I19L13

martedì 2 aprile 2019 10:30

S. PARMEGGIANI 2/4/2019

ALGEBRA E MATEMATICA DISCRETA (parte di Algebra)

Corso di Laurea: Informatica

Abbiamo visto le volte scorse che

$\boxed{1}$ $\mathbb{C}_n[x]$ è un sottospazio di $\mathbb{C}[x]$

$\boxed{2}$ delle matrici antisimmetriche complesse d'ordine n è un sottospazio di $M_n(\mathbb{C})$.

Continuiamo con esempi (ed eventualmente "non esempi" di sottospazi ...

$\boxed{3}$ $V = M_n(\mathbb{C})$, $K = \mathbb{C}$

$W = \{A \in M_n(\mathbb{C}) \mid A^H = A\}$ = insieme delle matrici complesse hermitiane d'ordine n

W è un sottoinsieme di V.

Vogliamo vedere che W <u>NON</u> È UN SOTTOSPAZIO DI V

Perché W sia un sottospazio di V è necessario che W soddisfi tutte e tre le seguenti condizioni:

$\boxed{1}$ $\mathbb{O}_{n\times n} \in W$ ($\mathbb{O}_{n\times n}$ è $\underline{0} \in V$, essendo $V = M_n(\mathbb{C})$)

$\boxed{2}$ $A + B \in W \quad \forall A, B \in W$

$\boxed{3}$ $\alpha A \in W \quad \forall A \in W \quad \forall \alpha \in K = \mathbb{C}$

verifichiamo:

$\boxed{1}$ Per verificare che $\mathbb{O}_{n\times n}$ è un elemento di W devo verificare che

$$\mathbb{O}_{n\times n}^H = \mathbb{O}_{n\times n}$$

$$\mathbb{O}_{n\times n} \underset{\uparrow}{=} \overline{\mathbb{O}_{n\times n}^T} \underset{\uparrow}{=} \overline{\mathbb{O}_{n\times n}} \underset{\uparrow}{=} \mathbb{O}_{n\times n}$$

definizione di H-trasposta

$\mathbb{O}_{n\times n}$ è una matrice uguale alla sua trasposta (è una matrice simmetrica)

$\mathbb{O}_{n\times n}$ è una matrice uguale alla sua coniugata (è una matrice a coefficienti reali)

QUINDI LA CONDIZIONE $\boxed{1}$ E' VERIFICATA

$\boxed{2}$ $A \in W \Rightarrow \begin{cases} A \in M_n(\mathbb{C}) \\ A^H = A \end{cases}$

$B \in W \Rightarrow \begin{cases} B \in M_n(\mathbb{C}) \\ B^H = B \end{cases}$

Da $A \in M_n(\mathbb{C})$ e $B \in M_n(\mathbb{C})$ segue che $\exists (A+B) \in M_n(\mathbb{C})$.

Per verificare che $A+B \in W$ occorre verificare che

$$(A+B)^H = A+B$$

Ma $(A+B)^H \underset{\substack{\uparrow \\ \text{l'H-trasposta di una} \\ \text{somma è la somma} \\ \text{delle H-trasposte}}}{=} A^H + B^H \underset{\substack{\uparrow \\ A^H = A \\ \text{perché } A \in W}}{=} A + B^H \underset{\substack{\uparrow \\ B^H = B \\ \text{perché } B \in W}}{=} A + B$

QUINDI ANCHE LA CONDIZIONE $\boxed{2}$ E' VERIFICATA

$\boxed{3}$ $\left.\begin{matrix} A \in W \\ \alpha \in K = \mathbb{C} \end{matrix}\right\} \overset{?}{\Longrightarrow} (\alpha A) \in W$

$A \in W \Rightarrow \begin{cases} A \in M_n(\mathbb{C}) \\ A^H = A \end{cases}$

Da $A \in M_n(\mathbb{C})$ segue che anche $\alpha A \in M_n(\mathbb{C})$. Per verificare che $\alpha A \in W$ occorre verificare che

$$(\alpha A)^H = \alpha A$$

ATTENZIONE!

Abbiamo visto che $(\alpha A)^H = \bar{\alpha} \cdot A^H$

e poiché $A^H = A$ (perché $A \in W$) allora $\bar{\alpha} \cdot A^H \underset{\substack{\uparrow \\ \boxed{A \in W \Rightarrow A^H = A}}}{=} \bar{\alpha} \cdot A$

E' vero che **PER OGNI** $A \in W$ E **PER OGNI** $\alpha \in \mathbb{C}$

si ha che $\bar{\alpha} \cdot A = \alpha \cdot A$?

