G. Parmeggiani, 5/12/2019 **Algebra Lineare, a.a. 2019/2020,**

Scuola di Scienze - Corsi di laurea: **Statistica per l'economia e l'impresa**
Statistica per le tecnologie e le scienze

Studenti: **numero di MATRICOLA PARI**

Svolgimento degli Esercizi per casa 9

$\boxed{\mathbf{1}}$ Sia $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$. Si provi che $\|\mathbf{v}\|_\infty = \|\mathbf{v}\|_1$ se e solo se $\mathbf{v}$ è un multiplo di una colonna di $\mathbf{I_n}$.

Sia $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$. Allora

$$\|\mathbf{v}\|_1 = |v_1| + |v_2| + \cdots + |v_n| \quad \text{ e}$$

$$\|\mathbf{v}\|_\infty = |v_i| \text{ dove } i \in \{1, \dots, n\} \text{ è tale che } |v_i| \geq |v_j| \quad \forall j \neq i.$$

Si ha:

$$\begin{aligned} \|\mathbf{v}\|_\infty = \|\mathbf{v}\|_1 \quad &\iff |v_i| = |v_1| + |v_2| + \cdots + |v_n| \\ &\iff |v_j| = 0 \quad \forall j \neq i \\ &\iff v_j = 0 \quad \forall j \neq i \\ &\iff \mathbf{v} = v_i\mathbf{e_i}. \end{aligned}$$

$\boxed{\mathbf{2}}$ Sia $\mathbf{A} = (a_{ij})$ una matrice complessa quadrata di ordine n tale che $\mathbf{A} = \mathbf{A}^H = \mathbf{A}^2$ e siano $\mathbf{b_1}, \mathbf{b_2}, \dots \dots, \mathbf{b_n} \in \mathbb{C}^n$ le colonne di $\mathbf{A}$. Si provi che $\|\mathbf{b_i}\|_2^2 = a_{ii}$ per ogni $i = 1, \dots, n$.

Poiché $\mathbf{b_i} = \mathbf{Ae_i}$, allora

$$\|\mathbf{b_i}\|_2^2 = \|\mathbf{Ae_i}\|_2^2 = (\mathbf{Ae_i})^H\mathbf{Ae_i} = \mathbf{e_i}^H\mathbf{A}^H\mathbf{Ae_i}.$$

Da $\mathbf{A} = \mathbf{A}^H = \mathbf{A}^2$ segue che

$$\mathbf{e_i}^H\mathbf{A}^H\mathbf{Ae_i} = \mathbf{e_i}^H\mathbf{AAe_i} = \mathbf{e_i}^H\mathbf{Ae_i} = \mathbf{e_i}^H \begin{pmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ \vdots \\ a_{ni} \end{pmatrix} = a_{ii},$$

quindi in conclusione abbiamo:

$$\|\mathbf{b}_{\boldsymbol{i}}\|_2^2 = a_{ii}.$$

$\boxed{\mathbf{3}}$ Sapendo che la posizione $(\cdot|\cdot) : M_2(\mathbb{C}) \times M_2(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$

$$\left(\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{pmatrix} \right) = \sum_{i=1}^{4} \overline{a_i} b_i.$$

definisce un prodotto interno, si consideri la norma $\|\cdot\| : M_2(\mathbb{C}) \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ da esso indotta. Si trovino tutte le matrici complesse scalari $\mathbf{A}$ di ordine 2 tali che $\|\mathbf{A}\| = 2\sqrt{2}$.

La norma $\|\cdot\| : M_2(\mathbb{C}) \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ indotta dal prodotto interno è definita da:

$$\left\| \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{\left(\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} \right)} = \sqrt{\textstyle\sum_{i=1}^4 \overline{a}_i \cdot a_i} =$$

$$= \sqrt{\textstyle\sum_{i=1}^4 |a_i|^2} \qquad \forall \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{C}).$$

Una matrice $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{C})$ è scalare se e solo se $a_2 = a_3 = 0$ ed $a_1 = a_3 = \alpha$ per un opportuno $\alpha \in \mathbb{C}$, ossia se e solo se

$$\exists \alpha \in \mathbb{C} \mid \mathbf{A} = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$$

