G. Parmeggiani, 16/12/2019 **Algebra Lineare, a.a. 2019/2020,**

Scuola di Scienze - Corsi di laurea: **Statistica per l'economia e l'impresa**
Statistica per le tecnologie e le scienze

Studenti: **numero di MATRICOLA PARI**

Nota 3: Calcolo di determinanti

Sia $\mathbf{A}$ una matrice **quadrata** di ordine n.
Il **determinante di A** è un numero che dipende da $\mathbf{A}$. Esso si indica con il simbolo $\det(\mathbf{A})$, oppure $\mathrm{Det}(\mathbf{A})$. Impariamo a calcolarlo, cominciando con i casi $n = 1, 2, 3$.

Il caso n=1. Se $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} \end{pmatrix}$, è $\mathrm{Det}(\mathbf{A}) = a_{11}$.

Il caso n=2. Se $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, è $\mathrm{Det}(\mathbf{A}) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$.

Esempio 1. Il determinante di $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$ è $\mathrm{Det}(\mathbf{A}) = 2\times5-3\times4 = 10-12 = -2$.

Abbiamo detto che $\mathrm{Det}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$. Osserviamo che

$$
\begin{aligned}
a_{11}a_{22} &= a_{11}(-1)^{1+1}\mathrm{Det}\begin{pmatrix} a_{22} \end{pmatrix} = \\
&= a_{11}(-1)^{(\text{la somma degli indici di } a_{11})}\mathrm{Det}\begin{pmatrix} a_{22} \end{pmatrix} = \\
&= a_{11}(-1)^{(\text{la somma degli indici di } a_{11})}\begin{pmatrix} \text{il determinante della matrice che} \\ \text{si ottiene da A sopprimendo} \\ \text{la } 1^a \text{ riga e la } 1^a \text{colonna di A} \end{pmatrix} = \\
&= a_{11}(-1)^{(\text{la somma degli indici di } a_{11})}\begin{pmatrix} \text{il determinante della matrice che si ottiene da A} \\ \text{sopprimendo la riga e la colonna in cui si trova } a_{11} \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

e

$$
\begin{aligned}
-a_{12}a_{21} &= a_{12}(-1)^{1+2}\mathrm{Det}\begin{pmatrix} a_{21} \end{pmatrix} = \\
&= a_{12}(-1)^{(\text{la somma degli indici di } a_{12})}\mathrm{Det}\begin{pmatrix} a_{21} \end{pmatrix} = \\
&= a_{12}(-1)^{(\text{la somma degli indici di } a_{12})}\begin{pmatrix} \text{il determinante della matrice che} \\ \text{si ottiene da } \mathbf{A} \text{ sopprimendo} \\ \text{la } 1^a \text{ riga e la } 2^a \text{colonna di } \mathbf{A} \end{pmatrix} = \\
&= a_{12}(-1)^{(\text{la somma degli indici di } a_{12})}\begin{pmatrix} \text{il determinante della matrice che si ottiene da } \mathbf{A} \\ \text{sopprimendo la riga e la colonna in cui si trova } a_{12} \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

Indicando con i simboli

$\mathbf{C}_{11}$ la matrice che si ottiene da $\mathbf{A}$ sopprimendo la 1^a riga e la 1^a colonna,
$\mathbf{C}_{12}$ la matrice che si ottiene da $\mathbf{A}$ sopprimendo la 1^a riga e la 2^a colonna,

ed inoltre

$$\mathbf{A}_{11} = (-1)^{1+1}\mathrm{Det}\mathbf{C}_{11},$$
$$\mathbf{A}_{12} = (-1)^{1+2}\mathrm{Det}\mathbf{C}_{12},$$

abbiamo:

$$\mathrm{Det}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11}\mathbf{A}_{11} + a_{12}\mathbf{A}_{12}.$$

Si tenga a mente che a_{11} ed a_{12} sono gli elementi della 1^a riga di $\mathbf{A}$.