NO: Se ad esempio prendo $A = I_n$ è $I_n \in M_n(\mathbb{C})$ e $I_n^H = I_n$

per cui $I_n \in W$ $\qquad I_n = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{bmatrix}}_{n} \Big\} n$

e se prendo $\alpha \in \mathbb{C}$ ma $\alpha \neq \bar{\alpha}$ (quindi un qualsiasi complesso MA NON REALE)

ad esempio $\alpha = i$, la condizione per $A = I_n$ ed $\alpha = i$
non è verificata:

$$i I_n = \begin{bmatrix} i & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & i \end{bmatrix} \quad e \quad (i I_n)^4 = \begin{bmatrix} -i & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & -i \end{bmatrix} = -i I_n \neq i I_n$$

DUNQUE LA CONDIZIONE $\boxed{3}$ NON È VERIFICATA PER W
E W **NON** È UN SOTTOSPAZIO DI V

$\boxed{4}$ $\mathbb{R}^3$, $K = \mathbb{R}$

$$U = \left\{ \begin{bmatrix} a \\ b \\ 2a \end{bmatrix} \middle| a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

U è un sottoinsieme di V. Verifichiamo che è anche un sottospazio di $V = \mathbb{R}^3$:

$\boxed{1}$ $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \in U$ ossia $\exists\, a, b \in \mathbb{R}$ tali che $\begin{bmatrix} a \\ b \\ 2a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

sì: la condizione è soddisfatta: basta prendere $a = b = 0$
$(a = 0 \Rightarrow 2 \cdot a = 2 \cdot 0 = 0)$

$\boxed{2}$ la somma di due elementi di U è un elemento di U:

$\forall a_1, b_1, a_2, b_2 \in \mathbb{R}$ $\exists\, a, b \in \mathbb{R}$ tali che

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \\ 2a_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_2 \\ b_2 \\ 2a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ 2a \end{bmatrix}$$

Poiché $\begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \\ 2a_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_2 \\ b_2 \\ 2a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 + a_2 \\ b_1 + b_2 \\ 2(a_1 + a_2) \end{bmatrix}$ la condizione è soddisfatta:

basta prendere $\begin{cases} a = a_1 + a_2 \\ b = b_1 + b_2 \end{cases}$

$\boxed{3}$ il prodotto di un elemento di U per uno scalare è un el. di U:

$\forall a_1, b_1, \alpha \in \mathbb{R}$ $\exists\, a, b \in \mathbb{R}$ tali che

$\alpha \cdot \begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \\ 2a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ 2a \end{bmatrix}$. Poiché $\alpha \begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \\ 2a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha a_1 \\ \alpha b_1 \\ 2 \cdot (\alpha a_1) \end{bmatrix}$ la condizione è soddisfatta: basta prendere $\begin{cases} a = \alpha a_1 \\ b = \alpha b_1 \end{cases}$

DUNQUE U È UN SOTTOSPAZIO DI $\mathbb{R}^3$

PER CASA: FINIRE TUTTI GLI ESERCIZI DI I19casaTS.pdf

$\boxed{5}$ Sia $A \in M_{m\times n}(\mathbb{C})$. Un sistema lineare

del tipo $\underset{m\times n}{A}\, \underset{n\times 1}{\underline{x}} = \underset{m\times 1}{\underline{0}}$ (ossia tale che il vettore dei termini noti sia il vettore $\underline{0}$)

si chiama un **SISTEMA LINEARE OMOGENEO**

$\boxed{N.B}$ Un sistema lineare omogeneo ha sempre almeno una soluzione: la soluzione nulla $(\underset{n\times 1}{\underline{v}} = \underline{0} \in \mathbb{C}^n)$

Infatti: A $m\times n$, $\underline{v} = \underline{0} \in \mathbb{C}^n$ $\Rightarrow$ $\underset{m\times n}{A}\,\underset{\underline{v}=\underline{0}}{\underline{v}} = A \cdot \underset{n\times 1}{\underline{0}} = \underset{m\times 1}{\underline{0}}$

(ove il sistema abbia soluzione... $[A \mid \underline{0}] \underset{EG}{\leadsto} [U \mid \underline{0}]$)

$\underline{0}$ libera!

