

G. Parmeggiani, 5/12/2019

Algebra Lineare, a.a. 2019/2020,

Scuola di Scienze - Corsi di laurea:

Statistica per l'economia e l'impresa
Statistica per le tecnologie e le scienze

Studenti:

numero di MATRICOLA PARI

Svolgimento degli Esercizi per casa 8 (seconda parte)

3 Si dica quale delle due seguenti posizioni definisce un'applicazione lineare:

- (a) $f_1 : M_n(\mathbb{C}) \rightarrow M_n(\mathbb{C})$ definita da $f_1(\mathbf{A}) = \mathbf{A}^T$ per ogni $\mathbf{A} \in M_n(\mathbb{C})$;
(b) $f_2 : M_n(\mathbb{C}) \rightarrow M_n(\mathbb{C})$ definita da $f_2(\mathbf{A}) = \mathbf{A}^2$ per ogni $\mathbf{A} \in M_n(\mathbb{C})$.

Fissato $i \in \{1, 2\}$, per vedere che $f_i : M_n(\mathbb{C}) \rightarrow M_n(\mathbb{C})$ è un'applicazione lineare occorre verificare che siano soddisfatte le seguenti condizioni:

- (1) $f_i(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = f_i(\mathbf{A}) + f_i(\mathbf{B})$ per ogni $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in M_n(\mathbb{C})$;
(2) $f_i(\alpha\mathbf{A}) = \alpha f_i(\mathbf{A})$ per ogni $\mathbf{A} \in M_n(\mathbb{C})$ ed ogni $\alpha \in \mathbb{C}$.

- f_1 verifica la condizione (1) ?

Poichè la trasposta della somma di matrici è la somma delle trasposte si ha:

$$f_1(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = (\mathbf{A} + \mathbf{B})^T = \mathbf{A}^T + \mathbf{B}^T = f_1(\mathbf{A}) + f_1(\mathbf{B}) \quad \forall \mathbf{A}, \mathbf{B} \in M_n(\mathbb{C}).$$

Dunque f_1 verifica la condizione (1).

f_1 verifica la condizione (2) ?

Poichè la trasposta del prodotto di una matrice per uno scalare è il prodotto della trasposta della matrice per lo scalare, si ha:

$$f_1(\alpha\mathbf{A}) = (\alpha\mathbf{A})^T = \alpha\mathbf{A}^T = \alpha f_1(\mathbf{A}) \quad \forall \mathbf{A} \in M_n(\mathbb{C}), \forall \alpha \in \mathbb{C}.$$

Dunque f_1 verifica la condizione (2).

Verificando entrambe le condizioni (1) e (2), f_1 è un'applicazione lineare.

- f_2 verifica la condizione (1) ?

Essendo

$$\begin{cases} f_2(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = (\mathbf{A} + \mathbf{B})^2 = (\mathbf{A} + \mathbf{B})(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \mathbf{A}^2 + \mathbf{B}\mathbf{A} + \mathbf{A}\mathbf{B} + \mathbf{B}^2 \\ f_2(\mathbf{A}) = \mathbf{A}^2 \\ f_2(\mathbf{B}) = \mathbf{B}^2 \end{cases}$$

se fosse $f_2(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = f_2(\mathbf{A}) + f_2(\mathbf{B})$ per ogni $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in M_n(\mathbb{C})$, sarebbe

$$(*) \quad \mathbf{B}\mathbf{A} + \mathbf{A}\mathbf{B} = \mathbf{O} \quad \forall \mathbf{A}, \mathbf{B} \in M_n(\mathbb{C})$$

Ma (*) è falsa: si prenda, ad esempio, $\mathbf{A} = \mathbf{B} = \mathbf{I}_n$.

Dunque f_2 non verifica la condizione (1) e quindi non è un'applicazione lineare.

4 Sia $g : M_2(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C}^2$ definita da $g(\mathbf{A}) = \mathbf{A}\mathbf{e}_1$ per ogni $\mathbf{A} \in M_2(\mathbb{C})$.

