{C}$ tali che

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix} = \alpha\mathbf{B_1} + \beta\mathbf{B_2} + \delta\mathbf{B_3} = \alpha \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \delta \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \alpha + 2\beta & 0 \\ \alpha + \beta + \delta & \alpha + \beta \end{pmatrix},$$

ossia che il sistema lineare

$$(*) \qquad \begin{cases} \alpha + 2\beta = a \\ \alpha + \beta + \delta = b \\ \alpha + \beta = c \end{cases}$$

nelle incognite α, β e δ ha soluzione **qualunque** siano $a, b, c \in \mathbb{C}$. Facendo una eliminazione di Gauss sulla matrice aumentata del sistema si ottiene

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & | & a \\ 1 & 1 & 1 & | & b \\ 1 & 1 & 0 & | & c \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{31}(-1)E_{21}(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & | & a \\ 0 & -1 & 1 & | & b-a \\ 0 & -1 & 0 & | & c-a \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{32}(1)E_{2}(-1)}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & | & a \\ 0 & 1 & -1 & | & a-b \\ 0 & 0 & -1 & | & c-b \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{3}(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & | & a \\ 0 & 1 & -1 & | & a-b \\ 0 & 0 & 1 & | & b-c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{U} & | & \mathbf{d} \end{pmatrix}.$$

Poichè $\mathbf{d}$ è libera qualunque siano $a, b, c \in \mathbb{C}$, allora $(*)$ ha soluzione per ogni $a, b, c \in \mathbb{C}$, e quindi $\boldsymbol{\mathcal{B}}$ è un insieme di generatori di V.

Per provare che $\boldsymbol{\mathcal{B}}$ è L.I. occorre provare che l'unica combinazione lineare nulla di suoi elementi ha tutti i coefficienti nulli, ossia che

$$\alpha \mathbf{B_1} + \beta \mathbf{B_2} + \delta \mathbf{B_3} = \mathbf{O} \quad \Longrightarrow \quad \alpha = \beta = \delta = 0.$$

Da

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \alpha \mathbf{B_1} + \beta \mathbf{B_2} + \delta \mathbf{B_3} = \alpha \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \delta \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \alpha + 2\beta & 0 \\ \alpha + \beta + \delta & \alpha + \beta \end{pmatrix},$$

si ottiene il sistema lineare nelle incognite α, β e δ

$$(**) \qquad \begin{cases} \alpha + 2\beta = 0 \\ \alpha + \beta + \delta = 0 \\ \alpha + \beta = 0 \end{cases}$$

Dal momento che $(**)$ si ottiene da $(*)$ ponendo $a = b = c = 0$, una forma ridotta di Gauss della matrice aumentata di $(**)$ si ottiene da quella trovata per $(*)$ ponendo $a = b = c = 0$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & | & a \\ 0 & 1 & -1 & | & a-b \\ 0 & 0 & 1 & | & b-c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & | & 0 \\ 0 & 1 & -1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{U} & | & \mathbf{0} \end{pmatrix}.$$

Poichè l'ultima colonna di $\begin{pmatrix}\mathbf{U} & | & \mathbf{0}\end{pmatrix}$ è libera, $(**)$ ha soluzioni, e poichè l'ultima colonna di $\begin{pmatrix}\mathbf{U} & | & \mathbf{0}\end{pmatrix}$ è nulla, tra le soluzioni di $(**)$ c'è quella nulla (ossia $\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\\ \delta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$). Inoltre, dal momento che tutte le colonne di $\mathbf{U}$ sono dominanti, $(**)$ ha un'unica soluzione.

Dunque l'unica soluzione di $(**)$ è quella nulla, per cui $\boldsymbol{\mathcal{B}}$ è L.I.