Dal momento che

$$\begin{aligned} \left\| \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} \right\| = 2\sqrt{2} \qquad & \iff \qquad \sqrt{|\alpha|^2 + |0|^2 + |0|^2 + |\alpha|^2} = 2\sqrt{2} \\ & \iff \qquad |\alpha|\sqrt{2} = 2\sqrt{2} \\ & \iff \qquad |\alpha| = 2, \end{aligned}$$

le matrici complesse scalari $\mathbf{A}$ di ordine 2 tali che $\|\mathbf{A}\| = 2\sqrt{2}$ sono tutte e sole le matrici del tipo

$$\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} \qquad \text{con } \alpha \in \mathbb{C} \text{ tale che } |\alpha| = 2.$$

N.B. I numeri complessi α tali che $|\alpha| = 2$ sono tutti e soli quei numeri complessi che corrispondono ai punti nel piano di Gauss che stanno sulla circonferenza di centro 0 e raggio 2. In particolare, ci sono infiniti numeri complessi

α tali che $|\alpha| = 2$, per cui ci sono infinite matrici complesse scalari $\mathbf{A}$ di ordine 2 tali che $\|\mathbf{A}\| = 2\sqrt{2}$.

$\boxed{\mathbf{4}}$ Sapendo che la posizione $\quad (\cdot|\cdot) : \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C} \quad$ definita da

$$\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \,\middle|\, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \right) = \overline{x}_1 y_1 + 2\overline{x}_2 y_2$$

definisce un prodotto interno, siano $\|\cdot\| : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ la norma da esso indotta ed $\mathbf{u} = \mathbf{e_1} + \mathbf{e_2}$.

(a) Si trovino tutti i vettori $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ tali che $\|\mathbf{x}\| = \|\mathbf{x}\|_2$.

(b) Si calcolino $\cos(\widehat{\mathbf{e_1 u}})$ e $\cos(\widehat{\mathbf{e_2 u}})$.

La norma $\|\cdot\| : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ indotta da $(\cdot|\cdot)$ è definita da

$$\left\| \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \,\middle|\, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \right)} = \sqrt{\overline{x}_1 x_1 + 2\overline{x}_2 x_2} = \sqrt{|x_1|^2 + 2|x_2|^2}.$$

(a) Sia $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$. Essendo $\|\mathbf{x}\| = \sqrt{|x_1|^2 + 2|x_2|^2} \quad$ e

$$\|\mathbf{x}\|_2 = \sqrt{\mathbf{x}^H \mathbf{x}} = \sqrt{\begin{pmatrix} \overline{x}_1 & \overline{x}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}} = \sqrt{\overline{x}_1 x_1 + \overline{x}_2 x_2} = \sqrt{|x_1|^2 + |x_2|^2},$$

allora

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x}\| = \|\mathbf{x}\|_2 \quad &\iff \sqrt{|x_1|^2 + 2|x_2|^2} = \sqrt{|x_1|^2 + |x_2|^2} \\ &\iff |x_1|^2 + 2|x_2|^2 = |x_1|^2 + |x_2|^2 \\ &\iff |x_2|^2 = 0 \\ &\iff x_2 = 0. \end{aligned}$$

Dunque

$$\left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{C}^2 \,\middle|\, \|\mathbf{x}\| = \|\mathbf{x}\|_2 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \end{pmatrix} \,\middle|\, \alpha \in \mathbb{C} \right\} = \langle \mathbf{e_1} \rangle.$$

(b) Essendo

$$\|\mathbf{e_1}\| = \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{|1|^2 + 2|0|^2} = 1,$$

$$\|\mathbf{e_2}\| = \left\| \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{|0|^2 + 2|1|^2} = \sqrt{2},$$

$$\|\mathbf{u}\| = \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{|1|^2 + 2|1|^2} = \sqrt{3},$$

e

$$(\mathbf{e_1}|\mathbf{u}) = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \overline{1} \cdot 1 + 2 \cdot \overline{0} \cdot 1 = 1,$$

$$(\mathbf{e_2}|\mathbf{u}) = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \overline{0} \cdot 1 + 2 \cdot \overline{1} \cdot 1 = 2,$$

allora

$$\cos(\widehat{\mathbf{e_1}\mathbf{u}}) = \tfrac{(\mathbf{e_1}|\mathbf{u})}{\|\mathbf{e_1}\|\|\mathbf{u}\|} = \tfrac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\cos(\widehat{\mathbf{e_2}\mathbf{u}}) = \tfrac{(\mathbf{e_2}|\mathbf{u})}{\|\mathbf{e_2}\|\|\mathbf{u}\|} = \tfrac{2}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{3}} = \sqrt{\tfrac{2}{3}}.$$