Quindi se $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, quello che abbiamo fatto per calcolare $\mathrm{Det}(\mathbf{A})$ è stato:

(1) mettere in evidenza gli elementi della 1^a riga di $\mathbf{A}$: $\begin{pmatrix} \boxed{a_{11}} & \boxed{a_{12}} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$,

(2) per ciascuna posizione $(1, j)$ della 1^a riga di $\mathbf{A}$ (posto $(1, 1)$ e posto $(1, 2)$)

– costruire la matrice $\mathbf{C}_{1j}$ (ottenuta sopprimendo da A la 1^a riga e la $j-$esima colonna di $\mathbf{A}$),
– calcolare $\mathrm{Det}(\mathbf{C}_{1j})$,
– calcolare $(-1)^{1+j}$,
– calcolare $\mathbf{A}_{1j} = (-1)^{1+j}\mathrm{Det}(\mathbf{C}_{1j})$,

(3) calcolare il prodotto $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11} \\ \mathbf{A}_{12} \end{pmatrix}$.

Il caso n=3. Sia $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$. Per calcolare $\mathrm{Det}(\mathbf{A})$ procediamo come nel caso $n = 2$.

(1) Mettiamo in evidenza gli elementi della 1^a riga di $\mathbf{A}$: $\begin{pmatrix} \boxed{a_{11}} & \boxed{a_{12}} & \boxed{a_{13}} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$.

(2) per ciascuna posizione $(1, j)$ della 1^a riga di $\mathbf{A}$ (posto $(1, 1)$, posto $(1, 2)$ e posto $(1, 3)$)

– costruiamo la matrice C_{1j} (ottenuta sopprimendo da A la 1^a riga e la $j-$esima colonna di A):

$$\mathbf{C}_{11} = \begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{C}_{12} = \begin{pmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{C}_{13} = \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}.$$

– calcoliamo $\mathrm{Det}(\mathbf{C}_{1j})$, usando il caso $n = 2$, ossia il caso precedente a quello che stiamo analizzando ora (che è $n = 3$):

$$\mathrm{Det}\mathbf{C}_{11} = \mathrm{Det}\begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32},$$
$$\mathrm{Det}\mathbf{C}_{12} = \mathrm{Det}\begin{pmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{pmatrix} = a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31},$$
$$\mathrm{Det}\mathbf{C}_{13} = \mathrm{Det}\begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} = a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31},$$

– calcoliamo $(-1)^{1+j}$: $(-1)^{1+1} = 1, (-1)^{1+2} = -1, (-1)^{1+3} = 1$,
– calcoliamo $\mathbf{A}_{1j} = (-1)^{1+j}\mathrm{Det}(\mathbf{C}_{1j})$:

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}_{11} &= (-1)^{1+1}\mathrm{Det}\mathbf{C}_{11} = a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32},\\
\mathbf{A}_{12} &= (-1)^{1+2}\mathrm{Det}\mathbf{C}_{12} = -(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}),\\
\mathbf{A}_{13} &= (-1)^{1+3}\mathrm{Det}\mathbf{C}_{13} = a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}.
\end{aligned}$$

(3) Il determinante di $\mathbf{A}$ è il prodotto

$$\begin{aligned}
\mathrm{Det}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11} \\ \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{13} \end{pmatrix} = a_{11}\mathbf{A}_{11} + a_{12}\mathbf{A}_{12} + a_{13}\mathbf{A}_{13} = \\
&= a_{11}(-1)^{1+1}\mathrm{Det}\mathbf{C}_{11} + a_{12}(-1)^{1+2}\mathrm{Det}\mathbf{C}_{12} + a_{13}(-1)^{1+3}\mathrm{Det}\mathbf{C}_{13}
\end{aligned}$$

Esempio 2. Calcoliamo il determinante della matrice $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \\ 2 & 6 & 3 \end{pmatrix}$.

