S. BARTHESSIANI 26/3/201

ALGEBRA E MATEMATICA DISCRETA (parte di Algebra)
Corso di Laurea: Informatica

MATRICI INVERTIBILI (O NON SINGOLARI)

Def Una matrice QUADRATA A di ordine n si dice INVERTIBILE (o NON SINGOLARE) se esiste una matrice B tale che

$$AB = I_n = BA$$

(quindi B deve essere pure lei quadrata di ordine n)

SE B ESISTE ALLORA B E' UNICA

(B è unica vuol dire: se esistono B_1 e B_2 tali che

$$AB_1 = I_n = B_1 A \quad \text{ed} \quad AB_2 = I_n = B_2 A$$

allora $B_1 = B_2$).

E TALE B SI CHIAMA L'INVERSA DI A E SI INDICA CON A^{-1}

$\boxed{\text{N.B.}}$ ATTENZIONE: se A NON E' quadrata ....

ESEMPIO 1

$A = [1 \;\; 0]$

$B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$$A \cdot B = [1 \;\; 0] \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 1 \cdot 1 + 0 \cdot 1 = 1$$

ma $B \cdot A = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} [1 \;\; 0] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \neq I_2$

cioè: "inversa destra" $\not\Rightarrow$ "inversa sinistra"

MENTRE SE $z, z_1 \in \mathbb{C}$ ALLORA $z \cdot z_1 = 1 \Rightarrow z_1 \cdot z = 1$

ESEMPIO 2 $A = [1 \;\; 0]$

$\forall x \in \mathbb{C}$ si ha $A\begin{bmatrix}1\\x\end{bmatrix} = [1 \;\; 0]\begin{bmatrix}1\\x\end{bmatrix} = 1 + 0\cdot x = 1$

Cioè: l' "inversa destra" non è unica

MENTRE SE $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ ALLORA

$\left.\begin{array}{l} z\cdot z_1 = 1 \\ z\cdot z_2 = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow z_1 = z_2$

SUPPONIAMO A QUADRATA DI ORDINE n

Quali sono le condizioni che A deve soddisfare perché esiste A^{-1}?

Se $n=1$, A è un numero, ed $\exists A^{-1} \iff A \neq 0$.

Ma se $n>1$, non è sufficiente che sia $A \neq O$ perché esista A^{-1}

ESEMPIO $n=2$, $A = \begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix} \neq \mathbb{O}$.

Se esistesse A^{-1}, esisterebbero x,y,z,t tali

$$\underbrace{\begin{bmatrix}x&y\\z&t\end{bmatrix}}_{A^{-1}}\underbrace{\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}}_{A} = \underbrace{\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}}_{I_2}$$

Ma calcolando: $\begin{bmatrix}x&y\\z&t\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}x&0\\z&0\end{bmatrix}$

si ha che $\begin{bmatrix}x&0\\z&0\end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$ $\forall x,y,z,t$

CONDIZIONE NECESSARIA E SUFFICIENTE AFFINCHÉ UNA MATRICE QUADRATA SIA NON SINGOLARE:

Se A è $n\times n$, allora A è non singolare (i.e. $\exists A^{-1}$)

$\iff$ se U è una forma ridotta di Gauss per A allora U è del tipo: $n\left\{\underbrace{\begin{bmatrix}1 & & * \\ & \ddots & \\ \mathbb{O} & & 1\end{bmatrix}}_{n}\right.$

(ovvero: U è una matrice in forma ridotta di Gauss, U è $n\times n$ e

- tutti gli elementi sulla diagonale di U sono uguali ad 1

EQUIVALENTEMENTE:

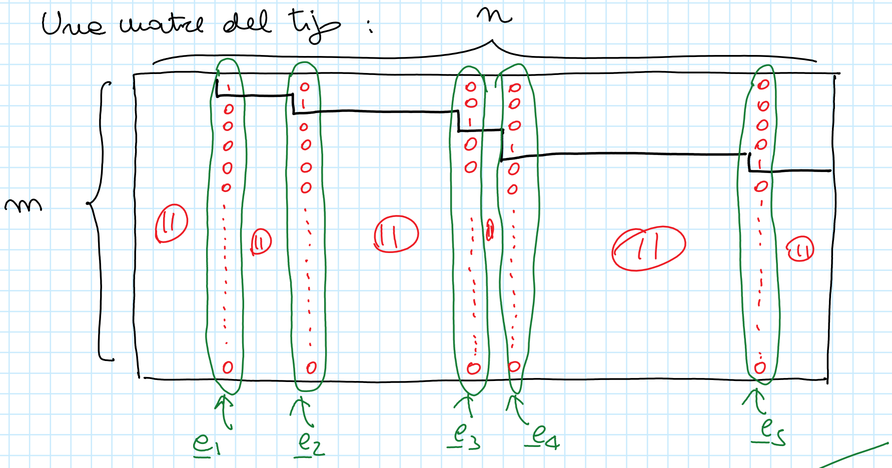
- tutte le colonne di U sono dominanti

EQUIVALENTEMENTE:

- tutte le righe di U sono non nulle)

FORME RIDOTTE DI GAUSS-JORDAN ED ELIMINAZIONE DI GAUSS-JORDAN

Una matrice del tipo:



nel disegno $k=5$

ovvero IN FORMA RIDOTTA DI GAUSS, in cui IN PIÙ tutte le colonne dominanti sono $e_1, e_2, \dots$ le colonne di I_m (per cui se U è $m \times n$ e k = numero delle colonne dominanti di U, allora le colonne dominanti sono $e_1, e_2, \dots, e_k$: le prime k colonne di I_m) si dice una matrice in **FORMA RIDOTTA DI GAUSS-JORDAN**