Sia A $m\times n$. Per il $\boxed{NB}$ l'insieme delle soluzioni del sistema omogeneo $A\underline{x} = \underline{0}$ è non vuoto.

Indichiamolo con il simbolo $N(A)$.

Dunque $N(A) =$ insieme delle soluzioni di $A\underline{x} = \underline{0}$ $= \{\underline{v} \in \mathbb{C}^n \mid \underset{m\times n}{A}\,\underline{v} = \underset{m\times 1}{\underline{0}}\}$

$N(A)$ è un sottoinsieme di $\mathbb{C}^n$.

Proviamo che $N(A)$ E' UN SOTTOSPAZIO DI $\mathbb{C}^n$.

Chiameremo $N(A)$ LO "SPAZIO NULLO" DELLA MATRICE A

Per vedere che $N(A)$ è un sottospazio di $\mathbb{C}^n$, verifichiamo che soddisfa le 3 condizioni:

$\boxed{1}$ $\underset{\text{di } \mathbb{C}^n}{\underline{0}} \in N(A)$

$\boxed{2}$ $\underline{v}_1, \underline{v}_2 \in N(A) \Rightarrow \underline{v}_1 + \underline{v}_2 \in N(A)$

$\boxed{3}$ $\underline{v} \in N(A),\ \alpha \in \mathbb{C} \Rightarrow \alpha\underline{v} \in N(A)$

VERIFICO $\boxed{1}$: $\underset{m\times n}{A} \cdot \underset{n\times 1}{\underline{0}} = \underset{m\times 1}{\underline{0}}$ ($\underline{0} \in \mathbb{C}^n$ è una soluzione del sistema lineare omogeneo $A\underline{x} = \underline{0}$)

VERIFICO $\boxed{2}$: $\underline{v}_1 \in N(A) \Rightarrow \begin{cases} \underline{v}_1 \in \mathbb{C}^n \\ A\underline{v}_1 = \underline{0} \end{cases}$

$\underline{v}_2 \in N(A) \Rightarrow \begin{cases} \underline{v}_2 \in \mathbb{C}^n \\ A\underline{v}_2 = \underline{0} \end{cases}$

Presi $\underline{v}_1, \underline{v}_2 \in \mathbb{C}^n \Rightarrow \exists (\underline{v}_1+\underline{v}_2) \in \mathbb{C}^n$. Per verificare che $\underline{v}_1+\underline{v}_2 \in N(A)$

devo verificare che $A(\underline{v}_1+\underline{v}_2)=\underline{0}$.

Ma $A(\underline{v}_1+\underline{v}_2) \underset{\uparrow}{=} A\underline{v}_1 + A\underline{v}_2 \underset{\uparrow}{=} \underline{0} + A\underline{v}_2 = A\underline{v}_2 \underset{\uparrow}{=} \underline{0}$

proprietà distributiva

$\boxed{\begin{array}{l}\underline{v}_1 \in N(A) \\ \Rightarrow A\underline{v}_1=\underline{0}\end{array}}$

$\boxed{\begin{array}{l}\underline{v}_2 \in N(A) \\ \Rightarrow A\underline{v}_2=\underline{0}\end{array}}$

(la somma di due soluzioni del sistema lineare omogeneo $A\underline{x}=\underline{0}$ è anch'essa soluzione del sistema lineare omogeneo $A\underline{x}=\underline{0}$)

VERIFICO $\boxed{3}$: $\underline{v} \in N(A) \Rightarrow \begin{cases} \underline{v} \in \mathbb{C}^n \\ A\underline{v}=\underline{0} \end{cases}$

Siccome $\underline{v} \in \mathbb{C}^n$, anche $\alpha\underline{v} \in \mathbb{C}^n$. Per vedere che $\alpha\underline{v} \in N(A)$

devo vedere che

$$A(\alpha\underline{v})=\underline{0}$$

Ma $A(\alpha\underline{v}) = A\cdot\alpha\cdot\underline{v} \underset{\uparrow}{=} \alpha\cdot A\underline{v} = \alpha(A\underline{v}) \underset{\uparrow}{=} \alpha\cdot\underline{0}=\underline{0}$

SOLO PERCHÈ α È UNO SCALARE!

