G. Parmeggiani, 26/11/2019 **Algebra Lineare, a.a. 2019/2020,**

Scuola di Scienze - Corsi di laurea: **Statistica per l'economia e l'impresa**
Statistica per le tecnologie e le scienze

Studenti: **numero di MATRICOLA PARI**

Svolgimento degli Esercizi per casa 8 (prima parte)

$\boxed{\mathbf{1}}$ Siano

$$\mathbf{v_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{v_2} = \begin{pmatrix} i \\ -1 \\ 2i \\ 0 \\ i \end{pmatrix}, \mathbf{v_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{v_4} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2i \\ 2 \\ -i \\ 1 \end{pmatrix}$$

ed

$$\boldsymbol{\mathcal{S}} = \{\mathbf{v_1}; \mathbf{v_2}; \mathbf{v_3}; \mathbf{v_4}\}.$$

Sia W il sottospazio di $\mathbb{C}^5$ generato da $\boldsymbol{\mathcal{S}}$. Si trovi una base $\boldsymbol{\mathcal{B}}$ di W contenuta in $\boldsymbol{\mathcal{S}}$ (si usi la Nota 2).

Sia $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{v_1} & \mathbf{v_2} & \mathbf{v_3} & \mathbf{v_4} \end{pmatrix}$ una matrice che ha come colonne gli elementi di $\boldsymbol{\mathcal{S}}$. Allora $W = C(\mathbf{A})$. Facendo una E.G. su $\mathbf{A}$ otteniamo:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & i & 0 & 1 \\ i & -1 & -1 & 2i \\ 2 & 2i & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -i \\ 1 & i & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{41}(-1)E_{31}(-2)E_{21}(-i)} \begin{pmatrix} 1 & i & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\xrightarrow{E_{42}(-1)E_2(-1)} \begin{pmatrix} 1 & i & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{U}$$

Poichè le colonne dominanti di $\mathbf{U}$ sono la 1^a e la 3^a, $\boldsymbol{\mathcal{B}} = \{\mathbf{v_1}; \mathbf{v_3}\}$ è una base di $C(\mathbf{A}) = W$ contenuta in $\boldsymbol{\mathcal{S}}$.

$\boxed{\mathbf{2}}$ Si dica per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ l'insieme $\boldsymbol{\mathcal{B}}_{\alpha} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \\ 1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha+1 \\ \alpha+1 \end{pmatrix} \right\}$ è una base di $\mathbb{R}^3$ (si usi la Nota 2).

Costruiamo una matrice le cui colonne siano gli elementi di $\boldsymbol{\mathcal{B}}_{\alpha}$:

$$\mathbf{A}_{\boldsymbol{\alpha}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ \alpha & 0 & \alpha+1 \\ 1 & 2 & \alpha+1 \end{pmatrix}.$$

Il problema diventa stabilire per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ si ha che $\mathrm{rk}\mathbf{A}_{\boldsymbol{\alpha}} = 3$. Facciamo un'eliminazione di Gauss su $\mathbf{A}_{\boldsymbol{\alpha}}$.

$$\mathbf{A}_{\boldsymbol{\alpha}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ \alpha & 0 & \alpha+1 \\ 1 & 2 & \alpha+1 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{31}(-1)E_{21}(-\alpha)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2\alpha & 1 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix} = \mathbf{B}_{\boldsymbol{\alpha}}$$

1^0 CASO: $\alpha = 0$ $\qquad \mathbf{B_0} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{U_0}$

$rk(\mathbf{A_0}) = rk(\mathbf{U_0}) = 2 \neq 3 \Longrightarrow \boldsymbol{\mathcal{B}}_0$ **NON E'** una base di $\mathbb{R}^3$.

2^0 CASO: $\alpha \neq 0$

$$\mathbf{B}_{\boldsymbol{\alpha}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2\alpha & 1 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix} \xrightarrow{E_3(1/\alpha)E_2(-1/2\alpha)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1/2\alpha \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{U}_{\boldsymbol{\alpha}}$$

$$rk(\mathbf{A}_{\boldsymbol{\alpha}}) = rk(\mathbf{U}_{\boldsymbol{\alpha}}) = 3 \quad \Longrightarrow \quad \boldsymbol{\mathcal{B}}_{\alpha} \ \textbf{E'} \text{ una base di } \mathbb{R}^3.$$