In questo caso abbiamo

$$a_{11} = 3, \qquad a_{12} = -2, \qquad a_{13} = 1,$$

$$\mathbf{C}_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{C}_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{C}_{13} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 6 \end{pmatrix},$$

per cui

$$\begin{aligned}
\mathrm{Det}A &= 3(-1)^{1+1}\mathrm{Det}\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 6 & 3 \end{pmatrix} + (-2)(-1)^{1+2}\mathrm{Det}\begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} + 1(-1)^{1+3}\mathrm{Det}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} = \\
&= 3(3-24) + (-2)(-1)(0-8) + (0-2) = 3(-21) - 16 - 2 = \\
&= -81.
\end{aligned}$$

Quello che abbiamo fatto è quindi:

(a) per le matrici 1×1 porre $\mathrm{Det}\big(a_{11}\big) = a_{11}$,

(b) dare una formula che permetta di calcolare il determinante delle matrici 2×2 sapendo come calcolare il determinante delle matrici 1×1, ossia dare una formula che permetta di calcolare il determinante delle matrici nel caso $n = 2$ sapendo come calcolare il determinante delle matrici nel caso precedente, cioè il caso $n = 1$ (si veda il punto (a)),

(c) dare una formula che permetta di calcolare il determinante delle matrici 3×3 sapendo come calcolare il determinante delle matrici 2×2, ossia dare una formula che permetta di calcolare il determinante delle matrici nel caso $n = 3$ sapendo come calcolare il determinante delle matrici nel caso precedente, cioè il caso $n = 2$ (si veda il punto (b)).

Procediamo quindi allo stesso modo, dando una formula che permetta di calcolare il determinante delle matrici $n \times n$ sapendo come calcolare il determinante delle matrici

$(n-1) \times (n-1)$, ossia dare una formula che permetta di calcolare il determinante delle matrici nel caso n sapendo come calcolare il determinante delle matrici nel caso precedente, cioè il caso $n-1$.

Sia dunque $\mathbf{A} = \big(a_{ij}\big)$ una matrice $n \times n$. Cominciamo con il dare la seguente definizione:

Def. 1. Per ogni $1 \leq i \leq n$ e $1 \leq j \leq n$ si chiama **matrice complementare dell'elemento** a_{ij} od anche **matrice complementare di posto (i,j) in A**, e si indica con il simbolo $\mathbf{C}_{ij}$, la matrice che si ottiene da $\mathbf{A}$ sopprimendo la i-esima riga e la j-esima colonna. Dunque $\mathbf{C}_{ij}$ è una matrice $(n-1) \times (n-1)$.

Esempio 3. Se $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & i & 3 & 4 & 11 \\ 0 & 2 & 7 & -3 & 8 \\ 1+i & 2 & 5 & -5 & 17 \\ -1 & 6i & 0 & 5i & 1-4i \\ 12 & 7+2i & 34 & 4-6i & 14i \end{pmatrix}$, allora

$$\begin{pmatrix} 1 & i & 3 & \boxed{4} & 11 \\ \boxed{0} & \boxed{2} & \boxed{7} & \boxed{-3} & \boxed{8} \\ 1+i & 2 & 5 & \boxed{-5} & 17 \\ -1 & 6i & 0 & \boxed{5i} & 1-4i \\ 12 & 7+2i & 34 & \boxed{4-6i} & 14i \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{togliendo la } 2^a \text{ riga e la } 4^a \text{ colonna}}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & i & 3 & 11 \\ 1+i & 2 & 5 & 17 \\ -1 & 6i & 0 & 1-4i \\ 12 & 7+2i & 34 & 14i \end{pmatrix} = \mathbf{C}_{24};$$

$$\begin{pmatrix} 1 & i & 3 & 4 & \boxed{11} \\ 0 & 2 & 7 & -3 & \boxed{8} \\ 1+i & 2 & 5 & -5 & \boxed{17} \\ \boxed{-1} & \boxed{6i} & \boxed{0} & \boxed{5i} & \boxed{1-4i} \\ 12 & 7+2i & 34 & 4-6i & \boxed{14i} \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{togliendo la } 3^a \text{ riga e la } 5^a \text{ colonna}}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & i & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 7 & -3 \\ 1+i & 2 & 5 & -5 \\ 12 & 7+2i & 34 & 4-6i \end{pmatrix} = \mathbf{C}_{35}.$$