(a) Si provi che g è un'applicazione lineare.

(b) Si trovino lo spazio nullo $N(g)$ e lo spazio immagine $\text{Im}(g)$ di g .

(a) $M_2(\mathbb{C})$ e \mathbb{C}^2 sono entrambi spazi vettoriali complessi. Verificare che g è un'applicazione lineare significa verificare che sono soddisfatte le seguenti condizioni:

$$(1) \quad g(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = g(\mathbf{A}) + g(\mathbf{B}) \quad \text{per ogni } \mathbf{A}, \mathbf{B} \in M_2(\mathbb{C});$$

$$(2) \quad g(\alpha\mathbf{A}) = \alpha g(\mathbf{A}) \quad \text{per ogni } \mathbf{A} \in M_2(\mathbb{C}) \text{ ed ogni } \alpha \in \mathbb{C}.$$

$$(1): \quad g(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = (\mathbf{A} + \mathbf{B})\mathbf{e}_1 = \mathbf{A}\mathbf{e}_1 + \mathbf{B}\mathbf{e}_1 = g(\mathbf{A}) + g(\mathbf{B}) \quad \forall \mathbf{A}, \mathbf{B} \in M_2(\mathbb{C});$$

Dunque g verifica la condizione (1).

$$(2): \quad g(\alpha\mathbf{A}) = (\alpha\mathbf{A})\mathbf{e}_1 = \alpha(\mathbf{A}\mathbf{e}_1) = \alpha g(\mathbf{A}) \quad \forall \mathbf{A} \in M_2(\mathbb{C}), \quad \forall \alpha \in \mathbb{C}.$$

Dunque g verifica anche la condizione (2), per cui è un'applicazione lineare.

(b) Poichè $g(\mathbf{A}) = \mathbf{A}\mathbf{e}_1$ è la 1^a colonna di \mathbf{A} , allora

• $N(g) = \{\mathbf{A} \in M_2(\mathbb{C}) \mid g(\mathbf{A}) = \mathbf{0}\}$ è l'insieme delle matrici complesse 2×2 con la prima colonna nulla, ossia

$$N(g) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & b \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{C} \right\},$$

• $\text{Im}(g) = \{g(\mathbf{A}) \mid \mathbf{A} \in M_2(\mathbb{C})\}$ è l'insieme dei vettori di \mathbb{C}^2 che siano prime colonne di matrici complesse 2×2 . Poichè per ogni $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2$ esiste $\mathbf{A} \in M_2(\mathbb{C})$ tale che $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ sia la prima colonna di \mathbf{A} (si prenda, ad esempio $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix}$), allora $\text{Im}(g) = \mathbb{C}^2$.

5 Sia $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow M_2(\mathbb{R})$ definita da:

$$f\left(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} a & a+b \\ a-b & b \end{pmatrix} \quad \forall \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

(a) Si provi che f è un'applicazione lineare.

(b) Si determini la matrice \mathbf{A} associata ad f rispetto alle basi ordinate

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\} \quad \text{e} \quad \mathcal{D} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

su dominio e codominio rispettivamente.

(•) Per provare che f è un'applicazione lineare occorre provare :

$$1. \quad f\left(\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix}\right) = f\left(\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix}\right) + f\left(\begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix}\right) \quad \forall a_1, b_1, a_2, b_2 \in \mathbb{R}$$