$\boxed{\begin{array}{l}\underline{v} \in N(A) \\ \Rightarrow A\underline{v}=\underline{0}\end{array}}$

(il prodotto per uno scalare di una soluzione del sistema lineare omogeneo $A\underline{x}=\underline{0}$ è anch'essa una soluzione del sistema lineare omogeneo $A\underline{x}=\underline{0}$)

Concludendo, se A è $m\times n$, lo spazio nullo $N(A)$ di A è un sottospazio di $\mathbb{C}^n$

INSIEME DEI MULTIPLI DI UN VETTORE

Sono V uno spazio vettoriale su $K \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ e $\underline{v} \in V$.

$\{\alpha\underline{v} \mid \alpha \in K\}$ = insieme dei multipli di $\underline{v}$

Si indica con $\langle\underline{v}\rangle$ oppure con $\mathrm{Span}(\underline{v})$

$\boxed{1}$ $<\underline{v}>$ è un sottospazio di V Infatti:

$\boxed{1}$ $\underline{0} \in <\underline{v}>$: $\exists \alpha \in K$ tale che $\alpha \underline{v} = \underline{0}$ (prendo $\alpha = 0$)

di V — di K

$\boxed{2}$ $\underline{v}_1, \underline{v}_2 \in <\underline{v}> \Rightarrow \underline{v}_1 + \underline{v}_2 \in <\underline{v}>$

Infatti: $\left.\begin{array}{l} \underline{v}_1 \in <\underline{v}> \Rightarrow \exists \alpha_1 \in K \mid \underline{v}_1 = \alpha_1 \underline{v} \\ \underline{v}_2 \in <\underline{v}> \Rightarrow \exists \alpha_2 \in K \mid \underline{v}_2 = \alpha_2 \underline{v} \end{array}\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow \underline{v}_1 + \underline{v}_2 = \alpha_1 \underline{v} + \alpha_2 \underline{v} = (\alpha_1 + \alpha_2)\underline{v}$ per cui $\exists \alpha \in K$

tale che $\underline{v}_1 + \underline{v}_2 = \alpha \underline{v}$ (prendo $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$) e quindi $\underline{v}_1 + \underline{v}_2 \in <\underline{v}>$.

$\boxed{3}$ $\left.\begin{array}{l} \underline{v}_1 \in <\underline{v}> \\ \alpha \in K \end{array}\right\} \Rightarrow \alpha \underline{v}_1 \in <\underline{v}>$

Infatti: $\underline{v}_1 \in <\underline{v}> \Rightarrow \exists \alpha_1 \in K$ tale che $\underline{v}_1 = \alpha_1 \underline{v}$

$\Rightarrow \alpha \underline{v}_1 = \alpha(\alpha_1 \underline{v}) = (\alpha \alpha_1)\underline{v}$ per cui $\exists \beta \in K$

tale che $\alpha \underline{v}_1 = \beta \underline{v}$ (prendo $\beta = \alpha \alpha_1$) e quindi $\alpha \underline{v}_1 \in <\underline{v}>$

DUNQUE $<\underline{v}>$ E' UN SOTTOSPAZIO DI V

$\boxed{2}$ SE $\underline{v} = \underline{0}$ allora $<\underline{v}> = <\underline{0}> = \{\alpha \cdot \underline{0} \mid \alpha \in K\} = \{\underline{0}\}$

E $<\underline{v}>$ HA UN UNICO ELEMENTO

SE $\underline{v} \neq \underline{0}$ allora $<\underline{v}> = \{\alpha \underline{v} \mid \alpha \in K\}$ HA TANTI ELEMENTI

QUANTI NE HA K (E QUINDI HA INFINITI ELEMENTI, ESSENDO $K \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$)

Per vederlo provo che $\left.\begin{array}{l} \underline{v} \neq \underline{0} \\ \alpha \underline{v} = \beta \underline{v} \\ \alpha, \beta \in K \end{array}\right\} \Leftrightarrow \alpha = \beta$

"$\Leftarrow$" è ovvia

"$\Rightarrow$" $\alpha \underline{v} = \beta \underline{v} \Rightarrow \underbrace{\alpha \underline{v} - \beta \underline{v}}_{= (\alpha - \beta)\underline{v}} = \underline{0} \Rightarrow \alpha - \beta = 0 \Rightarrow \alpha = \beta$

siccome vale la legge di cancellazione e stiamo supponendo $\underline{v} \neq \underline{0}$

$\boxed{\text{NB}}$ Sia V uno spazio vettoriale su $K \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$.

