S. PARMEGGIANI 29/3/2019

ALGEBRA E MATEMATICA DISCRETA (parte di Algebra)
Corso di Laurea (Informatica)

CALCOLO DELL'INVERSA:

IL CASO $n=2$

Se $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ è 2×2, allora

$$\exists A^{-1} \iff ad-bc \neq 0$$

ed in tal caso è $A^{-1} = \dfrac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

ESEMPIO $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$. Siccome $1\cdot 4 - 2\cdot 3 = 4-6 = -2 \neq 0$ allora $\exists \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}^{-1}$
ed è $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}^{-1} = \dfrac{1}{-2}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix}$

PER CASA: ESERCIZI 2 E 3 (file: I19casaTS.pdf)

SPAZI VETTORIALI REALI E COMPLESSI

Sia $K \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$

Def Uno SPAZIO VETTORIALE su K

- se $K = \mathbb{C}$ dirò uno spazio vettoriale (sottintendendo "COMPLESSO")
- se $K = \mathbb{R}$ dirò uno spazio vettoriale REALE (specificando "REALE")

è un insieme **NON VUOTO** V su cui sono definite 2 operazioni

$$+ : V \times V \longrightarrow V \quad e \quad \cdot : K \times V \longrightarrow V$$

addizione d'elementi di V

prodotto di elementi di V per scalari

che verificano le seguenti condizioni:

$\forall \underline{u}, \underline{v}, \underline{w} \in V$ (gli elementi di V vengono chiamati VETTORI e per essi si usa il simbolo dei vettori colonna)

$\forall \alpha, \beta \in K$ (gli elementi di K vengono chiamati SCALARI)

$\boxed{1}$ $\underline{u} + (\underline{v} + \underline{w}) = (\underline{u} + \underline{v}) + \underline{w}$ $\quad$ + è associativa

$\boxed{2}$ $\underline{u} + \underline{v} = \underline{v} + \underline{u}$ $\quad$ + è commutativa

$\boxed{3}$ $\alpha(\beta \underline{v}) = (\alpha\beta)\underline{v}$

$\boxed{4}$ $1 \cdot \underline{v} = \underline{v}$

di K

$\boxed{5}$ $(\alpha + \beta)\underline{v} = \alpha\underline{v} + \beta\underline{v}$

• si distribuisce rispetto a +

$\boxed{6}$ $\alpha(\underline{u} + \underline{v}) = \alpha\underline{u} + \alpha\underline{v}$

$\boxed{7}$ $\exists\ \underline{0} \in V$ tale che $\underline{v} + \underline{0} = \underline{v}$

$\boxed{8}$ $\forall \underline{v} \in V\ \exists\ \underline{w} \in V$ tale che $\underline{v} + \underline{w} = \underline{0}$

$\underline{w}$ si indica $-\underline{v}$

ESEMPI

$\boxed{1}$ vettori colonna: $\mathbb{R}^n$ è uno spazio vettoriale reale

$\mathbb{C}^n$ // // (complesso)

vettori riga: $\mathbb{R}_n$ è uno spazio vettoriale reale

$\mathbb{C}_n$ // // (complesso)

matrici $m\times n$: $\quad M_{m\times n}(\mathbb{R})$ è uno spazio vettoriale reale

$M_{m\times n}(\mathbb{C})$ // // (complesso)

$\boxed{2}$ spazi di funzioni

Sia $[a,b]$ un intervallo di $\mathbb{R}$ e

$\mathcal{C}([a,b])$ = insieme delle funzioni $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ continue

$\forall f,g\in\mathcal{C}([a,b])$ sia $\quad f+g:[a,b]\to\mathbb{R}$ definita da

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x)\quad\forall x\in[a,b]$$

e $\forall\alpha\in\mathbb{R},\forall f\in\mathcal{C}([a,b])$ sia $\quad \alpha f:[a,b]\to\mathbb{R}$ definita da

$$(\alpha f)(x)=\alpha\cdot f(x)\quad\forall x\in[a,b]$$

$V=\mathcal{C}([a,b])$ rispetto a queste due operazioni $+$ e $\cdot$

è uno spazio vettoriale reale

N.B. Anche $W=\mathcal{F}([a,b])$ = insieme delle funzioni $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ (NON NECESSARIAMENTE CONTINUE)

è uno spazio vettoriale reale rispetto a $+$ e $\cdot$ definite come sopra

$\boxed{3}$ $\mathbb{R}[x]$ = insieme dei polinomi a coefficienti reali e

$\mathbb{C}[x]$ = // // complessi

sono spazi vettoriali, $\mathbb{R}[x]$ reale e $\mathbb{C}[x]$ complesso, rispetto alla $+$ di polinomi ed al prodotto di polinomi per uno scalare (scalare reale, nel caso di $\mathbb{R}[x]$, scalare complesso, nel caso di $\mathbb{C}[x]$).