Def. 2. Per ogni $1 \le i \le n$ e $1 \le j \le n$ si chiama **cofattore di posto (i,j) di A**, e si indica con il simbolo $\mathbf{A}_{ij}$, il numero

$$\mathbf{A}_{ij} = (-1)^{i+j}\mathrm{Det}\ (\mathbf{C}_{ij}),$$

dove $\mathbf{C}_{ij}$ è la matrice complementare di posto (i,j) in $\mathbf{A}$.

Si ha:

Formula del determinante di una matrice sviluppato rispetto alla 1^ariga

se $\mathbf{A} = \left(a_{ij}\right)$ è una matrice $n \times n$ allora

$$\mathrm{Det}\mathbf{A} = a_{11}\mathbf{A}_{11} + a_{12}\mathbf{A}_{12} + \ldots + a_{1,n-1}\mathbf{A}_{1,n-1} + a_{1n}\mathbf{A}_{1n}$$

dove $\mathbf{A}_{11}$, $\mathbf{A}_{12}$, $\ldots$, $\mathbf{A}_{1,n-1}$, $\mathbf{A}_{1n}$ sono i cofattori di $\mathbf{A}$ di posti $(1,1)$, $(1,2)$, $\ldots$, $(1,n-1)$, $(1,n)$ (ossia i posti della 1^a riga) rispettivamente.

Esempio 4. Calcoliamo il determinante della matrice $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -5 & 0 & 3 \\ 6 & 2 & 0 & 4 \\ -2 & 0 & 0 & 2 \\ -1 & 7 & 5 & 1 \end{pmatrix}$.
Usando la formula dello sviluppo del determinante rispetto alla 1^a riga di $\mathbf{A}$ abbiamo:

$$\mathrm{Det}\mathbf{A} = 1 \times \mathbf{A}_{11} + (-5) \times \mathbf{A}_{12} + 0 \times \mathbf{A}_{13} + 3 \times \mathbf{A}_{14} = \mathbf{A}_{11} - 5\mathbf{A}_{12} + 3\mathbf{A}_{14}.$$

Dobbiamo quindi calcolare $\mathbf{A}_{11}, \mathbf{A}_{12}$ ed $\mathbf{A}_{14}$.

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}_{11} \quad &= (-1)^{1+1}\mathrm{Det}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \\ 7 & 5 & 1 \end{pmatrix} = \\
&= \mathrm{Det}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \\ 7 & 5 & 1 \end{pmatrix} = \\
&= 2(-1)^{1+1}\mathrm{Det}\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} + 0(-1)^{1+2}\mathrm{Det}\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 7 & 1 \end{pmatrix} + 4(-1)^{1+3}\mathrm{Det}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 7 & 5 \end{pmatrix} = \\
&= 2(0-10) + 4(0-0) = -20,
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\mathbf{A}_{12} &= (-1)^{1+2}\mathrm{Det}\begin{pmatrix} 6 & 0 & 4 \\ -2 & 0 & 2 \\ -1 & 5 & 1 \end{pmatrix} = \\
&= -\mathrm{Det}\begin{pmatrix} 6 & 0 & 4 \\ -2 & 0 & 2 \\ -1 & 5 & 1 \end{pmatrix} = \\
&= -(6(-1)^{1+1}\mathrm{Det}\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} + 0(-1)^{1+2}\mathrm{Det}\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} + 4(-1)^{1+3}\mathrm{Det}\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}) = \\
&= -(6(0-10) + 4(-10-0)) = -(-60-40) = 100, \\
\mathbf{A}_{14} &= (-1)^{1+4}\mathrm{Det}\begin{pmatrix} 6 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ -1 & 7 & 5 \end{pmatrix} = \\
&= -\mathrm{Det}\begin{pmatrix} 6 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ -1 & 7 & 5 \end{pmatrix} = \\
&= -(6(-1)^{1+1}\mathrm{Det}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 7 & 5 \end{pmatrix} + 2(-1)^{1+2}\mathrm{Det}\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} + 0(-1)^{1+3}\mathrm{Det}\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ -1 & 7 \end{pmatrix}) = \\
&= -(6(0-0) - 2(-10-0)) = 2(-10) = -20.
\end{aligned}
$$