$$2. \quad f\left(\alpha \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}\right) = \alpha f\left(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}\right) \quad \forall \alpha, a, b \in \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned} 1. \quad f\left(\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix}\right) &= f\left(\begin{pmatrix} a_1 + a_2 \\ b_1 + b_2 \end{pmatrix}\right) = \\ &= \begin{pmatrix} a_1 + a_2 & (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2) \\ (a_1 + a_2) - (b_1 + b_2) & b_1 + b_2 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} a_1 + a_2 & (a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) \\ (a_1 - b_1) + (a_2 - b_2) & b_1 + b_2 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} a_1 & a_1 + b_1 \\ a_1 - b_1 & b_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2 & a_2 + b_2 \\ a_2 - b_2 & b_2 \end{pmatrix} = f\left(\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix}\right) + f\left(\begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2. \quad f\left(\alpha \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}\right) &= f\left(\begin{pmatrix} \alpha a \\ \alpha b \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \alpha a & \alpha a + \alpha b \\ \alpha a - \alpha b & \alpha b \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \alpha a & \alpha(a + b) \\ \alpha(a - b) & \alpha b \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} a & a + b \\ a - b & b \end{pmatrix} = \alpha f\left(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}\right) \end{aligned}$$

(••) La matrice \mathbf{A} associata ad f rispetto alle basi ordinate \mathcal{B} e \mathcal{D} su dominio e codominio rispettivamente è la matrice

$$\mathbf{A} = \left(C_{\mathcal{D}} \left(f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \right) \quad C_{\mathcal{D}} \left(f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right) \right) \right).$$

Dalla definizione di f si ottiene:

$$f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix},$$

quindi

$$\mathbf{A} = \left(C_{\mathcal{D}}\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) \ C_{\mathcal{D}}\left(\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\right) \right).$$

Calcoliamo le coordinate rispetto alla base ordinata \mathcal{D} di un generico elemento $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned} C_{\mathcal{D}}\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) &= \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \delta \\ \gamma \end{pmatrix} \quad \Bigg| \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \\ &= \alpha \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \delta \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 2\gamma & \alpha + \beta \\ \beta + \delta & \beta \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\text{Risolvendo il sistema} \quad \begin{cases} 2\gamma = a \\ \alpha + \beta = b \\ \beta + \delta = c \\ \beta = d \end{cases} \quad \text{otteniamo} \quad \begin{cases} \beta = d \\ \gamma = a/2 \\ \alpha = b - \beta = b - d \\ \delta = c - \beta = c - d \end{cases},$$

quindi

$$C_{\mathcal{D}}\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} b - d \\ d \\ c - d \\ a/2 \end{pmatrix}.$$

In particolare, specializzando a $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, otteniamo

$$C_{\mathcal{D}}\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 1/2 \end{pmatrix}, \quad C_{\mathcal{D}}\left(\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 1/2 \end{pmatrix}.$$

La matrice \mathbf{A} associata ad T rispetto alle basi ordinate \mathcal{B} e \mathcal{D} su dominio e codominio rispettivamente è quindi la matrice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ -1 & -3 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

6 Siano

$$\mathcal{B} = \left\{ \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \quad \text{e}$$

$$\mathcal{B}' = \left\{ \mathbf{v}_1' = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \mathbf{v}_2' = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \mathbf{v}_3' = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Dopo aver provato che \mathcal{B} e \mathcal{B}' sono due basi ordinate di \mathbb{R}^3 , si calcolino le matrici di passaggio

$$\mathbf{M}_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{B}'} \text{ (da } \mathcal{B}' \text{ a } \mathcal{B}) \text{ e } \mathbf{M}_{\mathcal{B}' \leftarrow \mathcal{B}} \text{ (da } \mathcal{B} \text{ a } \mathcal{B}').$$

Siano $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ ed $\mathbf{A}' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ le matrici che hanno come colonne gli elementi di \mathcal{B} e di \mathcal{B}' rispettivamente. Per provare che \mathcal{B} e \mathcal{B}' sono due basi ordinate di \mathbb{R}^3 , occorre provare che \mathbf{A} ed \mathbf{A}' hanno entrambe rango uguale a 3.