Allora

(1) $U \leq W \leq V \Rightarrow U \leq V$

U è un sottospazio di W — W è un sottospazio di V — U è un sottospazio di V

(2) $\{\underline{0}\}$ è un sottospazio di V

V è un sottospazio di V

Quindi se V è uno spazio vettoriale su $K \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ ed U è un sottospazio di V allora

- o $U = \{\underline{0}\}$ e quindi U ha un unico elemento
- oppure $U \neq \{\underline{0}\}$ per cui $\exists\, \underline{u} \in U$ con $\underline{u} \neq \underline{0}$

Supponiamo che:

U è uno spazio vettoriale su K, essendo U un sottospazio di V,

ed $\langle \underline{u} \rangle$ è un sottospazio di U;

inoltre, essendo $\underline{u} \neq \underline{0}$, $\langle \underline{u} \rangle$ contiene infiniti elementi

Allora anche U contiene infiniti elementi

(dal momento che contiene gli infiniti elementi di $\langle \underline{u} \rangle$.)

Sia V uno spazio vettoriale su $K \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$.

La **COMBINAZIONE LINEARE** degli n vettori

$\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_n \in V$ con COEFFICIENTI (o PESI)

$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in K$ è il vettore

$$\alpha_1 \underline{v}_1 + \alpha_2 \underline{v}_2 + \dots + \alpha_n \underline{v}_n \in V$$

ESEMPIO $V = \mathbb{R}^3$, $K = \mathbb{R}$

$$\underline{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \underline{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \underline{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \underline{v}_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\alpha_1 = \alpha_2 = 12, \ \alpha_3 = 0, \ \alpha_4 = 3$$

$$\alpha_1 \underline{v}_1 + \alpha_2 \underline{v}_2 + \alpha_3 \underline{v}_3 + \alpha_4 \underline{v}_4 =$$

$$= 12 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} + 12 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + 0 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 3 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 27 \\ 24 \\ 12 \end{bmatrix}$$

Dunque il vettore $\underline{v} = \begin{bmatrix} 27 \\ 24 \\ 12 \end{bmatrix}$ è la combinazione lineare dei vettori $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3, \underline{v}_4$ con coefficienti $\alpha_1 = \alpha_2 = 12$, $\alpha_3 = 0$ ed $\alpha_4 = 3$

$\boxed{\text{NB}}$ $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3, \underline{v}_4$ è una "LISTA" di vettori, e ci possono essere ripetizioni. In effetti, qui $\underline{v}_4 = \underline{v}_2$, per cui $\underline{v} = \begin{bmatrix} 27 \\ 24 \\ 12 \end{bmatrix}$ è anche la combinazione lineare dei vettori $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3, \underline{v}_4$ con coefficienti

$$\beta_1 = \alpha_1 = 12$$
$$\beta_2 = \alpha_2 + \alpha_4 = 12 + 3 = 15$$
$$\beta_3 = \alpha_3 = 0$$
$$\beta_4 = 0$$

$$\underline{v} = \alpha_1 \underline{v}_1 + \alpha_2 \underline{v}_2 + \alpha_3 \underline{v}_3 + \alpha_4 \underline{v}_4 \overset{\underline{v}_4 = \underline{v}_2}{=}$$

$$= \underbrace{\alpha_1}_{\beta_1} \underline{v}_1 + \underbrace{(\alpha_2 + \alpha_4)}_{\beta_2} \underline{v}_2 + \underbrace{\alpha_3}_{\beta_3} \underline{v}_3 + \underbrace{0}_{\beta_4} \cdot \underline{v}_4$$

Dati $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_n \in V$, l'insieme di tutte le

sp. vett. su K

loro combinazioni lineari è

$$\{\alpha_1 \underline{v}_1 + \alpha_2 \underline{v}_2 + \dots + \alpha_n \underline{v}_n \mid \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in K\} =$$

$$= \left\{ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i \mid \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in K \right\}$$

SI INDICA: $\langle \underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_n \rangle$

OPPURE: $\mathrm{Span}(\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_n)$

SI CHIAMA: IL SOTTOSPAZIO (DI V)

GENERATO DA $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_n$