$\boxed{4}$ $\mathbb{R}_n[x]=\{f(x)\in\mathbb{R}[x]\mid \deg f(x)\le n\}$

è uno spazio vettoriale reale;

$\mathbb{C}_n[x] = \{ f(x) \in \mathbb{C}[x] \mid \deg f(x) \leq n \}$

è uno spazio vettoriale (complesso).

$\boxed{5}$ $\{\underline{0}\}$ contiene un unico vettore, che chiamo $\underline{0}$

definisco $\underline{0} + \underline{0} = \underline{0}$

e $\alpha \cdot \underline{0} = \underline{0}$ $\forall \alpha \in K$ (dove $K \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$)

è uno spazio vettoriale

$\boxed{NB}$ Sia V uno spazio vettoriale su $K \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. Allora

$\boxed{1}$ $0 \cdot \underline{v} = \underline{0}$, $\forall \underline{v} \in V$

$\boxed{2}$ $\alpha \cdot \underline{0} = \underline{0}$, $\forall \alpha \in K$

$\boxed{3}$ VALE LA LEGGE DI CANCELLAZIONE DEL PRODOTTO PER SCALARI:

$\alpha \in K, \underline{v} \in V$ e $\alpha \cdot \underline{v} = \underline{0} \Rightarrow \alpha = 0$ o $\underline{v} = \underline{0}$

$\boxed{4}$ $-(\alpha \underline{v}) = (-\alpha) \cdot \underline{v} = \alpha \cdot (-\underline{v})$, $\forall \underline{v} \in V, \forall \alpha \in K$

SOTTOSPAZI DI SPAZI VETTORIALI

Sia V uno spazio vettoriale su $K \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$

Def Un sottoinsieme U di V si dice un SOTTOSPAZIO VETTORIALE (o semplicemente un SOTTOSPAZIO) di V se sono soddisfatte le seguenti condizioni:

$\boxed{1}$ $\underline{0} \in U$

$\boxed{2}$ $\underline{u}_1 + \underline{u}_2 \in U, \forall \underline{u}_1, \underline{u}_2 \in U$

$\boxed{3}$ $\alpha \underline{u} \in U, \forall \underline{u} \in U, \forall \alpha \in K$

NB 1 Sia V uno spazio vettoriale su $K \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$

Sia U un sottoinsieme di V. Allora

$$\left[\begin{array}{l} U \text{ soddisfa le condizioni:} \\ \boxed{1}\ \underline{0} \in U \\ \boxed{2}\ \underline{u}_1+\underline{u}_2 \in U, \forall \underline{u}_1, \underline{u}_2 \in U \\ \boxed{3}\ \alpha \underline{u} \in U, \forall \underline{u} \in U, \forall \alpha \in K \end{array}\right] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} U \text{ soddisfa le condizioni:} \\ \boxed{1\text{BIS}}\ U \neq \emptyset \\ \boxed{2}\ \underline{u}_1+\underline{u}_2 \in U, \forall \underline{u}_1, \underline{u}_2 \in U \\ \boxed{3}\ \alpha \underline{u} \in U, \forall \underline{u} \in U, \forall \alpha \in K \end{array}\right]$$

si dice che U è "CHIUSO ALLA SOMMA"

si dice che U è "CHIUSO AL PRODOTTO PER SCALARI"

Infatti: $\boxed{1} \Rightarrow \boxed{1\text{BIS}}$ (per cui $\boxed{1}+\boxed{2}+\boxed{3} \Rightarrow \boxed{1\text{BIS}}+\boxed{2}+\boxed{3}$)

e viceversa $\boxed{1\text{BIS}}+\boxed{2}+\boxed{3} \Rightarrow \boxed{1}+\boxed{2}+\boxed{3}$

infatti: $\boxed{1\text{BIS}} \Rightarrow \exists \underline{u} \in U \left.\right\} \underset{\boxed{3}}{\Rightarrow} 0 \cdot \underline{u} \in U$ ($0 \in K$)

e siccome

$0\, \underline{u} = \underline{0}$ ....)

$0 \in K$ $\qquad$ $\underline{0} \in V$

NB 2 Sia V uno spazio vettoriale su $K \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$.

Se U è un sottospazio di V, allora U è uno spazio vettoriale (con le operazioni $+$ e $\cdot$ che si ottengono restringendo quelle di V)

ESEMPI

$\boxed{1}$ $V = \mathbb{C}[x]$ spazio vettoriale su $K = \mathbb{C}$. Sia $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq 1$.

$U = \mathbb{C}_n[x]$ = insieme dei polinomi a coefficienti complessi di grado $\leq n$

Dunque $U = \mathbb{C}_n[x] = \{f(x) \in \mathbb{C}[x] \mid \deg f(x) \leq n\}$

U è un sottoinsieme di V.