Dunque otteniamo:

$$\mathrm{Det}\mathbf{A} = \mathbf{A}_{11} - 5\mathbf{A}_{12} + 3\mathbf{A}_{14} = -20 - 5 \times 100 + 3(-20) = -580.$$

Si puó dimostrare il seguente

Teorema. Sia $\mathbf{A}$ una matrice $n \times n$. Allora, fissato $i \in \{1, \ldots, n\}$ si ha che

$$a_{i1}\mathbf{A}_{i1}+a_{i2}\mathbf{A}_{i2}+\ldots+a_{i,n-1}\mathbf{A}_{i,n-1}+a_{in}\mathbf{A}_{in} = a_{11}\mathbf{A}_{11}+a_{12}\mathbf{A}_{12}+\ldots+a_{1,n-1}\mathbf{A}_{1,n-1}+a_{1n}\mathbf{A}_{1n},$$

ossia che

$$(*) \quad \mathrm{Det}\mathbf{A} = a_{i1}\mathbf{A}_{i1} + a_{i2}\mathbf{A}_{i2} + \ldots + a_{i,n-1}\mathbf{A}_{i,n-1} + a_{in}\mathbf{A}_{in}.$$

$(*)$ si chiama **lo sviluppo di Laplace del determinante di $\mathbf{A}$ rispetto alla i-esima riga di $\mathbf{A}$**.

Quindi, per calcolare il determinante di una matrice $\mathbf{A}$, si puó partire mettendo in evidenza gli elementi di una riga qualunque, e non necessariamente la 1^a, come abbiamo fatto fino ad ora.

Esempio 5. Sia $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ una matrice 2×2. Sviluppiamo il determinante di $\mathbf{A}$ rispetto alla 2^a riga di $\mathbf{A}$:

– mettiamo in evidenza gli elementi della 2^a riga di $\mathbf{A}$: $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ \boxed{a_{21}} & \boxed{a_{22}} \end{pmatrix}$,

– $\mathbf{C}_{21}$ è la matrice che si ottiene da $\mathbf{A}$ togliendo la 2^a riga e la 1^a colonna, quindi $\mathbf{C}_{21} = \big(a_{12}\big)$; $\mathbf{C}_{22}$ è la matrice che si ottiene da $\mathbf{A}$ togliendo la 2^a riga e la 2^a colonna, quindi $\mathbf{C}_{22} = \big(a_{11}\big)$.

Allora

$$\begin{aligned} & a_{21}\mathbf{A}_{21} + a_{22}\mathbf{A}_{22} = a_{21}(-1)^{2+1}\mathrm{Det}\mathbf{C}_{21} + a_{22}(-1)^{2+2}\mathrm{Det}\mathbf{C}_{22} = \\ & = -a_{21}\mathrm{Det}\,\big(a_{12}\big) + a_{22}\mathrm{Det}\,\big(a_{11}\big) = -a_{21}a_{12} + a_{22}a_{11} = \\ & = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \end{aligned}$$

dà lo stesso risultato che abbiamo ottenuto partendo dalla 1^a riga.

Conviene quindi sviluppare il determinante rispetto alla riga che contiene piú zeri.