Facendo una E.G. su \mathbf{A} si ottiene:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{21}(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{32}(-1)E_2(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{U}$$

per cui $\text{rk}(\mathbf{A}) = \text{rk}(\mathbf{U}) = 3$, ed, analogamente, facendo una E.G. su \mathbf{A}' si ottiene:

$$\mathbf{A}' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{31}(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{32}(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\xrightarrow{E_3(-\frac{1}{2})} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{U}'$$

per cui $\text{rk}(\mathbf{A}') = \text{rk}(\mathbf{U}') = 3$.

La matrice di passaggio $\mathbf{M}_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{B}'}$ da \mathcal{B}' a \mathcal{B} è

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{B}'} &= (C_{\mathcal{B}}(\mathbf{v}'_1) \quad C_{\mathcal{B}}(\mathbf{v}'_2) \quad C_{\mathcal{B}}(\mathbf{v}'_3)) = \\ &= \left(C_{\mathcal{B}}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \quad C_{\mathcal{B}}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \quad C_{\mathcal{B}}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \right). \end{aligned}$$

Per calcolarla, piuttosto che calcolare separatamente $C_{\mathcal{B}}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$, $C_{\mathcal{B}}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ e $C_{\mathcal{B}}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$, calcoliamo $C_{\mathcal{B}}\left(\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}\right)$ per un generico vettore $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$, e specializziamo la formula ottenuta ai tre diversi vettori $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Poichè

$$C_{\mathcal{B}}\left(\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \delta \end{pmatrix} \quad \Bigg| \quad \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \delta \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha + 2\beta + \delta \\ \alpha + \beta + \delta \\ \beta + \delta \end{pmatrix},$$

α , β e δ sono soluzioni del sistema lineare

$$(*) \quad \begin{cases} \alpha + 2\beta + \delta = a \\ \alpha + \beta + \delta = b \\ \beta + \delta = c \end{cases}$$

Facendo una E.G. sulla matrice aumentata di (*) otteniamo

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & a \\ 1 & 1 & 1 & b \\ 0 & 1 & 1 & c \end{array} \right) &\xrightarrow{E_{21}(-1)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & a \\ 0 & -1 & 0 & b-a \\ 0 & 1 & 1 & c \end{array} \right) \rightarrow \\ &\xrightarrow{E_{32}(-1)E_2(-1)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & a \\ 0 & 1 & 0 & a-b \\ 0 & 0 & 1 & c-a+b \end{array} \right) \end{aligned}$$

da cui, con la sostituzione all'indietro,

$$\begin{cases} \delta = c - a + b \\ \beta = a - b \\ \alpha = -2\beta - \delta + a = -2a + 2b - c + a - b + a = b - c \end{cases}$$

Dunque $C_{\mathcal{B}} \left(\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} b-c \\ a-b \\ c-a+b \end{pmatrix}$, per cui

$$C_{\mathcal{B}} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad C_{\mathcal{B}} \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad C_{\mathcal{B}} \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

e quindi

$$\mathbf{M}_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Analogamente si ha:

$$\mathbf{M}_{\mathcal{B}' \leftarrow \mathcal{B}} = \left(C_{\mathcal{B}'} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \quad C_{\mathcal{B}'} \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \quad C_{\mathcal{B}'} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \right),$$

ma dal momento che $\mathbf{M}_{\mathcal{B}' \leftarrow \mathcal{B}} = \mathbf{M}_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{B}'}^{-1}$, calcoliamo $\mathbf{M}_{\mathcal{B}' \leftarrow \mathcal{B}}$ usando l'algoritmo di Gauss-Jordan:

$$\begin{aligned} (\mathbf{M}_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{B}'} \mid \mathbf{I}_3) &= \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{E_{21}(-1)E_1(-1)} \\ &\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{E_{32}(-2)E_2(-1)} \\ &\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 2 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{E_3(1/2)} \\ &\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1/2 \end{array} \right) \xrightarrow{E_{23}(1)} \\ &\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1/2 \end{array} \right). \end{aligned}$$

Dunque

$$\mathbf{M}_{\mathcal{B}' \leftarrow \mathcal{B}} = \mathbf{M}_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{B}'}^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$