ELIMINAZIONE DI GAUSS-JORDAN

ESEMPIO 1

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 8 & 2 \\ 1 & 3 & 3 & 6 \\ -1 & 3 & -9 & 25 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{31}(1)E_{21}(-1)E_1(\frac{1}{2})}$$

Cioè prima la 1ª colonna dominante, poi la 2ª colonna dominante etc.

prima faccio una EG "in avanti" raggruppando le operazioni che "sistemano" le colonne DA SINISTRA A DESTRA (e per ciascuna colonna i numeri dall'alto in basso)

$$\to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 5 \\ 0 & 5 & -5 & 26 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{32}(-5)} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

le 3 colonne dominanti. devo "trasformarle" in $e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ ed $e_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

Cioè prima l'ultima colonna dominante, poi la penultima colonna dominante...

adesso procedo "all'indietro" sistemando le colonne DA DESTRA A SINISTRA (e per ciascuna colonna i numeri dal basso all'alto)

- PARTO DALL'ULTIMA COLONNA DOMINANTE (ossia $\begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix}$) e "la trasformo" in e_3 "facendo diventare 0" PRIMA il 5:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[E_{23}(-5)]{} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[E_{13}(-1)]{}$$

ADESSO QUESTO!

N.B. confronto con la riga "sotto"

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \leftarrow e_3$$

- ADESSO "trasformo" in e_2 la PENULTIMA COLONNA DOMINANTE (cioè $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$)

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[E_{12}(-2)]{} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \leftarrow e_2$$

è già e_1

SCRITTO INSIEME: $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & & 2 \\ 1 & 3 & & 6 \\ -1 & 3 & & 25 \end{bmatrix} \xrightarrow[E_{31}(1)\,E_{21}(-1)\,E_1(\frac{1}{2})]{} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 5 \\ 0 & 5 & -5 & 26 \end{bmatrix} \xrightarrow[E_{32}(-5)]{}$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[E_{23}(-5)]{} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[E_{13}(-1)]{} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[E_{12}(-2)]{} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{cccc} \uparrow & \uparrow & & \uparrow \\ e_1 & e_2 & & e_3 \end{array}$$

ESEMPIO 2

$$\underset{5\times 6}{A} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & -4 & 3 & 2 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & -1 & 1 \\ 3 & -6 & 3 & 3 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

ELIMINAZIONE "IN AVANTI"
GRUPPO DI OPERAZIONI PER "SISTEMARE" LA 1ª COLONNA DOMINANTE

$$\xrightarrow[E_{51}(-3)\,E_{31}(1)\,E_{21}(-2)]{}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

OPERAZIONI PER "SISTEMARE" LA 2ª COLONNA DOMINANTE

$$\xrightarrow[E_{42}(2)]{}$$

$$\rightarrow \left[\begin{array}{cccccc} 1 & -2 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

ho già ottenuto una forma ridotta di Gauss. Le colonne dominanti sono:

1ª colonna dominante, 2ª colonna dominante, 3ª colonna dominante, 4ª colonna dominante

$$\xrightarrow{E_{34}(1)} \left[\begin{array}{cccccc} & -2 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{24}(-1)}$$

PRIMA OPERAZIONE PER TRASFORMARE LA 4ª COLONNA DOMINANTE IN e_4

SECONDA OPERAZIONE PER TRASFORMARE LA 4ª COLONNA DOMINANTE IN e_4

è e_4

$$\rightarrow \left[\begin{array}{cccccc} 1 & -2 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{13}(-1)} \left[\begin{array}{cccccc} 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \rightarrow$$

è e_3

e_4

OPERAZIONE PER TRASFORMARE LA 3ª COLONNA DOMINANTE IN e_3

$$\xrightarrow{E_{12}(-1)} \begin{array}{cccccc} & & & & & \\ \left[\begin{array}{cccccc} 1 & -2 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \end{array}$$

$$e_1 \quad e_2 \quad e_3 \quad e_4$$

OPERAZIONE PER TRASFORMARE LA 2ª COLONNA DOMINANTE IN e_2

PER CASA: ESERCIZIO 4 (file: I19corT4.pdf)

PROPRIETÀ DELLE INVERSE

Siano A e B $n\times n$ non singolari. Allora

1. $\exists (AB)^{-1}$ ed è $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

(Cioè l'inversa di un prodotto è il prodotto delle inverse **IN ORDINE SCAMBIATO**)

2. $(A^{-1})^{-1} = A$

3. $(A^{T})^{-1} = (A^{-1})^{T}$

$(A^{H})^{-1} = (A^{-1})^{H}$

CALCOLO DELL'INVERSA

$A_{n\times n} \Rightarrow [A \mid I_n]$ $\quad n\times(2n)$

$[A \mid I_n] \xrightarrow[EG]{} [U \mid B]$ forma ridotta di Gauss di $[A \mid I_n]$. Chiamo U le prime n colonne $\Rightarrow$ U è una forma ridotta di Gauss di A

- Se l'ultima riga di U è nulla $\Rightarrow \nexists A^{-1}$
- Se l'ultima riga di U è non nulla $\Rightarrow$ tutte le righe di U sono non nulle $\Rightarrow$ $\exists A^{-1}$ e se si continua la EG fino a trovare una forma ridotta di Gauss-Jordan di $[A \mid I_n]$ si ottiene una matrice del tipo $[I_n \mid C]$ E C È A^{-1};

SE $\exists A^{-1}$ ALLORA

$[A \mid I_n] \rightsquigarrow [I_n \mid A^{-1}]$

ELIMINAZIONE
DI GAUSS-JORDAN

ESERCIZIO TIPO 4 (file: I19tipo4.pdf)

PER CASA: ESERCIZIO 1
(file: I19 caseTS.pdf)