G. Parmeggiani, 26/11/2019 **Algebra Lineare, a.a. 2019/2020**,

Scuola di Scienze - Corsi di laurea: **Statistica per l'economia e l'impresa**
Statistica per le tecnologie e le scienze

Studenti: **numero di MATRICOLA PARI**

Nota 2: Basi dello spazio delle colonne di una matrice: applicazioni.

$\boxed{1}$ Siano

$$\mathbf{v_1}; \mathbf{v_2}; \dots; \mathbf{v_n} \in K^m \text{ con } K \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\},$$

$$\boldsymbol{\mathcal{S}} = \{\mathbf{v_1}; \mathbf{v_2}; \dots; \mathbf{v_n}\} \text{ e}$$

$$W = \langle\ \boldsymbol{\mathcal{S}}\ \rangle \text{ il sottospazio di } K^m \text{ generato da } \boldsymbol{\mathcal{S}}\ .$$

Per trovare una base $\boldsymbol{\mathcal{B}}$ di W contenuta in $\boldsymbol{\mathcal{S}}$, piuttosto che procedere come nell'Esercizio Tipo 9, conviene:

(1) costruire una matrice $m \times n$ $\mathbf{A}$ le cui colonne siano gli elementi di $\boldsymbol{\mathcal{S}}$. Ad esempio:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{v_1} & \mathbf{v_2} & \dots & \mathbf{v_n} \end{pmatrix};$$

(2) fare una EG su $\mathbf{A}$, trovando una forma ridotta di Gauss $\mathbf{U}$ per $\mathbf{A}$;

(3) se $\mathbf{u}_{i_1}, \mathbf{u}_{i_2}, \dots, \mathbf{u}_{i_k}$ sono le colonne dominanti di $\mathbf{U}$, allora $\boldsymbol{\mathcal{B}} = \{\mathbf{v}_{i_1}; \mathbf{v}_{i_2}; \dots; \mathbf{v}_{i_k}\}$, ossia l'insieme delle colonne di $\mathbf{A}$ corrispondenti alle colonne dominanti di $\mathbf{U}$, è una base di $C(\mathbf{A}) = \langle \mathbf{v_1}; \mathbf{v_2}; \dots; \mathbf{v_n} \rangle = W$ contenuta in $\boldsymbol{\mathcal{S}}$.

$\boxed{2}$ Siano

$$\mathbf{v_1}; \mathbf{v_2}; \dots; \mathbf{v_n} \in K^n, \text{ con } K \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}, \text{ e}$$

$$\boldsymbol{\mathcal{B}} = \{\mathbf{v_1}; \mathbf{v_2}; \dots; \mathbf{v_n}\}.$$

Per verificare se $\boldsymbol{\mathcal{B}}$ è o meno una base di K^n, piuttosto che verificare se $\boldsymbol{\mathcal{B}}$ è un insieme di generatori linearmente indipendente di K^n, conviene considerare la matrice $n \times n$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{v_1} & \mathbf{v_2} & \dots & \mathbf{v_n} \end{pmatrix}$$

(ossia una matrice le cui colonne siano gli elementi di $\boldsymbol{\mathcal{B}}$).

Da $C(\mathbf{A}) \leq K^n$ segue che

$$\dim \mathrm{C}(\mathbf{A}) = rk(\mathbf{A}) = n \iff \mathrm{C}(\mathbf{A}) = K^n;$$

inoltre, dal momento che $\boldsymbol{\mathcal{B}}$ ha n elementi e contiene una base di $C(\mathbf{A})$,

$\dim \mathrm{C}(\mathbf{A}) = rk(\mathbf{A}) = n \iff$ ogni base di $\mathrm{C}(\mathbf{A})$ ha n elementi $\iff$ $\boldsymbol{\mathcal{B}}$ è una base di $\mathrm{C}(\mathbf{A})$.

Quindi

$$\dim \mathrm{C}(\mathbf{A}) = rk(\mathbf{A}) = n \iff \boldsymbol{\mathcal{B}} \text{ è una base di } K^n.$$