$\boxed{\mathbf{3}}$ Sia W lo spazio vettoriale reale delle matrici 2×2 reali simmetriche. L'insieme

$$\boldsymbol{\mathcal{S}} = \{ \quad \mathbf{C_1} = \begin{pmatrix}0 & 2\\ 2 & 2\end{pmatrix}; \mathbf{C_2} = \begin{pmatrix}2 & 3\\ 3 & 0\end{pmatrix}; \mathbf{C_3} = \begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix};$$

$$\mathbf{C_4} = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}; \mathbf{C_5} = \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}; \mathbf{C_6} = \begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix} \Big\}$$

è un suo insieme di generatori (non ne è richiesta la verifica). Si trovi una base di W contenuta in $\boldsymbol{\mathcal{S}}$.

"Restringiamo" un insieme di generatori di W.

1^0 **passaggio**. Esistono in $\boldsymbol{\mathcal{S}}$ vettori che siano combinazioni lineari degli altri vettori di $\boldsymbol{\mathcal{S}}$?

$\mathbf{C_5} = \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$ è senz'altro combinazione degli altri:

$$\mathbf{C_5} = \mathbf{O} = 0\mathbf{C_1} + 0\mathbf{C_2} + 0\mathbf{C_3} + 0\mathbf{C_4} + 0\mathbf{C_6},$$

per cui togliamo subito $\mathbf{C_5}$ (**togliamo** comunque subito **tutti gli eventuali vettori di $\boldsymbol{\mathcal{S}}$ che siano nulli**), **e poniamo**

$$\boldsymbol{\mathcal{S}}_1 = \{ \quad \mathbf{C_1} = \begin{pmatrix}0 & 2\\ 2 & 2\end{pmatrix}; \mathbf{C_2} = \begin{pmatrix}2 & 3\\ 3 & 0\end{pmatrix}; \mathbf{C_3} = \begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix};$$

$$\mathbf{C_4} = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}; \mathbf{C_6} = \begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix} \Big\}$$

2^0 **passaggio**. $\boldsymbol{\mathcal{S}}_1$ è ancora un insieme di generatori di W. Esistono in $\boldsymbol{\mathcal{S}}_1$ vettori che siano combinazioni lineari degli altri vettori di $\boldsymbol{\mathcal{S}}_1$?

Poichè

$$\mathbf{C_1} = 2\mathbf{C_6} = 0\mathbf{C_2} + 0\mathbf{C_3} + 0\mathbf{C_4} + 2\mathbf{C_6}$$

ma anche

$$\mathbf{C_6} = \frac{1}{2}\mathbf{C_1} = \frac{1}{2}\mathbf{C_1} + 0\mathbf{C_2} + 0\mathbf{C_3} + 0\mathbf{C_4}$$

possiamo togliere da $\boldsymbol{\mathcal{S}}_1$ il vettore $\mathbf{C_1}$, oppure possiamo togliere da $\boldsymbol{\mathcal{S}}_1$ il vettore $\mathbf{C_6}$, ottenendo ancora un insieme di generatori di W. Dunque, **guardiamo se tra i vettori di $\boldsymbol{\mathcal{S}}_1$ ci siano coppie di vettori di cui l'uno è multiplo dell'altro, e per ciascuna di queste eventuali coppie togliamo uno dei due vettori**. In questo caso abbiamo individuato la coppia $\mathbf{C_1}, \mathbf{C_6}$ e scegliamo di togliere $\mathbf{C_1}$.

Poniamo

$$\boldsymbol{\mathcal{S}}_2 = \left\{ \mathbf{C_2} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}; \mathbf{C_3} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \mathbf{C_4} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \mathbf{C_6} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

3^0 **passaggio**. $\boldsymbol{\mathcal{S}}_2$ è ancora un insieme di generatori di W. Esistono in $\boldsymbol{\mathcal{S}}_2$ vettori che siano combinazioni lineari degli altri vettori di $\boldsymbol{\mathcal{S}}_2$?