Esempio 6. Riconsideriamo la matrice dell'Esempio 4, $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -5 & 0 & 3 \\ 6 & 2 & 0 & 4 \\ -2 & 0 & 0 & 2 \\ -1 & 7 & 5 & 1 \end{pmatrix}$,

e calcoliamo il suo determinante rispetto alla 3^a riga (che contiene due zeri). Allora

$$\mathrm{Det}\mathbf{A} = (-2)(-1)^{3+1}\mathrm{Det}\begin{pmatrix} -5 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 4 \\ 7 & 5 & 1 \end{pmatrix} + 2(-1)^{3+4}\mathrm{Det}\begin{pmatrix} 1 & -5 & 0 \\ 6 & 2 & 0 \\ -1 & 7 & 5 \end{pmatrix}.$$

Calcoliamo separatamente $\mathrm{Det}\begin{pmatrix} -5 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 4 \\ 7 & 5 & 1 \end{pmatrix}$ e $\mathrm{Det}\begin{pmatrix} 1 & -5 & 0 \\ 6 & 2 & 0 \\ -1 & 7 & 5 \end{pmatrix}$.

Per entrambe queste matrici 3×3 non è conveniente calcolare il determinante rispetto alla 3^a riga, ma è indifferente scegliere la 1^a o la 2^a. Per fare esercizio scegliamo in entrambi i casi la 2^a riga:

$$\text{Det}\begin{pmatrix} -5 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 4 \\ 7 & 5 & 1 \end{pmatrix} = 2(-1)^{2+1}\text{Det}\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} + 4(-1)^{2+3}\text{Det}\begin{pmatrix} -5 & 0 \\ 7 & 5 \end{pmatrix} =$$

$$= -2(0-15) - 4(-25-0) = 30 + 100 = 130$$

$$\text{Det}\begin{pmatrix} 1 & -5 & 0 \\ 6 & 2 & 0 \\ -1 & 7 & 5 \end{pmatrix} = 6(-1)^{2+1}\text{Det}\begin{pmatrix} -5 & 0 \\ 7 & 5 \end{pmatrix} + 2(-1)^{2+2}\text{Det}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} =$$

$$= -6(-25-0) + 2(5-0) = 150 + 10 = 160$$

Quindi $\text{Det}(\mathbf{A}) = (-2) \times 130 + (-2) \times 160 = -580$ (lo stesso numero che avevamo ottenuto sviluppando il determinante rispetto alla 1^a riga).

Cosí come si puó sviluppare il determinante di una matrice rispetto ad una qualunque sua riga, lo si puó sviluppare rispetto ad una qualunque sua colonna, dal momento che vale il seguente

Teorema. Sia $\mathbf{A}$ una matrice $n \times n$. Allora, fissati $j \in \{1, \dots, n\}$ e si ha che

$$(**) \quad \text{Det}\mathbf{A} = a_{1j}\mathbf{A}_{1j} + a_{2j}\mathbf{A}_{2j} + \dots + a_{n-1,j}\mathbf{A}_{n-1,j} + a_{nj}\mathbf{A}_{nj}.$$

$(**)$ si chiama **lo sviluppo di Laplace del determinante di A rispetto alla j-esima colonna di A**.

Conviene quindi sviluppare il determinante rispetto alla riga oppure alla colonna che contiene piú zeri.

Esempio 7. Riconsideriamo la matrice degli Esempi 4 e 6, $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -5 & 0 & 3 \\ 6 & 2 & 0 & 4 \\ -2 & 0 & 0 & 2 \\ -1 & 7 & 5 & 1 \end{pmatrix}$,

e calcoliamo il suo determinante rispetto alla 3^a colonna (che contiene tre zeri). Allora

$$\begin{aligned} \text{Det}\mathbf{A} \quad &= 0 \times (-1)^{1+3}\text{Det}\begin{pmatrix} 6 & 2 & 4 \\ -2 & 0 & 2 \\ -1 & 7 & 1 \end{pmatrix} + 0 \times (-1)^{2+3}\text{Det}\begin{pmatrix} 1 & -5 & 3 \\ -2 & 0 & 2 \\ -1 & 7 & 1 \end{pmatrix} + \\ &+ 0 \times (-1)^{3+3}\text{Det}\begin{pmatrix} 1 & -5 & 3 \\ 6 & 2 & 4 \\ -1 & 7 & 1 \end{pmatrix} + 5(-1)^{4+3}\text{Det}\begin{pmatrix} 1 & -5 & 3 \\ 6 & 2 & 4 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \\ &= -5\text{Det}\begin{pmatrix} 1 & -5 & 3 \\ 6 & 2 & 4 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Calcoliamo Det $\begin{pmatrix} 1 & -5 & 3 \\ 6 & 2 & 4 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, ad esempio rispetto alla 2^a colonna:

$$\mathrm{Det}\begin{pmatrix} 1 & -5 & 3 \\ 6 & 2 & 4 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$= (-5)(-1)^{1+2}\mathrm{Det}\begin{pmatrix} 6 & 4 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} + 2(-1)^{2+2}\mathrm{Det}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} + 0 \times (-1)^{3+2}\mathrm{Det}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 6 & 4 \end{pmatrix} =$$

$$= (-5)(-1)(12+8) + 2(2+6) = 100 + 16 = 116$$

quindi $\mathrm{Det}(\mathbf{A}) = (-5) \times 116 = -580$ (si noti che è lo stesso numero che abbiamo ottenuto sviluppando il determinante rispetto alla 1^a oppure alla 3^a riga).

Proprietà del determinante.

Sia $\mathbf{A}$ una matrice $n \times n$.

(1) Se $\mathbf{A}$ ha una riga (risp. una colonna) nulla, oppure se $\mathbf{A}$ ha due righe (risp. due colonne) uguali, allora $\mathrm{Det}(\mathbf{A}) = 0$.

(2) Se $\mathbf{A}'$ è la matrice che si ottiene da $\mathbf{A}$ mediante lo scambio di due righe (risp. due colonne) allora $\mathrm{Det}(\mathbf{A}') = -\mathrm{Det}(\mathbf{A})$.

(3) Se $\mathbf{A}'$ è la matrice che si ottiene da $\mathbf{A}$ sommando ad una riga (risp. ad una colonna) di $\mathbf{A}$ un'altra riga (risp. un'altra colonna) di $\mathbf{A}$ moltiplicata per un numero c, allora $\mathrm{Det}(\mathbf{A}') = \mathrm{Det}(\mathbf{A})$.

(4) Se $\mathbf{A}'$ è la matrice che si ottiene da $\mathbf{A}$ moltiplicando una riga (risp. una colonna) di $\mathbf{A}$ per un numero c, allora $\mathrm{Det}(\mathbf{A}') = c\mathrm{Det}(\mathbf{A})$.

(5) $\mathrm{Det}(\mathbf{A}^T) = \mathrm{Det}(\mathbf{A})$.

(6) Se $\mathbf{B}$ è un'altra matrice $n \times n$ allora **Det(AB)=Det(A) Det(B)**.

(7) **A è non singolare se e solo se Det(A)**$\neq 0$, e se $\mathbf{A}$ è non singolare si ha

$$\mathrm{Det}(\mathbf{A}^{-1}) = \frac{1}{\mathrm{Det}(\mathbf{A})}.$$

$\boxed{N.B.}$ Per quanto riguarda la proprietà (7), si ricordi che avevamo già osservato che una matrice 2×2 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ è non singolare se e solo se il numero $ad - bc \neq 0$, e tale numero è proprio $\mathrm{Det}(\mathbf{A})$.

Esercizio. Si provi che **il determinante di una matrice triangolare superiore (risp. inferiore) è il prodotto degli elementi diagonali**.

Sia $\mathbf{T}$ una matrice $n \times n$ triangolare superiore (la dimostrazione è simile per le matrici triangolari inferiori):

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} t_{11} & & & & & & \\ 0 & t_{22} & & & & & \\ 0 & 0 & t_{33} & & & * & \\ 0 & 0 & 0 & t_{44} & & & \\ \vdots & & & & \ddots & & \\ & & \mathbb{O} & & & \ddots & \\ 0 & & & & \dots & \dots & t_{nn} \end{pmatrix}.$$

Chiamiamo:

$\mathbf{T}_1$ la matrice che si ottiene da $\mathbf{T}$ sopprimendo la 1^a riga e la 1^a colonna ($\mathbf{T}_1$ è triangolare superiore $(n-1) \times (n-1)$):

$$\mathbf{T}_1 = \begin{pmatrix} t_{22} & & & & \\ 0 & t_{33} & & * & \\ 0 & 0 & t_{44} & & \\ \vdots & & & \ddots & \\ & & \mathbb{O} & & \\ 0 & & & \dots & t_{nn} \end{pmatrix},$$

$\mathbf{T}_2$ la matrice che si ottiene da $\mathbf{T}_1$ sopprimendo la 1^a riga e la 1^a colonna ($\mathbf{T}_2$ è triangolare superiore $(n-2) \times (n-2)$):

$$\mathbf{T}_2 = \begin{pmatrix} t_{33} & & & \\ 0 & t_{44} & & * \\ \vdots & & \ddots & \\ & \mathbb{O} & & \\ & & \dots & t_{nn} \end{pmatrix},$$

e cosí via per ogni $k = 2, \dots, n-1$ chiamiamo $\mathbf{T}_k$ la matrice che si ottiene da $\mathbf{T}_{k-1}$ sopprimendo la 1^a riga e la 1^a colonna. $\mathbf{T}_k$ è una matrice triangolare superiore $(n-k) \times (n-k)$.

Sviluppiamo il determinante di $\mathbf{T}$ ripetto alla 1^a colonna di $\mathbf{T}$:

$$\mathrm{Det}\mathbf{T} = t_{11}(-1)^{1+1}\mathrm{Det}\mathbf{T}_1 = t_{11}\mathrm{Det}\mathbf{T}_1.$$

Sviluppiamo il determinante di T_1 ripetto alla 1^a colonna di T_1:

$$\text{Det}\mathbf{T} = t_{11}\text{Det}\mathbf{T}_1 = t_{11}(t_{22}(-1)^{1+1}\text{Det}\mathbf{T}_2) = t_{11}t_{22}\text{Det}\mathbf{T}_2.$$

Cosí procedendo otteniamo:

$$\begin{aligned}
\text{Det}\mathbf{T} &= t_{11}t_{22}\text{Det}\mathbf{T}_2 = \\
&= t_{11}t_{22}t_{33}\text{Det}\mathbf{T}_3 = \\
&= t_{11}t_{22}t_{33}t_{44}\text{Det}\mathbf{T}_4 = \\
&= \qquad \dots \qquad = \\
&= t_{11}t_{22} \quad \dots \quad t_{n-1,n-1}\text{Det}\mathbf{T}_{n-1} = \\
&= t_{11}t_{22} \quad \dots \quad t_{n-1,n-1}\text{Det}\left(t_{nn}\right) = \\
&= t_{11}t_{22} \quad \dots \quad t_{n-1,n-1}t_{nn}.
\end{aligned}$$

In particolare da ció segue:

Il determinante di una matrice diagonale è il prodotto degli elementi diagonali,

poichè le matrici diagonali sono particolari matrici triangolari superiori.

Esercizio. Sia $\mathbf{A}$ una matrice $n \times n$. Si provi che per ogni scalare c si ha:

$$\text{Det}(c\mathbf{A}) = c^n\text{Det}(\mathbf{A}).$$

Si ha:

$$\text{Det}(c\mathbf{A}) = \text{Det}((c\mathbf{I}_n)\mathbf{A}) = \text{Det}(c\mathbf{I}_n)\text{Det}(\mathbf{A}).$$

Poichè $c\mathbf{I}_n$ è una matrice scalare $n \times n$, in particolare una matrice diagonale, per l'esercizio precedente si ha che

$$\text{Det}(c\mathbf{I}_n) = \text{ prodotto degli elementi diagonali di } c\mathbf{I}_n.$$

Tali elementi sono tutti uguali a c, ed il loro prodotto ha n fattori (perchè $c\mathbf{I}_n$ è $n \times n$), dunque $\text{Det}(c\mathbf{I}_n) = c^n$, per cui

$$\text{Det}(c\mathbf{A}) = c^n\text{Det}(\mathbf{A}).$$