Vogliamo vedere che **U È UN SOTTOSPAZIO DI V.**

Infatti:

lo indico con $\underline{0}$

$\boxed{1}$ Lo "zero" di V è il polinomio nullo

(cioè il polinomio $0 = 0 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2 + \dots$)

ed è un polinomio di grado $\leq n$. Quindi $\underline{0} \in U$.

$\boxed{2}$ $\underline{u}_1, \underline{u}_2 \in U \overset{?}{\Rightarrow} \underline{u}_1 + \underline{u}_2 \in U$

$\underline{u}_1 \in U \Rightarrow \underline{u}_1$ è un polinomio a coefficienti complessi di grado $\leq n$

$\underline{u}_2 \in U \Rightarrow \underline{u}_2$ // // //

La somma di due polinomi a coefficienti complessi di grado **AL PIÙ** n (ossia $\leq n$) è un polinomio a coefficienti complessi di grado $\leq n$.

Quindi $\underline{u}_1 + \underline{u}_2 \in U$.

$\boxed{3}$ $\left.\begin{array}{l} \underline{u} \in U \\ \alpha \in K = \mathbb{C} \end{array}\right\} \overset{?}{\Rightarrow} \alpha \underline{u} \in U$

$\underline{u} \in U \Rightarrow \underline{u} \underset{p}{=} f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_m x^m$

lo chiamo per opportuni $a_0, a_1, a_2, \dots, a_m \in \mathbb{C}$

Se $f(x) = 0$ allora $\alpha \cdot f(x) = \alpha \cdot 0 = 0 \in U$

se $f(x) \neq 0$, scelgo le notazioni in modo che

$a_m \neq 0$ (per cui $m = \deg f(x) \leq n$)

$\alpha \cdot \underline{u} = \alpha \cdot f(x) = \alpha \cdot (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_m x^m) =$

$= (\alpha a_0) + (\alpha a_1) x + (\alpha a_2) x^2 + \dots + (\alpha a_m) x^m$

Se $\alpha = 0$ allora $\alpha \cdot f(x) = 0 \cdot f(x) = 0 \in U$

se $\alpha \neq 0$ allora $\alpha \cdot a_m \neq 0$ (essendo anche $a_m \neq 0$)

e $\deg(\alpha f(x)) = \deg f(x) = m \leq n$

Dunque il prodotto di un polinomio di grado al più n per uno scalare è un polinomio di grado al più n

Poiché $U = \mathbb{C}_n[x]$ verifica tutte e tre le condizioni $\boxed{1}$, $\boxed{2}$ e $\boxed{3}$ allora U è un sottospazio di $V = \mathbb{C}[x]$.

$\boxed{2}$ $V = M_n(\mathbb{C})$, $K = \mathbb{C}$

$W = \{A \in M_n(\mathbb{C}) \mid A^T = -A\}$

W è l'insieme delle matrici a coefficienti complessi antisimmetriche di ordine n), W è un sottoinsieme di V. Vogliamo provare che W È UN SOTTOSPAZIO DI V

$\boxed{1}$ $\underline{0} \in V$ è $\mathbb{O}$ matrice $n \times n$

$\underset{n\times n}{\mathbb{O}}^T = \underset{n\times n}{\mathbb{O}} = -\underset{n\times n}{\mathbb{O}} \Rightarrow \underset{n\times n}{\mathbb{O}}$ è una matrice antisimmetrica di ordine n

$\boxed{2}$ $\forall A, B \in W \Rightarrow A+B \in W$

Infatti $A, B \in W \Rightarrow A, B \in M_n(\mathbb{C}) \Rightarrow A+B \in M_n(\mathbb{C})$

inoltre $\left.\begin{array}{l} A \in W \Rightarrow A^T = -A \\ B \in W \Rightarrow B^T = -B \end{array}\right\} \Rightarrow$

la trasposta di una somma è la somma delle trasposte

$\Rightarrow (A+B)^T = A^T + B^T = -A + (-B) = -(A+B)$

$\boxed{3}$ $\forall A \in W, \forall \alpha \in \mathbb{C} \Rightarrow \alpha A \in W$

Infatti: $\left.\begin{array}{l} A \in W \Rightarrow A \in M_n(\mathbb{C}) \\ \alpha \in \mathbb{C} \end{array}\right\} \Rightarrow \alpha A \in M_n(\mathbb{C})$

inoltre $A \in W \Rightarrow \boxed{A^T = -A} \Rightarrow$

$\Rightarrow (\alpha A)^T = \alpha \cdot A^T = \alpha \cdot (-A) = -(\alpha A)$

In conclusione, soddisfacendo tutte tre le condizioni $\boxed{1}$, $\boxed{2}$ e $\boxed{3}$, W è un sottospazio di V.

PER CASA: Si provi che l'insieme delle matrici complesse SIMMETRICHE di ordine n è un sottospazio di $M_n(\mathbb{C})$

PRIMA PARTE DELL'ESERCIZIO 4 (file: I19casaTS.pdf)