Sia $\alpha_1\mathbf{C_2} + \alpha_2\mathbf{C_3} + \alpha_3\mathbf{C_4} + \alpha_4\mathbf{C_6} = \mathbf{O}$ una combinazione lineare nulla dei vettori di $\boldsymbol{\mathcal{S}}_2$. Allora da

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} &= \alpha_1 \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \alpha_4 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 2\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 & 3\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_4 \\ 3\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_4 & \alpha_3 + \alpha_4 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

si ottiene il sistema lineare, nelle incognite $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$

$$\begin{cases} 2\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \\ 3\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_4 = 0 \\ \alpha_3 + \alpha_4 = 0 \end{cases}$$

Facendo una E.G. sulla sua matrice aumentata si ha:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{E_{21}(-3)E_1(\frac{1}{2})} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{E_2(-2)}$$

$$\to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right),$$

per cui il sistema è equivalente al sistema

$$(*) \qquad \begin{cases} \alpha_1 + \frac{1}{2}\alpha_2 + \frac{1}{2}\alpha_3 = 0 \\ \alpha_2 + 3\alpha_3 - 2\alpha_4 = 0 \\ \alpha_3 + \alpha_4 = 0 \end{cases}$$

il cui insieme delle soluzioni è

$$\left\{ \begin{pmatrix} -2h \\ 5h \\ -h \\ h \end{pmatrix} | h \in \mathbb{R} \right\}$$

Prendendo una sua soluzione non nulla, ad esempio $\begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ (si ponga $h = 1$), si ottiene

$$-2\mathbf{C_2} + 5\mathbf{C_3} - \mathbf{C_4} + \mathbf{C_6} = \mathbf{O},$$

per cui $\mathbf{C_2}$,$\mathbf{C_3}$, $\mathbf{C_4}$ e $\mathbf{C_6}$ sono combinazioni lineari degli altri elementi di $\boldsymbol{\mathcal{S}}_2$ e ciascuno di loro puó essere scelto come elemento da eliminare da $\boldsymbol{\mathcal{S}}_2$.

Scegliamo di togliere da $\boldsymbol{\mathcal{S}}_2$ la matrice $\mathbf{C_2}$ (combinazione lineare degli altri elementi di $\boldsymbol{\mathcal{S}}_2$) e poniamo

$$\boldsymbol{\mathcal{S}}_3 = \left\{ \mathbf{C_3} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \mathbf{C_4} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \mathbf{C_6} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

4^0 **passaggio**. $\boldsymbol{\mathcal{S}}_3$ è ancora un insieme di generatori di W. Esistono in $\boldsymbol{\mathcal{S}}_3$ vettori che siano combinazioni lineari degli altri vettori di $\boldsymbol{\mathcal{S}}_3$?

Sia $\alpha_1\mathbf{C_3} + \alpha_2\mathbf{C_4} + \alpha_3\mathbf{C_6} = \mathbf{O}$ una combinazione lineare nulla dei vettori di $\boldsymbol{\mathcal{S}}_3$. Allora da

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \alpha_1 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 + \alpha_2 & \alpha_1 + \alpha_3 \\ \alpha_1 + \alpha_3 & \alpha_2 + \alpha_3 \end{pmatrix}$$

si ottiene il sistema lineare, nelle incognite $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 = 0 \\ \alpha_1 + \alpha_3 = 0 \\ \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \end{cases}$$

Facendo una E.G. sulla sua matrice aumentata si ottiene:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{E_{21}(-1)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{E_{32}(-1)E_2(-1)}$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{E_3(\frac{1}{2})} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

L'unica soluzione del sistema è quella nulla, per cui $\boldsymbol{\mathcal{S}}_3$ è linearmente indipendente, ed è una base di W contenuta in $\boldsymbol{\mathcal{S}}$.

$\boxed{\mathbf{4}}$ Qual è la dimensione dello spazio vettoriale delle matrici 2×2 reali simmetriche ?

Poichè dall'esercizio 3 sappiamo che

$$\boldsymbol{\mathcal{S}}_3 = \left\{ \mathbf{C_3} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} ; \mathbf{C_4} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} ; \mathbf{C_6} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\},$$

è una base dello spazio vettoriale delle matrici 2×2 reali simmetriche, allora la dimensione dello spazio vettoriale delle matrici 2×2 reali simmetriche è 3 (ossia il numero di elementi di una sua qualsiasi base).