G. Parmeggiani, 26/11/2019 **Algebra Lineare, a.a. 2019/2020,**

Scuola di Scienze - Corsi di laurea: **Statistica per l'economia e l'impresa**
Statistica per le tecnologie e le scienze

Studenti: **numero di MATRICOLA PARI**

Svolgimento degli Esercizi per casa 7 (seconda parte)

$\boxed{\mathbf{5}}$ Sia $\mathbf{A}_{\boldsymbol{\alpha}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 1 & \alpha+2 & \alpha & \alpha+2 \\ 2 & 4 & 0 & \alpha+6 \end{pmatrix}$. Per ogni $\alpha \in \mathbb{C}$ si trovi una base dello spazio nullo $N(\mathbf{A}_{\boldsymbol{\alpha}})$ di $\mathbf{A}_{\boldsymbol{\alpha}}$.

Poichè $N(\mathbf{A}_{\boldsymbol{\alpha}}) = N(\mathbf{U}_{\boldsymbol{\alpha}})$ per ogni forma ridotta di Gauss $\mathbf{U}_{\boldsymbol{\alpha}}$ di $\mathbf{A}_{\boldsymbol{\alpha}}$, troviamo una base dello spazio nullo di una forma ridotta di Gauss per $\mathbf{A}_{\boldsymbol{\alpha}}$.

$$\mathbf{A}_{\boldsymbol{\alpha}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 1 & \alpha+2 & \alpha & \alpha+2 \\ 2 & 4 & 0 & \alpha+6 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{31}(-2)E_{21}(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & \alpha & \alpha & \alpha-1 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix} = \mathbf{B}_{\boldsymbol{\alpha}}$$

$\boxed{1^0 \text{ CASO}}$ $\alpha = 0$

$$\mathbf{B_0} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_2(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{U_0}$$

Per il Teorema nullità+rango,

$$\dim N(\mathbf{U_0}) = \text{ (numero delle colonne di } \mathbf{U_0})_0 - \text{ rk } (\mathbf{U_0}) = 4 - 2 = 2.$$

Da

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in N(\mathbf{U_0}) \iff \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_4 &= 0 \\ x_4 &= 0 \end{cases}$$

prendendo come parametri le variabili corrispondenti alle colonne libere di $\mathbf{U_0}$, ossia la 2^a e la 3^a, con la sostituzione all'indietro si ottiene

$$\begin{cases} x_2 = h \\ x_3 = k \\ x_4 = 0 \\ x_1 = -2x_2 - 3x_4 = -2h \end{cases}$$

Quindi $N(\mathbf{A_0}) = N(\mathbf{U_0}) = \left\{ \begin{pmatrix} -2h \\ h \\ k \\ 0 \end{pmatrix} | h, k \in \mathbb{C} \right\}$.

Siano $\mathbf{v_1}$ il vettore di $N(\mathbf{A_0})$ che si ottiene ponendo $h = 1$ e $k = 0$, e $\mathbf{v_2}$ il vettore di $N(\mathbf{A_0})$ che si ottiene ponendo $h = 0$ e $k = 1$:

$$\mathbf{v_1} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{v_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Allora $\left\{ \mathbf{v_1} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \mathbf{v_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ è una base di $N(\mathbf{A_0})$.

$\boxed{2^0 \text{ CASO}}$ $\alpha \neq 0$

$$\mathbf{B_\alpha} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & \alpha & \alpha & \alpha - 1 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix} \xrightarrow{E_3(\frac{1}{\alpha})E_2(\frac{1}{\alpha})} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & \frac{\alpha-1}{\alpha} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{U_\alpha}$$

Per il Teorema nullità+rango,

$$\dim N(\mathbf{U_\alpha}) = \text{ (numero delle colonne di } \mathbf{U})_\alpha - \text{ rk } (\mathbf{U_\alpha}) = 4 - 3 = 1.$$

Da

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in N(\mathbf{U_\alpha}) \iff \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_4 & = 0 \\ x_2 + x_3 + \frac{\alpha-1}{\alpha}x_4 & = 0 \\ x_4 & = 0 \end{cases}$$

prendendo come parametro la variabile corrispondente all'unica colonna libera di $\mathbf{U_\alpha}$, ossia la 3^a, con la sostituzione all'indietro si ottiene

$$\begin{cases} x_3 & = & h \\ x_4 & = & 0 \\ x_2 & = & -x_3 - \frac{\alpha-1}{\alpha}x_4 & = & -h \\ x_1 & = & -2x_2 - 3x_4 & = & 2h \end{cases}$$

Quindi $N(\mathbf{A_\alpha}) = N(\mathbf{U_\alpha}) = \left\{ \begin{pmatrix} 2h \\ -h \\ h \\ 0 \end{pmatrix} | h \in \mathbb{C} \right\}$.

Sia $\mathbf{v_1}$ il vettore di $N(\mathbf{A_\alpha})$ che s ottiene ponendo $h = 1$: $\mathbf{v_1} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Allora $\left\{ \mathbf{v_1} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ è una base di $N(\mathbf{A_\alpha})$.

$\boxed{\mathbf{6}}$ Sia $\mathbf{A_\alpha} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 2i \\ 0 & \alpha & 0 & 2i \\ 4 & \alpha-1 & 0 & 4i \\ 0 & 2 & 4\alpha-6 & 0 \end{pmatrix}$, dove $\alpha \in \mathbb{C}$.

Per ogni $\alpha \in \mathbb{C}$ si dica qual è $rk(\mathbf{A_\alpha})$ e si trovino una base $\boldsymbol{\mathcal{B}}_\alpha$ di $C(\mathbf{A_\alpha})$ ed una base $\boldsymbol{\mathcal{D}}_\alpha$ di $R(\mathbf{A_\alpha})$.

$$\mathbf{A_\alpha} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 2i \\ 0 & \alpha & 0 & 2i \\ 4 & \alpha-1 & 0 & 4i \\ 0 & 2 & 4\alpha-6 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{31}(-4)E_1(\frac{1}{2})} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & i \\ 0 & \alpha & 0 & 2i \\ 0 & \alpha-1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4\alpha-6 & 0 \end{pmatrix} \to$$

$$\xrightarrow{E_{24}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & i \\ 0 & 2 & 4\alpha-6 & 0 \\ 0 & \alpha-1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 & 2i \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{42}(-\alpha)E_{32}(-\alpha+1)E_2(\frac{1}{2})}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & i \\ 0 & 1 & 2\alpha-3 & 0 \\ 0 & 0 & -(2\alpha-3)(\alpha-1) & 0 \\ 0 & 0 & -(2\alpha-3)\alpha & 2i \end{pmatrix} = \mathbf{B_\alpha}$$

$\boxed{1^0 \text{ CASO}}$ $\alpha = 1$

$$\mathbf{B_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & i \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2i \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{34}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & i \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{U_1}$$

$\text{rk}(A_1) = 3$

Una base $\boldsymbol{\mathcal{B}}_1$ di $C(\mathbf{A_1})$ è $\boldsymbol{\mathcal{B}}_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}$.

Una base $\boldsymbol{\mathcal{D}}_{1}$ di $R(\mathbf{A_1})$ è $\boldsymbol{\mathcal{D}}_{\alpha} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -i \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -2i \end{pmatrix} \right\}$.

$\boxed{2^0 \text{ CASO}}$ $\alpha = \frac{3}{2}$

$$\mathbf{B}_{\frac{3}{2}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & i \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2i \end{pmatrix} \xrightarrow{E_3(\frac{1}{2i})E_{34}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & i \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{U}_{\frac{3}{2}}$$

$\text{rk}(\mathbf{A}_{\frac{3}{2}}) = 3$

Una base $\boldsymbol{\mathcal{B}}_{\frac{3}{2}}$ di $C(\mathbf{A}_{\frac{3}{2}})$ è $\boldsymbol{\mathcal{B}}_{\frac{3}{2}} = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 2 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 2i \\ 2i \\ 4i \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$.

Una base $\boldsymbol{\mathcal{D}}_{\frac{3}{2}}$ di $R(\mathbf{A}_{\frac{3}{2}})$ è $\boldsymbol{\mathcal{D}}_{\frac{3}{2}} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -i \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

$\boxed{3^0 \text{ CASO}}$ $\alpha \notin \{1, \frac{3}{2}\}$

$$\mathbf{B}_{\boldsymbol{\alpha}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & i \\ 0 & 1 & 2\alpha - 3 & 0 \\ 0 & 0 & -(2\alpha-3)(\alpha-1) & 0 \\ 0 & 0 & -(2\alpha-3)\alpha & 2i \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{43}((2\alpha-3)\alpha)E_3(\frac{1}{-(2\alpha-3)(\alpha-1)})}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & i \\ 0 & 1 & 2\alpha - 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2i \end{pmatrix} \xrightarrow{E_4(\frac{1}{2i})} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & i \\ 0 & 1 & 2\alpha - 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{U}_{\boldsymbol{\alpha}}$$

$\text{rk}(A_\alpha) = 4$

Una base $\boldsymbol{\mathcal{B}}_{\alpha}$ di $C(\mathbf{A}_{\boldsymbol{\alpha}})$ è $\boldsymbol{\mathcal{B}}_{\alpha} = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ \alpha - 1 \\ 2 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 4\alpha - 6 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 2i \\ 2i \\ 4i \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$.

Una base $\boldsymbol{\mathcal{D}}_{\alpha}$ di $R(\mathbf{A}_{\boldsymbol{\alpha}})$ è $\boldsymbol{\mathcal{D}}_{\alpha} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -i \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2\overline{\alpha}-3 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

N.B.: Essendo in questo caso $C(\mathbf{A}_{\boldsymbol{\alpha}}) \leq \mathbb{C}^4$ e $\dim(C(\mathbf{A}_{\boldsymbol{\alpha}})) = 4 = \dim(\mathbb{C}^4)$, allora $C(\mathbf{A}_{\boldsymbol{\alpha}}) = \mathbb{C}^4$ e si sarebbe potuto prendere $\boldsymbol{\mathcal{B}}_{\alpha} = \{\mathbf{e_1}; \mathbf{e_2}; \mathbf{e_3}; \mathbf{e_4}\}$.

N.B.: Essendo in questo caso $R(\mathbf{A}_{\boldsymbol{\alpha}}) \leq \mathbb{C}^4$ e $\dim(R(\mathbf{A}_{\boldsymbol{\alpha}})) = 4 = \dim(\mathbb{C}^4)$, allora $R(\mathbf{A}_{\boldsymbol{\alpha}}) = \mathbb{C}^4$ e si sarebbe potuto prendere $\boldsymbol{\mathcal{D}}_{\alpha} = \{\mathbf{e_1}; \mathbf{e_2}; \mathbf{e_3}; \mathbf{e_4}\}$.